BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1975

MÜNCHEN 1976

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Minimale Fortsetzungen additiver Funktionale

Von **Bernd Anger** in Erlangen

Vorgelegt von Herrn Prof. Dr. Otto Haupt am 25. 10. 1974

Einleitung

Andenaes [1] hat eine Version des Satzes von Hahn-Banach bewiesen, die vor allem in der Choquetschen Theorie interessante Anwendungen besitzt: Ist auf einem Vektorraum E ein sublineares Funktional p und auf einem Unterraum von E ein lineares p-majorisiertes Funktional f gegeben, so gibt es für jede Teilmenge S von E unter allen p-majorisierten linearen Fortsetzungen von f auf E eine solche, die auf S *minimal* ist.

Hier soll nun gezeigt werden, daß ein Analogon dieses Satzes für prägeordnete Halbgruppen gilt. Dabei wird zugelassen, daß additive und subadditive Funktionale die Werte $+\infty$ und $-\infty$ annehmen.

Das Ergebnis enthält die von Aumann [4], Dinges [7], Kaufmann [9], Fuchssteiner [8] und Scheller [11] bewiesenen Varianten des Satzes von Hahn-Banach für Halbgruppen ebenso wie den Satz von Andenaes und einige Versionen des Satzes von Hahn-Banach für *hypolineare* Funktionale, wie sie von Ströhle [13] und in [2], [3] bewiesen wurden.

Wie bei Simons [12] und Fuchssteiner [8] wird gezeigt, daß (in einer geeigneten Ordnung) minimale subadditive Funktionale additiv sind. Das entscheidende Hilfsmittel sind dabei die bereits in [2] eingeführten *größten subadditiven Minoranten.*

Es scheint bemerkenswert, daß im Gegensatz zum Beweis des Satzes von Andenaes und des Hauptsatzes (1.8) in [2] der Satz von Hahn-Banach hier *nicht* benötigt wird, sondern vielmehr eine Konsequenz ist.

Als Anwendung wird gezeigt, daß die Existenz des Šilovrandes und einige wichtige Ergebnisse der *Choquetschen Theorie* für Halbgruppen nach unten beschränkter nach unten halbstetiger Funktionen auf kompakten Räumen (vgl. etwa Boboc und

Cornea [6]) einfache Folgerungen der hier bewiesenen Verallgemeinerung des Satzes von Hahn-Banach sind.

1. Subadditive Funktionale

Sei E eine (additiv geschriebene) kommutative Halbgruppe mit neutralem Element o.

Eine Teilmenge von E, welche o enthält und bezüglich der in E definierten Addition eine Halbgruppe ist, wird als *Unterhalbgruppe* von E bezeichnet.

Sei $\leq$ eine mit der Halbgruppenstruktur verträgliche Präordnung auf E.

Definition 1. Eine numerische Funktion $p : P \to \overline{\boldsymbol{R}}$ auf einer Halbgruppe $P \subset E$ heißt

isoton, wenn $x, y \in P$ und $x \leq y \Rightarrow p(x) \leq p(y)$;

homogen, wenn $x \in P$, $n \in \boldsymbol{N} \Rightarrow p(nx) = np(x)$;[1]

subadditiv, wenn $o \in P \Rightarrow p(o) \leq o$ und wenn $x, y \in P$,

$\{p(x), p(y)\} \neq \{+\infty, -\infty\} \Rightarrow p(x+y) \leq p(x) + p(y)$;

additiv, wenn p und $-p$ subadditiv sind.

Bemerkung 1. (1) Für eine subadditive Funktion p auf einer Unterhalbgruppe P ist entweder $p(o) = o$ oder $p(o) = -\infty$ (und dann $p(P) \subset \{+\infty, -\infty\}$).

(2) Eine additive Funktion ist stets homogen.

Ein Beispiel einer additiven Funktion p auf $E = \boldsymbol{R}$ wird durch $p(o) = o$, $p(x) = -\infty$ für $x < o$ und $p(x) = +\infty$ für $x > o$ gegeben.

Additive Funktionen sind also *nicht* notwendig reellwertig.

(3) Aus Gründen der Beweisvereinfachung werden im folgenden stets Halbgruppen in E betrachtet, die o enthalten. Im Hinblick auf die Untersuchung isotoner, homogener oder subaddi-

---

[1] In $\overline{\boldsymbol{R}}$ gelten die üblichen Rechenregeln; es sei $o \cdot (\pm\infty) = o$.

tiver Funktionale p ist dies keine Einschränkung der Allgemeinheit, da man stets eine Halbgruppe zu einer Unterhalbgruppe und p so erweitern kann, daß die Isotonie-, Homogenitäts- und Subadditivitätseigenschaften von p erhalten bleiben.

Lemma 1. *Seien J und K disjunkte Indexmengen mit nicht leerer Vereinigung I. Für $i \in I$ sei p_i ein subadditives Funktional auf einer Unterhalbgruppe P_i von E. Die numerische Funktion p, definiert auf E durch*[2]

$$p(x) = \inf \Big\{ \frac{1}{n} \sum_{i \in I_x} p_i(x_i) : n \in \boldsymbol{N},\ I_x \subset I,\ I_x \text{ endlich},\ x_i \in P_i \text{ mit } p_i(x_i) < \infty\ (i \in I_x),\ nx + \sum_{k \in K \cap I_x} x_k \leq \sum_{j \in J \cap I_x} x_j \Big\},$$

ist isoton, subadditiv und homogen.

Beweis: Die Isotonie von p folgt sofort aus der Definition.

Ferner ist $p(0) \leq 0$ wegen $p_i(0) \leq 0$ für $i \in I$.

Um zu zeigen, daß für $x, y \in E$ mit

$\{p(x), p(y)\} \neq \{+\infty, -\infty\}$ die Dreiecksungleichung

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

gilt, kann o. B. d. A. angenommen werden, daß $p(x), p(y) < \infty$. Dann existieren $n, m \in \boldsymbol{N}$ und endliche Teilmengen $I_x, I_y \subset I$ sowie Elemente $x_i, y_i \in P_i$ mit $p_i(x_i), p_i(y_i) < \infty$ und

$$nx + \sum_{k \in K \cap I_x} x_k \leq \sum_{j \in J \cap I_x} x_j,$$

$$my + \sum_{k \in K \cap I_y} y_k \leq \sum_{j \in J \cap I_y} y_j.$$

Für $i \in I_{x+y} := I_x \cup I_y$ sei

$$z_i = \begin{cases} mx_i + ny_i, & i \in I_x \cap I_y \\ mx_i & , i \in I_x \setminus I_y \\ ny_i & , i \in I_y \setminus I_x. \end{cases}$$

Dann ist $z_i \in P_i$ und $p_i(z_i) < \infty$ sowie

---

[2] $\sum_{\emptyset} = 0$, $\inf \emptyset = \infty$.

$$nm(x+y) + \sum_{k \in K \cap I_{x+y}} z_k \leq \sum_{j \in J \cap I_{x+y}} z_j,$$

also

$$p(x+y) \leq \frac{1}{nm} \sum_{i \in I_{x+y}} p_i(z_i) \leq \frac{1}{n} \sum_{i \in I_x} p_i(x_i) + \frac{1}{m} \sum_{i \in I_y} p_i(y_i)$$

und damit $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

Die Homogenität von p läßt sich nun leicht einsehen.

Bemerkung 2. (1) Lemma 1 verallgemeinert [2, (1.5)] (vgl. auch [3, (6.3)]) und findet sich in ähnlicher Form bei Scheller [10, Lemma I 3 und Definition I 6].

