

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1975

MÜNCHEN 1976

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Minimale Fortsetzungen additiver Funktionale

Von Bernd Anger in Erlangen

Vorgelegt von Herrn Prof. Dr. Otto Haupt am 25. 10. 1974

Einleitung

Andenaes [1] hat eine Version des Satzes von Hahn-Banach bewiesen, die vor allem in der Choquetschen Theorie interessante Anwendungen besitzt: Ist auf einem Vektorraum E ein sublineares Funktional p und auf einem Unterraum von E ein lineares p -majorisiertes Funktional f gegeben, so gibt es für jede Teilmenge S von E unter allen p -majorisierten linearen Fortsetzungen von f auf E eine solche, die auf S *minimal* ist.

Hier soll nun gezeigt werden, daß ein Analogon dieses Satzes für prägeordnete Halbgruppen gilt. Dabei wird zugelassen, daß additive und subadditive Funktionale die Werte $+\infty$ und $-\infty$ annehmen.

Das Ergebnis enthält die von Aumann [4], Dinges [7], Kaufmann [9], Fuchssteiner [8] und Scheller [11] bewiesenen Varianten des Satzes von Hahn-Banach für Halbgruppen ebenso wie den Satz von Andenaes und einige Versionen des Satzes von Hahn-Banach für *hypolineare* Funktionale, wie sie von Ströhle [13] und in [2], [3] bewiesen wurden.

Wie bei Simons [12] und Fuchssteiner [8] wird gezeigt, daß (in einer geeigneten Ordnung) minimale subadditive Funktionale additiv sind. Das entscheidende Hilfsmittel sind dabei die bereits in [2] eingeführten *größten subadditiven Minoranten*.

Es scheint bemerkenswert, daß im Gegensatz zum Beweis des Satzes von Andenaes und des Hauptsatzes (1.8) in [2] der Satz von Hahn-Banach hier *nicht* benötigt wird, sondern vielmehr eine Konsequenz ist.

Als Anwendung wird gezeigt, daß die Existenz des Šilovrandes und einige wichtige Ergebnisse der *Choquetschen Theorie* für Halbgruppen nach unten beschränkter nach unten halbstetiger Funktionen auf kompakten Räumen (vgl. etwa Boboc und

Cornea [6]) einfache Folgerungen der hier bewiesenen Verallgemeinerung des Satzes von Hahn-Banach sind.

1. Subadditive Funktionale

Sei E eine (additiv geschriebene) kommutative Halbgruppe mit neutralem Element o .

Eine Teilmenge von E , welche o enthält und bezüglich der in E definierten Addition eine Halbgruppe ist, wird als *Unterhalbgruppe* von E bezeichnet.

Sei $\leq$ eine mit der Halbgruppenstruktur verträgliche Präordnung auf E .

Definition 1. Eine numerische Funktion $p: P \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ auf einer Halbgruppe $P \subset E$ heißt

isoton, wenn $x, y \in P$ und $x \leq y \Rightarrow p(x) \leq p(y)$;

homogen, wenn $x \in P, n \in \mathbf{N} \Rightarrow p(nx) = np(x)$;¹

subadditiv, wenn $o \in P \Rightarrow p(o) \leq o$ und wenn $x, y \in P$,

$\{p(x), p(y)\} \neq \{+\infty, -\infty\} \Rightarrow p(x+y) \leq p(x) + p(y)$;

additiv, wenn p und $-p$ subadditiv sind.

Bemerkung 1. (1) Für eine subadditive Funktion p auf einer Unterhalbgruppe P ist entweder $p(o) = o$ oder $p(o) = -\infty$ (und dann $p(P) \subset \{+\infty, -\infty\}$).

(2) Eine additive Funktion ist stets homogen.

Ein Beispiel einer additiven Funktion p auf $E = \mathbf{R}$ wird durch $p(o) = o$, $p(x) = -\infty$ für $x < o$ und $p(x) = +\infty$ für $x > o$ gegeben.

Additive Funktionen sind also *nicht* notwendig reellwertig.

(3) Aus Gründen der Beweisvereinfachung werden im folgenden stets Halbgruppen in E betrachtet, die o enthalten. Im Hinblick auf die Untersuchung isotoner, homogener oder subaddi-

¹ In $\bar{\mathbf{R}}$ gelten die üblichen Rechenregeln; es sei $o \cdot (\pm \infty) = o$.

tiver Funktionale p ist dies keine Einschränkung der Allgemeinheit, da man stets eine Halbgruppe zu einer Unterhalbgruppe und p so erweitern kann, daß die Isotonie-, Homogenitäts- und Subadditivitätseigenschaften von p erhalten bleiben.

Lemma 1. *Seien J und K disjunkte Indexmengen mit nicht leerer Vereinigung I . Für $i \in I$ sei p_i ein subadditives Funktional auf einer Unterhalbgruppe P_i von E . Die numerische Funktion p , definiert auf E durch²*

$$p(x) = \inf \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i \in I_x} p_i(x_i) : n \in \mathbf{N}, I_x \subset I, I_x \text{ endlich}, x_i \in P_i \right. \\ \left. \text{mit } p_i(x_i) < \infty (i \in I_x), nx + \sum_{k \in K \cap I_x} x_k \leq \sum_{j \in J \cap I_x} x_j \right\},$$

ist isoton, subadditiv und homogen.

Beweis: Die Isotonie von p folgt sofort aus der Definition.

Ferner ist $p(0) \leq 0$ wegen $p_i(0) \leq 0$ für $i \in I$.

Um zu zeigen, daß für $x, y \in E$ mit

$\{p(x), p(y)\} \neq \{+\infty, -\infty\}$ die Dreiecksungleichung

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

gilt, kann o. B. d. A. angenommen werden, daß $p(x), p(y) < \infty$. Dann existieren $n, m \in \mathbf{N}$ und endliche Teilmengen $I_x, I_y \subset I$ sowie Elemente $x_i, y_i \in P_i$ mit $p_i(x_i), p_i(y_i) < \infty$ und

$$nx + \sum_{k \in K \cap I_x} x_k \leq \sum_{j \in J \cap I_x} x_j, \\ my + \sum_{k \in K \cap I_y} y_k \leq \sum_{j \in J \cap I_y} y_j.$$

Für $i \in I_{x+y} := I_x \cup I_y$ sei

$$z_i = \begin{cases} mx_i + ny_i, & i \in I_x \cap I_y \\ mx_i, & i \in I_x \setminus I_y \\ ny_i, & i \in I_y \setminus I_x. \end{cases}$$

Dann ist $z_i \in P_i$ und $p_i(z_i) < \infty$ sowie

² $\sum \emptyset = 0, \inf \emptyset = \infty$.

$$nm(x+y) + \sum_{k \in K \cap I_{x+y}} z_k \leq \sum_{j \in J \cap I_{x+y}} z_j,$$

also

$$p(x+y) \leq \frac{1}{nm} \sum_{i \in I_{x+y}} p_i(z_i) \leq \frac{1}{n} \sum_{i \in I_x} p_i(x_i) + \frac{1}{m} \sum_{i \in I_y} p_i(y_i)$$

und damit $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

Die Homogenität von p läßt sich nun leicht einsehen.

