BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1967

MÜNCHEN 1968

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Heisenberggleichung im Gitterraum

Von Fritz Bopp in München

Vorgelegt am 13. Januar 1967

Um frei zu sein von physikalisch unwesentlich erscheinenden mathematischen Existenzsorgen und damit die Voraussetzung für klarere Vorstellungen zu schaffen, vielleicht auch, wofür es Anzeichen gibt, weil dem neuen Raumbild mehr Realität zukommt als dem Euklidschen, haben wir die Quantentheorie der Elementarteilchen in einer Reihe von Abhandlungen[1] in einem unbegrenzten Gitterraum mit endlichvielen Punkten formuliert.

Hier wollen wir zeigen, daß sich die Heisenbergsche Urfeldgleichung zwanglos einfügt, daß sie insbesondere, was für die Gitterraumtheorie wesentlich erscheint, TL-symmetrisch (Teilchen-Loch-symmetrisch) ist. Das ist befriedigend, weil die Heisenberggleichung wegen der Verbindung von hoher Symmetrie mit einfacher Struktur ein hervorragender Anwärter für eine Theorie der Elementarteilchen ist.

Da damit die Voraussetzungen für die Gitterraumtheorie der Elementarteilchen vollständig formuliert sind, erscheint ein Rückblick auf das bisher Erreichte angemessen.

I

Der Raum sei ein kubisches Gitter mit endlich vielen Punkten.* Die Gittervektoren

$$\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3) \tag{1}$$

---

[1] Bopp, F.: (a) Diracgleichung im Gitterraum, Z. Physik, 200, 117, 1967; (b) Quasirelativistische Urfermionen, Z. Physik, 200, 123 (1967); (c) Der Wechselwirkungsoperator im Gitterraum, Z. Physik, 200, 142 (1967).

* l. c. 1 (a), Gl. (13) — (16); 1 (b), Gl. (1) — (9).

haben ganzzahlige Komponenten und werden modulo Z identifiziert:

$$\boldsymbol{n} + Z\boldsymbol{n}' \equiv \boldsymbol{n} \text{ (modulo } Z), \tag{2}$$

so daß die Zahl der Gitterpunkte gleich Z^3 ist. Nach allem, was wir wissen, kann man mit $Z = 10^{83}$ den ganzen Kosmos erfassen. Die Länge l einer Kette von etwa $\sqrt{Z}$ Gitterpunkten ist von nuklearer Größe. Wir haben $l = \hbar/m_p\, c$ gesetzt. Diese Länge ist im Einklang mit einer Relation von Weyl[2] die mittlere Proportionale zwischen der kleinsten Länge, der Gitterkonstanten $a = \frac{G m_e}{c^2}$, und der größten Länge, der Kantenlänge $A = \frac{\hbar^2}{G m_e m_p^2}$ des Weltkubus:

$$a = \frac{l}{\sqrt{Z}}, \quad A = l\sqrt{Z}. \tag{3}$$

Es sei noch einmal unterstrichen, daß wir das Gitter nur als ein Modell des Raumes betrachten. Jedes Raummodell, in dem sich Gl. (3) formulieren läßt, dürfte gleichwertig sein. Sobald der endliche Gitterraum mehr als nur methodische Bedeutung hat, braucht man die kosmologische Verhältnisgleichung von Weyl nicht mehr als zufällig abzutun.

Um alle Symmetrien zu erfassen, die die Diracgleichung kennzeichnen, braucht man vier Paare von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren:[3]

$$\psi^\dagger = \{\psi_\mu^\dagger(\boldsymbol{n})\}, \quad \psi = \{\psi_\mu(\boldsymbol{n})\}, \quad \mu = 1, 2, 3, 4. \tag{4}$$

Sie genügen den Jordan-Wignerschen Vertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned} \{\psi_\mu(\boldsymbol{n}), \psi_\nu(\boldsymbol{n}')\} &= \{\psi_\mu^\dagger(\boldsymbol{n}), \psi_\nu^\dagger(\boldsymbol{n}')\} = 0, \\ \{\psi_\mu(\boldsymbol{n}), \psi_\nu^\dagger(\boldsymbol{n}')\} &= \delta_{\mu\nu}\, \delta(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}'). \end{aligned} \tag{5}$$

Darin ist auch $\delta(\boldsymbol{n})$ ein Kroneckersymbol: $\delta(\boldsymbol{0}) = 1$, $\delta(\boldsymbol{n}) = 0$ für $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{0}$.