(2) Ist im vorangehenden Lemma die Indexmenge I endlich, so ist wegen $p_i(0) \leq 0$ $(i \in I)$ für $x \in E$

$$p(x) = \inf \Big\{ \frac{1}{n} \sum_{i \in I} p_i(x_i) : n \in \boldsymbol{N}, x_i \in P_i \text{ mit } p_i(x_i) < \infty \, (i \in I), \\ nx + \sum_{k \in K} x_k \leq \sum_{j \in J} x_j \Big\}.$$

Definition 2. Die in Lemma 1 definierte Funktion p wird für $J, K \neq \emptyset$ mit $p_J \mathbin{/\!\!\wedge} \overline{p_K}$ und für $K = \emptyset$ mit $\mathop{/\!\!\wedge}_{j \in J} p_j$ bezeichnet. Wird statt $\leq$ die inverse Präordnung $\geq$ zugrunde gelegt, so schreiben wir entsprechend $p_J \mathbin{\backslash\!\!\wedge} \overline{p_K}$ bzw. $\mathop{\backslash\!\!\wedge}_{j \in J} p_j$. Ferner sei $p_{j_1} \mathbin{/\!\!\wedge} \ldots \mathbin{/\!\!\wedge} p_{j_n} = \mathop{/\!\!\wedge}_{j \in \{j_1, \ldots, j_n\}} p_j$ und $p_{j_1} \mathbin{/\!\!\wedge} \ldots \mathbin{/\!\!\wedge} p_{j_n} \mathbin{/\!\!\wedge} \overline{p_{k_1}} \mathbin{/\!\!\wedge} \ldots \mathbin{/\!\!\wedge} \overline{p_{k_m}} = p_{\{j_1, \ldots, j_n\}} \mathbin{/\!\!\wedge} \overline{p_{\{k_1, \ldots, k_m\}}}$.

Entsprechende Bezeichnungen werden bezüglich der inversen Präordnung eingeführt.

Bemerkung 3. Sei $(p_i)_{i \in I}$ wie in Lemma 1 gegeben, und sei E eine Gruppe. Definiert man für $j \in J$ $h_j = p_j$ und für $k \in K$ h_k auf $-P_k$ durch $h_k(x_k) = p_k(-x_k)$, so gilt offenbar $\mathop{/\!\!\wedge}_{i \in I} h_i = p_J \mathbin{/\!\!\wedge} \overline{p_K}$. Daher steht die in Definition 2 eingeführte Schreibweise im Einklang mit der Bezeichnung $h_k = \overline{p_k}$ in [2].

Lemma 2. *Seien J und K disjunkte Indexmengen mit nicht leerer Vereinigung I. Für $i \in I$ sei p_i ein subadditives Funktional auf einer Unterhalbgruppe P_i von E.*

(1) *Die Funktion* $p_J \mathbin{/\!\!\wedge} \overline{p_K}$ $(K \neq \emptyset)$ *bzw.* $\mathop{/\!\!\wedge}_{j \in J} p_j$ $(K = \emptyset)$ *ist das größte isotone homogene subadditive Funktional* p *auf* E *mit den Eigenschaften*

$$p \mid P_j \leq p_j \text{ für alle } j \in J \text{ und } p \mathbin{/\!\!\wedge} \overline{p_K} = p \text{ für alle } k \in K.$$

(2) $$(\mathop{/\!\!\wedge}_{j \in J} p_j) \mathbin{/\!\!\wedge} (\overline{\mathop{\wedge\!\!\!\backslash}_{k \in K} p_k}) = p_J \mathbin{/\!\!\wedge} \overline{p_K}.$$

(3) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $-p_1 \leq (p_2 \mathbin{/\!\!\wedge} p_3) \mid P_1$.

(ii) $-p_2 \leq (p_1 \mathbin{/\!\!\wedge} \overline{p_3}) \mid P_2$.

(4) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $0 \leq p_1 \mathbin{/\!\!\wedge} \overline{p_2}(0)$.

(ii) $-p_2(x_2) \leq p_1(x_1)$ *für alle* $x_1 \in P_1$, $x_2 \in P_2$ *mit* $x_2 \leq x_1$.

(iii) $-(p_2 \mathbin{/\!\!\wedge} \overline{p_1}) \leq p_1 \mathbin{/\!\!\wedge} \overline{p_2}$.

(5) *Sei* $K \neq \emptyset$. *Für jedes isotone additive Funktional* f *auf* E *sind äquivalent:*

(i) $$-p_k \leq f \mid P_k \text{ und } f \mid P_j \leq p_j \text{ für alle } j \in J, k \in K.$$

(ii) $$-((\mathop{/\!\!\wedge}_{k \in K} p_k) \mathbin{/\!\!\wedge} (\overline{\mathop{/\!\!\wedge}_{j \in J} p_j})) \leq f \leq (\mathop{/\!\!\wedge}_{j \in J} p_j) \mathbin{/\!\!\wedge} (\overline{\mathop{\wedge\!\!\!\backslash}_{k \in K} p_k}).$$

Beweis. (1) Nach Lemma 1 ist $p = p_J \mathbin{/\!\!\wedge} \overline{p_K}$ bzw. $p = \mathop{/\!\!\wedge}_{j \in J} p_j$ isoton, subadditiv und homogen. Aus der Definition von p folgt für $j \in J$ und $k \in K$ sofort

$$p \mid P_j \leq p_j \text{ und } p \mathbin{/\!\!\wedge} \overline{p_k} \leq p$$

sowie auf einfache Weise $p \leq p \mathbin{/\!\!\wedge} \overline{p_k}$.

Sei nun q ein isotones subadditives homogenes Funktional auf E mit

$$q \mid P_j \leq p_j \text{ und } q \mathbin{/\!\!\wedge} \overline{p_k} = q \text{ für alle } j \in J, k \in K.$$

Dann gilt für $y \in E$ und $y_k \in P_k$ mit $q(y + y_k) < \infty$ und $p_k(y_k) < \infty$

$$q(y) = q \mathbin{/\!\!\wedge} \overline{p_k}(y) \leq q(y + y_k) + p_k(y_k).$$

Für $x \in E$, $n \in \boldsymbol{N}$, jede endliche Teilmenge $I_x \subset I$ sowie Elemente $x_i \in P_i$ mit $p_i(x_i) < \infty$ und

$$nx + \sum_{k \in K \cap I_x} x_k \leq \sum_{j \in J \cap I_x} x_j$$

gilt daher

$$nq(x) = q(nx) \leq q(nx + \sum_{k \in K \cap I_x} x_k) + \sum_{k \in K \cap I_x} p_k(x_k) \leq$$

$$\leq q(\sum_{j \in J \cap I_x} x_j) + \sum_{k \in K \cap I_x} p_k(x_k) \leq \sum_{j \in J \cap I_x} q(x_j) + \sum_{k \in K \cap I_x} p_k(x_k) \leq$$

$$\leq \sum_{j \in J \cap I_x} p_j(x_j) + \sum_{k \in K \cap I_x} p_k(x_k),$$

also

$$q(x) \leq \frac{1}{n} \sum_{i \in I_x} p_i(x_i) \quad \text{und somit} \quad q(x) \leq p(x).$$

(2) Man sieht sofort ein, daß $(\bigwedge_{j \in J} p_j) \wedge (\overline{\bigwedge_{k \in K} p_k}) \leq p_J \wedge \overline{p_K}$ gilt. Die umgekehrte Ungleichung folgt aus (1) wegen

$$p_J \wedge \overline{p_K} \leq \bigwedge_{j \in J} p_j \quad \text{und} \quad (p_J \wedge \overline{p_K}) \wedge (\overline{\bigwedge_{k \in K} p_k}) = p_J \wedge \overline{p_K}.$$

