

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1977

MÜNCHEN 1978

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Ein streng lösbares Teilproblem der Quantenelektrodynamik

Fritz Bopp

Sektion Physik der Ludwigs Maximilians-Universität München

Abstract:

The hamiltonian of quantum electrodynamics reads in the Schrödinger picture $H = H_{\text{kin}} + H_{\text{coul}} + H_{\text{int}} + H_{\text{qu}}$. If we apply a transformation wellknown from polaron theory, and a second one leading to Glauberlike states, we obtain a new decomposition of H : $H = H_0 + H_{\text{coul}} + H_B$. All Glauberlike eigensolutions of H_B are computed rigorously. That is possible if one uses Ω -analysis.

1. Einleitung

Kürzlich ist gezeigt worden,^{1,2} daß Massen beim Zusammenspiel elektromagnetischer und spinoreller Wechselwirkungen zustandekommen. Dabei sind zwei Effekte wesentlich. Erstens nehmen Urfermionen, die als freie Teilchen masselos sind, unter dem Einfluß beider Wechselwirkungen in der Diracsee eine Masse m an, gegen die der Cutoff sehr groß, wenn nicht gar unendlich ist $(C/m) > \exp\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)$. Zweitens kompensieren sich bei Elementarteilchen (als Polarisationszustände in der Diracsee) die zum Cutoff proportionalen Anteile so, daß Teilchenmassen relativ zur Urfermionenmasse endlich sein können

In l. c. 1,2 wurde neben der Spinorwechselwirkung nur die Coulombwechselwirkung berücksichtigt. Der Bosonenanteil des Feldes wurde aus Gründen der Einfachheit und ohne Rücksicht auf den Approximationsgrad unterdrückt. Hier betrachten wir die volle Quantenelektrodynamik ohne spinorelle Wechselwirkung. Damit verzichten wir zunächst wieder auf die Berechnung

von Massen. Es geht um die Untersuchung einer bisher kaum beachteten Eigenschaft der Quantenelektrodynamik, die es erlaubt, eine Schar von Eigenlösungen des bosonischen Anteils des Hamiltonoperators in Strenge zu berechnen. Da man hoffen darf, daß sie eine gesunde Basis für Näherungsrechnungen liefert, dürfte es der Mühe wert sein, diese Lösungen zu bestimmen, ohne den Blick unmittelbar auf Anwendungen zu richten.

Wie in den früheren Arbeiten wird die Ω -Analysis³ extensiv benutzt, nach der auch divergente Integrale integrabel sein können. Ferner gebrauchen wir eine aus der Polaronentheorie⁴ bekannte Transformation, die man bisher in der Quantenelektrodynamik nicht verwendet hat. Mindestens in Verbindung mit der Ω -Analysis macht sie es möglich, Eigenlösungen zu finden, die mit Glauberzuständen⁵ verwandt sind.

Auch hier verwenden wir das Schrödingerbild und beschränken uns darum auf Lösungen mit dem Gesamtimpuls $\mathbf{P} = 0$. Die Vorteile sind in l. c. 1 genannt.

2. Der Hamiltonoperator der Quantenelektrodynamik

Der vollständige Hamiltonoperator der Quantenelektrodynamik lautet im Schrödingerbild (vgl. Anm. nach (2.23)):

$$(2.1) \quad H = \int d\tau \{ \psi^\dagger (-i \varrho_1 \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) \psi - e (\psi^\dagger \psi \Phi - \psi^\dagger \varrho_1 \boldsymbol{\sigma} \psi \cdot \mathbf{A}) \\ + \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + (\text{rot } \mathbf{A})^2) + \mathbf{E} \cdot \nabla \Phi + \mathbf{A} \cdot \nabla \Pi \}.$$

Sämtliche Operatoren hängen nur von $\mathbf{r}$ und nicht von t ab; $d\tau = d^3\mathbf{r}$ ist das Volumenelement im Ortsraum. Gemäß der Vertauschungsrelationen

$$(2.2) \quad \{ \psi_\alpha(\mathbf{r}), \psi_\beta^\dagger(\mathbf{r}') \} = \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ [-E_k(\mathbf{r}), A_e(\mathbf{r}')] = \delta_{ke} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ [\Pi(\mathbf{r}), \Phi(\mathbf{r}')] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

sind die Operatoren paarweise kanonisch konjugiert. Alle anderen Operatorpaare sind vertauschbar oder (im Falle ψ, ψ bzw. $\psi^\dagger, \psi^\dagger$) schiefvertauschbar.

Der zu Φ kanonisch konjugierte Operator Π kommt schon bei Heisenberg, Pauli⁶ vor. Er liefert die Gleichung der Lorentz-

konvention. Bekanntlich ist die Zeitableitung im Schrödingerbild⁷ durch

$$(2.3) \quad \partial_0 X = \partial_t X + i[H, X]$$

definiert ($\hbar = 1$). Damit erhält man speziell für Φ wegen $\partial_t \Phi = 0$ die Gleichung

$$(2.4) \quad \partial_0 \Phi = -\operatorname{div} \mathbf{A}.$$

Während Φ und $\mathbf{A}$ einen Vierervektor bilden, ist Π ein Skalar und $\mathbf{E}$ Teil eines Schieftensors. Da wir im Schrödingerbild arbeiten, brauchen wir nicht auf positiv definite Vertauschungsrelationen zu verzichten, um wie Gupta, Bleuler⁸ zu manifest kovarianten Formulierungen zu kommen. Kunststücke jenseits der Prinzipien der Quantenphysik sind nur erforderlich, wenn man manifest kovariante Gleichungen erzwingen und damit mehr mathematisch-ästhetisch als physikalisch-inhaltlich begründete Forderungen Rechnung tragen will.

