

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1977

MÜNCHEN 1978

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Differenzierbare ordnungshomogene Bogen im R^n

Von Otto Haupt in Erlangen

Georg Nöbeling zum 70. Geburtstag mit den freundschaftlichsten Wünschen

Einleitung

1. In einer vorangehenden Note [7] wurde gezeigt: Für Bogen B im R^3 , die bezüglich der Ebenen höchstens endliche Ordnung besitzen, sind (globale) Ordnungshomogenität und (minimale) Ordnung 3 gleichbedeutend, vorausgesetzt, daß B überall eine einzige Tangente besitzt.

2. Nachstehend soll dieser Satz auf den Fall des R^n mit $n \geq 4$ verallgemeinert werden. Bezeichnen wir daher mit $\mathbb{F}^r$ das System der r -Ebenen des R^n , $0 \leq r \leq n-1$, d. h. der r -dimensionalen linearen Unterräume des R^n , so wird vom Bogen $B \subset R^n$, außer höchstens endlicher Ordnung bezüglich $\mathbb{F}^{n-1}$, gefordert: In jedem Punkt $x \in B$ existiert für jedes q mit $1 \leq q \leq n-t$, genau eine q -(dimensionale) Schmiegeebene $S_{q+1}(x, \mathbb{F}^q) \in \mathbb{F}^q$, d. h. streben $q+1$ linear unabhängige Punkte $x_{1,s}, \dots, x_{q+1,s} \in B$, $s = 1, 2, \dots$, irgendwie gegen $x \in B$, so streben die von den $x_{1,s}, \dots, x_{q+1,s}$ aufgespannten q -Ebenen L_s gegen ein $S_{q+1}(x, \mathbb{F}^q) \in \mathbb{F}^q$, welches für alle Grenzübergänge das gleiche ist. Ein dieser Forderung genügendes B , das überdies höchstens endliche Ordnung bezüglich $\mathbb{F}^{n-1}$ besitzt, wird als n - bzw. als $(n-1)$ -differenzierbar (bezüglich $\mathbb{F}^{n-1}$ bzw. $\mathbb{F}^{n-2}$) bezeichnet, je nachdem $t = 1$ bzw. $t = 2$ ist.

3. Es soll also gezeigt werden: Die global ordnungshomogenen (bezüglich $\mathbb{F}^{n-1}$) unter den $(n-1)$ -differenzierbaren $B \subset R^n$ (und nur sie) besitzen die Ordnung n . – Der Beweis dieser Behauptung erfolgt, indem zunächst die Behauptung für n -differenzierbares B verifiziert und mit ihrer Hilfe sie für $(n-1)$ -differenzierbares B als gültig nachgewiesen wird.

Eingereicht zur Sitzung am 9. 12. 1977; vorgetragen in der Sitzung am 13. Januar 1978.

4. Im übrigen beruht der Beweis der in 3. angegebenen Sätze darauf, daß jeweils das Problem auf ein solches für ebene Bogen zurückgeführt werden kann, indem nämlich B als auf einem geeignet gewählten 2-dimensionalen Kegelmantel gelegen angenommen werden darf. Die vorliegende Note setzt die Kenntnis von [7] nicht voraus.

§ 1. Vorbemerkungen

1.1. Es werden bezeichnet: (I) Die t -dimensionalen linearen Unterräume des R^n als t -Ebenen L^t , $0 \leq t \leq n-1$; $L^n := R^n$, speziell die L^{n-1} als Hyperebenen. Das System der L^t sei $\mathbb{F}^t$. – (II) Der durch Punkte $x_1, x_2, \dots$ oder (und) Mengen $M_1, M_2, \dots$, aufgespannte L^t mit $[x_1, x_2, \dots; M_1, M_2, \dots]$. Es sind gleichbedeutend: $(\alpha) [x_1, \dots, x_r] \in \mathbb{F}^{r-1}$. – $(\beta) r-1 = \dim [x_1, \dots, x_r]$. – (γ) Es sind $x_1, \dots, x_r$ linear unabhängig, kurz: 1. unabh. – (III) In der vorliegenden Note ist immer $n \geq 3$.

1.2. Unter einem *Bogen* $B \subset R^n$ wird ein topologisches Bild einer abgeschlossenen Strecke verstanden. Sind a, b die Bilder der Streckenendpunkte, so schreibt man auch $B(a|b)$; außerdem sei $\underline{B} := B \setminus \{a, b\} = : \underline{B}(a|b)$ gesetzt.

Ist B orientiert, so soll a in $B(a|b)$ Anfangspunkt von B sein, d. h. es soll a auf B vor b liegen und b hinter a . In der vorliegenden Note ist eine *feste Orientierung von B* zugrunde gelegt.

1.2.1. Im Folgenden handelt es sich um Bogen $B \subset R^n$. Dabei sei $F \subset R^n$ eine abgeschlossene Vollkugel, in deren Innerem B liegen soll ($B \subset F$);* weitere Verfügungen über F bleiben vorbehalten (vgl. 1.5.1.). Später kommen für uns nur zu $\underline{F}$ nicht fremde $L^t \in \mathbb{F}^t$, $0 \leq t \leq n-1$ in Betracht. Ist $\underline{F} \cap L^t \neq \emptyset$, so entsprechen einander umkehrbar eindeutig und stetig L^t und seine (in F kompakte) Spur $\tilde{L}^t := F \cap L^t$. Mißverständnisse sind daher nicht zu befürchten, wenn gegebenenfalls einfach L^t statt $\tilde{L}^t$ geschrieben und z. B. gesagt wird, es enthalte die Folge (L_r^t) , eine konvergente Teilfolge.

* Diese Annahme bedingt keine Einschränkung der Allgemeinheit, da später nur beliebig kleine B in Betracht kommen.

1.3. Ist $X_r := \{x_1, \dots, x_r\}$, $1 \leq r \leq n$, mit lauter verschiedenen $x_\varrho \in B$ und ist dabei $L^t = [X_r] \in \mathbb{F}^t$, $0 \leq t \leq r-1$, so wird $[X_r]$ (und $\tilde{L}^t$) als eine (r, t) -*Transversale* $T(X_r, \mathbb{F}^t)$ von B bezeichnet.

Für $X_r^m := \{x_{1m}, \dots, x_{rm}\}$, $m = 1, 2, \dots$, sei jedes $T_m := T(X_r^m, \mathbb{F}^{r-1})$ eine $(r, r-1)$ -Transversale von B . Ist $(T_m)_m$ konvergent und existiert $x = \lim_m x_{\varrho m}$, $\varrho = 1, \dots, r$, wird $\lim_m T_m \in \mathbb{F}^{r-1}$ als eine (r, x) -*Schmiegeebene* $S_r(x, \mathbb{F}^{r-1})$ an B in x bezeichnet, speziell im Falle $r = n$ als eine *Schmieghyperebene*.