(3) (i) $\Rightarrow$ (ii). Sei $x_2 \in P_2$ und o. B. d. A. $p_2(x_2) < \infty$ sowie $p_1 \wedge \overline{p_3}(x_2) < \infty$. Für alle $n \in \boldsymbol{N}$, $x_i \in P_i$ mit $p_i(x_i) < \infty$ und $nx_2 + x_3 \geq x_1$ gilt

$$p_2(x_2) + \frac{1}{n}(p_1(x_1) + p_3(x_3)) \geq \frac{1}{n} p_1(x_1) + \frac{1}{n}(p_2(nx_2) +$$

$$+ p_3(x_3)) \geq \frac{1}{n}(p_1(x_1) + p_2 \wedge p_3(x_1)) \geq 0$$

und somit

$$-p_2(x_2) \leq p_1 \wedge \overline{p_3}(x_2).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sei $x_1 \in P_1$ und o. B. d. A. $p_1(x_1) < \infty$ sowie $p_2 \wedge p_3(x_1) < \infty$. Für alle $n \in \boldsymbol{N}$, $x_i \in P_i$ mit $p_i(x_i) < \infty$ und $nx_1 \leq x_2 + x_3$ gilt $p_1(x_1) + \frac{1}{n}(p_2(x_2) + p_3(x_3)) \geq \frac{1}{n} p_2(x_2) +$ $+ \frac{1}{n}(p_1(nx_1) + p_3(x_3)) \geq \frac{1}{n}(p_2(x_2) + p_1 \wedge \overline{p_3}(x_2)) \geq 0$

und somit

$$-p_1(x_1) \leq p_2 \wedge p_3(x_1).$$

(4) (i) $\Rightarrow$ (ii). Sei $x_i \in P_i$, $x_2 \leq x_1$ und o. B. d. A. $p_i(x_i) < \infty$. Dann ist $0 \leq p_1 \mathbin{/\!\!\wedge} \overline{p_2}(0) \leq p_1(x_1) + p_2(x_2)$, also

$$-p_2(x_2) \leq p_1(x_1).$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Wegen (ii) ist $-p_1 \leq (p_2 \mathbin{\wedge\!\!\backslash} p_2) \mid P_1$, also

$$-p_2 \leq (p_1 \mathbin{/\!\!\wedge} \overline{p_2}) \mid P_2 = ((p_1 \mathbin{/\!\!\wedge} \overline{p_2}) \mathbin{/\!\!\wedge} (p_1 \mathbin{/\!\!\wedge} \overline{p_2})) \mid P_2$$

nach (3) und (1) und folglich

$$-(p_1 \mathbin{/\!\!\wedge} \overline{p_2}) \leq p_2 \mathbin{\wedge\!\!\backslash} \overline{(p_1 \mathbin{/\!\!\wedge} \overline{p_2})} \leq p_2 \mathbin{\wedge\!\!\backslash} \overline{p_1}.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) wegen $p_2 \mathbin{\wedge\!\!\backslash} \overline{p_1}(0) \leq 0$.

(5) (i) $\Rightarrow$ (ii). Sei $q_1 = \mathop{/\!\!\wedge}\limits_{j \in J} p_j$ und $q_2 = \mathop{\wedge\!\!\backslash}\limits_{k \in K} p_k$. Nach (1) gilt $f \leq q_1$ und $-f \leq q_2$, also nach (1) $-q_2 \leq f = f \mathbin{/\!\!\wedge} q_1$ und $-q_1 \leq -f = (-f) \mathbin{\wedge\!\!\backslash} q_2$. Aus (3) folgt daher

$-f \leq q_2 \mathbin{\wedge\!\!\backslash} \overline{q_1}$ und $-(-f) \leq q_1 \mathbin{/\!\!\wedge} \overline{q_2}$, also $-(q_2 \mathbin{\wedge\!\!\backslash} \overline{q_1}) \leq f \leq$ $\leq q_1 \mathbin{/\!\!\wedge} \overline{q_2}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) nach (1).

2. Minimale Fortsetzungen

Definition 3. P_1 und P_2 seien Unterhalbgruppen von E. $P_1 \mathbin{/\!\!\wedge} \overline{P_2}$ sei die Unterhalbgruppe aller $x \in E$, für welche Elemente $n \in \boldsymbol{N}$, $x_1 \in P_1$ und $x_2 \in P_2$ existieren mit $nx + x_2 \leq x_1$ (vgl. [4], [7]).

In Anlehnung an Definition 2 bezeichnen wir mit $P_1 \mathbin{/\!\!\wedge} P_2$ die Unterhalbgruppe $(P_1 + P_2) \mathbin{/\!\!\wedge} \overline{\{0\}}$. Entsprechende Bezeichnungen werden bezüglich der inversen Präordnung $\geq$ eingeführt.

Definition 4. Für jede Teilmenge T von E bezeichne $\leq_T$ die auf $\overline{\boldsymbol{R}}^E$ durch die punktweise Ordnung auf T definierte Präordnung:

$$p \leq_T q \text{ bedeute } p \mid T \leq q \mid T.$$

Satz 1. *Seien p bzw. q subadditive Funktionale auf Unterhalbgruppen P bzw. Q von E, und sei f ein additives Funktional auf einer Unterhalbgruppe F von E mit*

$$-(q \mathbin{\wedge\!\!\!\backslash} (-f)) \leq p \mathbin{/\!\!\!\wedge} f.$$

(1) *Für jede Teilmenge T von E besitzt die bzgl. $\leq_T$ prägeordnete Menge $\mathbf{G}$ aller isotonen additiven Fortsetzungen g von f auf E mit*

$$-q \leq g \mid Q \text{ und } g \mid P \leq p$$

ein minimales Element h.

(2) *Ist $T_0 \subset T$ und hat die von T_0 in E erzeugte Unterhalbgruppe S_0 die Eigenschaft, daß $p_0 := -\big((q \mathbin{\wedge\!\!\!\backslash} (-f)) \mathbin{\wedge\!\!\!\backslash} (\overline{p \mathbin{/\!\!\!\wedge} f})\big) \mid S_0$ additiv ist, dann kann h überdies so gewählt werden, daß*

$$h(s) = \inf \{g(s) : g \in \mathbf{G}\} = p_0(s) \textit{ für alle } s \in S_0$$

gilt.

(3) *Jede einpunktige Menge $T_0 \subset T$ besitzt die in (2) geforderte Eigenschaft.*

(4) *Ist f reell und $P_\infty = \{x \in P : p(x) < \infty\}$, $Q_\infty = \{y \in Q : q(y) < \infty\}$, so gilt für jedes Element $g \in \mathbf{G}$:*

$$g((Q_\infty + F) \mathbin{\wedge\!\!\!\backslash} (\overline{P_\infty + F})) \subset \,]-\infty, \infty] \quad \text{und}$$

$$g((P_\infty + F) \mathbin{/\!\!\!\wedge} (\overline{Q_\infty + F})) \subset [-\infty, \infty[.$$

Insbesondere ist g reell, wenn f reell ist und

$$E = ((Q_\infty + F) \mathbin{\wedge\!\!\!\backslash} (\overline{P_\infty + F})) \cap ((P_\infty + F) \mathbin{/\!\!\!\wedge} (\overline{Q_\infty + F})) \textit{ gilt.}$$

Beweis. (i) Bezeichnet $S = \{\sum_{i \in I} t_i : I \text{ endlich}, t_i \in T\} \cup \{0\}$ die von T erzeugte Unterhalbgruppe in E, so ist $h \in \mathbf{G}$ offenbar genau dann ein bzgl. $\leq_T$ minimales Element von $\mathbf{G}$ (d. h. jedes $g \in \mathbf{G}$ mit $g \mid T \leq h \mid T$ stimmt mit h auf T überein), wenn h ein bzgl. $\leq_S$ minimales Element von $\mathbf{G}$ ist. Daher kann o. B. d. A. $T = S$ angenommen werden.