Für die Zeitableitungen von Π erhält man mittels (2.3) aus (2.1)

$$(2.5) \quad \partial_0 \Pi = e\psi^\dagger \psi + \operatorname{div} \mathbf{E}.$$

Daraus folgt

$$\partial_0^2 \Pi \equiv \partial_0 (\partial_0 \Pi) = e\partial_0 \psi^\dagger \psi + \operatorname{div} \partial_0 \mathbf{E}.$$

Wegen

$$(2.6) \quad \partial_0 \mathbf{E} = e\psi^\dagger \varrho_1 \boldsymbol{\sigma} \psi + \operatorname{rot} \mathbf{B} + \operatorname{grad} \Pi$$

(mit $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$) und der Kontinuitätsgleichung

$$(2.7) \quad \partial_0 \psi^\dagger \psi + \operatorname{div} \psi^\dagger \varrho_1 \boldsymbol{\sigma} \psi = 0,$$

welche man leicht bestätigt, erhält man für die zweite Zeitableitung von Π schließlich:

$$(2.8) \quad \partial_0^2 \Pi = \Delta \Pi.$$

Daraus folgt weder $\Pi = 0$, was mit den Vertauschungsrelationen nicht vereinbar wäre, noch kann man sich allgemein auf Lösungen $\Pi | \Phi \rangle = 0$ beschränken. Doch geht aus (2.5) und aus $[\Pi, \partial_0 \Pi] = 0$ hervor, daß man simultan die beiden Gleichungen

$$(2.9) \quad \Pi | \Phi \rangle = 0, \quad (\operatorname{div} \mathbf{E} + e\psi^\dagger \psi) | \Phi \rangle = 0$$

fordern darf, wie es Pauli und Heisenberg getan haben. Ebenso erhält man aus (2.6)

$$(2.10) \quad (\partial_0 E - e \psi^\dagger \varrho_1 \boldsymbol{\sigma} \psi - \operatorname{rot} \mathbf{B}) | \Phi \rangle = 0.$$

In beiden Gleichungen spiegeln sich die entsprechenden klassisch physikalischen Maxwell'schen Gleichungen. Sie gelten nur für die speziellen $|\Phi\rangle$. Ohne die simultane Berücksichtigung beider Bedingungen in (2.9) kann man in Widersprüche geraten. Die letzte der Maxwell'schen Gleichungen gilt wie (2.4) für beliebige $|\Phi\rangle$:

$$(2.11) \quad \partial_0 \mathbf{A} = -\mathbf{E} + \operatorname{grad} \Phi.$$

Mit Rücksicht auf die Nebenbedingungen vereinfacht sich der Schrödingeroperator wie folgt:

$$(2.12) \quad H = \int d\tau \{ \psi^\dagger (-i \varrho_1 \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) \psi + e \psi^\dagger \varrho_1 \boldsymbol{\sigma} \psi \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + (\operatorname{rot} \mathbf{A})^2) \}.$$

Wegen der Gleichung für $\operatorname{div} \mathbf{E}$ in (2.9) sind aber die Nebenbedingungen noch nicht vollständig eliminiert. H in (2.12) ist ohne Nebenbedingungen noch nicht mit (2.1) äquivalent. Sie kann darum ohne (2.9) nicht Grundlage der Quantenelektrodynamik sein. Die Elimination gelingt auf einfache Weise erst nach Einführung der Fourierkomponenten.

Die Fourieramplituden von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{E}$ definieren wir durch

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{8\pi^3}} \int \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}) e^{+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mu, \quad d\mu = d^3\mathbf{k}, \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{8\pi^3}} \int \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mu. \end{aligned}$$

Sie genügen denselben Vertauschungsrelationen (mit $\mathbf{k}$ statt $\mathbf{r}$). Wegen der Hermitezität von $E(\mathbf{r})$ und $A(\mathbf{r})$ gilt:

$$(2.14) \quad \tilde{\mathbf{E}}^\dagger(\mathbf{k}) = \tilde{\mathbf{E}}(-\mathbf{k}), \quad \tilde{\mathbf{A}}^\dagger(\mathbf{k}) = \tilde{\mathbf{A}}(-\mathbf{k}).$$

Das sind Bedingungen, von denen wir uns am Ende ebenfalls befreien müssen. Zunächst folgt aus (2.12) (mit $e = \sqrt{4\pi\alpha}$ für $\hbar = 1, c = 1$):

$$\begin{aligned}
 H = \int d\tau \psi^\dagger(\mathbf{r}) & \left(-i \varrho_1 \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla + \frac{1}{2\pi} \sqrt{2\alpha} \int \varrho_1 \boldsymbol{\sigma} \cdot \right. \\
 (2.15) \quad \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mu & \left. \right) \psi(\mathbf{r}) \\
 + \frac{1}{2} \int d\mu & \left(\bar{\mathbf{E}}^\dagger \cdot \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{k}) + (\mathbf{k} \times \bar{\mathbf{A}}^\dagger(\mathbf{k})) \cdot (\mathbf{k} \times \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{k})) \right).
 \end{aligned}$$