1.3.1. Man bezeichnet $B \subset R^n$ als $\mathbb{F}^{n-1}$ -*ordinär*, kurz *ordinär*, wenn beliebige n Punkte von B (die verschieden sind) linear unabhängig sind, wenn also durch sie genau ein L^{n-1} bestimmt wird; durch je r verschiedene Punkte von B wird demgemäß ein L^{r-1} bestimmt ($0 \leq r \leq n-1$). Es heißt B *lokal ordinär* in $x \in B$, wenn x auf B eine ordinäre Umgebung besitzt. Die Eigenschaft „ordinär“ ist erblich.

1.3.2. Es sei $\text{POW}(M) :=$ Kardinalzahl von M . Von jetzt ab soll B *stets höchstens endlichen* $\text{POW}(B, \mathbb{F}^{n-1})$ besitzen, d.h. es soll $\text{POW}(B \cap L)$ endlich sein für jedes $L \in \mathbb{F}^{n-1}$; es ist dann erst recht $\text{POW}(B \cap L^t)$ endlich, für jedes $0 \leq t \leq n-1$.

1.4. **Lemma.** Voraussetzung. (1) Es sei $\text{POW}(B, \mathbb{F}^{n-1})$ höchstens endlich. – (2) Es besitze B in $x \in B$ genau eine Schmieghyperebene $S_n(x, \mathbb{F}^{n-1})$.

Behauptung. Es ist B lokal $\mathbb{F}^{n-1}$ -ordinär in x .

Beweis. (I) Andernfalls gibt es eine Folge von n -tupeln $X_n^m := \{x_{1m}, \dots, x_{nm}\}$, $m = 1, 2, \dots$, mit für jedes m verschiedenen, linear abhängigen $x_{1m}, \dots, x_{nm} \in B$ derart, daß $x = \lim_m x_{vm}$, $v = 1, \dots, n$. Es ist also $\dim[X_n^m] \leq n-2$.

(II) O. B. d. A. kann und soll angenommen werden, daß für alle m gilt: $\dim[X_n^m] = n-2$, daß also etwa $x_{1m}, \dots, x_{n-1, m}$ 1. unabh. sind, hingegen die $x_{1m}, \dots, x_{n-1, m}, x_{nm}$ linear abhängig (1. abh.). – In der Tat: Es sei – wir lassen den Index m zunächst weg – o. B. d. A. $\dim[X_n] = \dim[x_1, \dots, x_{q+1}] = q$, wobei $0 \leq q \leq n-3$ (für $q = n-2$ ist nichts zu beweisen). Wegen Vor.(1) gibt es beliebig nahe bei dem von den $x_1, \dots, x_{q+1}$ 1. abh. x_{q+2} ein $x'_{q+2} \in B \setminus [X_n]$, welches also von den $x_1, \dots, x_{q+2}$ 1. unabh. ist. Für $X'_n := \{x_1, \dots, x_{q+1}, x'_{q+2}, \dots, x_n\}$ ist dann

$\dim [X'_n] = q + 1$ und damit $[X'_n]$ ein $T(X'_n, \mathbb{F}^{q+1})$. Ersichtlich kann im Falle $\dim [X'_n] < n - 2$ die Konstruktion mit Anwendung auf X'_n usw. fortgesetzt werden, bis ein X_n mit $\dim [X_n] = n - 2 \geq 1$ erreicht ist. Da überdies $x'_{q+2} \in B$ beliebig nahe bei x_{q+2} wählbar ist, ergibt unsere Konstruktion die Existenz einer Folge $(L^{n-2}_m)_m$ mit $L^{n-2}_m := T(X'_m, \mathbb{F}^{n-2})$, so daß auch $x := \lim_m x_{vm}$, $v = 1, \dots, n$, gilt.

(III) Die in (II) konstruierte Folge $(L^{n-2}_m)_m$, $m = 1, 2, \dots$, enthält eine konvergente Teilfolge $(L^{n-2}_{m_i})$. Es ist dann $L^{n-2}_o := \lim_i L^{n-2}_{m_i}$ definitionsgemäß ein $S_n(x, \mathbb{F}^{n-2})$. Wegen Vor. (1) gibt es $a, b \in B \setminus L^{n-2}_o$ derart, daß a, b fremd sind zu schließlich allen $L^{n-2}_{m_i}$ und daß $L^{n-1}_a := [a, L^{n-2}_o] \neq L^{n-1}_b := [b, L^{n-2}_o]$. Es ist aber L^{n-1}_a sowohl als L^{n-1}_b eine Schmieghyperebene in x an B . Wegen Vor. (2) ergibt sich ein Widerspruch aus $L^{n-1}_a \neq L^{n-1}_b$.

1.5. Wir benutzen später Zentralprojektion $p: B \rightarrow Z$ von B aus einem Punkt $z \in R^n \setminus B$ als Projektionszentrum in eine Hyperebene Z gemäß den folgenden Festsetzungen: Es sei Σ eine, B im Innern enthaltende n -dimensionale Parallelschicht; die Σ begrenzenden Hyperebenen seien H', H'' . Es soll dann Z eine zu H'' parallele Hyperebene sein, welche in dem, von H'' begrenzten, zu Σ fremden (offenen) Halbraum des R^n liegt. Weiter sei $A \in \mathbb{F}^{n-2}$ mit $A \subset H'$ und $z \in A$ sowie U eine Umgebung von z im R^n ; weitere Festsetzungen über z und U bleiben vorbehalten. (Es ist $p := (x \rightarrow [z, x] \cap Z)$, $x \in B$.) Wir sagen, es genüge B der *U-Bedingung*, wenn jedes L^{n-1} mit $\text{POW}(B \cap L^{n-1}) \geq n$ fremd zu U ist.

Zusatz. Ohne daß dies jeweils bemerkt wird, erweitern wir später (vgl. z. B. 3. o. 3.) p auf die Projektion auch gewisser L^{t-1} nach Z aus z , sofern L^{t-1} fremd zu z ist; $1 \leq t \leq n - 2$.

1.5.1. *Es gibt Teilbogen C von B , welche sich aus z topologisch in Z auf einen Bogen $p(C)$ projizieren.*

In der Tat: Ist $\mathfrak{b}$ das Büschel der A enthaltenden Hyperebenen, so gibt es, weil $\text{POW}(B, \mathbb{F}^{n-1})$ höchstens endlich ist (1.3.2.), abgeschlossene Teilbogen C von B und eine Teilmenge $\mathfrak{b}'$ von $\mathfrak{b}$ derart, daß $\text{POW}(C \cap H^*) = 1$ für jedes $H^* \in \mathfrak{b}'$ (vgl. [2], 0.3., auch [1], 7.8.4.). Jede Gerade durch z hat daher mit C höchstens einen Punkt gemeinsam. Außerdem sind p und $p^{[-1]}$ stetig.

Von jetzt ab sei die Kugel F (1.2.1.) so gewählt, daß $U, p(C) \subset F$.