Für $p_2 := q \mathbin{\wedge\!\!\!\backslash} (-f)$ und $p_3 := p \mathbin{/\!\!\!\wedge} f$ gilt wegen $-p_2 \leq p_3$ und Lemma 1 nach Lemma 2 (4)

$$-(p_2 \mathbin{\wedge\!\!\!\backslash} \overline{p_3})(0) \leq p_3 \mathbin{/\!\!\!\wedge} \overline{p_2}(0) \leq 0, \text{ also } -(p_2 \mathbin{\wedge\!\!\!\backslash} \overline{p_3})(0) = 0$$

nach Lemma 1. Somit ist p_0 für jede einpunktige Menge T_0 nach Lemma 1 additiv auf S_0, also (3) bewiesen.

(ii) Sei nun T_0 eine beliebige Teilmenge von $T = S$ mit dieser Eigenschaft, und sei $p_1 := p_0 \mathbin{/\!\!\wedge} p_3$. Dann folgt aus der Definition von p_0 für alle $x_1, x_2 \in E$ mit $x_2 \leq x_1$ sofort

$$-p_2(x_2) \leq p_1(x_1).$$

Nach Lemma 2 (4) ist dann

$$-(p_2 \mathbin{\wedge\!\!\backslash} \overline{p_1}) \leq p_1 \mathbin{/\!\!\wedge} \overline{p_2}.$$

(iii) Auf $\overline{\boldsymbol{R}}^E$ wird nun eine Ordnung $\prec$ wie folgt eingeführt: $u \prec v$ gelte genau dann, wenn entweder $u \mid S \leq v \mid S$ und $u \mid S \neq v \mid S$ oder $u \mid S = v \mid S$ und $u \leq v$ gilt. (Aus $u \leq v$ folgt stets $u \prec v$).

Es soll nun gezeigt werden, daß die bzgl. $\prec$ geordnete Menge $\boldsymbol{H}$ aller isotonen, homogenen und subadditiven Funktionen h auf E mit

$$-(p_2 \mathbin{\wedge\!\!\backslash} \overline{p_1}) \leq h \leq p_1 \mathbin{/\!\!\wedge} \overline{p_2}$$

ein minimales Element besitzt.

Nach Lemma 1 ist $p_1 \mathbin{/\!\!\wedge} \overline{p_2} \in \boldsymbol{H}$, also $\boldsymbol{H} \neq \emptyset$.

Sei $(h_i)_{i \in I}$ eine Kette in $\boldsymbol{H}$, U eine Unterhalbgruppe von E und I_U eine nicht leere Teilmenge von I, für die $\{h_i : i \in I_U\}$ bzgl. $\leq_U$ total geordnet ist. Dann ist $u : U \to \overline{\boldsymbol{R}}$, definiert durch

$$u(x) = \inf_{i \in I_U} h_i(x) \qquad (x \in U),$$

subadditiv auf U, da $u(0) \leq 0$ und die Gültigkeit der Dreiecksungleichung wie folgt eingesehen werden kann:

Seien $x, y \in U$ und o. B. d. A. $u(x) < \infty$ sowie $u(y) < \infty$. Seien $i, j \in I_U$ mit $h_i(x) < \infty$ und $h_j(y) < \infty$. Ist etwa

$h_i \mid U \leq h_j \mid U$, so gilt $h_i(y) \leq h_j(y) < \infty$ und

$$u(x + y) \leq h_i(x + y) \leq h_i(x) + h_i(y) \leq h_i(x) + h_j(y),$$

also

$$u(x + y) \leq u(x) + u(y).$$

Hieraus folgt, daß $s: S \to \overline{\boldsymbol{R}}$, definiert durch

$$s(x) = \inf_{i \in I} h_i(x) \quad (x \in S),$$

subadditiv auf S ist.

Ist $J = \{j \in I : h_j \mid S = s\}$ nicht leer und $h_J : E \to \overline{\boldsymbol{R}}$ definiert durch

$$h_J(x) = \inf_{j \in J} h_j(x) \qquad (x \in E),$$

so ist für $i, j \in J$ $h_i \prec h_j$ oder $h_j \prec h_i$, also wegen $h_i \mid S = h_j \mid S$ auch $h_i \leq h_j$ oder $h_j \leq h_i$. Nach obigem ist dann h_J subadditiv auf E. Ferner ist $h_J \in \boldsymbol{H}$, da $h_j \in \boldsymbol{H}$ für alle $j \in J$. Für $i \in J$ ist $h_J \prec h_i$, und für $i \in I \backslash J$ ist $h_J \mid S = s \leq h_i \mid S$ sowie $s \neq h_i \mid S$, also $h_J \prec h_i$. Daher ist h_J untere Schranke aller h_i $(i \in I)$ in $\boldsymbol{H}$, sofern J nicht leer ist.

Sei nun angenommen, daß J leer ist.

Wegen $-s \leq (p_2 \mathbin{/\!\!\wedge} \overline{p_1}) \mid S$ gilt nach Lemma 2 (3) und Lemma 1 für $x_1, x_2 \in E$ mit $x_2 \leq x_1$

$$-p_2(x_2) \leq s \mathbin{/\!\!\wedge} p_1(x_2) \leq s \mathbin{/\!\!\wedge} p_1(x_1).$$

Nach Lemma 2 (4) ist daher

$$-(p_2 \mathbin{/\!\!\wedge} \overline{p_1}) \leq -(p_2 \mathbin{/\!\!\wedge} (\overline{s \mathbin{/\!\!\wedge} p_1})) \leq (s \mathbin{/\!\!\wedge} p_1) \mathbin{/\!\!\wedge} \overline{p_2} \leq p_1 \mathbin{/\!\!\wedge} \overline{p_2}.$$

Folglich ist $h_I := (s \mathbin{/\!\!\wedge} p_1) \mathbin{/\!\!\wedge} \overline{p_2} \in \boldsymbol{H}$, und wegen $h_I \mid S \leq s \leq$ $\leq h_i \mid S$ und $s \neq h_i \mid S$ ist $h_I \prec h_i$ für alle $i \in I$.

Nach dem Zornschen Lemma besitzt nunmehr $\boldsymbol{H}$ ein minimales Element h bzgl. der Ordnung $\prec$.

(iv) Wir zeigen, daß h additiv ist.

Wegen $p_2 \mathbin{/\!\!\wedge} \overline{p_1}(0) \leq 0$ und $h(0) \leq 0$ gilt $h(0) = 0$.

Daher genügt es zum Nachweis der Additivität von h, die Ungleichung

$$h(x) + h(y) \leq h(x + y)$$

für alle $x, y \in E$ mit

$$-\infty < h(x), -\infty < h(y) \text{ und } h(x + y) < \infty$$

zu beweisen.

Sei $t := p_2 \wedge \overline{p_1}$. Dann ist $-t \leq h$, also gilt nach Lemma 2, (1) und (4)

$$-t \leq -(t \wedge \bar{h}) \leq h \wedge \bar{t} \leq h \leq p_1 \wedge \overline{p_2}$$

und somit $h \wedge \bar{t} \in \boldsymbol{H}$. Wegen $h \wedge \bar{t} \leq h$ gilt $h \wedge \bar{t} < h$, also $h = h \wedge \bar{t}$ wegen der Minimalität von h.

Auf $E_x := \{nx : n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}\}$ ist $r := -h \mid E_x$ ein additives Funktional, da $h(o) = 0$ und h homogen ist. Wegen $-r = h \mid E_x = (h \wedge \bar{t}) \mid E_x$ gilt nach Lemma 2(3) $-h \leq r \wedge t = t \wedge r$, also

$$-t \leq h \wedge \bar{r} \text{ und somit } h \wedge \bar{r} \in \boldsymbol{H}.$$

Aus der Minimalität von h erhält man wieder $h = h \wedge \bar{r}$. Hieraus folgt die zu beweisende Ungleichung:

$$h(y) \leq h(x+y) + r(x) = h(x+y) - h(x).$$

(v) Nach Lemma 2 (1) gilt

$$h \mid S_0 \leq p_0,\ h \mid P \leq p \quad \text{und} \quad h \mid F \leq f$$

sowie wegen $p_1 \leq p_3$

$$-h \mid S_0 \leq (p_2 \wedge \overline{p_1}) \mid S_0 \leq (p_2 \wedge \overline{p_3}) \mid S_0 = -p_0,$$
$$-h \mid Q \leq q \quad \text{und} \quad -h \mid F \leq -f,$$

also $h \in \boldsymbol{G}$ und $h \mid S_0 = p_0$.