Zerlegen wir die Felder in ihren transversalen und longitudinalen Zweig gemäß

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_t + X_e \mathbf{e} = -\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{X}) + \mathbf{e} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{X}), \quad \mathbf{e} = \mathbf{k}/k,$$

so lautet der Integrand in der zweiten Zeile

$$\bar{\mathbf{E}}_t^\dagger \bar{\mathbf{E}}_t + (\bar{\mathbf{E}}_t^\dagger \cdot \bar{\mathbf{E}}_t + k^2 \bar{\mathbf{A}}_t^\dagger \cdot \bar{\mathbf{A}}_t).$$

Darin kann man $\bar{\mathbf{E}}_t$ eliminieren. Gl. (2.9) lautet in Fourierkomponenten

$$-\frac{i}{\sqrt{8\pi^3}} \int \mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{E}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mu \mid \Phi \rangle = -e \psi^\dagger \psi \mid \Phi \rangle.$$

Daraus folgt:

$$\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{E}} = k \bar{\mathbf{E}}_e = -\frac{i}{2\pi} \sqrt{2\alpha} \int \psi^\dagger \psi e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mu =: -\frac{i}{2\pi} \sqrt{2\alpha} Q(\mathbf{k}).$$

Somit ist vor $\mid \Phi \rangle$:

$$\frac{1}{2} \int d\mu \bar{\mathbf{E}}_t^\dagger \bar{\mathbf{E}}_t = \frac{\alpha}{4\pi^2} \int \frac{d\mu}{k^2} Q^\dagger(\mathbf{k}) Q(\mathbf{k}).$$

Das ist gerade die Coulombenergie:

$$\begin{aligned}
 H_{\text{coul}} &= \frac{\alpha}{4\pi^2} \int \frac{d\mu}{k^2} Q^\dagger(\mathbf{k}) Q(\mathbf{k}) \\
 (2.16) \quad &= \frac{\alpha}{2} \int \frac{d\tau_1 d\tau_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \psi^\dagger(\mathbf{r}_1) \psi(\mathbf{r}_1) \psi^\dagger(\mathbf{r}_2) \psi(\mathbf{r}_2).
 \end{aligned}$$

Sie ergibt sich, wenn man

$$(2.17) \quad Q(\mathbf{k}) = \int \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\tau$$

einsetzt. Sei ferner

$$(2.18) \quad H_0 = \int d\tau \psi^\dagger (-i \varrho_1 \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) \psi$$

die kinetische Energie, so lautet (2.15)

$$\begin{aligned}
 (2.19) \quad H &= H_0 + H_{\text{coul}} + \frac{\sqrt{2\alpha}}{2\pi} \int \psi^\dagger(\mathbf{r}) \varrho_1 \boldsymbol{\sigma} \psi \cdot \bar{\mathbf{A}}_t(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\tau d\mu \\
 &+ \frac{1}{2} \int d\mu (\bar{\mathbf{E}}_t^\dagger \cdot \bar{\mathbf{E}}_t + k^2 \bar{\mathbf{A}}_t^\dagger \bar{\mathbf{A}}_t).
 \end{aligned}$$

Zunächst steht der Faktor $\mathbf{A}(\mathbf{k})$ bei der Stromdichte. Doch ist $\tilde{\mathbf{A}}_l(\mathbf{k})$ mit (2.19) vertauschbar, so daß wir $\tilde{\mathbf{A}}_l(\mathbf{k}) | \Phi \rangle = 0$ bzw. $\text{div } \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) | \Phi \rangle = 0$ annehmen dürfen.

Mit den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $Q^\dagger(\mathbf{k}), Q(\mathbf{k})$ in

$$(2.20) \quad \tilde{\mathbf{A}} = \frac{1}{\sqrt{2k}} (\mathbf{a}(\mathbf{k}) + \mathbf{a}^\dagger(\mathbf{k})), \quad \tilde{\mathbf{E}} = -i \sqrt{\frac{k}{2}} (\mathbf{a}^\dagger(\mathbf{k}) - \mathbf{a}(-\mathbf{k}))$$

befreien wir uns von den Bedingungen (2.14). Substitution in (2.19) ergibt

$$(2.21) \quad H = H_0 + H_{\text{coul}} + H_Q + H_i$$

Darin ist H_Q die Quantenenergie (ohne Nullpunktsenergie, die man subtrahieren kann):

$$(2.22) \quad H_Q = \int d\mu k \mathbf{a}_l^\dagger \cdot \mathbf{a}_l$$

und H_i die Wechselwirkungsenergie

$$(2.23) \quad H_i = \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int \frac{d\mu}{\sqrt{k}} \psi^\dagger \varrho_1 \boldsymbol{\sigma} \psi \cdot (\mathbf{a}_l e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \mathbf{a}_l^\dagger e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}).$$

Soweit sind alle Umformungen mehr oder weniger geläufig. Wir hätten uns mit Hinweisen begnügen können, wären wir nicht von dem vollständigen Operator (2.1) ausgegangen, bei dem die Elimination von Π zweifelhaft ist, wenn man H in (2.15) ohne die Nebenbedingung (2.9) gelten läßt. Man gewinnt den Operator in (2.1), wenn man von H_0 ausgeht und die Operatoren Φ und $\mathbf{A}$ als Eichfelder einführt. Dabei ist es unausweichlich nötig, neben $\mathbf{E}$ den Operator Π einzuführen. Darauf gehen wir hier nicht ein, erwähnen es aber, um zu begründen, warum wir den Operator in (2.1) als den eigentlich fundamentalen betrachten.