Bemerkung 2. (1) Lemma 1 verallgemeinert [2, (1.5)] (vgl. auch [3, (6.3)]) und findet sich in ähnlicher Form bei Scheller [10, Lemma I 3 und Definition I 6].

(2) Ist im vorangehenden Lemma die Indexmenge I endlich, so ist wegen $p_i(0) \leq 0$ ($i \in I$) für $x \in E$

$$p(x) = \inf \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i \in I} p_i(x_i) : n \in \mathbb{N}, x_i \in P_i \text{ mit } p_i(x_i) < \infty (i \in I), \right. \\ \left. nx + \sum_{k \in K} x_k \leq \sum_{j \in J} x_j \right\}.$$

Definition 2. Die in Lemma 1 definierte Funktion p wird für $J, K \neq \emptyset$ mit $p_J \wedge \overline{p_K}$ und für $K = \emptyset$ mit $\bigwedge_{j \in J} p_j$ bezeichnet. Wird statt $\leq$ die inverse Präordnung $\geq$ zugrunde gelegt, so schreiben wir entsprechend $p_J \wedge \overline{p_K}$ bzw. $\bigwedge_{j \in J} p_j$. Ferner sei $p_{j_1} \wedge \dots \wedge p_{j_n} = \bigwedge_{j \in \{j_1, \dots, j_n\}} p_j$ und $p_{j_1} \wedge \dots \wedge p_{j_n} \wedge \overline{p_{k_1}} \wedge \dots \wedge \overline{p_{k_m}} = p_{\{j_1, \dots, j_n\}} \wedge \overline{p_{\{k_1, \dots, k_m\}}}$.

Entsprechende Bezeichnungen werden bezüglich der inversen Präordnung eingeführt.

Bemerkung 3. Sei $(p_i)_{i \in I}$ wie in Lemma 1 gegeben, und sei E eine Gruppe. Definiert man für $j \in J$ $h_j = p_j$ und für $k \in K$ h_k auf $-P_k$ durch $h_k(x_k) = p_k(-x_k)$, so gilt offenbar $\bigwedge_{i \in I} h_i = p_J \wedge \overline{p_K}$. Daher steht die in Definition 2 eingeführte Schreibweise im Einklang mit der Bezeichnung $h_k = \overline{p_k}$ in [2].

Lemma 2. Seien J und K disjunkte Indexmengen mit nicht leerer Vereinigung I . Für $i \in I$ sei p_i ein subadditives Funktional auf einer Unterhalbgruppe P_i von E .

(1) Die Funktion $p_J \wedge \overline{p_K}$ ($K \neq \emptyset$) bzw. $\bigwedge_{j \in J} p_j$ ($K = \emptyset$) ist das größte isotone homogene subadditive Funktional p auf E mit den Eigenschaften

$$p \mid P_j \leq p_j \text{ für alle } j \in J \text{ und } p \wedge \overline{p_K} = p \text{ für alle } k \in K.$$

$$(2) \quad (\bigwedge_{j \in J} p_j) \wedge (\overline{\bigwedge_{k \in K} p_k}) = p_J \wedge \overline{p_K}.$$

(3) Folgende Aussagen sind äquivalent:

$$(i) \quad -p_1 \leq (p_2 \wedge p_3) \mid P_1.$$

$$(ii) \quad -p_2 \leq (p_1 \wedge \overline{p_3}) \mid P_2.$$

(4) Folgende Aussagen sind äquivalent:

$$(i) \quad 0 \leq p_1 \wedge \overline{p_2}(0).$$

$$(ii) \quad -p_2(x_2) \leq p_1(x_1) \text{ für alle } x_1 \in P_1, x_2 \in P_2 \text{ mit } x_2 \leq x_1.$$

$$(iii) \quad -(p_2 \wedge \overline{p_1}) \leq p_1 \wedge \overline{p_2}.$$

(5) Sei $K \neq \emptyset$. Für jedes isotone additive Funktional f auf E sind äquivalent:

$$(i) \quad -p_k \leq f \mid P_k \text{ und } f \mid P_j \leq p_j \text{ für alle } j \in J, k \in K.$$

$$(ii) \quad -(\bigwedge_{k \in K} p_k \wedge \overline{\bigwedge_{j \in J} p_j}) \leq f \leq (\bigwedge_{j \in J} p_j) \wedge \overline{\bigwedge_{k \in K} p_k}.$$

Beweis. (1) Nach Lemma 1 ist $p = p_J \wedge \overline{p_K}$ bzw. $p = \bigwedge_{j \in J} p_j$ isoton, subadditiv und homogen. Aus der Definition von p folgt für $j \in J$ und $k \in K$ sofort

$$p \mid P_j \leq p_j \text{ und } p \wedge \overline{p_k} \leq p$$

sowie auf einfache Weise $p \leq p \wedge \overline{p_k}$.

Sei nun q ein isotones subadditives homogenes Funktional auf E mit

$$q \mid P_j \leq p_j \text{ und } q \wedge \overline{p_k} = q \text{ für alle } j \in J, k \in K.$$

Dann gilt für $y \in E$ und $y_k \in P_k$ mit $q(y + y_k) < \infty$ und $p_k(y_k) < \infty$

$$q(y) = q \wedge \overline{p_k}(y) \leq q(y + y_k) + p_k(y_k).$$

Für $x \in E$, $n \in \mathbb{N}$, jede endliche Teilmenge $I_x \subset I$ sowie Elemente $x_i \in P_i$ mit $p_i(x_i) < \infty$ und

$$nx + \sum_{k \in K \cap I_x} x_k \leq \sum_{j \in J \cap I_x} x_j$$

gilt daher

$$\begin{aligned} nq(x) &= q(nx) \leq q(nx + \sum_{k \in K \cap I_x} x_k) + \sum_{k \in K \cap I_x} p_k(x_k) \leq \\ &\leq q(\sum_{j \in J \cap I_x} x_j) + \sum_{k \in K \cap I_x} p_k(x_k) \leq \sum_{j \in J \cap I_x} q(x_j) + \sum_{k \in K \cap I_x} p_k(x_k) \leq \\ &\leq \sum_{j \in J \cap I_x} p_j(x_j) + \sum_{k \in K \cap I_x} p_k(x_k), \end{aligned}$$

also

$$q(x) \leq \frac{1}{n} \sum_{i \in I_x} p_i(x_i) \quad \text{und somit} \quad q(x) \leq p(x).$$

(2) Man sieht sofort ein, daß $(\bigwedge_{j \in J} p_j) \wedge (\overline{\bigwedge_{k \in K} p_k}) \leq p_J \wedge \overline{p_K}$

gilt. Die umgekehrte Ungleichung folgt aus (1) wegen

$$p_J \wedge \overline{p_K} \leq \bigwedge_{j \in J} p_j \quad \text{und} \quad (p_J \wedge \overline{p_K}) \wedge (\overline{\bigwedge_{k \in K} p_k}) = p_J \wedge \overline{p_K}.$$