Für $g \in \boldsymbol{G}$ gilt nach Lemma 2 (1) $g \leq p_3$ und $-g \leq p_2$, also nach Lemma 2, (2) und (5)

$$p_0 = -(p_2 \wedge \overline{p_3}) \mid S_0 \leq g \mid S_0.$$

Folglich ist

$$h(s) = \inf \{g(s) : g \in \boldsymbol{G}\} \text{ für alle } s \in S_0.$$

(vi) h ist ein minimales Element der bzgl. $\leq_S$ prägeordneten Menge $\boldsymbol{G}$: Ist nämlich $g \in \boldsymbol{G}$ und $g \mid S \leq h \mid S$, so gilt

$$p_0 \leq g \mid S_0 \leq h \mid S_0 = p_0,$$

also

$$-p_2 \leq g \leq p_0 \wedge p_3 = p_1.$$

Nach Lemma 2 (2), (5) ist $g \in \boldsymbol{H}$. Die Annahme $g \mid S \neq h \mid S$ impliziert den Widerspruch $g < h$. Hieraus folgt (1) und, wegen (v), auch Behauptung (2).

(vi) Zum Beweis von (4) genügt es zu bemerken, daß nach Lemma 2 (5) $\boldsymbol{G}$ mit der Menge aller isotonen additiven Funktionale g auf E übereinstimmt, welche den Ungleichungen

$$-(p_2 \mathbin{\mathbb{\wedge}} \overline{p_3}) \leq g \leq p_3 \mathbin{\mathbb{\wedge}} \overline{p_2}$$

genügen. Dann nämlich ist

$$\begin{aligned}(Q_\infty + F) \mathbin{\mathbb{\wedge}} \overline{(P_\infty + F)} &= (Q_\infty \mathbin{\mathbb{\wedge}} F) \mathbin{\mathbb{\wedge}} \overline{(P_\infty \mathbin{\mathbb{\wedge}} F)} = \\ &= \{x \in E : p_2(x) < \infty\} \mathbin{\mathbb{\wedge}} \overline{\{x \in E : p_3(x) < \infty\}} = \\ &= \{x \in E : p_2 \mathbin{\mathbb{\wedge}} \overline{p_3}(x) < \infty\}\end{aligned}$$

und ebenso

$$(P_\infty + F) \mathbin{\mathbb{\wedge}} \overline{(Q_\infty + F)} = \{x \in E : p_3 \mathbin{\mathbb{\wedge}} \overline{p_2}(x) < \infty\}.$$

Bemerkung 4. (1) Ersetzt man p und q durch *Familien* subadditiver Funktionale, so ergibt sich eine Satz 1 entsprechende Aussage aus Lemma 2 (5).

Auf diese Weise läßt sich aus Satz 1 auch ein Fortsetzungssatz für *beliebige numerische Majoranten und Minoranten* gewinnen:[3] Für beliebiges $p : E \to \bar{\boldsymbol{R}}$ und $x \in E$ definiere man ein subadditives Funktional p_x auf $E_x = \{nx : n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}\}$ durch $p_x(y) = \inf \{n\,p(x) : n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\},\ nx = y\}$. Dann ist p_x subadditiv auf der Unterhalbgruppe E_x, und $p_x(x) \leq p(x)$. Sind nun p und q numerische Funktionen auf E, so ist gemäß Lemma 2 (5) die Existenz einer isotonen additiven Fortsetzung g von f auf E mit $-q \leq g \leq p$ äquivalent zur Existenz einer isotonen additiven Fortsetzung g von f auf E mit

$$-\Big(\big(\bigwedge_{x \in E} q_x\big) \mathbin{\mathbb{\wedge}} \overline{\big(\bigwedge_{x \in E} p_x\big)}\Big) \leq g \leq \Big(\big(\bigwedge_{x \in E} p_x\big) \mathbin{\mathbb{\wedge}} \overline{\big(\bigwedge_{x \in E} q_x\big)}\Big).$$

---

[3] Für Vektorräume E und $T = \{0\}$ wurde dieses Problem von Ströhle [13] behandelt; die Methode haben wir bereits in [3, 6.5] beim Beweis des Satzes von Mazur-Orlicz ausgeführt.

(2) Für $T = \{t_0\}$ folgt sofort: $g \in \boldsymbol{G}$ ist genau dann ein minimales Element von $\boldsymbol{G}$, wenn $g(t_0) = p_0(t_0)$ gilt.

(3) Ist E eine *Gruppe* und f reellwertig, so ist jede der Bedingungen

$$E = (Q_\infty + F) \mathbin{/\!\!\backslash\!\!\backslash} (\overline{P_\infty + F}) \text{ oder } E = (P_\infty + F) \mathbin{/\!\!\backslash\!\!\backslash} (\overline{Q_\infty + F})$$

hinreichend dafür, daß jedes $g \in \boldsymbol{G}$ reellwertig ist.

(4) Ist E ein *Vektorraum* und ist eine der Schranken

$$p \mathbin{/\!\!\backslash\!\!\backslash} f \mathbin{/\!\!\backslash\!\!\backslash} \bar{q} \mathbin{/\!\!\backslash\!\!\backslash} (\overline{-f}) \text{ oder } q \mathbin{\backslash\!\!\backslash} (-f) \mathbin{\backslash\!\!\backslash} \bar{p} \mathbin{\backslash\!\!\backslash} \bar{f}$$

$\boldsymbol{R}_+$*-homogen* und nimmt den Wert $+\infty$ nicht an, so ist jedes $g \in \boldsymbol{G}$ reellwertig (nach (iv) und Lemma 2 (2)) sowie $\boldsymbol{R}$-homogen, genügt also der Gleichung

$$g(\lambda x) = \lambda g(x) \quad \text{für alle } \lambda \in \boldsymbol{R},\ x \in E$$

(dies folgt durch Approximation sofort aus der Gültigkeit obiger Gleichung für rationale λ).

(5) Die Voraussetzung

$$-(q \mathbin{\backslash\!\!\backslash} (-f)) \leq p \mathbin{/\!\!\backslash\!\!\backslash} f$$

ist, wie der Beweis von Satz 1 zeigt, *notwendig* für die Existenz eines Elements in $\boldsymbol{G}$ und (nach Lemma 2, (2) und (3)) äquivalent mit der Forderung

$$-q \leq (p \mathbin{/\!\!\backslash\!\!\backslash} f \mathbin{/\!\!\backslash\!\!\backslash} (\overline{-f})) \mid Q.$$

Dies stellt den Zusammenhang mit Fortsetzungssätzen in [2, (2.4) (vgl. (2.1))] und [3, (3.4)] her.

(6) Läßt man für die Schranken p und $-q$ nicht nur reelle Werte zu, so kann man bereits auf Vektorräumen E selbst unter der Voraussetzung $\boldsymbol{G} \cap E^* \neq \emptyset$ und $p(T)$, $q(T) \subset \boldsymbol{R}$ nicht mehr die Existenz *reeller* bzgl. $\leq_T$ minimaler Fortsetzungen erwarten, wie wir in [2, (3.7) (1)] gezeigt haben.

(7) Unter der Voraussetzung von Satz 1 besitzt $\boldsymbol{G}$ auch ein bzgl. $\leq_T$ *maximales* Element. Dies folgt sofort aus Satz 1 (1) durch Übergang von $\boldsymbol{G}$ zu $-\boldsymbol{G}$ und von $\leq$ zur inversen Präordnung $\geq$ auf E.