Zum Schluß wenden wir eine aus der Polaronentheorie (l. c. 4) bekannte Transformation an:

$$(2.24) \quad \begin{aligned} H &\rightarrow H' = e^{i\zeta} H e^{-i\zeta}, \\ \zeta &= \int d\mu \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \mathbf{a}_l^\dagger \cdot \mathbf{a}_l. \end{aligned}$$

Sie führt $\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger$ und ∇ in

$$(2.25) \quad \mathbf{a}'_l = \mathbf{a}_l e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{a}'_l{}^\dagger = \mathbf{a}_l^\dagger e^{+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad \nabla' = \nabla - i \int d\mu k \mathbf{a}_l^\dagger \cdot \mathbf{a}_l$$

über. Dabei bleiben H_{coul} und H_Q invariant. H_0 und H_i gehen in

$$(2.26) \quad \begin{aligned} H'_0 &= H_0 - \mathbf{J} \cdot \int d\mu \mathbf{k} \mathbf{a}_l^\dagger \cdot \mathbf{a}_l, \quad \mathbf{J} = \int d\tau \psi^\dagger \varrho^2 \boldsymbol{\sigma} \psi, \\ H'_i &= \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \mathbf{J} \cdot \int \frac{d\mu}{\sqrt{k}} (\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_i^\dagger) \end{aligned}$$

über. Es empfiehlt sich, die Glieder neu zusammenzufassen:

$$(2.27) \quad H = H_0 + H_{\text{coul}} + H_Q + H'$$

mit

$$(2.28) \quad H' = \mathbf{J} \cdot \int d\mu \{ \mathbf{k} \mathbf{a}_i^\dagger \cdot \mathbf{a}_i \} + \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{k}} \mathbf{J} \cdot (\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_i^\dagger).$$

Es tritt eine Art Separation der Fermionen- und Bosonenkoordinaten ein. Das legt es nahe, den Operator H' losgelöst von den übrigen zu untersuchen. Es macht keine Mühe, H_Q einzubeziehen, also alle Operatoren, die $\mathbf{a}_i^\dagger$ und $\mathbf{a}_i$ enthalten. Wir betrachten im weiteren den Bosonenoperator:

$$(2.29) \quad H_B = H_Q + H'.$$

3. Eigenlösungen des Bosonenoperators

Nach (2.22) und (2.28) mit $\mathbf{J}$ aus (2.26) lautet der Bosonenoperator explizit:

$$(3.1) \quad H_B = \int d\mu \left\{ (k + \mathbf{k} \cdot \mathbf{J}) \mathbf{a}_l^\dagger \cdot \mathbf{a}_l + \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{k}} \mathbf{J} \cdot (\mathbf{a}_l + \mathbf{a}_l^\dagger) \right\}.$$

Neben den Stromintegralen betrachten wir analog gebaute Spinintegrale. Sie lauten in Impulsraumdarstellung:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{J} &= \int d\mu \psi^\dagger \varrho_1 \boldsymbol{\sigma} \psi, \quad \mathbf{K} = \int d\mu \psi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \psi, \\ \psi &= \psi(\mathbf{p}), \quad \psi^\dagger = \psi^\dagger(\mathbf{p}), \quad d\mu = d^3\mathbf{p}, \end{aligned}$$

und genügen den Vertauschungsrelationen ($i, k, l = xyzl(1,2,3)$):

$$(3.3) \quad \begin{aligned} [J_i, J_k] &= 2iK_l, \quad [J_i, K_k] = 2iJ_l, \\ [K_i, J_l] &= 2iJ_l, \quad [K_i, K_k] = -2iK_l. \end{aligned}$$

Die halbierten Operatoren befriedigen also der Liealgebra der $\mathfrak{o}(4)$, $\mathbf{K}/2$ der $\mathfrak{o}(3)$.

Die Struktur des Operators H_B legt es nahe, nach Glauberzuständen zu fragen. Doch stehen dem die Operatoren $\mathbf{J}$ zunächst

im Wege. Immerhin ist es möglich, sich an der Theorie der Glauberzustände anzulehnen. Wir machen daher den Ansatz

$$(3.4) \quad \begin{aligned} H_B &\rightarrow H'_B = e^{i\zeta} H_B e^{-i\zeta}, \\ i\zeta &= \int d\mu (a_\varrho^\dagger(\mathbf{k}) u_\varrho(\mathbf{k}) - u_\varrho^\dagger(\mathbf{k}) a_\varrho(\mathbf{k})). \end{aligned}$$

Darin sind die $u_\varrho(\mathbf{k})$, $u_\varrho^\dagger(\mathbf{k})$ Operatoren und keine c -Zahlen. Doch sollen sie mit $a_\varrho^\dagger(\mathbf{k})$, $a_\varrho(\mathbf{k})$ vertauschbar sein. Der Index $\varrho \in (1, 2)$ bezieht sich auf die transversalen Komponenten von $\mathbf{a}^\dagger(\mathbf{k})$, $\mathbf{a}(\mathbf{k})$; $a_3^\dagger, a_3$ seien durch $\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}^\dagger/k$ bzw. $\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}/k$ definiert.