1.5.2. Es sei $x \in C$ (vgl. 1.5.1.) und $s'(x)$ die von z und von $p(x) \in Z$ begrenzte, x enthaltende Strecke. Es ist $\mathfrak{K}' := \bigcup_{x \in C} s'(x)$ abgeschlossene Teilmenge eines (2-dimensionalen) Kegelmannfels mit z als Spitze und mit $p(C)$ als Basis. Es gibt eine zu H' benachbarte und parallele Hyperebene H^+ derart, daß H' und C sowie $p(C)$ auf verschiedenen Seiten von H^+ liegen. Der zwischen H^+ und Z gelegene, abgeschlossene Teil $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{K}'$ ist dann $\mathfrak{K} := \bigcup_{x \in C} s(x)$, wobei $s(x)$ die zwischen H^+ und Z gelegene Teilstrecke von $s'(x)$ ist. Es ist $\mathfrak{K}$ topologisches Bild einer (abgeschlossenen) Kreisscheibe, deren Inneres dem „Innern“ $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{K}$, d.h. $\mathfrak{S} := \bigcup_{x \in C} \mathfrak{s}(x)$, entspricht. Ist $C := C(a|b)$, so ist der Rand $\mathfrak{K} \setminus \mathfrak{S}$ von $\mathfrak{K}$ gleich $s(a) \cup s(b) \cup (\mathfrak{K} \cap H^+) \cup p(C)$. Es zerfällt $\mathfrak{S} \setminus C$ in genau zwei Komponenten, die sogen. *Seiten* $C(+)$ und $C(-)$ von C (auf $\mathfrak{K}$).

1.5.3. Ein Bogen $E \subset \mathfrak{K}$, der von jedem $s(x)$ in höchstens einem Punkt getroffen wird, ist vermöge Projektion aus z topologisches Bild eines Teilbogens C' von C . Es heißen E und C' , auch E und C , *normal* (zueinander). Vermöge der Zentralprojektion aus z von C' auf E überträgt sich die Orientierung von C auf E . Für normale C, E ist insbesondere also erklärt, was unter einer vorderen bzw. hinteren Umgebung von $x \in E$ auf E zu verstehen ist. Im Falle $x \in \bar{E} \cap \bar{C}$ isoliert auf C und E ist, erklärt man, bei normalen C, E , die *vordere Signatur* $vsign(x, E)$ von x bezüglich C so: Es ist $vsign(x, E) = +$ bzw. $= -$ je nachdem eine vordere Umgebung von x auf $E \setminus \{x\}$ in $C(+)$ liegt oder in $C(-)$.

1.6. Das System der Ordnungscharakteristiken K in $\mathfrak{K}$.

1.6.1. Für $M := p(C) = \mathfrak{K} \cap Z$ und $M := \mathfrak{K} \cap H^+$ ist sowohl $\text{POW}(M, \mathbb{F}^{n-2} \cap [M])$ als $\text{POW}(M, \mathbb{F}^{n-1} \setminus \{[M]\})$ höchstens endlich. – Anderenfalls nämlich gibt es $L_0^{n-2} \in \mathbb{F}_0^{n-2} \cap [M]$ mit $\text{POW}(M \cap L_0^{n-2}) = \infty = \text{POW}(C \cap L_0^{n-1})$ für $L_0^{n-1} := [L_0^{n-2}, z]$ im Widerspruch zur Vor. in 1.3.2.

1.6.2. Es sei $L' \in \mathbb{F}^{n-1}$ mit $z \in R^n \setminus L'$ und $\mathfrak{S} \cap L' \neq \emptyset$. Zuzufolge 1.6.1. ist $R := \mathfrak{K} \cap L'$ Vereinigung von endlich vielen, etwa $t \geq 1$, zu C normalen (1.5.3.) und nicht fremden Bogen, für deren jeden seine Endpunkte in $\mathfrak{K} \setminus \mathfrak{S}$ liegen. Erforderlichenfalls

kann und soll, wie sogleich gezeigt wird, R ergänzt werden zu einem Bogen K^+ mit Endpunkten auf $s(a)$ und $s(b)$, so daß K^+ normal zu C ist, und zwar ergänzt durch Hinzunahme von (endlich vielen) passenden Teilbogen von $\mathfrak{K} \cap (Z \cup H^+)$.

Beweis. Für $n = 3$ kann man die Projektion $C = p(B)$ von B in Z (weil $\text{POW}(C; \mathfrak{f}^1 \cap Z)$ höchstens endlich ist) ersetzen durch einen Teilbogen C mit $\text{POW}(C; \mathfrak{f}^1 \cap Z) = 2$. Daher ist $\mathfrak{K}$ Teil eines Konvexkegels, hat also mit jeder zu z fremden Geraden höchstens $2 = n - 1$ Punkte gemeinsam. Für das zugehörige $\mathfrak{K}$ ist dann die Beh. richtig. Es sei schon gezeigt: Die global ordnungshomogenen unter den bezüglich $\mathfrak{f}^{m-1}$ m -differenzierbaren Bogen $C \subset R^m$ besitzen die Ordnung m (≥ 3). Ist dann $B \subset R^{m+1}$ m -differenzierbar bezüglich $\mathfrak{f}^{m-1}$, so kann $C \subset p(B) \subset Z \in \mathfrak{f}^{m-1}$ derart gewählt werden, daß $\text{POW}(C, \mathfrak{f}^{m-1} \cap Z) = m$. Dann hat also $\mathfrak{K}$ mit jeder $(m-1)$ -Ebene im R^{m+1} höchstens m Punkte gemeinsam; und daraus folgt noch, daß C auf $\mathfrak{K}$ $\mathfrak{f}$ -normal und $\mathfrak{f}$ -ordinär ist (vgl. die Definitionen in 1.6.4., 1.6.3., 1.7).

1.6.3. Als *Ordnungscharakteristik*, kurz OCh, K wird jetzt erklärt jedes, wenn nötig zu einem K^+ ergänzte, $\mathfrak{K} \cap L'$ (1.6.2.). Jede OCh ist also ein zu C normaler Bogen, zu dem genau ein $L' \in \mathfrak{f}^{n-1}$ gehört mit $z \neq L'$ und $\mathfrak{S} \cap L' \neq \emptyset$. Das System aller K sei $\mathfrak{f}$. Es ist C $\mathfrak{f}$ -normal, nämlich C normal zu jeder OCh.

Bemerkung. Falls $\text{POW}(C \cap L^{n-1}) \geq 3$, ist die Bedingung $\mathfrak{S} \cap L^{n-1} \neq \emptyset$ von selbst erfüllt; denn es existiert $x \in C \cap L^{n-1}$ und es ist $C \subset \mathfrak{S}$.

1.6.4. Jede OCh $\mathfrak{K}$ ist durch je n ihrer Punkte, etwa $x_1, \dots, x_n \in K \in \mathfrak{f}$, in Zeichen $K(x_1, \dots, x_n)$, eindeutig bestimmt und stetig von ihnen abhängig genau dann, wenn diese $x_1, \dots, x_n$ 1. unabh. in R^n sind.