(3) (i) $\Rightarrow$ (ii). Sei $x_2 \in P_2$ und o. B. d. A. $p_2(x_2) < \infty$ sowie $p_1 \wedge \overline{p_3}(x_2) < \infty$. Für alle $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in P_i$ mit $p_i(x_i) < \infty$ und $nx_2 + x_3 \geq x_1$ gilt

$$\begin{aligned} p_2(x_2) + \frac{1}{n} (p_1(x_1) + p_3(x_3)) &\geq \frac{1}{n} p_1(x_1) + \frac{1}{n} (p_2(nx_2) + \\ &+ p_3(x_3)) \geq \frac{1}{n} (p_1(x_1) + p_2 \wedge p_3(x_1)) \geq 0 \end{aligned}$$

und somit

$$-p_2(x_2) \leq p_1 \wedge \overline{p_3}(x_2).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sei $x_1 \in P_1$ und o. B. d. A. $p_1(x_1) < \infty$ sowie $p_2 \wedge p_3(x_1) < \infty$. Für alle $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in P_i$ mit $p_i(x_i) < \infty$ und $nx_1 \leq x_2 + x_3$ gilt $p_1(x_1) + \frac{1}{n} (p_2(x_2) + p_3(x_3)) \geq \frac{1}{n} p_2(x_2) + \frac{1}{n} (p_1(nx_1) + p_3(x_3)) \geq \frac{1}{n} (p_2(x_2) + p_1 \wedge \overline{p_3}(x_2)) \geq 0$

und somit

$$-p_1(x_1) \leq p_2 \wedge p_3(x_1).$$

(4) (i) $\Rightarrow$ (ii). Sei $x_i \in P_i$, $x_2 \leq x_1$ und o. B. d. A. $p_i(x_i) < \infty$. Dann ist $0 \leq p_1 \wedge \overline{p_2}(0) \leq p_1(x_1) + p_2(x_2)$, also

$$-p_2(x_2) \leq p_1(x_1).$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Wegen (ii) ist $-p_1 \leq (p_2 \wedge \overline{p_2}) \mid P_1$, also

$$-p_2 \leq (p_1 \wedge \overline{p_2}) \mid P_2 = ((p_1 \wedge \overline{p_2}) \wedge (p_1 \wedge \overline{p_2})) \mid P_2$$

nach (3) und (1) und folglich

$$-(p_1 \wedge \overline{p_2}) \leq p_2 \wedge \overline{(p_1 \wedge \overline{p_2})} \leq p_2 \wedge \overline{p_1}.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) wegen $p_2 \wedge \overline{p_1}(0) \leq 0$.

(5) (i) $\Rightarrow$ (ii). Sei $q_1 = \bigwedge_{j \in J} p_j$ und $q_2 = \bigwedge_{k \in K} p_k$. Nach (1) gilt $f \leq q_1$ und $-f \leq q_2$, also nach (1) $-q_2 \leq f = f \wedge q_1$ und $-q_1 \leq -f = (-f) \wedge q_2$. Aus (3) folgt daher

$$-f \leq q_2 \wedge \overline{q_1} \text{ und } -(-f) \leq q_1 \wedge \overline{q_2}, \text{ also } -(q_2 \wedge \overline{q_1}) \leq f \leq \leq q_1 \wedge \overline{q_2}.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) nach (1).

2. Minimale Fortsetzungen

Definition 3. P_1 und P_2 seien Unterhalbgruppen von E . $P_1 \wedge \overline{P_2}$ sei die Unterhalbgruppe aller $x \in E$, für welche Elemente $n \in \mathbb{N}$, $x_1 \in P_1$ und $x_2 \in P_2$ existieren mit $nx + x_2 \leq x_1$ (vgl. [4], [7]).

In Anlehnung an Definition 2 bezeichnen wir mit $P_1 \wedge P_2$ die Unterhalbgruppe $(P_1 + P_2) \wedge \{\overline{0}\}$. Entsprechende Bezeichnungen werden bezüglich der inversen Präordnung $\geq$ eingeführt.

Definition 4. Für jede Teilmenge T von E bezeichne $\leq_T$ die auf $\mathbb{R}^E$ durch die punktweise Ordnung auf T definierte Präordnung:

$$p \leq_T q \text{ bedeute } p \mid T \leq q \mid T.$$

Satz 1. Seien p bzw. q subadditive Funktionale auf Unterhalbgruppen P bzw. Q von E , und sei f ein additives Funktional auf einer Unterhalbgruppe F von E mit

$$-(q \wedge (\neg f)) \leq p \wedge f.$$

(1) Für jede Teilmenge T von E besitzt die bzgl. $\leq_T$ prägeordnete Menge $\mathbf{G}$ aller isotonen additiven Fortsetzungen g von f auf E mit

$$-q \leq g \mid Q \text{ und } g \mid P \leq p$$

ein minimales Element h .

(2) Ist $T_0 \subset T$ und hat die von T_0 in E erzeugte Unterhalbgruppe S_0 die Eigenschaft, daß $p_0 := -((q \wedge (\neg f)) \wedge (\overline{p \wedge f})) \mid S_0$ additiv ist, dann kann h überdies so gewählt werden, daß

$$h(s) = \inf \{g(s) : g \in \mathbf{G}\} = p_0(s) \text{ für alle } s \in S_0$$

gilt.

(3) Jede einpunktige Menge $T_0 \subset T$ besitzt die in (2) geforderte Eigenschaft.

(4) Ist f reell und $P_\infty = \{x \in P : p(x) < \infty\}$, $Q_\infty = \{y \in Q : q(y) < \infty\}$, so gilt für jedes Element $g \in \mathbf{G}$:

$$g((Q_\infty + F) \wedge (\overline{P_\infty + F})) \subset]-\infty, \infty] \text{ und}$$

$$g((P_\infty + F) \wedge (\overline{Q_\infty + F})) \subset [-\infty, \infty[.$$

Insbesondere ist g reell, wenn f reell ist und

$E = ((Q_\infty + F) \wedge (\overline{P_\infty + F})) \cap ((P_\infty + F) \wedge (\overline{Q_\infty + F}))$ gilt.

Beweis. (i) Bezeichnet $S = \{\sum_{i \in I} t_i : I \text{ endlich, } t_i \in T\} \cup \{0\}$

die von T erzeugte Unterhalbgruppe in E , so ist $h \in \mathbf{G}$ offenbar genau dann ein bzgl. $\leq_T$ minimales Element von $\mathbf{G}$ (d. h. jedes $g \in \mathbf{G}$ mit $g \mid T \leq h \mid T$ stimmt mit h auf T überein), wenn h ein bzgl. $\leq_S$ minimales Element von $\mathbf{G}$ ist. Daher kann o. B. d. A. $T = S$ angenommen werden.