---

[2] Weyl, H.: Raum-Zeit-Materie, 5. Aufl., Springer Verlag 1923, § 34.

[3] Heisenberg, W.: Proc. Conf. High Energy Physics, CERN, Geneva 1958.

Zur Notation bemerken wir: Mit $\psi^\dagger$ und ψ wird die Menge aller $\psi_\mu^\dagger(\boldsymbol{n})$ bzw. $\psi_\mu(\boldsymbol{n})$ bezeichnet. Die Operatoren in einem Punkt fassen wir zu der einzeiligen Matrix $\psi^\dagger(\boldsymbol{n})$ und der einspaltigen Matrix $\psi(\boldsymbol{n})$ zusammen. Danach sind $\psi^{\dagger\mathsf{T}}(\boldsymbol{n}) \equiv \psi^{\dagger\dagger}(\boldsymbol{n})$ und $\psi^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{n})$ einspaltig bzw. einzeilig. Es ist öfters bequem, nicht zwischen Punktkoordinaten und Spinorindizes zu unterscheiden. In diesem Fall numerieren wir $\mu, \boldsymbol{n}$ mit k von 1 bis $4Z^3$, so daß wir $\psi_\mu^\dagger(\boldsymbol{n})$ durch $\psi_k^\dagger$ und $\psi_\mu(\boldsymbol{n})$ durch ψ_k ersetzen können. Wo es nicht mißverständlich ist, kann man die Argumente $(\boldsymbol{n})$ in $\psi^\dagger(\boldsymbol{n})$, $\psi(\boldsymbol{n})$ weglassen.

„Vakuum" nennen wir unabhängig von aller Dynamik denjenigen Zustand, in dem kein Teilchen vorhanden ist und somit keines vernichtet werden kann. Bezeichnen wir den Zustandsvektor des Vakuums mit $|0\rangle$, so muß für alle ψ_k

$$\psi_k\,|0\rangle = 0 \tag{6}$$

sein. Hiernach wird der Zustandsraum von allen Vektoren der Form

$$|\varphi\rangle = F(\psi^\dagger)\,|0\rangle \tag{7}$$

aufgebaut. Darin ist $F(\psi^\dagger)$ ein beliebiges Polynom der $\psi^\dagger$ mit dem maximalen Grad $4Z^3$. Jeder andere Ausdruck von der Form $F(\psi^\dagger, \psi)$ kann mittels der Relationen (5) und (6) in (7) übergeführt werden. Der durch (7) definierte Vektorraum wird von folgendem orthonormierten Basissystem aufgespannt:

$$\begin{gathered} |f, k\rangle \equiv |k_1 \ldots k_f\rangle = \psi_{k_1}^\dagger \ldots \psi_{k_f}^\dagger\,|0\rangle, \\ k_1 < k_2 < \ldots < k_f. \end{gathered} \tag{8}$$

Es gilt die Orthogonalitätsrelation:

$$\langle f, k\,|\,f', k'\rangle = \delta_{ff'}\delta_{kk'}. \tag{9}$$

Wegen der Schiefvertauschbarkeit der $\psi^\dagger$ erhält man bei einer Permutation P der Indizes:

$$|f, Pk\rangle = (-1)^p\,|f, k\rangle. \tag{10}$$

Darin ist p die Ordnung der Permutation P. Im allgemeinen ist es also nicht nötig, für die k-Folge wie in (8) eine bestimmte Ordnung vorauszusetzen; doch ist das bei Gleichungen wie der in (9) bequem.

Man muß beachten, daß sich der Vakuumvektor $|0\rangle$ beim Übergang zu einer anderen Darstellung im allgemeinen ändert. Sei U eine beliebige unitäre Transformation, $U^\dagger U = U U^\dagger = 1$, so folgt aus (6)

$$\psi'_k\,|0'\rangle = 0 \tag{11}$$

mit

$$\psi'_k = U\,\psi_k\,U^\dagger, \quad |0'\rangle = U\,|0\rangle. \tag{12}$$

In bezug auf die alten Operatoren ist $|0'\rangle$ meistens ein Vielteilchensystem. Erst durch weitere Bestimmungen wird der Vakuumzustand physikalisch festgelegt.