Bei dieser Transformation ändern sich die Operatoren $\mathbf{J}$ und $\mathbf{K}$, genügen aber auch nach der Transformation den Vertauschungsrelationen (3.3). Wir schreiben dafür

$$(3.5) \quad \mathbf{J}' = e^{i\zeta} \mathbf{J} e^{-i\zeta}, \quad \mathbf{K}' = e^{i\zeta} \mathbf{K} e^{i\zeta}.$$

Die Transformationen von Q_ϱ und $Q_\varrho^\dagger$ kann man explizit angeben

$$(3.6) \quad a'_\varrho = a_\varrho - u_\varrho, \quad a'^\dagger_\varrho = a^\dagger_\varrho - u^\dagger_\varrho.$$

Substitution in (3.1) ergibt sich (mit $\gamma = \frac{1}{2\pi k} \sqrt{\frac{a}{k}}$):

$$\begin{aligned} H_B &= \int d\mu \{ (k + \mathbf{k} \cdot \mathbf{J}') (a^\dagger_\varrho - u^\dagger_\varrho) (a_\varrho - u_\varrho) \\ &\quad + \gamma k J'_\varrho (a_\varrho - u_\varrho + a^\dagger_\varrho - u^\dagger_\varrho) \} \end{aligned}$$

also mit $\mathbf{k} \cdot \mathbf{J}' = k J'_3$:

$$\begin{aligned} H'_B &= \int d\mu k \{ (1 + J'_3) a^\dagger_\varrho a_\varrho + (1 + J'_3) u^\dagger_\varrho u_\varrho - \gamma J'_\varrho (u_\varrho + u^\dagger_\varrho) \\ &\quad - ((1 + J'_3) u_\varrho - \gamma J'_\varrho) a^\dagger_\varrho - ((1 + J'_3) u^\dagger_\varrho - \gamma J'_\varrho) a_\varrho \}. \end{aligned}$$

Man beachte, daß a_ϱ und $a^\dagger_\varrho$ nicht mehr mit J'_ϱ, J'_3 vertauschbar sind. Das dürfte im allgemeinen zu Schwierigkeiten führen. Diese entfallen aber bei Beschränkung auf Glauberzustände.

Glauberzustände sind dadurch gekennzeichnet, daß es nach der Transformation keine Quanten gibt. Man kann $a_\varrho | \Phi \rangle = 0$ annehmen. Doch muß im letzten Operator der Faktor von $a^\dagger_\varrho$ verschwinden, also

$$(3.7) \quad u_\varrho = \gamma (1 + J'_\varrho)^{-1} J'_\varrho, \quad u^\dagger_\varrho = \gamma J'_\varrho (1 + J'_3)^{-1}$$

sein. Danach erhält man für alle Lösungen vom Glaubertyp

$$H'_B = -\frac{a}{4\pi^2} \int \frac{d\mu}{k^2} J'_\varrho \frac{1}{1 + J'_3} J'_\varrho = -\frac{a}{4\pi^2} \mathbf{J}' \cdot \int \frac{d\mu}{k^2} \frac{\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 | \mathbf{e}_2}{1 + \mathbf{e} \cdot \mathbf{J}'} \cdot \mathbf{J}'.$$

Darin sind $\mathbf{e} = \mathbf{k}/k$ und $(\mathbf{e}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ ein rechtshändiges Dreibein. Für die dyadischen Quadrate der Basisvektoren gilt die Vollständigkeitsrelation

$$\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 | \mathbf{e}_2 + \mathbf{e} | \mathbf{e} = 1.$$

Die Integration über k kann man ausführen. Somit ist (mit C als evtl. unendlichem Cutoff):

$$(3.8) \quad H'_B = -\frac{a}{\pi} C \mathbf{J}' \cdot \mathcal{H} \cdot \mathbf{J}'.$$

Für den Tensor $\mathcal{H}$ erhält man den Winkelmittelwert

$$(3.9) \quad \mathcal{H} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1 - \mathbf{e} | \mathbf{e}}{1 + \mathbf{e} \cdot \mathbf{J}'} d\Omega.$$

Der Nenner lautet explizit

$$(3.10) \quad \begin{aligned} 1 + \mathbf{e} \cdot \mathbf{J}' &= 1 + \varepsilon_1 J'_x + \varepsilon_2 J'_y + \varepsilon_3 J'_z, \\ \mathbf{e} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) &= (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta). \end{aligned}$$

H'_B in (3.8/9) ist skalar. Da im Integranden nur $\mathbf{J}'$ vorkommt, ist das Integral eine skalare Funktion der Vektoren $\mathbf{J}'$ und $\mathbf{K}'$, von denen der letzte nach (3.3) durch Kommutationen entsteht.* Funktionen von $\mathbf{J}'^2$, $\mathbf{J}' \cdot \mathbf{K}'$ und $\mathbf{K}'^2$ sind zugleich Funktionen der Quantenzahlen der $\mathfrak{o}(4)$

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \frac{1}{16} (\mathbf{K}' + \mathbf{J}')^2 &= l_1 (l_1 + 1), \quad \frac{1}{16} (\mathbf{K}' - \mathbf{J}')^2 = l_2 (l_2 + 1), \\ \frac{1}{4} \mathbf{K}'^2 &= l(l + 1). \end{aligned}$$

Darin sind l_1, l_2 zugleich ganz- oder halbganzzahlig; l ist stets ganzzahlig. Es gelten die Ungleichungen

$$(3.12) \quad 0 \leq l_1 \leq Z, \quad 0 \leq l_2 \leq Z, \quad |l_1 - l_2| \leq l \leq l_1 + l_2 \leq Z$$

Die obere Grenze ergibt sich daraus, daß stets $2Z$ Urfermionen im Spiel sind.