Für $p_2 := q \wedge (\neg f)$ und $p_3 := p \wedge f$ gilt wegen $-p_2 \leq p_3$ und Lemma 1 nach Lemma 2 (4)

$$-(p_2 \wedge \overline{p_3})(0) \leq p_3 \wedge \overline{p_2}(0) \leq 0, \text{ also } -(p_2 \wedge \overline{p_3})(0) = 0$$

nach Lemma 1. Somit ist p_0 für jede einpunktige Menge T_0 nach Lemma 1 additiv auf S_0 , also (3) bewiesen.

(ii) Sei nun T_0 eine beliebige Teilmenge von $T = S$ mit dieser Eigenschaft, und sei $p_1 := p_0 \wedge p_3$. Dann folgt aus der Definition von p_0 für alle $x_1, x_2 \in E$ mit $x_2 \leq x_1$ sofort

$$-p_2(x_2) \leq p_1(x_1).$$

Nach Lemma 2 (4) ist dann

$$-(p_2 \wedge \overline{p_1}) \leq p_1 \wedge \overline{p_2}.$$

(iii) Auf $\overline{\mathbf{R}}^E$ wird nun eine Ordnung $<$ wie folgt eingeführt: $u < v$ gelte genau dann, wenn entweder $u \mid S \leq v \mid S$ und $u \mid S \neq v \mid S$ oder $u \mid S = v \mid S$ und $u \leq v$ gilt. (Aus $u \leq v$ folgt stets $u < v$).

Es soll nun gezeigt werden, daß die bzgl. $<$ geordnete Menge $\mathbf{H}$ aller isotonen, homogenen und subadditiven Funktionen h auf E mit

$$-(p_2 \wedge \overline{p_1}) \leq h \leq p_1 \wedge \overline{p_2}$$

ein minimales Element besitzt.

Nach Lemma 1 ist $p_1 \wedge \overline{p_2} \in \mathbf{H}$, also $\mathbf{H} \neq \emptyset$.

Sei $(h_i)_{i \in I}$ eine Kette in $\mathbf{H}$, U eine Unterhalbgruppe von E und I_U eine nicht leere Teilmenge von I , für die $\{h_i : i \in I_U\}$ bzgl. $\leq_U$ total geordnet ist. Dann ist $u : U \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$, definiert durch

$$u(x) = \inf_{i \in I_U} h_i(x) \quad (x \in U),$$

subadditiv auf U , da $u(0) \leq 0$ und die Gültigkeit der Dreiecksungleichung wie folgt eingesehen werden kann:

Seien $x, y \in U$ und o. B. d. A. $u(x) < \infty$ sowie $u(y) < \infty$. Seien $i, j \in I_U$ mit $h_i(x) < \infty$ und $h_j(y) < \infty$. Ist etwa

$h_i \mid U \leq h_j \mid U$, so gilt $h_i(y) \leq h_j(y) < \infty$ und

$$u(x+y) \leq h_i(x+y) \leq h_i(x) + h_i(y) \leq h_i(x) + h_j(y),$$

also

$$u(x+y) \leq u(x) + u(y).$$

Hieraus folgt, daß $s : S \rightarrow \mathbf{R}$, definiert durch

$$s(x) = \inf_{i \in I} h_i(x) \quad (x \in S),$$

subadditiv auf S ist.

Ist $J = \{j \in I : h_j \mid S = s\}$ nicht leer und $h_j : E \rightarrow \mathbf{R}$ definiert durch

$$h_j(x) = \inf_{j \in J} h_j(x) \quad (x \in E),$$

so ist für $i, j \in J$ $h_i < h_j$ oder $h_j < h_i$, also wegen $h_i \mid S = h_j \mid S$ auch $h_i \leq h_j$ oder $h_j \leq h_i$. Nach obigem ist dann h_j subadditiv auf E . Ferner ist $h_j \in \mathbf{H}$, da $h_j \in \mathbf{H}$ für alle $j \in J$. Für $i \in J$ ist $h_j < h_i$, und für $i \in I \setminus J$ ist $h_j \mid S = s \leq h_i \mid S$ sowie $s \neq h_i \mid S$, also $h_j < h_i$. Daher ist h_j untere Schranke aller h_i ($i \in I$) in $\mathbf{H}$, sofern J nicht leer ist.

Sei nun angenommen, daß J leer ist.

Wegen $-s \leq (p_2 \wedge \overline{p_1}) \mid S$ gilt nach Lemma 2 (3) und Lemma 1 für $x_1, x_2 \in E$ mit $x_2 \leq x_1$

$$-p_2(x_2) \leq s \wedge p_1(x_2) \leq s \wedge p_1(x_1).$$

Nach Lemma 2 (4) ist daher

$$-(p_2 \wedge \overline{p_1}) \leq -(p_2 \wedge (\overline{s \wedge p_1})) \leq (s \wedge p_1) \wedge \overline{p_2} \leq p_1 \wedge \overline{p_2}.$$

Folglich ist $h_I := (s \wedge p_1) \wedge \overline{p_2} \in \mathbf{H}$, und wegen $h_I \mid S \leq s \leq \leq h_i \mid S$ und $s \neq h_i \mid S$ ist $h_I < h_i$ für alle $i \in I$.

Nach dem Zornschen Lemma besitzt nunmehr $\mathbf{H}$ ein minimales Element h bzgl. der Ordnung $<$.

(iv) Wir zeigen, daß h additiv ist.

Wegen $p_2 \wedge \overline{p_1}(0) \leq 0$ und $h(0) \leq 0$ gilt $h(0) = 0$.

Daher genügt es zum Nachweis der Additivität von h , die Ungleichung

$$h(x) + h(y) \leq h(x + y)$$

für alle $x, y \in E$ mit

$$-\infty < h(x), -\infty < h(y) \text{ und } h(x + y) < \infty$$

zu beweisen.

Sei $t := p_2 \wedge \bar{p}_1$. Dann ist $-t \leq h$, also gilt nach Lemma 2, (1) und (4)

$$-t \leq -(t \wedge \bar{h}) \leq h \wedge \bar{t} \leq h \leq p_1 \wedge \bar{p}_2$$

und somit $h \wedge \bar{t} \in \mathbf{H}$. Wegen $h \wedge \bar{t} \leq h$ gilt $h \wedge \bar{t} < h$, also $h = h \wedge \bar{t}$ wegen der Minimalität von h .

Auf $E_x := \{nx : n \in N \cup \{0\}\}$ ist $r := -h|_{E_x}$ ein additives Funktional, da $h(0) = 0$ und h homogen ist. Wegen $-r = h|_{E_x} = (h \wedge \bar{t})|_{E_x}$ gilt nach Lemma 2(3) $-h \leq r \wedge t = t \wedge r$, also

$$-t \leq h \wedge \bar{r} \text{ und somit } h \wedge \bar{r} \in \mathbf{H}.$$

Aus der Minimalität von h erhält man wieder $h = h \wedge \bar{r}$. Hieraus folgt die zu beweisende Ungleichung:

$$h(y) \leq h(x+y) + r(x) = h(x+y) - h(x).$$

(v) Nach Lemma 2 (1) gilt

$$h|_{S_0} \leq p_0, \quad h|_P \leq p \quad \text{und} \quad h|_F \leq f$$

sowie wegen $p_1 \leq p_3$

$$\begin{aligned} -h|_{S_0} &\leq (p_2 \wedge \bar{p}_1)|_{S_0} \leq (p_2 \wedge \bar{p}_3)|_{S_0} = -p_0, \\ -h|_Q &\leq q \quad \text{und} \quad -h|_F \leq -f, \end{aligned}$$

also $h \in \mathbf{G}$ und $h|_{S_0} = p_0$.