Schrödingergleichungen in dem hier angegebenen Vektorraum lauten:

$$i\,|\dot{\varphi}\rangle = H(\psi^\dagger, \psi)\,|\varphi\rangle. \tag{13}$$

Darin ist der Schrödingeroperator $H(\psi^\dagger, \psi)$ ein hermitesches Polynom von $\psi^\dagger$ und ψ, dessen Grad in beiden Variablensätzen maximal gleich $4\,Z^3$ ist. Durch geeignete unitäre Transformationen kann man das Polynom auf Normalform bringen:*

$$H = (\psi^\dagger\,\psi) + (\psi^\dagger\,\psi^\dagger\,\psi\,\psi) + \ldots. \tag{14}$$

Hierin bezeichnen die Klammerausdrücke homogene Formen der eingeschlossenen Operatoren. Hat man erst eine solche Darstellung erreicht, so sind nur noch unitäre Transformationen zulässig, die den Typus des Ausdrucks (14) nicht mehr ändern, so daß

$$U = e^{i\eta}, \; \eta = (\psi^\dagger\,\psi) + (\psi^\dagger\,\psi^\dagger\,\psi\,\psi) + \ldots \tag{15}$$

sein muß. Daraus folgt unmittelbar:

$$U\,|0\rangle = |0\rangle. \tag{16}$$

---

* l. c. 1 (c), § 2.

Bei Normaldarstellungen ist also das Vakuum in allen Darstellungsräumen dasselbe. Darum ist es mindestens mathematisch möglich, die Normaldarstellungen mit dem allen gemeinsamen Vakuum als ausgezeichnete Darstellungen zu betrachten.

Im Falle von Normaldarstellungen ist die Fermionenzahl

$$f = \sum_{n} \psi^{\dagger}(\boldsymbol{n})\, \psi(\boldsymbol{n}) \tag{17}$$

ein Integral der Bewegung. Daraus folgt, daß die damit erfaßten Teilchen nicht unmittelbar mit den Elementarteilchen übereinstimmen können. Wir nennen daher die durch $\psi^{\dagger}$ und $|0\rangle$ definierten Teilchen ‚Urfermionen' (analog zu den ‚Urbaryonen' von Sakata)[4]. Die eigentlichen Elementarteilchen sind danach Komplexe von Urfermionen, welche sich zusammenfinden und auseinandergehen, welche also auf sehr natürliche Weise entstehen und vergehen können. Urfermionen im hier definierten Sinn kennen wir seit langem. Da die durch die Löchertheorie noch nicht modifizierte Diracgleichung eine Ein-Teilchen-Gleichung ist, müssen wir sie nun als Urfermionengleichung interpretieren. Auch die früher untersuchten Mehrbahngleichungen sind solche für Urfermionen[5].

Hier betrachten wir ähnlich wie Heisenberg* den Diracoperator ohne Massenglied. An anderer Stelle** haben wir gezeigt, durch welche zugleich im Kontinuum und im Gitterraum möglichen Symmetrieeigenschaften dieser Operator eindeutig definiert ist. Er lautet:

$$H = -i\,\Omega \sum_{n} \psi^{\dagger}(\boldsymbol{n})\, \varrho_1 \sum_{i} \sigma_i \big(\psi(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_i) - \psi(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_i)\big). \tag{18}$$

Darin sind ϱ, σ die schon von Dirac benutzten Matrizen, für die wir jedoch folgende aus lauter antisymmetrischen Matrizen bestehende Darstellung verwenden:

---

[4] Sakata, S.: Progr. Theor. Phys. Suppl., Extra Number, 406 (1965).

[5] Bopp, F.: Lorentzinvariante Wellengleichungen für Mehrbahnsysteme, Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss. Math.-naturwiss. Klasse 1958.

* l. c. 3.

** l. c. 1 (a).

$$\begin{aligned} \varrho &= (\sigma_2\,\varrho_1,\ \varrho_2,\ \sigma_2\,\varrho_3)_{Dirac}, \\ \sigma &= (\varrho_2\,\sigma_1,\ \sigma_2,\ \varrho_2\,\sigma_3)_{Dirac}. \end{aligned} \tag{19}$$

Der Diracoperator hat eine Symmetrieeigenschaft, von der wir meinen, daß sie universell gilt, die TL-Symmetrie* (Teilchen-Loch-Symmetrie). Im Falle der Darstellung von ϱ und σ durch Gl. (19) wird sie durch folgenden zugleich unitären und hermiteschen Operator beschrieben:

$$S = \prod_k (\psi_k^\dagger + \psi_k). \tag{20}$$

Man rechnet leicht nach, daß

$$S^\dagger S = 1\,,\ S^\dagger = S \tag{21}$$

und

$$S^\dagger \psi S = -\psi^\dagger,\ \ S^\dagger \psi^\dagger S = -\psi \tag{22}$$

ist. TL-Symmetrie besteht, wenn

$$S^\dagger H(\psi^\dagger, \psi)\, S \equiv H(-\psi, -\psi^\dagger) = H(\psi^\dagger, \psi) \tag{23}$$

ist. Sie führt dazu, daß Systeme mit

$$f = 2\,Z^3 \tag{24}$$

Urfermionen physikalisch ausgezeichnet sind.