Bemerkung 5. (1) Satz 1 enthält den Satz von Andenaes [1, theorem 1] über die Existenz (S, p) – maximaler (d. h. für $T = -S$ bzgl. $\leq_T$ minimaler) Fortsetzungen eines linearen Funktionals f unterhalb eines sublinearen Funktionals p auf einem Vektorraum E, indem man als Präordnung die Gleichheitsrelation und für q das Nullfunktional auf $Q := \{0\}$ wählt. Dann ist die Voraussetzung $-(q \mathbin{/\!\!\backslash\!\!\backslash} (-f)) \leq p \mathbin{/\!\!\backslash\!\!\backslash} f$ äquivalent mit der Forderung $f \leq p \mid F$. Wie in Bemerkung 4 (4) folgt aus der $\boldsymbol{R}_+$-Homogenität des reellen sublinearen Funktionals p auf E die Linearität der T-minimalen Fortsetzung.

(2) Für den Spezialfall

$$E = ((Q + F) \mathbin{/\!\!\backslash\!\!\backslash} \overline{(P + F)}) \cap ((P + F) \mathbin{/\!\!\backslash\!\!\backslash} \overline{(Q + F)}),$$

reguläre Präordnungen $\leq$ und reellwertige p und q findet sich die Aussage (1) von Satz 1 bei Scheller [11, Satz III. 3 und 2) S. 28/29].

(3) Satz 1 enthält für den Fall $T = Q = \{0\}$ und $q = 0$ bekannte Fortsetzungssätze: Fuchssteiners Corollary 1.3 in [8] ergibt sich aus dem ersten Teil der Behauptung von Satz 1. Wählt man für p ein reelles subadditives Funktional, so erhält man Dinges' Theorem [7, 5.5] und, für $P = E$, den Satz 2 von Aumann [4] sowie Theorem 2 von Kranz [10].

Man hat dabei nur zu beachten, daß die Voraussetzung $-(q \mathbin{/\!\!\backslash\!\!\backslash} (-f)) \leq p \mathbin{/\!\!\backslash\!\!\backslash} f$ auch notwendig (vgl. Bemerkung 4 (5)) und überdies äquivalent mit der Forderung ist, daß für alle

$$x_1 \in P, x_2 \in Q, y_1, y_2 \in F \quad \text{mit} \quad p(x_1), q(x_2), f(y_1), -f(y_2) < \infty$$

und $x_2 + y_2 \leq x_1 + y_1$ stets

$$-q(x_2) + f(y_2) \leq p(x_1) + f(y_1)$$

gilt. Diese Voraussetzung ist in den genannten Sätzen erfüllt.

Auch Satz 3 von Aumann [4] über die Fortsetzbarkeit reeller isotoner additiver Funktionale von einer Unterhalbgruppe F zu reellen isotonen additiven Funktionalen auf die sog. Vergleicherhalbgruppe $V(F)$ folgt sofort aus Satz 1, indem man

$$T = P = Q = \{0\} \quad \text{und} \quad p = q = 0$$

wählt. Die Menge $V(F)$ aller $x \in E$, für die Elemente $n \in \boldsymbol{N}$, $x_1, x_2 \in F$ existieren mit

$$x_1 \leq nx \text{ und } x \leq x_2,$$

ist nämlich eine Unterhalbgruppe von $(F \mathbin{/\!\!\backslash\!\!\backslash} \bar{F}) \cap (F \mathbin{/\!\!/\!\!\backslash} \bar{F})$. Wie bereits Fuchssteiner [8] bemerkt hat, ist die Regularitätsforderung an die Ordnung in Aumanns' und Dinges' Sätzen überflüssig.

(4) Satz 1 (1) liefert für den Fall $P = Q = E$, $F = T = \{0\}$ die Existenzsätze von Kaufmann [9] und Kranz [10, theorem 1] sowie deren Übertragung auf geordnete Halbgruppen von Fuchssteiner [8, theorem 1]. Für $P = E$, $F = T = \{0\}$ und additives q erhält man Fuchssteiners Corollary 1.1 aus [8]. Die zusätzlichen Endlichkeitsvoraussetzungen in den genannten Sätzen sind überflüssig.

(5) Ist E ein Vektorraum, so ergeben sich aus Satz 1 die Sandwichsätze [3, 2.2] und (sofern $\leq$ die Gleichheitsrelation ist) [2, 1.9]. In diesem letzten Fall ist

$$\begin{aligned} &\{x \in P : p(x) < \infty\} \mathbin{/\!\!\backslash\!\!\backslash} \overline{\{y \in Q : q(y) < \infty\}} = \\ &= \{x \in P : p(x) < \infty\} - \{y \in Q : q(y) < \infty\}. \end{aligned}$$

Satz 1 enthält daher auch ein kürzlich von Ströhle [13, 2.2.2] bewiesenes Resultat (vgl. Bemerkung 4 (3)).

Auch die Kennzeichnung der *Eindeutigkeit* (S, p)-maximaler Fortsetzungen bei Andenaes [1, theorem 2] läßt sich auf die hier vorliegende Situation übertragen. Mit den Bezeichnungen von Satz 1 gilt:

Korollar 1. *Sei T eine Unterhalbgruppe von E. Die minimalen Elemente der bzgl. $\leq_T$ prägeordneten Menge $\boldsymbol{G}$ stimmen auf T genau dann überein, wenn $(q \mathbin{/\!\!\backslash\!\!\backslash} (-f)) \mathbin{/\!\!\backslash\!\!\backslash} (\overline{p \mathbin{/\!\!\backslash} f})$ auf T additiv ist.*

Beweis. Sei $T_0 = T$ und p_0 wie in Satz 1 definiert. Ist p_0 additiv, so gibt es nach Satz 1 ein $h \in \boldsymbol{G}$ mit $h \mid T \leq g \mid T$ für alle $g \in \boldsymbol{G}$.

Daher stimmt jedes bzgl. $\leq_T$ minimale Element von $\boldsymbol{G}$ mit h auf T überein.

Die Umkehrung folgt wie bei Andenaes: Nach Satz 1 existiert zu jedem $t \in T$ ein bzgl. $\leq_T$ minimales Element $h_t \in \boldsymbol{G}$ mit $h_t(t) = p_0(t)$. Sind nun $t_1, t_2 \in T$ so gewählt, daß $\{p_0(t_1), p_0(t_2)\} \neq \{+\infty, -\infty\}$, so ist für $i = 1, 2$ nach Voraussetzung $h_{t_1+t_2}(t_i) = h_{t_i}(t_i) = p_0(t_i)$, also

$$p_0(t_1 + t_2) = h_{t_1+t_2}(t_1 + t_2) = h_{t_1+t_2}(t_1) + h_{t_1+t_2}(t_2) = \\ = p_0(t_1) + p_0(t_2).$$

Wegen $p_0(0) = 0$ ist p_0 additiv auf T.

3. Anwendungen

Im folgenden sei X ein kompakter Hausdorff-Raum und $\boldsymbol{E}$ die bezüglich der punktweisen Ordnung $\leq$ auf X geordnete Halbgruppe aller nach unten beschränkten nach unten halbstetigen Funktionen auf X. Als Anwendung soll nun gezeigt werden, daß für Teilmengen $\boldsymbol{S}$ von $\boldsymbol{E}$ mit $\boldsymbol{S} + \boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{S}$ die Existenz und Kennzeichnung $\boldsymbol{S}$-minimaler gefegter Maße, die Existenz des Šilovrandes und eine Charakterisierung der Eindeutigkeit $\boldsymbol{S}$-minimaler gefegter Maße einfache Konsequenzen von Satz 1 bzw. Korollar 1 sind.