Für $g \in \mathbf{G}$ gilt nach Lemma 2 (1) $g \leq p_3$ und $-g \leq p_2$, also nach Lemma 2, (2) und (5)

$$p_0 = -(p_2 \wedge \bar{p}_3)|_{S_0} \leq g|_{S_0}.$$

Folglich ist

$$h(s) = \inf \{g(s) : g \in \mathbf{G}\} \text{ für alle } s \in S_0.$$

(vi) h ist ein minimales Element der bzgl. $\leq_s$ prägeordneten Menge $\mathbf{G}$: Ist nämlich $g \in \mathbf{G}$ und $g|_S \leq h|_S$, so gilt

$$p_0 \leq g|_{S_0} \leq h|_{S_0} = p_0,$$

also

$$-p_2 \leq g \leq p_0 \wedge p_3 = p_1.$$

Nach Lemma 2 (2), (5) ist $g \in \mathbf{H}$. Die Annahme $g \mid S \neq h \mid S$ impliziert den Widerspruch $g < h$. Hieraus folgt (1) und, wegen (v), auch Behauptung (2).

(vi) Zum Beweis von (4) genügt es zu bemerken, daß nach Lemma 2 (5) $\mathbf{G}$ mit der Menge aller isotonen additiven Funktionale g auf E übereinstimmt, welche den Ungleichungen

$$-(p_2 \wedge \bar{p}_3) \leq g \leq p_3 \wedge \bar{p}_2$$

genügen. Dann nämlich ist

$$\begin{aligned} (Q_\infty + F) \wedge (\overline{P_\infty + F}) &= (Q_\infty \wedge F) \wedge (\overline{P_\infty \wedge F}) = \\ &= \{x \in E : p_2(x) < \infty\} \wedge \{x \in E : p_3(x) < \infty\} = \\ &= \{x \in E : p_2 \wedge \bar{p}_3(x) < \infty\} \end{aligned}$$

und ebenso

$$(P_\infty + F) \wedge (\overline{Q_\infty + F}) = \{x \in E : p_3 \wedge \bar{p}_2(x) < \infty\}.$$

Bemerkung 4. (1) Ersetzt man p und q durch *Familien* subadditiver Funktionale, so ergibt sich eine Satz 1 entsprechende Aussage aus Lemma 2 (5).

Auf diese Weise läßt sich aus Satz 1 auch ein Fortsetzungssatz für *beliebige numerische Majoranten und Minoranten* gewinnen:³ Für beliebiges $p: E \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ und $x \in E$ definiere man ein subadditives Funktional p_x auf $E_x = \{nx : n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$ durch $p_x(y) = \inf \{np(x) : n \in \mathbf{N} \cup \{0\}, nx = y\}$. Dann ist p_x subadditiv auf der Unterhalbgruppe E_x , und $p_x(x) \leq p(x)$. Sind nun p und q numerische Funktionen auf E , so ist gemäß Lemma 2(5) die Existenz einer isotonen additiven Fortsetzung g von f auf E mit $-q \leq g \leq p$ äquivalent zur Existenz einer isotonen additiven Fortsetzung g von f auf E mit

$$-(\bigwedge_{x \in E} q_x) \wedge (\overline{\bigwedge_{x \in E} p_x}) \leq g \leq (\bigwedge_{x \in E} p_x) \wedge (\overline{\bigwedge_{x \in E} q_x}).$$

³ Für Vektorräume E und $T = \{0\}$ wurde dieses Problem von Ströhle [13] behandelt; die Methode haben wir bereits in [3, 6.5] beim Beweis des Satzes von Mazur-Orlicz ausgeführt.

(2) Für $T = \{t_0\}$ folgt sofort: $g \in \mathbf{G}$ ist genau dann ein minimales Element von $\mathbf{G}$, wenn $g(t_0) = p_0(t_0)$ gilt.

(3) Ist E eine Gruppe und f reellwertig, so ist jede der Bedingungen

$$E = (Q_\infty + F) \wedge (\overline{P_\infty + F}) \text{ oder } E = (P_\infty + F) \wedge (\overline{Q_\infty + F})$$

hinreichend dafür, daß jedes $g \in \mathbf{G}$ reellwertig ist.

(4) Ist E ein Vektorraum und ist eine der Schranken

$$p \wedge f \wedge \bar{q} \wedge (\overline{-f}) \text{ oder } q \wedge (-f) \wedge \bar{p} \wedge \bar{f}$$

$\mathbf{R}_+$ -homogen und nimmt den Wert $+\infty$ nicht an, so ist jedes $g \in \mathbf{G}$ reellwertig (nach (iv) und Lemma 2 (2)) sowie $\mathbf{R}$ -homogen, genügt also der Gleichung

$$g(\lambda x) = \lambda g(x) \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbf{R}, x \in E$$

(dies folgt durch Approximation sofort aus der Gültigkeit obiger Gleichung für rationale λ).

(5) Die Voraussetzung

$$-(q \wedge (-f)) \leq p \wedge f$$

ist, wie der Beweis von Satz 1 zeigt, *notwendig* für die Existenz eines Elements in $\mathbf{G}$ und (nach Lemma 2, (2) und (3)) äquivalent mit der Forderung

$$-q \leq (p \wedge f \wedge \overline{(-f)}) \mid Q.$$

Dies stellt den Zusammenhang mit Fortsetzungssätzen in [2, (2.4) (vgl. (2.1))] und [3, (3.4)] her.

(6) Läßt man für die Schranken p und $-q$ nicht nur reelle Werte zu, so kann man bereits auf Vektorräumen E selbst unter der Voraussetzung $\mathbf{G} \cap E^* \neq \emptyset$ und $p(T), q(T) \subset \mathbf{R}$ nicht mehr die Existenz *reeller* bzgl. $\leq_T$ minimaler Fortsetzungen erwarten, wie wir in [2, (3.7) (1)] gezeigt haben.

(7) Unter der Voraussetzung von Satz 1 besitzt $\mathbf{G}$ auch ein bzgl. $\leq_T$ maximales Element. Dies folgt sofort aus Satz 1 (1) durch Übergang von $\mathbf{G}$ zu $-\mathbf{G}$ und von $\leq$ zur inversen Präordnung $\geq$ auf E .