Bei Beschränkung auf bestimmte Quantenzahlen l_1, l_2 , sind die Operatoren endliche Matrizen mit $2l + 1$ Zeilen und Spalten. Speziell (3.8) ist ein Vielfaches der Einheitsmatrix. Jedes Element der Einheitsmatrix ist gleich

* Herrn Dr. U. Mutze habe ich hier für wertvolle Diskussionen zu danken.

$$-\frac{\alpha}{\pi} \frac{C}{2l+1} \text{Spur } \mathbf{J}' \mathfrak{H} \mathbf{J}', \text{ also}$$

$$H'_B = -\frac{\alpha C}{4\pi^2 (2l+1)} \int \text{Spur} \left(\frac{\mathbf{J}'^2 (\mathbf{e} \cdot \mathbf{J}')^2}{1 + \mathbf{e} \cdot \mathbf{J}'} \right) d\Omega.$$

Daraus folgt

$$(3.13) \quad H'_B = -\frac{\alpha}{\pi} C W, \quad W = 1 + \frac{\mathbf{J}'^2 - 1}{4\pi (2l+1)} \int \text{Spur} \frac{1}{1 + \mathbf{e} \cdot \mathbf{J}'} d\Omega.$$

Nach (3.11) ist

$$(3.14) \quad \mathbf{J}'^2 = 8 l_1(l_1 + 1) + 8 l_2(l_2 + 1) - 4 l(l + 1).$$

Bringen wir $\mathbf{e} \cdot \mathbf{J}'$ mittels

$$U^\dagger \mathbf{e} \cdot \mathbf{J}' U = \mathbf{J}'_z$$

auf Hauptachsen, so folgt nach zyklischer Vertauschung unter der Spur

$$W = 1 + \frac{\mathbf{J}'^2 - 1}{4\pi (2l+1)} \int \text{Spur} \left(\frac{1}{1 + \mathbf{J}'_z} \right) d\Omega$$

$$= 1 + \frac{\mathbf{J}'^2 - 1}{2l+1} \text{Spur} \left(\frac{1}{1 + \mathbf{J}'_z} \right).$$

Seien $|m_1, m_2\rangle$ die Eigenlösungen von $\frac{1}{16}(\mathbf{K}' + \mathbf{J}')^2$ und $\frac{1}{16}(\mathbf{K}' - \mathbf{J}')^2$ mit den Quantenzahlen l_1, l_2 und m_1, m_2 , so sind die Eigenfunktionen von $\frac{1}{4}\mathbf{K}'^2$ mit den Quantenzahlen l und $m = m_1 + m_2$ Linearkombinationen von $|m_1, m_2\rangle$:

$$|\Phi\rangle = \sum_{m_1, m_2} C(m_1, m_2) |m_1, m_2\rangle,$$

worin $C(m_1, m_2)$ die zu l_1, l_2 und l gehörigen Clebsch-Gordan-Koeffizienten sind. Daraus folgt unmittelbar

$$(3.15) \quad W = 1 + \frac{\mathbf{J}'^2 - 1}{2l+1} \sum_{m_1, m_2} \frac{C(m_1, m_2)^2}{1 + 2(m_1 - m_2)}.$$

Substitution in (3.13) liefert das Spektrum. Die Eigenwerte $-W$ sind Energien in Einheiten $\frac{\alpha}{\pi} C$. Das Ergebnis bestätigt, daß halbganzzahlige Werte von $m_1 - m_2$ ausgeschlossen sind. Denn dafür wäre einer der Nenner in der Summe gleich 0.

Ein besonders einfacher Fall ist $l_1 = l, l_2 = 0$. Dafür ist im Falle ganzzahliger l

$$\frac{1}{2l+1} \sum = \frac{1}{2l+1} \sum_{-l}^{+l} \frac{1}{1+2m} = \frac{1}{(2l+1)^2} = \frac{1}{J'^2+1},$$

letzteres wegen $J'^2 = 4l(l+1)$. Somit erhält man bis auf den Faktor $\frac{\alpha}{\pi} C$ für

$$(3.21) \quad l_1 = l, l_2 = 0: W = -\frac{2J'^2}{J'^2+1} = -2 \left(1 - \frac{1}{(2l+1)^2} \right).$$

Die ersten Terme lauten

l	$=$	0	1	2	3
W	$=$	0	$-\frac{16}{9}$	$-\frac{48}{25}$	$-\frac{96}{49}$
		0	$-1,78$	$-1,92$	$-1,96$

Die Energien für die niedrigsten Quantenzahlen l_1, l_2, l bis $l_1 = \frac{3}{2}, l_2 \leq l_1$ sind im Anhang (Ziff. 4) berechnet. Wir haben zu C proportionale Energiebeiträge erhalten. Diese müssen durch entsprechende Beiträge der spinoriellen Wechselwirkung wie in l. c. 2 kompensiert werden. Dadurch sind die verschiedenen Kopplungskonstanten bestimmt. Je nach deren Anzahl ist dies nur für mehr oder weniger viele, aber stets nur für endlich viele Werte von l_1, l_2, l möglich.