Ist $K_t \in \mathfrak{f}$, $t = 1, 2, \dots$, und existiert $Q = \lim_t K_t$, so konvergiert für eine Teilfolge (K_{t_r}) , $r = 1, 2, \dots$, die Folge der zu den K_{t_r} (im Sinne von 1.6.3.) gehörigen $L_{t_r}^{n-1}$ gegen ein $L_o^{n-1} \in \mathfrak{f}^{n-1}$. Ist $z \notin L_o^{n-1}$ und $\mathfrak{S} \cap L_o^{n-1} \neq \emptyset$, so ist auch $Q \in \mathfrak{f}$, etwa $K_0 := Q$, mit zugehörigem L_o^{n-1} . Ist $K_t = K(x_1, \dots, x_{nt}) \in \mathfrak{f}$, $t = 1, 2, \dots$, $x_{vt} \in C$, und existiert $x = \lim_t x_{vt}$ für jedes $v = 1, \dots, n$ bzw. $v = 1, \dots, n - r$, existiert ferner $K_0 =$

$\lim_t K_t \in \mathfrak{f}$, so wird K_0 als eine (n, x) - bzw. $(n - r, x)$ -*Schmiege-Och* $S_n(x, \mathfrak{f})$ bzw. $S_{n-r}(x, \mathfrak{f})$ in x an C bezeichnet.

Existiert für jedes $x \in C$ und jedes $q \leq n - t$, genau ein $S_{q+1}(x, \mathfrak{f})$ und ist $\text{POW}(C, \mathfrak{f})$ höchstens endlich, so wird C als n - bzw. als $(n - 1)$ -*differenzierbar* (bezüglich $\mathfrak{f}$) bezeichnet je nachdem $t = 1$ bzw. $t = 2$ ist.

1.7. Existiert zu beliebigen, verschiedenen $x_1, \dots, x_n \in C$, $n \geq 3$, genau eine Och $K(x_1, \dots, x_n)$, so werde C als $\mathfrak{f}$ -*ordinär* bezeichnet; entsprechend ist lokal $\mathfrak{f}$ -ordinär zu verstehen (vgl. 1.3.1.). Genügt C der U -Bedingung (1.5.), so sind gleichwertig: Es ist C (lokal) $\mathfrak{f}$ -ordinär bzw. (lokal) $\mathfrak{f}^{n-1}$ -ordinär.

1.8. Analog zu 1.3.2. bezeichnen wir C als von *höchstens endlichem* $\text{POW}(C; \mathfrak{f})$, wenn $C \cap K$ endlich ist für jedes $K \in \mathfrak{f}$. Existiert $\sup \{\text{POW}(C \cap K): K \in \mathfrak{f}\} = m < +\infty$, so heißt C vom (beschränkten) $\text{POW}(C; \mathfrak{f}) = m$; entsprechend ist $\text{POW}(\underline{C}; \mathfrak{f}^{n-1}) = m$ zu verstehen. Ist $\text{POW}(\underline{C}; \mathfrak{f}^{n-1})$ höchstens endlich, so auch $\text{POW}(\underline{C}, \mathfrak{f})$. Ist die U -Bedingung erfüllt, so sind gleichwertig: $\text{POW}(\underline{C}, \mathfrak{f}) = m$ bzw. höchstens endlich und $\text{POW}(\underline{C}, \mathfrak{f}^{n-1}) = m$ bzw. höchstens endlich ($3 \leq n$).

1.8.1. Es wird B als global $\mathfrak{f}$ - bzw. $\mathfrak{f}^{n-1}$ -ordnungshomogen bezeichnet, kurz o.h., bzgl. $\mathfrak{f}$ bzw. $\mathfrak{f}^{n-1}$, wenn jeder Teilbogen B' von B den gleichen höchstens endlichen bzw. beschränkten POW besitzt. (Es ist B als von höchstens endlichem POW angenommen).

§ 2. Ordnungshomogene, n -differenzierbare Bogen im R^n

2.0.1. Voraussetzungen. Erstens. Es sei schon gezeigt, daß für m -differenzierbares (bezüglich $\mathfrak{f}^{m-1}$) $C \subset R^m$ gilt: Es ist $\text{POW}(C; \mathfrak{f}^{m-1}) = m$ für (bezüglich $\mathfrak{f}^{m-1}$) global ordnungshomogenes C . - Zweitens. Es sei $m = n - 1$ und $B \subset R^n$ sei n -differenzierbar, sowie global ordnungshomogen bezüglich $\mathfrak{f}^{n-1}$. (Die Schmiegeebenen, soweit sie existieren, sind stetig.)

2.0.2. Betr. Projektion $p: C \rightarrow Z$ (aus z). Bei gegebenem A (vgl. 1.5.) werde $C' \subset \beta$ von jedem L^{n-1} mit $A \subset L^{n-1}$ in höchstens einem Punkt getroffen (vgl. 1.5.1.). Es sei $x_0 \in \underline{C}'$. Wegen der Eindeutigkeit und Stetigkeit von $S_n(., \mathfrak{f}^{n-1})$ in C' können z und U so gewählt werden, daß eine Umgebung $\underline{C}'' \subset \underline{C}'$ von x_0 auf $\underline{C}'$ der U -Bedingung genügt; es ist dann sogar jedes

$S_n(x, \mathbb{F}^{n-1})$ für $x \in C \subset \mathcal{C}'' \subset B$, wobei $x_0 \in \mathcal{C}$, fremd zu U und jedes $D := \mathbb{K} \cap L^{n-1}$ mit $\text{POW}(C \cap D) \geq n \geq 3$ liefert eine OCh (vgl. 1.6.3., Bemerkung).

2.0.3. Im Rahmen der in 2.0.1. und 2.0.2. angegebenen Vor. kann (vgl. 1.4. und 1.6.2.) und soll angenommen werden: Es ist C auf $\mathbb{K}$ nicht nur $\mathbb{F}$ -normal, sondern auch $\mathbb{F}$ -ordinär.

2.1. Zunächst soll gezeigt werden: *Es ist C global $\mathbb{F}$ -ordnungshomogen genau dann, wenn $\text{POW}(C, \mathbb{F}) = n$ ist; m. a. W. wenn C $\mathbb{F}$ -ordnungsminimal ist.*

2.2. Den Beweis der Behauptung in 2.1. führen wir indirekt. Dabei genügt die

Annahme. Für das global $\mathbb{F}$ -o. h. C sei $\text{POW}(C, \mathbb{F}) \geq n + 2$. Denn ein $\mathbb{F}$ -normales und $\mathbb{F}$ -ordinäres C mit $\text{POW}(C, \mathbb{F}) = n$ bzw. $= n + 1$ ist trivialerweise ordnungshomogen bzw. enthält Teilbogen T sowohl mit $\text{POW}(T, \mathbb{F}) = n$ als mit $\text{POW}(T, \mathbb{F}) = n + 1$, so daß T nicht ordnungshomogen ist (vgl. [1], 4.1.3.).

