BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1977

MÜNCHEN 1978

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C.H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Note zu „Funktionenkegel und Integralungleichungen" von H. Bauer

Von Jörn Lembcke in Erlangen

Herrn Otto Haupt zum 90. Geburtstag gewidmet

Vorgelegt von Herrn Heinz Bauer, Erlangen

In dieser Note sollen für die beiden auf geometrischen Trennungssätzen für konvexe Mengen beruhenden Ergebnisse von Bauer [4, Satz sowie Lemma 3] neue Beweise mit Hilfe von (analytischen) Existenzsätzen für Linearformen gegeben werden. Allerdings ist die zunächst naheliegende Anwendung des Satzes von Hahn-Banach nicht ohne weiteres möglich. Wie Bauer in [4, Schlußbemerkung 5] hervorhebt, sind nämlich die in natürlicher Weise auftretenden Majorantenfunktionen im allgemeinen nur *Hypolinearformen* im Sinne von [1] und [2] (also zwar sublinear, aber mit Werten in $\boldsymbol{R} \cup \{+\infty\}$). In Beantwortung einer von Bauer gestellten Frage (vgl. [4, Schlußbemerkung 5]), soll nun hier gezeigt werden, daß die Verwendung der in [1] und [2] entwickelten Ergebnisse über Linearformen mit nach unten halbstetigen, hypolinearen Majorantenfunktionen (anstelle des Satzes von Hahn-Banach) unmittelbar die gewünschten analytischen Beweise liefert.

Wir knüpfen direkt an [4] an und übernehmen insbesondere alle dort eingeführten Bezeichnungen. Sei also X ein kompakter Raum, $K \subset C(X)$ ein inf-stabiler, abgeschlossener konvexer Kegel und K^* der Kegel der fast K-majorisierten Funktionen aus $C(X)$ (vgl. [4, Abschnitt 2]). Ferner sei für $g \in K^*$ die Abbildung $\hat{g} : X \to \boldsymbol{R} \cup \{+\infty\}$ definiert durch

$$\hat{g}(x) : = \sup_{\varepsilon > 0} \Big(\inf_{\substack{g - \varepsilon \leq u \\ u \in K}} u(x) \Big).$$

Zunächst wollen wir zeigen, daß der Übergang von g zu $\hat{g}$ sehr eng mit einer Familie nach unten halbstetiger Hypolinearformen auf $C(X)$ zusammenhängt (vgl. [4, Schlußbemerkung 5]).

Für $x \in X$ führen wir die auf $C(X)$ definierte numerische Funktion p_x ein durch

$$p_x(g) := \inf_{\substack{u \geq g \\ u \in K}} u(x) \quad \text{(falls } g \text{ keine Majorantenfunktion } u \in K \text{ besitzt, wird } p_x(g) := +\infty \text{ vereinbart).}$$

Ferner definieren wir $p'_x : C(X) \to \overline{\boldsymbol{R}}$ $(x \in X)$ durch

$$p'_x(g) := \liminf_{h \to g} p_x(h),$$

wobei der Limes inferior bezüglich der Supremumsnorm auf $C(X)$ gebildet wird. Damit gilt:

Lemma: *Für $x \in X$ sind p_x und p'_x isotone Hypolinearformen, d. h. numerische Funktionen mit Werten in $]-\infty, \infty]$, die subadditiv und positiv homogen sind (mit der Vereinbarung $0 \cdot \infty = 0$).*

p'_x ist überdies nach unten halbstetig, und es gilt

$$p'_x(g) = \hat{g}(x) \quad \textit{für alle } g \in K^*.$$

Beweis. Offenbar ist $p_x(g) \geq g(x)$ für alle $g \in C(X)$. Daher nimmt p_x den Wert $-\infty$ nicht an. Dann sieht man aber sofort, daß p_x eine isotone Hypolinearform ist.

p_x hat die stetige Linearform $\varepsilon_x : g \mapsto g(x)$ $(g \in C(X))$ als Minorante. Damit ist ε_x auch (reelle) Minorante von p'_x. Somit ist p'_x eine nach unten halbstetige, isotone Hypolinearform auf $C(X)$ (vgl. [1, Lemma 3.1 (1)] und [2, Lemma 1.5(3)]). Schließlich folgt aus der Isotonie von p_x für jedes $g \in K^*$:

$$p'_x(g) = \sup_{\varepsilon > 0} \Big(\inf_{\substack{g - \varepsilon \leq h \leq g + \varepsilon \\ h \in C(X)}} p_x(h) \Big) = \sup_{\varepsilon > 0} p_x(g - \varepsilon) = \hat{g}(x).$$

Der Satz von Bauer [4] zerfällt in zwei alternative Teilaussagen. Wir wollen zunächst für die erste dieser Aussagen zeigen, wie man sie einfach mit Hilfe des vorangehenden Lemmas in Verbindung mit dem Approximationssatz für nach unten halbstetige, isotone Hypolinearformen [2, Theorem 4.1] beweisen kann.

Satz (Bauer [4]). *Sei $f \in K^* \setminus K$ und $x \in X$ mit $f(x) < \hat{f}(x)$. Dann existiert ein positives Radonmaß σ auf X mit $\sigma(\{x\}) = 0$ und*

$$(\mathrm{U}_1) \qquad \begin{array}{ll} \int f \, d\sigma > f(x), & \\ \int u \, d\sigma \leq u(x) & \textit{für alle } u \in K. \end{array}$$

Beweis. Aus dem Lemma folgt $p'_x(f) = \hat{f}(x) > f(x)$. Außerdem ist p'_x isotone, nach unten halbstetige Hypolinearform auf $C(X)$ und daher nach [2, Theorem 4.1] obere Einhüllende stetiger, positiver Linearformen auf $C(X)$. Daher gibt es ein von p'_x dominiertes positives Radonmaß ϱ auf X mit $\varrho(f) > f(x)$.