Sei $|\varphi_f\rangle$ eine Lösung der Schrödingergleichung (13/14) mit f Urfermionen, so ist $S\,|\varphi_f\rangle = |\varphi_{f'}\rangle$ ein zu $f' = 4\,Z^3 - f$ Urfermionen gehöriges Integral. Es werden also f-Teilchen-Systeme in solche mit f' Teilchen transformiert. Nur im Falle von Gl. (24), wenn im Mittel jeder Punkt des Gitterraumes zweimal besetzt ist, gehören beide Lösungen zum gleichen Unterraum des Hilbertraumes. Danach ist S eine Quantenzahl für $2\,Z^3$ Teilchen mit den Werten

$$S = \pm 1\,. \tag{25}$$

---

* l. c. 1(a), Gl. (39) ff. Sie ist mit der Lochungskonjugation verwandt, aber nicht notwendig identisch.

Ohne daß wir schon jetzt nach ihrer Bedeutung fragen, nehmen wir an, daß die Welt von dieser Symmetrie Gebrauch macht, daß sie aus $2Z^3$ Urfermionen besteht, die den Gitterraum mit $4Z^3$ Plätzen halb füllen. Der Grundzustand dieses Systems heiße ‚Diracsee', weil er im wechselwirkungsfreien Fall mit dem von Dirac eingeführten See identisch ist. Die ‚Welt' ist ein angeregter Zustand des Diracsees mit Wechselwirkung. Wie in der Festkörperphysik gibt es Quasiteilchen.[6] Sie sind mit den Elementarteilchen zu identifizieren. Mit einem von Schrödinger[7] stammenden, freilich bei ihm etwas anders gemeinten Bild können wir sagen, die Elementarteilchen sind Schaumkronen auf dem Diracsee.

Man kann leicht abschätzen, daß die Schaumkronen relativ selten sind.* Die Masse der Welt ist etwa gleich $M = Z\,m_e$. Die Zahl der Elementarteilchen ist daher eher kleiner als gleich Z. Das Verhältnis dieser Zahl zu der der Urfermionen ist gleich $1/2Z^2$, also so klein, daß der mittlere Abstand der Elementarteilchen einige Zentimeter beträgt. Wenn sich Quasiteilchen von nuklearer Ausdehnung ergeben und damit etwa $\sqrt{Z}^3$ Urfermionen umschließen, wird man sie zunächst als einzelne betrachten dürfen. Die Untersuchung der Wechselwirkung zwischen Elementarteilchen steht erst auf dem nächsten Blatt.

Hier beschränken wir uns wie schon früher** auf 2-Teilchen-Wechselwirkungen (4-Fermionen-Kopplungen). Speziell betrachten wir wegen ihrer hohen Symmetrie die von Heisenberg:*** Sie lautet im Gitterraum und bei Schrödingerdarstellung:

$$H_W = W \sum_{\boldsymbol{n}} \left(\overline{\psi}(\boldsymbol{n})\, \gamma^{\mu 5}\, \psi(\boldsymbol{n})\right) \left(\overline{\psi}(\boldsymbol{n})\, \gamma_{\mu 5}\, \psi(\boldsymbol{n})\right). \tag{26}$$

---

[6] Pines, D.: Elementary Excitations in Solids, W. A. Benjamin Inc., New York 1963; Pines, D.: The Many-Body Problem, W. A. Benjamin, Inc., New York 1961; Kaempfer, F. A.: Concepts in Quantum Mechanics, Academic Press, New York 1965, p. 289 ff.; Thouless, D. J.: Quantenmechanik der Vielteilchensysteme, Bibliographisches Institut, Mannheim 1964.

[7] Schrödinger, E.: Are there quantum jumps, Brit. Journ. Phil. Sci., Vol. III, No. 10 and 11, 1952, Ziff. 11, Abs. 5.

* l. c. 1 (b), Gl. (13).