Das hat eine bemerkenswerte Konsequenz. Die meisten Ansätze von Theorien für Elementarteilchen, schon der von Pais,¹⁰ der durch die Erfindung der Strangeness¹¹ entbehrlich geworden ist, leiden darunter, daß eine Menge von Lösungen ad hoc ausgeschieden werden muß. Hier kündigt sich möglicherweise ein Auswahlprinzip an. Nur solche Lösungen überleben, deren zu C proportionale Glieder verschwinden. Damit ist nichts über die richtige Wahl des Modells gesagt, wohl aber sind bei gegebenem Modell die Kopplungskonstanten bestimmt. Auch die durch die Quantenzahlen gekennzeichnete Darstellung der Gruppe $o(4)$ dürfte für die Teilchen eine Rolle spielen. Klarerweise haben die obigen Eigenwerte noch keine unmittelbare Bedeutung für Teilchen.

4. Anhang: Berechnung der Eigenwerte

Die Quadrate $C(m_1, m_2)^2$ der Clebsch-Gordan-Koeffizienten lauten für die Quantenzahlen l_1, l_2, l bis zu $l_1 = 3/2, l_2 \geq l_1$:

1	$1/2$
$1/2$	1

 $1/2, 1/2, 1$

0	$1/2$
$1/2$	0

 $1/2, 1/2, 0$

1
1
1

1,0,1

1	$1/2$	$1/6$
$1/2$	$2/3$	$1/2$
$1/6$	$1/2$	1

1, 1, 2

0	$1/2$	$1/2$
$1/2$	0	$1/2$
$1/2$	$1/2$	0

1, 1, 1

0	0	$1/3$
0	$1/3$	0
$1/3$	0	0

1, 1, 0

1	$1/4$
$3/4$	$1/2$
$1/2$	$3/4$
$1/4$	1

 $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2$

0	$3/4$
$1/4$	$1/2$
$1/2$	$1/4$
$3/4$	0

 $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1$

1	$1/2$	$1/5$	$1/20$
$1/2$	$3/5$	$9/20$	$1/5$
$1/5$	$9/20$	$3/5$	$1/2$
$1/20$	$1/5$	$1/2$	1

 $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 3$

0	$1/2$	$1/2$	$1/4$
$1/2$	0	$1/4$	$1/2$
$1/2$	$1/4$	0	$1/2$
$1/4$	$1/2$	$1/2$	0

 $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2$

0	0	$3/10$	$9/20$
0	$2/5$	$1/20$	$3/10$
$3/10$	$1/20$	$2/5$	0
$9/20$	$3/10$	0	0

 $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1$

0	0	0	$1/4$
0	0	$1/4$	0
0	$1/4$	0	0
$1/4$	0	0	0

 $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0$

Diese Zahlen sind durch $2l + 1$ und elementweise durch

1	3	5	7
-1	1	3	5
-3	-1	1	3
-5	-3	-1	1

zu dividieren und zu summieren. Das ergibt für

l_1, l_2, l	J'^2	Rechnung	$\frac{1}{2l+1} \Sigma$
$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$	4	$\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{6} \right)$	5/9
0	12	$1 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right)$	-1/3
1, 0, 1	8	$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} + 1 - 1 \right)$	1/9
1, 2	8	$\frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{1}{18} - 1 + \frac{8}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{30} \right)$	89/225
1	24	$\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{6} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \right)$	-11/45
0	32	$1 \cdot \left(-\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15} \right)$	13/45
$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2$	12	$\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - \frac{1}{12} \right)$	7/75
1	28	$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right)$	1/45
$\frac{3}{2}, 3$	12	$\frac{1}{7} \cdot \left(-\frac{1}{100} - \frac{2}{15} - \frac{29}{20} + \frac{16}{5} + \frac{29}{60} + \frac{2}{25} + \frac{1}{140} \right)$	4572/14700
2	36	$\frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{1}{20} - \frac{1}{3} - \frac{5}{4} + \frac{5}{12} + \frac{1}{5} + \frac{1}{28} \right)$	-412/2100
1	52	$\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{9}{100} - \frac{1}{5} - \frac{1}{20} + \frac{4}{5} + \frac{1}{60} + \frac{3}{25} + \frac{9}{140} \right)$	1388/6300
0	60	$1 \cdot \left(-\frac{1}{20} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{28} \right)$	-76/420

Die Energie berechnet sich in Einheiten $\frac{a}{\pi} C$ aus (3.15).