Die Menge $\boldsymbol{M}_+(X)$ aller positiven Radonmaße auf X stimmt bekanntlich mit der Menge aller reellen isotonen additiven Funktionale auf dem Vektorraum $\boldsymbol{C}(X)$ der stetigen reellen Funktionen auf X überein.

Für $\mu \in \boldsymbol{M}_+(X)$ ist das *äußere Maß* μ^*, definiert auf $\boldsymbol{E}$ durch

$$\mu^*(e) = \sup \{\mu(h) : h \in \boldsymbol{C}(X),\ h \leq e\},$$

eine isotone additive Fortsetzung von μ auf $\boldsymbol{E}$. Wir sagen, daß zwei Maße μ und ν auf $\boldsymbol{S}$ übereinstimmen, wenn $\mu^* \mid \boldsymbol{S} = \nu^* \mid \boldsymbol{S}$ gilt.

Sei A eine abgeschlossene Teilmenge von X, $\mu \in \boldsymbol{M}_+(X)$ und u eine numerische Funktion auf X. Dann sei

$$\hat{\mu}^A(u) = \inf \{\mu^*(h) : h \in \boldsymbol{E},\ nh \in \boldsymbol{S} \cup \{0\} \\ \text{für ein } n \in \boldsymbol{N},\ h \mid A \geq u \mid A\}.$$

μ wird von A *getragen*, wenn $\mu^*(1_{X\setminus A}) = 0$ ist

(dabei bezeichnet $1_{X\setminus A}$ die Indikatorfunktion der Menge $X\setminus A$).

Seien μ, $\nu \in \boldsymbol{M}_+(X)$. ν heißt *gefegtes Maß* von μ (bzgl. $\boldsymbol{S}$), wenn $\nu^* \mid \boldsymbol{S} \leq \mu^* \mid \boldsymbol{S}$ ist.

$\mu \in \boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{M}_+(X)$ heißt *in* $\boldsymbol{M}$ $\boldsymbol{S}$-*minimal*, wenn $\nu^* \mid \boldsymbol{S} = \mu^* \mid \boldsymbol{S}$ für jedes gefegte Maß $\nu \in \boldsymbol{M}$ von μ gilt. $\mu \in \boldsymbol{M}_+(X)$ heißt S-*minimal*, wenn μ in $\boldsymbol{M}_+(X)$ $\boldsymbol{S}$-minimal ist.

Satz 2. *Sei A eine abgeschlossen Teilmenge von X und $\mu \in \boldsymbol{M}_+(X)$ ein Maß auf X mit den Eigenschaften:*

(i) *Es existiert ein $s \in \boldsymbol{S}$ mit $s(x) > 0$ für alle $x \in A$ und $\mu^*(s) < \infty$.*

(ii) *Für jede Funktion $s \in \boldsymbol{S}$ mit $s \mid A \geq 0$ gilt $\mu^*(s) \geq 0$.*

Dann existiert für jedes $t \in -\boldsymbol{S}$ ein in der Menge $\boldsymbol{M}$ aller von A getragenen Maße $\boldsymbol{S}$-minimales gefegtes Maß γ von μ mit $-\gamma^*(-t) = \hat{\mu}^A(t)$.

Genau dann stimmen je zwei in $\boldsymbol{M}$ $\boldsymbol{S}$-minimale gefegte Maße von μ auf $\boldsymbol{S}$ überein, wenn $\hat{\mu}^A$ auf $-\boldsymbol{S}$ additiv ist.

Beweis. (1) Da A abgeschlossen ist, liegt $a := 1_{X\setminus A}$ in $\boldsymbol{E}$. Wählt man in Satz 1 für q das Nullfunktional auf $Q = \{0\}$, für f das Nullfunktional auf $F := \{ma : m \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}\}$, für P die Unterhalbgruppe $\boldsymbol{S} \cup \{0\}$ und für p die Restriktion von μ^* auf P, so folgt aus $a \mid A = 0$ und der Bedingung (ii) sofort $-(q \mathbin{/\!\!\backslash\!\!\backslash} (-f)) \leq p \mathbin{/\!\!\backslash\!\!\backslash} f$.

(2) Sei $\boldsymbol{G}$ die Menge der isotonen additiven Fortsetzungen von f auf $\boldsymbol{E}$, die von p auf P majorisiert werden.

Nach (i) ist für $P_\infty = \{h \in P : p(h) < \infty\}$

$\boldsymbol{C}(X) \subset \{e \in \boldsymbol{E}$: es existieren $s_1, s_2 \in P_\infty$, $a_1, a_2 \in F$ mit

$$-s_1 - a_1 \leq e \leq s_2 + a_2\} \subset (F \mathbin{/\!\!\backslash\!\!\backslash} \overline{(P_\infty + F)}) \cap ((P_\infty + F) \mathbin{/\!\!\backslash\!\!\backslash} \bar{F}).$$

Nach Satz 1 (4) ist daher für $g \in \boldsymbol{G}$ die Restriktion $\gamma := g \mid \boldsymbol{C}(X)$ reellwertig, also $\gamma \in \boldsymbol{M}_+(X)$. Nach Definition ist $\gamma^* \leq g$, insbesondere also $\gamma^* \mid P \leq p$ und

$$0 \leq \gamma^*(a) \leq g(a) = f(a) = 0, \text{ also } \gamma^* \mid F = f.$$

Folglich ist $\gamma \in \boldsymbol{M}$ und $\gamma^* \in \boldsymbol{G}$.

(3) Ist g ein bzgl. $\leq_P$ minimales Element von $\boldsymbol{G}$, so ist $\gamma := g \mid \boldsymbol{C}(X)$ ein in $\boldsymbol{M}$ $\boldsymbol{S}$-minimales Maß mit $\gamma^* \mid \boldsymbol{S} = g \mid \boldsymbol{S}$, denn für jedes $\nu \in \boldsymbol{M}$ mit $\nu^* \mid \boldsymbol{S} \leq \gamma^* \mid \boldsymbol{S}$ ist $\nu^* \in \boldsymbol{G}$ und $\nu^* \mid P \leq \leq \gamma^* \mid P \leq g \mid P$, also $\nu^* \mid P = \gamma^* \mid P = g \mid P$.

(4) Für $t \in -\boldsymbol{S}$ gilt

$$(-f) \wedge\!\!\!\wedge \bar{p} \wedge\!\!\!\wedge \bar{f}(-t) =$$
$$= \inf\left\{\frac{1}{n}\,\mu^*(h) : n \in \boldsymbol{N}, h \in P, a_1, a_2 \in F, -nt + h + a_1 \geq a_2\right\}$$
$$= \hat{\mu}^A(t),$$

da $a \mid A = 0$ und die Funktionen aus $\boldsymbol{E}$ nach unten beschränkt sind.

(5) Nach (1) und Satz 1 existiert zu $t \in -\boldsymbol{S}$ ein in der durch $\leq_P$ prägeordneten Menge $\boldsymbol{G}$ minimales Element $g \in \boldsymbol{G}$ mit $g(-t) = -[(-f) \wedge\!\!\!\wedge \bar{p} \wedge\!\!\!\wedge \bar{f}](-t)$ (vgl. Lemma 2 (1), (2)).

Nach (3) ist $\gamma := g \mid \boldsymbol{C}(X)$ ein in $\boldsymbol{M}$ $\boldsymbol{S}$-minimales Maß mit $\gamma^* \mid \boldsymbol{S} = g \mid \boldsymbol{S} \leq \mu^* \mid \boldsymbol{S}$.