Bemerkung 5. (1) Satz 1 enthält den Satz von Andenaes [1, theorem 1] über die Existenz (S, p) - maximaler (d. h. für $T = -S$ bzgl. $\leq_T$ minimaler) Fortsetzungen eines linearen Funktional f unterhalb eines sublinearen Funktional p auf einem Vektorraum E , indem man als Präordnung die Gleichheitsrelation und für q das Nullfunktional auf $Q := \{0\}$ wählt. Dann ist die Voraussetzung $-(q \wedge (-f)) \leq p \wedge f$ äquivalent mit der Forderung $f \leq p \mid F$. Wie in Bemerkung 4 (4) folgt aus der $\mathbf{R}_+$ -Homogenität des reellen sublinearen Funktional p auf E die Linearität der T -minimalen Fortsetzung.

(2) Für den Spezialfall

$$E = ((Q + F) \wedge (\overline{P + F})) \cap ((P + F) \wedge (\overline{Q + F})),$$

reguläre Präordnungen $\leq$ und reellwertige p und q findet sich die Aussage (1) von Satz 1 bei Scheller [11, Satz III. 3 und 2) S. 28/29].

(3) Satz 1 enthält für den Fall $T = Q = \{0\}$ und $q = 0$ bekannte Fortsetzungssätze: Fuchssteiners Corollary 1.3 in [8] ergibt sich aus dem ersten Teil der Behauptung von Satz 1. Wählt man für p ein reelles subadditives Funktional, so erhält man Dinges' Theorem [7, 5.5] und, für $P = E$, den Satz 2 von Aumann [4] sowie Theorem 2 von Kranz [10].

Man hat dabei nur zu beachten, daß die Voraussetzung $-(q \wedge (-f)) \leq p \wedge f$ auch notwendig (vgl. Bemerkung 4 (5)) und überdies äquivalent mit der Forderung ist, daß für alle

$x_1 \in P, x_2 \in Q, y_1, y_2 \in F$ mit $p(x_1), q(x_2), f(y_1), -f(y_2) < \infty$ und $x_2 + y_2 \leq x_1 + y_1$ stets

$$-q(x_2) + f(y_2) \leq p(x_1) + f(y_1)$$

gilt. Diese Voraussetzung ist in den genannten Sätzen erfüllt.

Auch Satz 3 von Aumann [4] über die Fortsetzbarkeit reeller isotoner additiver Funktional von einer Unterhalbgruppe F zu reellen isotonen additiven Funktionalen auf die sog. Vergleichershalbgruppe $V(F)$ folgt sofort aus Satz 1, indem man

$$T = P = Q = \{0\} \quad \text{und} \quad p = q = 0$$

wählt. Die Menge $V(F)$ aller $x \in E$, für die Elemente $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2 \in F$ existieren mit

$$x_1 \leq nx \text{ und } x \leq x_2,$$

ist nämlich eine Unterhalbgruppe von $(F \mathbin{\ll} \bar{F}) \cap (F \mathbin{\ll} \bar{F})$. Wie bereits Fuchssteiner [8] bemerkt hat, ist die Regularitätsforderung an die Ordnung in Aumanns' und Dinges' Sätzen überflüssig.

(4) Satz 1 (1) liefert für den Fall $P = Q = E$, $F = T = \{0\}$ die Existenzsätze von Kaufmann [9] und Kranz [10, theorem 1] sowie deren Übertragung auf geordnete Halbgruppen von Fuchssteiner [8, theorem 1]. Für $P = E$, $F = T = \{0\}$ und additives q erhält man Fuchssteiners Corollary 1.1 aus [8]. Die zusätzlichen Endlichkeitsvoraussetzungen in den genannten Sätzen sind überflüssig.

(5) Ist E ein Vektorraum, so ergeben sich aus Satz 1 die Sandwichsätze [3, 2.2] und (sofern $\leq$ die Gleichheitsrelation ist) [2, 1.9]. In diesem letzten Fall ist

$$\begin{aligned} & \{x \in P : p(x) < \infty\} \mathbin{\ll} \overline{\{y \in Q : q(y) < \infty\}} = \\ & = \{x \in P : p(x) < \infty\} - \{y \in Q : q(y) < \infty\}. \end{aligned}$$

Satz 1 enthält daher auch ein kürzlich von Ströhle [13, 2.2.2] bewiesenes Resultat (vgl. Bemerkung 4 (3)).

Auch die Kennzeichnung der *Eindeutigkeit* (S, p) -maximaler Fortsetzungen bei Andenaes [1, theorem 2] läßt sich auf die hier vorliegende Situation übertragen. Mit den Bezeichnungen von Satz 1 gilt:

Korollar 1. *Sei T eine Unterhalbgruppe von E . Die minimalen Elemente der bzgl. $\leq_T$ prägeordneten Menge $\mathbf{G}$ stimmen auf T genau dann überein, wenn $(q \mathbin{\ll} (-f)) \mathbin{\ll} (\overline{p \mathbin{\ll} f})$ auf T additiv ist.*

Beweis. Sei $T_0 = T$ und p_0 wie in Satz 1 definiert. Ist p_0 additiv, so gibt es nach Satz 1 ein $h \in \mathbf{G}$ mit $h \mid T \leq g \mid T$ für alle $g \in \mathbf{G}$.

Daher stimmt jedes bzgl. $\leq_T$ minimale Element von $\mathbf{G}$ mit h auf T überein.

Die Umkehrung folgt wie bei Andenaes: Nach Satz 1 existiert zu jedem $t \in T$ ein bzgl. $\leq_T$ minimales Element $h_t \in \mathbf{G}$ mit $h_t(t) = p_0(t)$. Sind nun $t_1, t_2 \in T$ so gewählt, daß $\{p_0(t_1), p_0(t_2)\} \neq \{+\infty, -\infty\}$, so ist für $i = 1, 2$ nach Voraussetzung $h_{t_1+t_2}(t_i) = h_{t_i}(t_i) = p_0(t_i)$, also

$$\begin{aligned} p_0(t_1 + t_2) &= h_{t_1+t_2}(t_1 + t_2) = h_{t_1+t_2}(t_1) + h_{t_1+t_2}(t_2) = \\ &= p_0(t_1) + p_0(t_2). \end{aligned}$$

Wegen $p_0(0) = 0$ ist p_0 additiv auf T .

3. Anwendungen

Im folgenden sei X ein kompakter Hausdorff-Raum und $\mathbf{E}$ die bezüglich der punktweisen Ordnung $\leq$ auf X geordnete Halbgruppe aller nach unten beschränkten nach unten halbstetigen Funktionen auf X . Als Anwendung soll nun gezeigt werden, daß für Teilmengen $\mathbf{S}$ von $\mathbf{E}$ mit $\mathbf{S} + \mathbf{S} \subset \mathbf{S}$ die Existenz und Kennzeichnung $\mathbf{S}$ -minimaler gefegter Maße, die Existenz des Šilovrandes und eine Charakterisierung der Eindeutigkeit $\mathbf{S}$ -minimaler gefegter Maße einfache Konsequenzen von Satz 1 bzw. Korollar 1 sind.