Unter der Annahme $\text{POW}(C, \mathbb{F}) \geq n + 2$ existiert ein $K_0 \in \mathbb{F}$ mit $C \cap K_0 = \{x_1, \dots, x_{n+1}, \dots, x_r\}$ mit $r \geq n + 2$. Dabei darf K_0 als $\mathbb{F}$ -Sekante angenommen werden, d. h. derart, daß alle $x_r \in C \cap K_0$ Schnittpunkte sind (vgl. [1], 1.4.2., Satz 1) ferner, daß x_r auf C und auf K_0 vor x_{r+1} liegt (gemäß der $\mathbb{F}$ -Normalität von C). Die x_0 sind also auf C direkt konsekutiv, d. h. zwischen den x_0 liegen keine weiteren Punkte von $C \cap K_0$.

Da $\mathbb{F}$ gemäß 2.0.2. der U -Bedingung genügt, ist das Axiom in [1], 2.4.1., erfüllt. Weil C von höchstens endlichem $\text{POW}(C, \mathbb{F})$ und überdies $\mathbb{F}$ -normal sowie $\mathbb{F}$ -ordinär ist, gilt der verschärfte Kontraktionssatz ([1], 2.4.4.1.) (Übrigens werden die soeben aufgezählten Eigenschaften von $\mathbb{F}$ auch beim Beweise des Satzes betr. $\text{POW}(C, \mathbb{F}) = n + 1$ benutzt.) Mit Hilfe des Kontraktionssatzes können wir nun verfahren wie folgt:

Wir halten x_1 fest, beschränken uns also auf OCh $K \in \mathbb{F}(x_1) := \{K: K \in \mathbb{F} \wedge x_1 \in K\}$. Dann lassen sich die n Schnittpunkte $x_2, \dots, \dots, x_{n+1} \in C \cap K_0$ auf ein $y_1 \in \mathcal{C}(x_2|x_{n+1})$ derart zusammenziehen (kontrahieren), daß eine OCh $K_1 \in \mathbb{F}(x_1)$ resultiert; und zwar ist $K_1 = S_n(y_1, \mathbb{F})$ die SchmiegeOCh in y_1 an C . Es liegt x_1 vor y_1 auf C und ist Schnittpunkt in $C \cap K_1$ mit $\mathcal{C}(x_1|y_1) \cap K_1 = \emptyset$. Ferner ist $\text{vsign}(y_1, K_1) = \text{vsign}(x_2, K_0)$.

Hätten wir x_2 (an Stelle von x_1) festgehalten und $x_3 \dots, x_{n+2}$ kontrahiert, so hätten wir ein $y_2 \in \underline{C}(x_3|x_{n+2})$ erhalten sowie die SchmieGOch $K_2 = S_n(y_2, \mathfrak{f})$ in y_2 an C . Dabei gilt für K_2 wieder: (I) Es existiert $x_2 \in C \cap K_2$ vor y_2 auf C , wobei (II) x_2 Schnittpunkt in $C \cap K_2$ ist und (III) $\underline{C}(x_2|y_2) \cap K_2 = \emptyset$ sowie (IV) $v\text{sign}(x_3, K_0) = v\text{sign}(y_2, K_2) = -v\text{sign}(y_1, K_1)$.

2.3. Die in 2.2. konstruierten SchmieGOch $K_i = S_n(y_i, \mathfrak{f})$, $i = 1, 2$, entsprechen den Durchschnitten von $\mathbb{R}$ mit den Schmieghyperebenen $S_n(y_i, \mathfrak{f}^{n-1})$ an C (im R^n) in y_i , welche nach Vor. (vgl. 2.0.1. Zweitens) durch y_i allein je eindeutig bestimmt sind; dies gilt also auch für $S_n(y_i, \mathfrak{f})$.

Weil C o.h. mit $\text{POW}(C, \mathfrak{f}) \geq n+2$ ist, existieren zu beliebig kleinen Umgebungen V von y_1 OCh K' durch $n+2$ Punkte $x'_r \in V$, die Sekanten von C sind. Für hinreichend kleines V ist dann, wie aus der Definition der SchmieGOch folgt, K' beliebig benachbart zu $K_1 = S_n(y_1, \mathfrak{f})$. Daher gibt es auf C direkt konsequente $x''_1, \dots, x''_{n+2}, \dots, x''_r \in C \cap K'$ von folgender Art: Es liegt x''_r vor x''_{r+1} auf C . Es ist x''_1 beliebig benachbart zu x_1 mit $\underline{C}(x''_1|x''_2) \cap K' = \emptyset$ und $v\text{sign}(x''_2, K') = v\text{sign}(y_1, K_1)$. Bei festem x''_1 kann jetzt auf $K' \in \mathfrak{f}(x''_1)$ bzw. auf die $x''_2, \dots, x''_{n+1}$ das in 2.2. beschriebene Kontraktionsverfahren angewandt werden; es führt zur SchmieGOch $K'' := S_n(y''_1, \mathfrak{f})$ und $y''_1 \in \underline{C}(x''_2|x''_{n+1})$; dabei besitzen diese mit x''_1 die in 2.2. für $S_n(y_1, \mathfrak{f})$, y_1 und x_1 angegebenen Eigenschaften (I)–(III), während an Stelle des dortigen (IV) tritt (IV) $v\text{sign}(y_1, K_1) = v\text{sign}(y''_1, K'')$. Außerdem ist $S_n(y''_1, \mathfrak{f})$ beliebig benachbart zu $S_n(y_1, \mathfrak{f})$. Fordert man, was möglich ist, daß die $x'_1, \dots, x'_r$ sämtlich vor bzw. hinter y_1 auf C liegen, so liegt y''_1 vor bzw. hinter y_1 . Entsprechende Überlegungen gelten für $y_2, S_n(y_2, \mathfrak{f})$.

Bemerkung. Im allgemeinen existiert nicht zu $S_n(x, \mathfrak{f})$ mit $x \in C$ ein vor x liegendes $x_1 \in S_n(x, \mathfrak{f})$ mit $\underline{C}(x_1|x) \cap S_n(x, \mathfrak{f}) = \emptyset$.

2.3.1. Aus 2.3. entnimmt man: *Erstens* existieren in jedem Teilbogen $\underline{C}$ von B Punkte y , zu welchen es $x = x(y) \in \underline{C} \cap S_n(y, \mathfrak{f})$ vor y auf C gibt mit $\underline{C}(x(y)|y) \cap S_n(y, \mathfrak{f}) = \emptyset$. – *Zweitens* existieren zu jedem $y \in \underline{C}$ im Sinne von *Erstens* (also mit $x(y) \in S_n(y, \mathfrak{f})$ vor y usw.) Umgebungen $V = V(y)$ bzw. $W = W(x(y))$ von y bzw. von $x(y)$ mit folgende Eigenschaften: Es gilt

$\bar{V} \cap \bar{W} = \emptyset$; es ist y sowohl vorderer als hinterer Häufungspunkt von Punkten $\bar{y} \in C$ im Sinne von Erstens, wobei also o. B. d. A.: $\bar{y} \in V(y)$, $x(\bar{y}) \in W(x(y))$ und $\underline{C}(x(\bar{y})|\bar{y}) \cap S_n(y, \mathfrak{F}) = \emptyset$; außerdem ist $v(y) := v\text{sign}(y, S_n(y, \mathfrak{F})) = v\text{sign}(\bar{y}, S_n(\bar{y}, \mathfrak{F})) = : v(\bar{y})$. – *Drittens* gibt es y im Sinne von Erstens in jedem Teilbogen $\underline{C}'$ von $\underline{C}$ sowohl mit $v(y) = +$ als mit $v(y) = -$.