Nach (4) ist

$$-\gamma^*(-t) = -g(-t) = \hat{\mu}^A(t).$$

(6) Für jedes in $\boldsymbol{M}$ $\boldsymbol{S}$-minimale gefegte Maß ν von μ ist ν^* ein bzgl. $\leq_P$ minimales Element von $\boldsymbol{G}$: Sei nämlich $g \in \boldsymbol{G}$ und $g \mid P \leq \nu^* \mid P$. Nach (2) ist $\gamma := g \mid \boldsymbol{C}(X) \in \boldsymbol{M}$ und $\gamma^* \mid \boldsymbol{S} \leq \leq g \mid \boldsymbol{S} \leq \nu^* \mid \boldsymbol{S}$, also $\gamma^* \mid \boldsymbol{S} = \nu^* \mid \boldsymbol{S}$ und damit $g \mid P = \nu^* \mid P$.

(7) Nach (ii) ist $\hat{\mu}^A(0) = 0$. Folglich ist nach (4) $\hat{\mu}^A$ genau dann additiv auf $-\boldsymbol{S}$, wenn $(-f) \wedge\!\!\!\wedge \bar{p} \wedge\!\!\!\wedge \bar{f}$ auf P additiv ist.

Wegen Lemma 2 (1), (2) ist dies nach Korollar 1 gleichbedeutend mit der Eigenschaft, daß je zwei bzgl. $\leq_P$ minimale Elemente von $\boldsymbol{G}$ auf P übereinstimmen. Dies bedeutet aber nach (3) und (6) gerade, daß je zwei in $\boldsymbol{M}$ $\boldsymbol{S}$-minimale gefegte Maße von μ auf $\boldsymbol{S}$ übereinstimmen.

Bemerkung 6. (1) Ist $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{C}(X)$, so folgt der Beweis von Satz 2 unmittelbar, indem man Satz 1 und Korollar 1 auf $\boldsymbol{C}(X)$ statt auf $\boldsymbol{E}$ anwendet.

(2) Ist $\boldsymbol{S}$ punktetrennend, so folgt die *Existenz des Šilovrandes* für $\boldsymbol{S}$ sofort aus folgendem in Satz 2 enthaltenen Resultat (vgl. [5, Satz 2]): Zu jedem Maß, das die Eigenschaft (i) von Satz 2 besitzt, und zu jedem abgeschlossenen Rand A für $\boldsymbol{S}$ existiert ein von A getragenes gefegtes Maß.

Aus Satz 2 erhält man nun leicht die folgenden von Boboc und Cornea bewiesenen Resultate ([6], theorem 1.1, 1.3, 1.2):

Korollar 2. (Boboc – Cornea) *Sei A eine abgeschlossene Teilmenge von X und $\mu \in \boldsymbol{M}_+(X)$ ein Maß, das die Eigenschaft (i) und für welches jedes gefegte Maß die Eigenschaft (ii) von Satz 2 besitzt. Dann gilt:*

(1) *Es existiert ein von A getragenes $\boldsymbol{S}$-minimales gefegtes Maß von μ.*

(2) *Genau dann stimmen je zwei $\boldsymbol{S}$-minimale gefegte Maße von μ auf $\boldsymbol{S}$ überein, wenn $\hat{\mu}^A$ auf $-\boldsymbol{S}$ additiv ist.*

(3) *μ ist genau dann $\boldsymbol{S}$-minimal, wenn $-\mu^*(-t) = \hat{\mu}^A(t)$ für alle $t \in -\boldsymbol{S}$ gilt.*

Beweis. Jedes gefegte Maß von μ erfüllt die Voraussetzungen (i) und (ii) von Satz 2. Sei $\boldsymbol{M}$ die Menge der von A getragenen Maße.

(0) Die von A getragenen $\boldsymbol{S}$-minimalen gefegten Maße von μ stimmen mit den von A getragenen in $\boldsymbol{M}$ $\boldsymbol{S}$-minimalen gefegten Maßen von μ überein. Sei nämlich $\gamma \in \boldsymbol{M}$ in $\boldsymbol{M}$ $\boldsymbol{S}$-minimal und $\gamma^* \mid \boldsymbol{S} \leq \mu^* \mid \boldsymbol{S}$. Ist $\nu \in \boldsymbol{M}_+(X)$ und $\nu^* \mid \boldsymbol{S} \leq \gamma^* \mid \boldsymbol{S}$, so ist ν ein gefegtes Maß von μ, besitzt also nach Satz 2 ein von A getragenes gefegtes Maß σ. Wegen $\sigma \in \boldsymbol{M}$ und $\sigma^* \mid \boldsymbol{S} \leq \nu^* \mid \boldsymbol{S} \leq \gamma^* \mid \boldsymbol{S}$ gilt $\sigma^* \mid \boldsymbol{S} = \gamma^* \mid \boldsymbol{S}$, also $\nu^* \mid \boldsymbol{S} = \gamma^* \mid \boldsymbol{S}$. Folglich ist γ $\boldsymbol{S}$-minimal. Die Umkehrung ist trivial.

(1) folgt unmittelbar aus (0) und Satz 2.

(2) Zu jedem $\boldsymbol{S}$-minimalen gefegten Maß ν von μ existiert nach Satz 2 und (0) ein $\boldsymbol{S}$-minimales von A getragenes gefegtes Maß γ. Aus $\gamma^* \mid \boldsymbol{S} = \nu^* \mid \boldsymbol{S}$ und Satz 2 folgt dann die Behauptung.

(3) Die Bedingung $-\mu^*(-t) = \hat{\mu}^A(t)$ für alle $t \in -\boldsymbol{S}$ ist nach Satz 2 offenbar notwendig für die $\boldsymbol{S}$-Minimalität von μ. Wie bei Boboc und Cornea [6] sieht man ein, daß sie auch hinreichend ist: Für jedes gefegte Maß ν von μ und jedes $t \in -\boldsymbol{S}$ gilt wegen der Eigenschaft (ii) für ν, daß $-\nu^*(-t) \leq \hat{\nu}^A(t)$ und somit $-\mu^*(-t) \leq -\nu^*(-t) \leq \hat{\nu}^A(t) \leq \hat{\mu}^A(t) = -\mu^*(-t)$, also $\nu^* \mid \boldsymbol{S} = \mu^* \mid \boldsymbol{S}$ gilt.

Literatur

[1] Andenaes, P. R.: Hahn-Banach extensions which are maximal on a given cone. Math. Ann. 188, 90–96 (1970).

[2] Anger, B., Lembcke, J.: Hahn-Banach type theorems for hypolinear functionals. Math. Ann. 209, 127–151 (1974).

[3] Anger, B., Lembcke, J.: Hahn-Banach type theorems for hypolinear functionals on preordered topological vector spaces. Pacific J. Math. 54, 13–33 (1974).

[4] Aumann, G.: Über die Erweiterung von additiven monotonen Funktionen auf regulär geordneten Halbgruppen. Arch. Math. 8, 422–427 (1957).

[5] Bauer, H.: Šilovscher Rand und Dirichletsches Problem. Ann. Inst. Fourier 11, 89–136 (1961).

[6] Boboc, N., Cornea, A.: Convex cones of lower semicontinuous functions on compact spaces. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 12, 471–525 (1967).

[7] Dinges, H.: Decomposition in ordered semigroups. J. Functional Analysis 5, 436–483 (1970).

[8] Fuchssteiner, B.: Sandwich theorems and lattice semigroups. J. Functional Analysis 16, 1–14 (1974).

[9] Kaufmann, R.: Interpolation of additive functionals. Studia Math. 27, 269–272 (1966).

[10] Kranz, P.: Additive functionals on abelian semigroups. Comment. Math. Prace Mat. 16, 239–246 (1972).

[11] Scheller, L.: Fortsetzungen additiver Funktionen auf Halbgruppen zwischen sub- und superadditiven Funktionalen. Dissertation U. Frankfurt/M. (1973).

[12] Simons, S.: Formes sous-linéaires minimales. Sém. Choquet 10e année, 23-01 – 23-08 (1970/71).

[13] Ströhle, K.: Varianten des Satzes von Hahn-Banach mit Anwendungen. Dissertation U. München (1973).