Die Menge $\mathbf{M}_+(X)$ aller positiven Radonmaße auf X stimmt bekanntlich mit der Menge aller reellen isotonen additiven Funktionale auf dem Vektorraum $\mathbf{C}(X)$ der stetigen reellen Funktionen auf X überein.

Für $\mu \in \mathbf{M}_+(X)$ ist das *äußere Maß* μ^* , definiert auf $\mathbf{E}$ durch

$$\mu^*(e) = \sup \{ \mu(h) : h \in \mathbf{C}(X), h \leq e \},$$

eine isotone additive Fortsetzung von μ auf $\mathbf{E}$. Wir sagen, daß zwei Maße μ und ν auf $\mathbf{S}$ übereinstimmen, wenn $\mu^* \upharpoonright \mathbf{S} = \nu^* \upharpoonright \mathbf{S}$ gilt.

Sei A eine abgeschlossene Teilmenge von X , $\mu \in \mathbf{M}_+(X)$ und u eine numerische Funktion auf X . Dann sei

$$\begin{aligned} \hat{\mu}^A(u) &= \inf \{ \mu^*(h) : h \in \mathbf{E}, nh \in \mathbf{S} \cup \{0\} \\ &\quad \text{für ein } n \in \mathbf{N}, h \upharpoonright A \geq u \upharpoonright A \}. \end{aligned}$$

μ wird von A getragen, wenn $\mu^*(1_{X \setminus A}) = 0$ ist

(dabei bezeichnet $1_{X \setminus A}$ die Indikatorfunktion der Menge $X \setminus A$).

Seien $\mu, \nu \in \mathbf{M}_+(X)$. ν heißt *gefügtes Maß* von μ (bzgl. $\mathbf{S}$), wenn $\nu^* | \mathbf{S} \leq \mu^* | \mathbf{S}$ ist.

$\mu \in \mathbf{M} \subset \mathbf{M}_+(X)$ heißt *in $\mathbf{M}$ $\mathbf{S}$ -minimal*, wenn $\nu^* | \mathbf{S} = \mu^* | \mathbf{S}$ für jedes gefügte Maß $\nu \in \mathbf{M}$ von μ gilt. $\mu \in \mathbf{M}_+(X)$ heißt *$\mathbf{S}$ -minimal*, wenn μ in $\mathbf{M}_+(X)$ $\mathbf{S}$ -minimal ist.

Satz 2. Sei A eine abgeschlossen Teilmenge von X und $\mu \in \mathbf{M}_+(X)$ ein Maß auf X mit den Eigenschaften:

(i) Es existiert ein $s \in \mathbf{S}$ mit $s(x) > 0$ für alle $x \in A$ und $\mu^*(s) < \infty$.

(ii) Für jede Funktion $s \in \mathbf{S}$ mit $s | A \geq 0$ gilt $\mu^*(s) \geq 0$.

Dann existiert für jedes $t \in -\mathbf{S}$ ein in der Menge $\mathbf{M}$ aller von A getragenen Maße $\mathbf{S}$ -minimales gefügtes Maß γ von μ mit $-\gamma^*(-t) = \hat{\mu}^A(t)$.

Genau dann stimmen je zwei in $\mathbf{M}$ $\mathbf{S}$ -minimale gefügte Maße von μ auf $\mathbf{S}$ überein, wenn $\hat{\mu}^A$ auf $-\mathbf{S}$ additiv ist.

Beweis. (1) Da A abgeschlossen ist, liegt $a := 1_{X \setminus A}$ in $\mathbf{E}$. Wählt man in Satz 1 für q das Nullfunktional auf $Q = \{0\}$, für f das Nullfunktional auf $F := \{ma : m \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$, für P die Unterhalbgruppe $\mathbf{S} \cup \{0\}$ und für p die Restriktion von μ^* auf P , so folgt aus $a | A = 0$ und der Bedingung (ii) sofort $-(q \wedge (-f)) \leq p \wedge f$.

(2) Sei $\mathbf{G}$ die Menge der isotonen additiven Fortsetzungen von f auf $\mathbf{E}$, die von p auf P majorisiert werden.

Nach (i) ist für $P_\infty = \{h \in P : p(h) < \infty\}$

$\mathbf{C}(X) \subset \{e \in \mathbf{E} : \text{es existieren } s_1, s_2 \in P_\infty, a_1, a_2 \in F \text{ mit}$

$-s_1 - a_1 \leq e \leq s_2 + a_2\} \subset (F \wedge \overline{(P_\infty + F)}) \cap ((P_\infty + F) \wedge \bar{F})$.

Nach Satz 1 (4) ist daher für $g \in \mathbf{G}$ die Restriktion $\gamma := g | \mathbf{C}(X)$ reellwertig, also $\gamma \in \mathbf{M}_+(X)$. Nach Definition ist $\gamma^* \leq g$, insbesondere also $\gamma^* | P \leq p$ und

$$0 \leq \gamma^*(a) \leq g(a) = f(a) = 0, \text{ also } \gamma^* \mid F = f.$$

Folglich ist $\gamma \in \mathbf{M}$ und $\gamma^* \in \mathbf{G}$.

(3) Ist g ein bzgl. $\leq_P$ minimales Element von $\mathbf{G}$, so ist $\gamma := g \mid \mathbf{C}(X)$ ein in $\mathbf{M}$ $\mathbf{S}$ -minimales Maß mit $\gamma^* \mid \mathbf{S} = g \mid \mathbf{S}$, denn für jedes $\nu \in \mathbf{M}$ mit $\nu^* \mid \mathbf{S} \leq \gamma^* \mid \mathbf{S}$ ist $\nu^* \in \mathbf{G}$ und $\nu^* \mid P \leq \gamma^* \mid P \leq g \mid P$, also $\nu^* \mid P = \gamma^* \mid P = g \mid P$.

(4) Für $t \in -\mathbf{S}$ gilt

$$\begin{aligned} (-f) \mathbin{\wedge} \bar{p} \mathbin{\wedge} \bar{f}(-t) &= \\ &= \inf \left\{ \frac{1}{n} \mu^*(h) : n \in \mathbf{N}, h \in P, a_1, a_2 \in F, -nt + h + a_1 \geq a_2 \right\} \\ &= \hat{\mu}^A(t), \end{aligned}$$

da $a \mid A = 0$ und die Funktionen aus $\mathbf{E}$ nach unten beschränkt sind.

(5) Nach (1) und Satz 1 existiert zu $t \in -\mathbf{S}$ ein in der durch $\leq_P$ prägeordneten Menge $\mathbf{G}$ minimales Element $g \in \mathbf{G}$ mit $g(-t) = -[(-f) \mathbin{\wedge} \bar{p} \mathbin{\wedge} \bar{f}](-t)$ (vgl. Lemma 2 (1), (2)).

Nach (3) ist $\gamma := g \mid \mathbf{C}(X)$ ein in $\mathbf{M}$ $\mathbf{S}$ -minimales Maß mit $\gamma^* \mid \mathbf{S} = g \mid \mathbf{S} \leq \mu^* \mid \mathbf{S}$.