2.3.2. Es sei $y \in \underline{C}$ ein Punkt im Sinne von 2.3.1., Erstens. Ferner seien $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ zu y im Sinne von 2.3.1., Zweitens, benachbarte $\bar{y} \in \underline{C}$, also insbesondere $\bar{y}', \bar{y}'' \in V(y)$; $x(\bar{y}')$, $x(\bar{y}'') \in W(x(y))$ sowie $v(y) = v(\bar{y}') = v(\bar{y}'')$; außerdem liege $\bar{y}'$ *vor* y und $\bar{y}''$ *hinter* y .

Ist Y die Menge aller $\bar{y} \in C(\bar{y}'|\bar{y}'')$ mit $v(y) = v(\bar{y})$ ($\bar{y} \in C$ im Sinne von 2.3.1., Erstens, usw.) und $\underline{Y} := Y \cap \underline{C}(\bar{y}'|\bar{y}'')$, so gilt: (I) *Jedes $\bar{y} \in Y$ ist zweiseitiger Häufungspunkt von Y .* – (II) *Es ist $\bar{y}'$ hinterer und $\bar{y}''$ vorderer Häufungspunkt von Y .* – (III) *Es ist Y abgeschlossen.*

Beweis. *Betr. Beh.* (I) Die Beh. ist enthalten in 2.3.1., Zweitens. *Betr. Beh.* (III). Es sei $w \in C$ etwa vorderer Häufungspunkt von Y , es existiere also $y_r \in Y \subset C$, $r = 1, 2, \dots$, mit y_r auf $\underline{C}$ vor w und $w = \lim_r y_r$. Zuzufolge der Definition der y_r gilt $y_r \in \bar{V}(y)$ und existiert $x(y_r) \in \bar{W}(x(y))$. Wegen der Stetigkeit von $S_n(., \mathfrak{F})$ in C existiert ferner $S_n(w, \mathfrak{F}) = \lim_r S_n(y_r, \mathfrak{F})$, sowie $x(w) \in W(x(y))$ mit $x(w)$ *vor* w auf C und $\underline{C}(x(w)|w) \cap S_n(w, \mathfrak{F}) = \emptyset$. Schließlich ist w ein Punkt im Sinne von 2.3.1., Erstens. Gleiches gilt für den Fall eines hinteren und damit eines jeden Häufungspunktes w von Y .

2.3.3. *Es ist $Y = C(\bar{y}'|\bar{y}'')$, also Y Teilbogen von C .*

Beweis. (1) Es ist Y dicht in $C(\bar{y}'|\bar{y}'')$. – In der Tat: Anderenfalls existiert ein Teilbogen $\underline{Q} = \bar{Q} := C(q'|q'')$ von $C(\bar{y}'|\bar{y}'')$ mit $Y \cap \underline{Q} = \emptyset$. Gemäß 2.3.2. ist dabei $\bar{Q} \subset \underline{Y}$. Wir können o. B. d. A. annehmen, daß q' vorderer und q'' hinterer Häufungspunkt von Y ist. Gemäß 2.3.2., Beh. (III), ist dann $q', q'' \in Y$ und mithin z. B. q' zugleich hinterer Häufungspunkt von Y , im Widerspruch zu $Y \cap \underline{Q} = \emptyset$. – (2) Aus (1) folgt wegen der Abgeschlossenheit von Y , daß $Y = C(\bar{y}'|\bar{y}'')$.

2.3.4. Gemäß 2.3.3. gibt es in jedem global ordnungshomogenen (bezüglich $\mathfrak{F}$) und $\mathfrak{F}$ -normalem sowie $\mathfrak{F}$ -ordinären Bogen

$C = \bar{C} \subset \mathfrak{S}$ mit $\text{POW}(C, \mathfrak{f}) \geq n + 2$ abgeschlossene Teilbogen $C_i \subset C$, $i = 1, 2$, und dazu offene $W_i \subset C$ mit $C_i \cap \bar{W}_i = \emptyset$ so, daß für jedes $y \in C_i$ gilt: $\text{vsign}(y, S_n(y, \mathfrak{f})) = +$ bzw. $= -$ je nachdem $i = 1$ bzw. $i = 2$. Und zu jedem $y \in C_i$ existiert ein $x(y) \in W_i \cap S_n(y, \mathfrak{f})$ mit $x(y)$ vor y auf C und mit $\bar{C} \setminus (x(y)|y) \cap S_n(y, \mathfrak{f}) = \emptyset$ (vgl. 2.3.1.).

2.4. Aus 2.3.4. ergibt sich jetzt ein Widerspruch zu $\text{POW}(B, \mathfrak{f}) \geq n + 2$. Hat man nämlich ein C_1 konstruiert, so kann man ein $C_2 \subset C_1$ finden. Daher existiert ein $y \in C_1 \cap C_2$ mit $\text{vsign}(y, S_n(y, \mathfrak{f})) = - \text{vsign}(y, S_n(y, \mathfrak{f}))$, im Widerspruch zur Eindeutigkeit von $S_n(y, \mathfrak{f})$. Ausserdem ist die Beh. in 2.1. richtig für $n = 2$ (vgl. [1], 3.4.; auch [7]).

2.5. Der in 2.2.–2.4. erbrachte Beweis der Behauptung in 2.1. erledigt zugleich die Frage nach der global $\mathfrak{f}^{n-1}$ -o.h. Bogen B im R^n ; denn den $\text{OCh } K \in \mathfrak{f}$ mit $\text{POW}(B \cap K) \geq n$ entsprechen ein – eindeutig die für die Bestimmung von $\text{POW}(B; \mathfrak{f}^{n-1})$ in Betracht kommenden L^{n-1} (nämlich die mit $\text{POW}(B \cap L^{n-1}) \geq n$. Man hat also:

Satz. Die einzigen global ordnungshomogenen unter den Bogen B von höchstens endlichem Punktordnungswert sind die ordnungsminimalen

Entweder falls der Grundbereich G topologisches Kreisscheibenbild ist und in G ein System $\mathfrak{f}$ von OCh mit der Grundzahl $n \geq 3$ (im Sinne von [1], 1.1.1.) gegeben ist, falls ferner $B \subset G$ $\mathfrak{f}$ -normal, $\mathfrak{f}$ -ordinär und B n -differenzierbar ist bezüglich $\mathfrak{f}$.