** l. c. 1 (a), Gl. (4.1) ff.

*** l. c. 3.

Darin ist

$$(\varrho_3 \gamma^{\mu 5}) = (-\varrho_1, -\sigma),$$
$$(\varrho_3 \gamma_{\mu 5}) = (+\varrho_1, -\sigma). \tag{27}$$

Somit kann man Gl. (26) wie folgt schreiben:

$$H_W = -W \sum_n \{(\psi^\dagger \varrho_1 \psi)^2 - (\psi^\dagger \sigma \psi)^2\}. \tag{28}$$

Durch TL-Transformation erhält man daraus:

$$H'_W = -W \sum_n \{(\psi^\top \varrho_1 \psi^{\dagger\dagger})^2 - (\psi^\top \sigma \psi^{\dagger\dagger})^2\}.$$

Darin ist*

$$\psi^\top \varrho \psi^{\dagger\dagger} = \varrho_{\mu\nu} \psi_\mu \psi_\nu^\dagger = -\varrho_{\mu\nu} \psi_\nu^\dagger \psi_\mu + \varrho_{\nu\nu} = \psi^\dagger \varrho \psi,$$

letzteres, weil ϱ antisymmetrisch ist und somit die Spur 0 hat. Daraus folgt unmittelbar:

$$H'_W = H_W, \tag{29}$$

also ist auch der Heisenbergoperator TL-symmetrisch.

Früher** haben wir nur solche TL-symmetrische Operatoren ins Auge gefaßt, für die

$$H_W = \sum_{n,i} \lambda_i (\psi^\dagger \gamma_i \psi)^2 = \sum_{n,i} \lambda_i \psi^\dagger \psi^\dagger \gamma_i \times \gamma_i \psi \psi \tag{30}$$

und damit

$$\sum_i \lambda_i \gamma_i^2 = 0 \tag{31}$$

ist. Nach Gl. (28) ist jedoch

$$\sum_i \lambda_i \gamma_i^2 = -W(\varrho_1^2 - \sigma^2) = 2W \neq 0. \tag{32}$$

Darum mußten wir den Heisenbergoperator l. c. 1 (c) ausklammern.

* $\varrho \in \{\varrho_1, \sigma\}$.
** l. c. 1 (c), Gl. (4.16).

II

Was ist erreicht? Heisenberg hat gezeigt,* daß unter allen Theorien mit 2-Teilchen-Wechselwirkungen diejenige mit dem Wechselwirkungsoperator (28) wegen ihrer hohen Symmetrie ein guter Anwärter für die wahre Theorie der Elementarteilchen ist. Man kann seine Theorie im Gitterraum formulieren, so daß der Hilbertraum nur endlich viele Dimensionen hat. Damit entfallen alle Schwierigkeiten, die mit der Frage zusammenhängen, ob die Operatoren, mit denen man formal zu rechnen pflegt, auch existieren. Im Gitterraum tritt noch eine weitere Symmetrieeigenschaft hervor, die TL-Symmetrie, die für die Heisenberggleichung ebenso wie für die von Dirac charakteristisch ist. Dirac hat sie in seiner Löchertheorie implizit benutzt, ohne daß man Gl. (20) explizite hätte anschreiben können.

Nunmehr läßt sich die Löchertheorie auch im Wechselwirkungsfall formulieren. Darüber hinaus kann man verstehen, warum gerade diese überlegen ist. Im kräftefreien Fall gibt es eine unitäre Transformation, die von der Löchertheorie zur Teilchen-Antiteilchen-Theorie führt.** Danach sind die Urfermionen positiver Energie mit den Elektronen und die Löcher im See der Urfermionen negativer Energie mit den Positronen identisch. Der von den Elektronen und Positronen aufgespannte Hilbertraum ist daher mit dem der Urfermionen äquivalent. Im Wechselwirkungsfall wird diese Transformation modifiziert. An die Stelle der baren Teilchen und Löcher treten Komplexe von solchen. Doch bleibt die Aussage bestehen, daß man den Hilbertraum statt mit Urfermionen mit Elektronen und Positronen aufbauen kann.

Sollte die Theorie, wie man nach Heisenberg erwarten darf, noch andere Quasiteilchen enthalten, so werden diese durch andere unitäre Transformationen beschrieben, z. B durch eine, die zu Protonen und Antiprotonen führt, welche je nach der Darstellung, von der man ausgeht, als Urfermionenkomplexe oder als Elektronen- und Positronenkomplexe erscheinen. Umgekehrt kann man den Hilbertraum aus Protonen und Antiprotonen auf-

---

* l. c. 3.