Das ergibt für

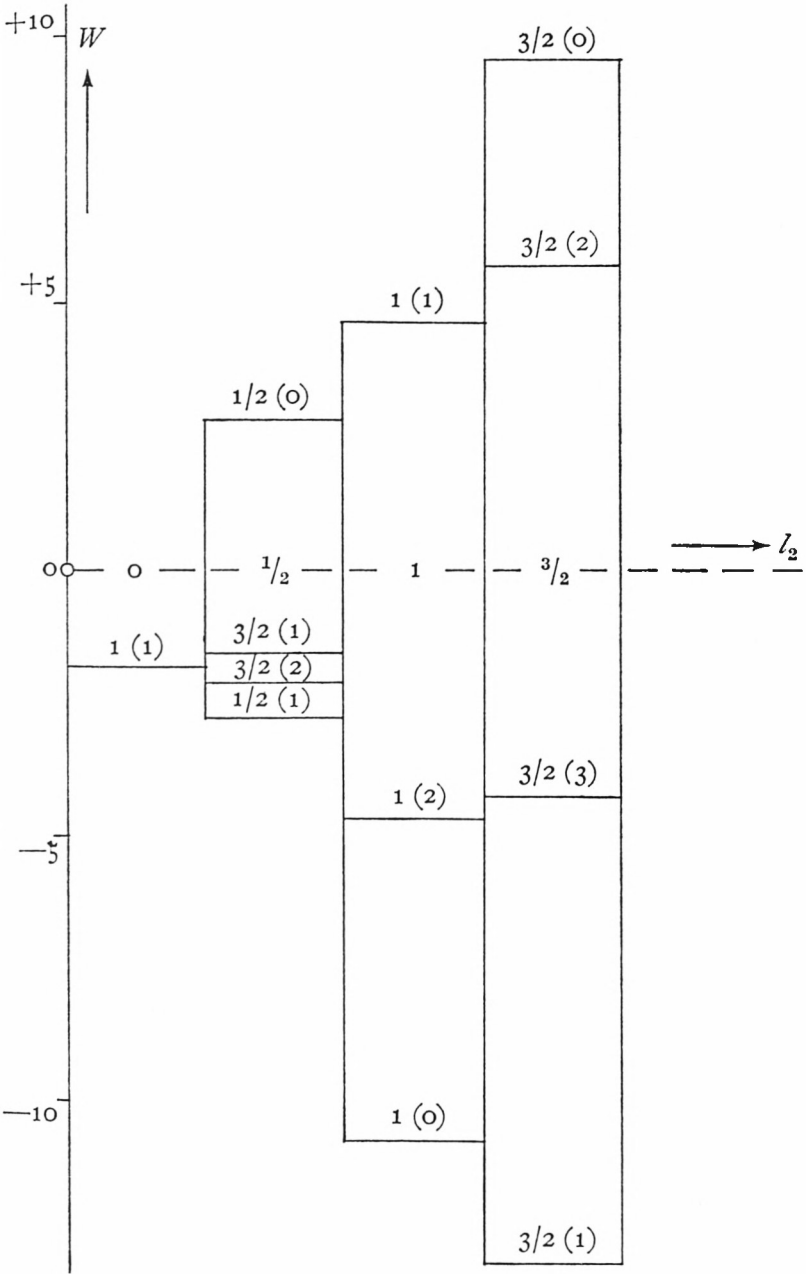
$l_1, l_2, l = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$	$W = -2,67$
0	+2,67
1, 0, 1	-1,78
1, 1, 2	-4,77
1	+4,62
0	-9,96
$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2$	-2,03
1	-1,60
$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 3$	-4,42

2	+ 5,87
1	—12,24
0	+ 9,68

In nachstehender Figur sind die Energieterme W eingetragen (in Einheiten $\frac{a}{\pi} C$, $C = \Omega$ -unendlich). Die Balken über der Abszisse beziehen sich auf l_2 . Die nicht eingeklammerten Ziffern bei den Termen liefern l_1 . Die Quantenzahl l ist in Klammern gesetzt.

Legende zur Figur:

Energiespektrum des Bosonenoperators für Zustände mit den Quantenzahlen l_1, l_2, l .



5. Literaturhinweise

- [1] Bopp, F.: Grundzustand bei Wechselwirkung; Sitzungsberichte d. Bay. Ak. d. Wiss. 1977, im Druck.
- [2] Bopp, F.: Ein-Teilchen-Masse bei elektromagnetischer und spinorieller Wechselwirkung; Sitzungsber. d. Bayer. Ak. d. Wiss. 1977, im Druck.
- [3] Schmieden, C., Laugwitz, D.: Math. Z. **69**, 1 (1958); Laugwitz, D.: Math. Nachr. **37**, 225 (1968); Jber. Deutsch. Math.-Verein **75**, 66 (1973).
- [4] Z. B.: Jones, W., March, N. H.: Theoretical Solid State Physics, Vol. 2, Chap. 9. 5. 3 (als Beispiel).
- [5] Friedrichs, K. O.: Mathematical Aspects of Quantum Theory of Fields; New-York, Interscience 1953; Glauber, R. J.: Phys. Rev. **84**, 395 (1951), **130**, 2529 (1963), **131**, 2766 (1963).
- [6] Heisenberg, W., Pauli, W.: Z. f. Physik **56**, 1 (1929).
- [7] Z. B. Davydov, A.S.: Quantummechanics, Pergamon-Press 1965; hier: II Gl. (17. 4.).
- [8] Jauch, J. M., Rohrlich, F.: The Theory of Photons and Electrons; Adison-Wesley Publ. Cy. 1955; hier: Chap. 6-3.
- [9] Z. B. Cern: Particle Properties 1974.
- [10] Pais, A.: Progr. Theor. Physics **10**, 457 (1953).
- [11] Gellmann, M.: Phys. Rev. **92**, 883 (1953).