Oder falls R^n als Grundbereich und das System $\mathfrak{f}^{n-1}$ der Hyperebenen des R^n als System der Ordnungscharakteristiken angenommen wird und $B \subset R^n$ n -differenzierbar ist bezüglich $\mathfrak{f}^{n-1}$.

§ 3. Ordnungshomogene, $(n - 1)$ -differenzierbare Bogen im R^n

3.0. Voraussetzungen.

3.0.1. Es sei $B \subset R^n$ (bezüglich $\mathfrak{f}^{n-2}$) $(n - 1)$ -differenzierbar.

3.0.2. Wegen der (Eindeutigkeit und) Stetigkeit von $P(x) := S_{n-1}(x, \mathfrak{f}^{n-2})$ gibt es zu jedem $x_0 \in B$ ein $z \in A$ und eine Kugelumgebung U von z (im R^n) sowie dazu eine Umgebung C' von x_0 auf B derart, daß $P(x) \cap U = \emptyset = T(X_{n-1}, \mathfrak{f}^{n-2}) \cap U$ für alle

$x \in \underline{C}'$ bzw. alle X_{n-1} aus $\underline{C}'$. Weiter enthält $\underline{C}'$ einen Bogen C , der sich aus z topologisch in Z projiziert (vgl. 1.5.1.).

3.0.2.1. (I) Es ist $p(P(x)) = [P(x), z] \cap Z$ ein $S_{n-1}(p(x), \mathbb{F}^{n-2} \cap Z) \subset Z$ an $p(C)$ in $p(x)$; und zwar besitzt $p(C)$ in jedem $y = p(x) \in p(C) \subset Z$, $x \in C$, genau eine $(n-2, x)$ -Schmiegeebene $S_{n-1}(y, \mathbb{F}^{n-2} \cap Z) (= p(P(x)))$. – (II) Es enthält C Teilbogen C'' mit $\text{POW}(p(C''), \mathbb{F}^{n-2} \cap Z) = n-1$.

Beweis. Betr. (I). Es sei $X'_t := \{x'_{1t}, \dots, x'_{n-1,t}\}$ mit $x'_{rt} \in p(C)$; $r = 1, \dots, n-1$; $t = 1, 2, \dots$. O. B. d. A. können dabei die $x'_{1t}, \dots, x'_{n-1,t}$ als für jedes t 1. unabh. angenommen werden (vgl. 1.4., Bew.); denn $\text{POW}(p(C), \mathbb{F}^{n-2} \cap Z)$ ist höchstens endlich. Es existiere $x' = \lim_t x'_{rt}$ für $r = 1, \dots, n-1$. Es gibt eine Teilfolge $(X''_s)_s := (\{x''_{1s}, \dots, x''_{n-1,s}\})_s$ von $(X'_t)_t$, für welche $L'' := \lim_s [X''_s]$ existiert mit $x' = \lim_s x''_{rs}$.

Setzt man $x_{rs} := p^{[-1]}(x''_{rs})$, $r = 1, \dots, n-1$; $s = 1, 2, \dots$; und $X_s := \{x_{1s}, \dots, x_{n-1,s}\}$, so existiert $\lim_s x_{rs} =: x \in C$ für $r = 1, \dots, n-1$. Außerdem sind die $x_{rt}, \dots, x_{n-1,t}$ 1. unabh. für jedes s , weil dies für die $x''_{1t}, \dots, x''_{n-1,t}$ angenommen war. Daher $[X_s] =: L^{n-2}_s \in \mathbb{F}^{n-2}$. Eine passende Teilfolge $(L^{n-2}_{s_q})_q$ von $(L^{n-2}_s)_s$ konvergiert. Da der Limes M von $(L^{n-2}_{s_q})_q$ ein $S_{n-1}(x, \mathbb{F}^{n-2})$ in x an C mit $M \cap U = \emptyset$ ist, hat man $p(M) = S_{n-1}(x', \mathbb{F}^{n-2} \cap Z)$. Mit M ist aber $p(M)$ eindeutig bestimmt. Und da die X'_t beliebig gewählt waren, also jedes $S_{n-1}(x', \mathbb{F}^{n-2} \cap Z)$ ein $p(M)$ ist, folgt die Eindeutigkeit d. Schmiegehyperebenen an $p(C)$ in Z in jedem seiner Punkte. – Betr. (II). Es enthält $p(C)$ ordnungshomogene Bogen C'' von höchstens endlichem (ev. beschränktem) $\text{POW}(C''; \mathbb{F}^{n-2} \cap Z)$. Gemäß 2.5. ist $\text{POW}(C''; \mathbb{F}^{n-2} \cap Z) = n-1$.

3.0.3. Wie in 1.5.2. erklärt man $\mathfrak{K}$ als einen bestimmten Teil des, C'' enthaltenden 2-dimensionalen Kegelmantels mit z als Spitze. Ferner definiert man (wie in 1.6.3.) das System $\mathfrak{F}$ der OCh auf $\mathfrak{K}$. Es werde $P(x) := S_{n-1}(x, \mathbb{F}^{n-2})$ gesetzt. Bei hinreichend kleinem $C := p^{[-1]}(C'')$ hat man:

Erstens. Für jedes $L^{n-2} \in \mathbb{F}^{n-2}$ gilt $\text{POW}(C \cap L^{n-2}) \leq n-1$.

Zweitens. Es ist $(P(x) \setminus \{x\}) \cap \mathfrak{K} = \emptyset$, $x \in \underline{C}$.

Drittens. Für alle $x, y \in \underline{C}$ mit $x \neq y$ ist $[P(y), x] \cap \{z\} = \emptyset$.

Viertens. Es ist C auf $\mathfrak{K}$ sowohl $\mathfrak{f}$ -normal als $\mathfrak{f}$ -ordinär.

Beweis. Betr. Erstens. Wegen $\text{POW}(p(C), \mathfrak{f}^{n-2} \cap Z) = n-1$ (gemäß 3.0.2.1.) gilt Erstens. – Betr. Zweitens. Aus Erstens folgt (vgl. [3], 2.9.), daß $S_{n-1}(p(y), \mathfrak{f}^{n-2} \cap Z)$ für jedes $y \in \bar{C}$ fremd ist zu $p(C) \setminus \{p(y)\}$; daraus ergibt sich Zweitens. – Betr. Drittens. Andernfalls wäre $p(x) \in S_{n-1}(p(y), \mathfrak{f}^{n-2} \cap Z) \setminus \{p(y)\}$ im Widerspruch zu [3], 2.9. – Betr. Viertens. Gemäß Erstens sind je n Punkte von C linear unabhängig.

3.1. Aus 3.0.1.–3.0.3. folgert man jetzt: Es ist $C (\subset B)$ auf $\mathfrak{K}$ genau dann $\mathfrak{f}$ -ordnungshomogen, wenn $\text{POW}(C; \mathfrak{f}) = n$.