Sei $\beta := \varrho(\{x\})$ und $\mu := \varrho - \beta\, \varepsilon_x$. Dann ist μ ein positives Radonmaß auf X mit $\mu(\{x\}) = 0$, und es gilt

$$(1) \qquad \mu(f) = \varrho(f) - \beta f(x) > (1 - \beta) f(x)$$

sowie nach dem Lemma und [4, Lemma 2]

$$(2) \qquad \begin{aligned} \mu(u) &= \varrho(u) - \beta\, u(x) \leq p'_x(u) - \beta\, u(x) \\ &= (1 - \beta)\, u(x) \quad \text{für alle } u \in K. \end{aligned}$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß $1 - \beta > 0$ ist; denn dann erfüllt $\sigma := (1 - \beta)^{-1} \mu$ die Ungleichungen (U_1).

Wegen $f \in K^*$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $u \in K$ mit $u \geq f - \varepsilon$. Wäre nun $1 - \beta \leq 0$, so würde daraus nach (2) folgen

$$\begin{aligned} \mu(f) &\leq \mu(u) + \varepsilon\, \mu(1) \leq (1 - \beta)\, u(x) + \varepsilon \mu(1) \\ &\leq (1 - \beta)\,(f(x) - \varepsilon) + \varepsilon \mu(1) \end{aligned}$$

und somit, im Widerspruch zu (1),

$$\mu(f) \leq (1 - \beta) f(x) + \varepsilon\, (\mu(1) - (1 - \beta))$$

für beliebiges $\varepsilon > 0$.

Bemerkung. Im vorangehenden Beweis werden die Abgeschlossenheit und inf-Stabilität von K nicht verwendet. Sie werden jedoch benötigt, um zu zeigen, daß es zu $f \in K^* \backslash K$ ein $x \in X$ gibt mit $f(x) < \hat{f}(x)$ (vgl. [4, Lemma 2]), also zum Beweis der Vollständigkeit der Fallunterscheidung im Satz von Bauer [4].

Die zweite Alternative im Satz von Bauer ist eine unmittelbare Konsequenz des folgenden Lemmas 3 aus [4]. Auch für dieses Lemma wollen wir einen analytischen Beweis geben, und zwar wenden wir einen Satz von Bauer und Namioka an, der sich als sehr einfaches Korollar zum oben verwendeten Approximationssatz für nach unten halbstetige, isotone Hypolinearformen ergibt (vgl. [3, Satz 2], [5, Theorem 4.1] sowie [2, Corollary 4.4]).

Lemma (Bauer [4, Lemma 3]). *Sei K_0 ein abgeschlossener konvexer Kegel in $C(X)$ und $f \in C(X) \setminus K_0$ derart, daß aus $u \in K_0$ stets* $\inf(u, f) \in K_0$ *folgt. Dann gibt es ein positives Radonmaß τ auf X mit*

$$\tau(f) > 0 \text{ und } \tau(u) \leq 0 \text{ für alle } u \in K_0.$$

Beweis. P bezeichne den konvexen Kegel

$$C_+(X) - K_0 = \{g - k : g \in C_+(X),\ k \in K_0\}.$$

Es genügt zu zeigen, daß $f \notin \overline{-P}$ ist. Nach dem Satz von Bauer-Namioka (vgl. z. B. [2, Corollary 4.4]) existiert dann nämlich eine auf P positive (stetige) Linearform τ auf $C(X)$ mit $\tau(f) > 0$. Aus der Positivität von τ auf P folgt aber

$$\tau(g) \geq 0 \quad \text{für} \quad g \in C_+(X) \quad \text{und}$$

$$\tau(u) \leqslant 0 \quad \text{für} \quad u \in K_0.$$

Somit ist τ ein positives Radonmaß mit den gewünschten Eigenschaften.

Wir müssen also nur noch die Annahme, daß $f \in \overline{-P}$ gilt, zum Widerspruch führen: Zu $f \in \overline{-P}$ existieren $g_n \in C_+(X)$, $k_n \in K_0$ $(n \in \boldsymbol{N})$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} (k_n - g_n) = f$. Für alle $n \in \boldsymbol{N}$ ist aber $k_n \geq k_n - g_n$, also

$$f \geq \inf(k_n, f) \geq \inf(k_n - g_n, f).$$

Die rechte Seite der Abschätzung konvergiert dabei gegen die linke Seite. Folglich ist auch $\lim\limits_{n \to \infty} (\inf(k_n, f)) = f$. Somit ergibt sich $f \in \overline{K}_0 = K_0$, da nach Voraussetzung für alle $n \in \boldsymbol{N}$ $\inf(k_n, f) \in K_0$ gilt. Dies widerspricht aber der Voraussetzung $f \notin K_0$.

Literatur

[1] Anger, B., Lembcke, J.: Hahn-Banach type theorems for hypolinear functionals. Math. Ann. 209, 127–151 (1974).

[2] –: Hahn-Banach type theorems for hypolinear functionals on preordered topological vector spaces. Pacific J. Math. 54, 13–33 (1974).

[3] Bauer, H.: Über die Fortsetzung positiver Linearformen. Sitz.-Ber., Math.-Naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. 1957, 157–190 (1958).

[4] –: Funktionenkegel und Integralungleichungen. Sitz.-Ber., Math.-Naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. 1977, 53–61 (1977).

[5] Namioka, J.: Partially ordered linear topological spaces. Amer. Math. Soc. Memoir, No. 24. Providence, 1957.