Nach (4) ist

$$-\gamma^*(-t) = -g(-t) = \hat{\mu}^A(t).$$

(6) Für jedes in $\mathbf{M}$ $\mathbf{S}$ -minimale gefegte Maß ν von μ ist ν^* ein bzgl. $\leq_P$ minimales Element von $\mathbf{G}$: Sei nämlich $g \in \mathbf{G}$ und $g \mid P \leq \nu^* \mid P$. Nach (2) ist $\gamma := g \mid \mathbf{C}(X) \in \mathbf{M}$ und $\gamma^* \mid \mathbf{S} \leq g \mid \mathbf{S} \leq \nu^* \mid \mathbf{S}$, also $\gamma^* \mid \mathbf{S} = \nu^* \mid \mathbf{S}$ und damit $g \mid P = \nu^* \mid P$.

(7) Nach (ii) ist $\hat{\mu}^A(0) = 0$. Folglich ist nach (4) $\hat{\mu}^A$ genau dann additiv auf $-\mathbf{S}$, wenn $(-f) \mathbin{\wedge} \bar{p} \mathbin{\wedge} \bar{f}$ auf P additiv ist.

Wegen Lemma 2 (1), (2) ist dies nach Korollar 1 gleichbedeutend mit der Eigenschaft, daß je zwei bzgl. $\leq_P$ minimale Elemente von $\mathbf{G}$ auf P übereinstimmen. Dies bedeutet aber nach (3) und (6) gerade, daß je zwei in $\mathbf{M}$ $\mathbf{S}$ -minimale gefegte Maße von μ auf $\mathbf{S}$ übereinstimmen.

Bemerkung 6. (1) Ist $S \subset C(X)$, so folgt der Beweis von Satz 2 unmittelbar, indem man Satz 1 und Korollar 1 auf $C(X)$ statt auf E anwendet.

(2) Ist S punktettrennend, so folgt die *Existenz des Šilovrandes* für S sofort aus folgendem in Satz 2 enthaltenen Resultat (vgl. [5, Satz 2]): Zu jedem Maß, das die Eigenschaft (i) von Satz 2 besitzt, und zu jedem abgeschlossenen Rand A für S existiert ein von A getragenes gefegtes Maß.

Aus Satz 2 erhält man nun leicht die folgenden von Boboc und Cornea bewiesenen Resultate ([6], theorem 1.1, 1.3, 1.2):

Korollar 2. (Boboc – Cornea) *Sei A eine abgeschlossene Teilmenge von X und $\mu \in M_+(X)$ ein Maß, das die Eigenschaft (i) und für welches jedes gefegte Maß die Eigenschaft (ii) von Satz 2 besitzt. Dann gilt:*

(1) *Es existiert ein von A getragenes S -minimales gefegtes Maß von μ .*

(2) *Genau dann stimmen je zwei S -minimale gefegte Maße von μ auf S überein, wenn $\hat{\mu}^A$ auf $-S$ additiv ist.*

(3) *μ ist genau dann S -minimal, wenn $-\mu^*(-t) = \hat{\mu}^A(t)$ für alle $t \in -S$ gilt.*

Beweis. Jedes gefegte Maß von μ erfüllt die Voraussetzungen (i) und (ii) von Satz 2. Sei M die Menge der von A getragenen Maße.

(o) Die von A getragenen S -minimalen gefegten Maße von μ stimmen mit den von A getragenen in M S -minimalen gefegten Maßen von μ überein. Sei nämlich $\gamma \in M$ in M S -minimal und $\gamma^*|S \leq \mu^*|S$. Ist $\nu \in M_+(X)$ und $\nu^*|S \leq \gamma^*|S$, so ist ν ein gefegtes Maß von μ , besitzt also nach Satz 2 ein von A getragenes gefegtes Maß σ . Wegen $\sigma \in M$ und $\sigma^*|S \leq \nu^*|S \leq \gamma^*|S$ gilt $\sigma^*|S = \gamma^*|S$, also $\nu^*|S = \gamma^*|S$. Folglich ist γ S -minimal. Die Umkehrung ist trivial.

(1) folgt unmittelbar aus (o) und Satz 2.

(2) Zu jedem S -minimalen gefegten Maß ν von μ existiert nach Satz 2 und (o) ein S -minimales von A getragenes gefegtes Maß γ . Aus $\gamma^*|S = \nu^*|S$ und Satz 2 folgt dann die Behauptung.

(3) Die Bedingung $-\mu^*(-t) = \hat{\mu}^A(t)$ für alle $t \in -S$ ist nach Satz 2 offenbar notwendig für die S -Minimalität von μ . Wie bei Boboc und Cornea [6] sieht man ein, daß sie auch hinreichend ist: Für jedes gefegte Maß ν von μ und jedes $t \in -S$ gilt wegen der Eigenschaft (ii) für ν , daß $-\nu^*(-t) \leq \hat{\nu}^A(t)$ und somit $-\mu^*(-t) \leq -\nu^*(-t) \leq \hat{\nu}^A(t) \leq \hat{\mu}^A(t) = -\mu^*(-t)$, also $\nu^*|_S = \mu^*|_S$ gilt.

Literatur

- [1] Andenaes, P. R.: Hahn-Banach extensions which are maximal on a given cone. Math. Ann. 188, 90-96 (1970).
- [2] Anger, B., Lembcke, J.: Hahn-Banach type theorems for hypolinear functionals. Math. Ann. 209, 127-151 (1974).
- [3] Anger, B., Lembcke, J.: Hahn-Banach type theorems for hypolinear functionals on preordered topological vector spaces. Pacific J. Math. 54, 13-33 (1974).
- [4] Aumann, G.: Über die Erweiterung von additiven monotonen Funktionen auf regulär geordneten Halbgruppen. Arch. Math. 8, 422-427 (1957).
- [5] Bauer, H.: Šilovscher Rand und Dirichletsches Problem. Ann. Inst. Fourier 11, 89-136 (1961).
- [6] Boboc, N., Cornea, A.: Convex cones of lower semicontinuous functions on compact spaces. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 12, 471-525 (1967).
- [7] Dinges, H.: Decomposition in ordered semigroups. J. Functional Analysis 5, 436-483 (1970).
- [8] Fuchssteiner, B.: Sandwich theorems and lattice semigroups. J. Functional Analysis 16, 1-14 (1974).
- [9] Kaufmann, R.: Interpolation of additive functionals. Studia Math. 27, 269-272 (1966).
- [10] Kranz, P.: Additive functionals on abelian semigroups. Comment. Math. Prace Mat. 16, 239-246 (1972).
- [11] Scheller, L.: Fortsetzungen additiver Funktionen auf Halbgruppen zwischen sub- und superadditiven Funktionalen. Dissertation U. Frankfurt/M. (1973).
- [12] Simons, S.: Formes sous-linéaires minimales. Sémin. Choquet 10^e année, 23-01-23-08 (1970/71).
- [13] Ströhle, K.: Varianten des Satzes von Hahn-Banach mit Anwendungen. Dissertation U. München (1973).