Wie in 2.2. genügt es, den Beweis indirekt für ein hinreichend kleines global ordnungshomogenes C mit $\text{POW}(C, \mathfrak{f}) \geq n+2$ zu führen, wenn für jedes $x \in C$ genau ein $S_{n-1}(x, \mathfrak{f}^{n-2})$ existiert.

3.2. Wie in 2.2. gehen wir aus von einer Sekante $K := K(x_1, \dots, x_{n+1}, \dots, x_r)$ mit $r \geq n+2$ und $x_\varrho \in \bar{C}$, wobei x_ϱ vor $x_{\varrho+1}$ auf C liegt, $r = 1, \dots, r$. Gemäß 3.0.3. sind die Vor. für die Anwendung des Kontraktionssatzes erfüllt. Im Gegensatz zu 2.2. halten wir jetzt nicht nur x_1 , sondern auch x_2 fest und kontrahieren (nur) die $n-1$ (Schnitt-) Punkte $x_3, \dots, x_{n+1}$; dabei betrachten wir die auftretenden $\mathfrak{K}$ als Elemente aus $\mathfrak{f}(x_1) := \{K : K \in \mathfrak{f} \wedge x_1 \in K\}$ und beachten, daß durch $\mathfrak{f}(x_1)$ auf einem, x_1 nicht enthaltenden Teil $\mathfrak{K}_1$ von $\mathfrak{K}$ ein System von OCh mit $\mathfrak{K}_1$ als Grundbereich und mit $n-1$ als Grundzahl erklärt ist in dem Sinne, daß je $n-1$ Punkte von $C'_1 := C \cap \mathfrak{K}_1$ zusammen mit x_1 1. unabh. sind (im R^n). Dabei ist C_1 sowohl $\mathfrak{f}(x_1)$ -normal als $\mathfrak{f}(x_1)$ -ordinär (3.0.3.). Ferner ist (analog zu 2.2.) der Kontraktionssatz bezüglich $\mathfrak{f}(x_1)$ anwendbar derart, daß bei festgehaltenem x_2 die $(n-1)$ Punkte $x_3, \dots, x_{n+1}$ kontrahiert werden. Man erhält (vgl. 2.2) so eine $(n-1, y_1)$ -SchmiegeOCh $\bar{K}(y_1) := S_{n-1}(y_1, \mathfrak{f}(x_1)) \in \mathfrak{f}(x_1)$ mit $y_1 \in \bar{C}(x_3|x_{n+1})$ und mit $\bar{x}_1 := \bar{x}(y_1) \in (C \setminus \{y_1\}) \cap \bar{K}(y_1)$. Es ist $\bar{K}(y_1) = [P(y_1), \bar{x}_1] \cap \mathfrak{K}_1$, wenn $P(y_1) := S_{n-1}(y_1, \mathfrak{f}^{n-2})$, sodaß auch $\bar{K}(y_1)$ eindeutig bestimmt ist (es ist $\bar{x}(y_1) \notin P(y_1)$ und $\bar{x}(y_1)$ vor y_1 auf C). Daraus sowie aus der Stetigkeit von $P(\cdot)$ in einer Umgebung von y_1 folgt wie in 2.3. ff., aber jetzt mit $\mathfrak{f}(x_1)$ (statt mit $\mathfrak{f}$) und mit $(n-1)$ (statt mit n) die Existenz von Teilbogen C_i, V_i, W_i von C'_1 mit Eigenschaften im

Sinne von 2.3.4. bezüglich $S_{n-1}(y'_1, \mathfrak{f}(x_1))$ für alle $y'_i \in C_i$; es ist $-v(y'_1) = v(y'_2)$.

3.3. In $\underline{C}_1$ existiert jetzt eine Sekante $K'_2 := K(x'_2, x'_3, x'_4, \dots, x'_{n+2})$ mit $v \operatorname{sign}(y_1, S_{n-1}(y_1, \mathfrak{f}(x_1))) = -v \operatorname{sign}(x'_4, K'_2)$. Bezüglich $\mathfrak{f}(x'_2)$ kann man ferner bei festem x'_3 wieder die $(n-1)$ Punkte $x'_4, \dots, x'_{n+2}$ kontrahieren und erhält in $\underline{C}_1$ enthaltene C_2 , V_2 , W_2 und $y_2 \in C_2$ mit entsprechenden Eigenschaften wie sie die C_1 , V_1 , W_1 besitzen, aber mit entgegengesetzter $v \operatorname{sign}$. Fortsetzung des Verfahrens mit bei jedem Schritt wechselnder $v \operatorname{sign}$ führt wie in [5], § 5, zur Existenz einer OCh K mit unendlichem $\operatorname{POW}(C \cap K)$, was der Vor. widerspricht, daß $\operatorname{POW}(B, \mathfrak{f})$ höchstens endlich ist.

3.4. Entsprechend zu 2.5. ergibt sich der

Satz. *Die einzigen global ordnungshomogenen unter den Bogen B von höchstens endlichem Punktordnungswert sind die ordnungsminimalen*

Entweder falls der Grundbereich $\mathbb{R}$ topologisches Kreisscheibenbild ist, in $\mathbb{R}$ ein System von OCh mit der Grundzahl $n \geq 3$ gegeben und $B \subset \mathbb{R}$ sowohl $\mathfrak{f}$ -normal als $\mathfrak{f}$ -ordinär und überdies $(n-1)$ -differenzierbar ist bezüglich $\mathfrak{f}$.

Oder falls der R^n das Grundgebiet, das System der Ordnungscharakteristiken das System $\mathfrak{f}^{n-1}$ der Hyperebenen des R^n ist und falls $B \subset R^n$ bezüglich $\mathfrak{f}^{n-2}$ $(n-1)$ -differenzierbar ist.

Literatur

- [1] Haupt-Künnet, Geometrische Ordnungen. Heidelberg-New York 1957.
- [2] Haupt, Über Kontinua von endlicher Relativordnung. Journ. r. u. angew. Math. **167** (1931), 20–39.
- [3] Sauter, J., Zur Theorie d. Bogen n -ter Realitätsordnung im projektiven R_n . Math. Zeitschr. **41** (1936), 507–536.
- [4] Haupt, Zur Differentialgeometrie der Kurven u. Flächen. Journ. r. u. angew. Math. **169** (1933), 589–593.
- [5] Haupt, Bestimmung der zyklisch ordnungshomogenen ebenen Bogen. Journ. r. u. angew. Math. **178** (1937), 14–28.

- [6] Haupt, Über ordnungshomogene Bogen im projektiven n -dim. Raum bzgl. d. Hyperebenen als Ordnungscharakteristiken. Bull. Soc. Royale des Sciences Liège. **31** (1962), 321–333.
- [7] Haupt, Über ordnungshomogene Bogen. Bayer. Akad. d. Wiss., Sitz.-Ber., math.-naturw. Kl. **1976**, 125–141.