** l. c. 1 (a), Gl. (71).

bauen, so daß Elektronen und Positronen als Komplexe aus Protonen und Antiprotonen dargestellt werden können usw. Das berührt sich mit der sogenannten Bootstraptheorie.[8] Weitere Elementarteilchen zwingen also nicht zu einer Vergrößerung des Hilbertraumes, und jedes Fermionenpaar kann als das eigentlich elementare betrachtet werden. Der Schrödingeroperator wird jedoch besonders einfach, wenn wir weder Elektronen-Positronen, noch Protonen-Antiprotonen oder andere Elementarteilchen willkürlich auszeichnen, sondern von den Urfermionen ausgehen.

Bei unserer Herleitung der Theorie unter Verzicht auf korrespondierende klassische Vorstellungen[9] haben wir stets nur von der Erzeugung und Vernichtung von Teilchen gesprochen und, was in diesem Falle naheliegend ist, nur von der Schrödingerdarstellung Gebrauch gemacht. Natürlich kann man zur Heisenbergdarstellung übergehen und von Quantenfeldgleichungen sprechen, – ‚Feld im Gitterraum' ähnlich wie ‚Schallfeld im Kristallgitter' verstanden. Dabei tritt an die Stelle der Urfermionen das Heisenbergsche Urfeld, so daß die Theorie, auch was ihre Grundlagen angeht, vollkommen mit der Heisenbergschen übereinstimmt.

Ein anderer Aspekt der Theorie ist vielleicht noch wichtiger. Aus dem Umstand, daß die Punkte des Gitterraumes im Mittel mit zwei Urfermionen besetzt sind, folgt, daß diese nicht nur das Substrat sind, aus dem die Elementarteilchen entstehen. Sie sind zugleich die Bausteine des Raumes, derart daß es für jeden Gitterpunkt den vier Arten von Urfermionen entsprechend 2^4 verschiedene Besetzungsmodi oder Quantenzustände gibt. Das entspricht, soviel ich sehe, weitgehend dem, was v. Weizsäcker[10] vorschwebt, obwohl wir uns bei der Entwicklung unserer Vorstellungen in entgegengesetzter Richtung auf den Weg gemacht haben. Die Konvergenz der Ergebnisse hat sich allerdings schon früher angedeutet. Wenn er die Quantenmechanik auf Uralternativen zurückführt und ich von den Elementarprozessen des Ent-

---

[8] Güttinger, W.: Quantum field theory of the Bootstrap mechanism, Nuovo Cimento 38, 1944 (1965).

[9] Bopp, F.: Ann. Phys. (7) 17, 407 (1966).

[10] v. Weizsäcker, C.-F.: Plenarvorträge, Deutsche Physikertagung 1966, B. G. Teubner, im Druck.

stehens und Vergehens spreche, so ist das mathematisch äquivalent.

Zum Schluß sei noch auf einen Unterschied zur Heisenbergschen Theorie hingewiesen. Zur Untersuchung der Heisenberggleichung im Kontinuum scheint die Annahme einer indefiniten Metrik wesentlich zu sein. Wir haben hier die Prinzipien der Quantenmechanik unverändert übernommen. Man könnte einwenden, daß dies nur solange möglich sei, bis man anfängt, die Massen von Quasiteilchen zu berechnen. Diesen Einwand kann man nur mit konkreten Rechnungen entkräften, und solche liegen noch nicht vor.

Doch haben wir schon früher* auf einen Punkt hingewiesen, der das Hauptargument für die indefinite Metrik zweifelhaft erscheinen läßt. Im Kontinuum lauten die inhomogenen Vertauschungsrelationen:

$$\{\psi_\mu(\boldsymbol{r}), \psi_\nu^\dagger(\boldsymbol{r}')\} = \delta_{\mu\nu}\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'). \tag{33}$$

Im Gitterraum folgt daraus

$$\{\psi_\mu(\boldsymbol{n}), \psi_\nu^\dagger(\boldsymbol{n}')\} = \frac{1}{a^3}\,\delta_{\mu\nu}\,\delta(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}'), \tag{34}$$

weil die Operatoren ψ und $\psi^\dagger$ nicht auf Teilchen, sondern auf Teilchendichten bezogen sind. Als Vernichtungs- bzw. Erzeugungsoperatoren sind sie aber auf die Teilchen selbst zu beziehen. Wir müssen also in (34) und cum grano salis auch in (33)

$$\psi \to \psi\, a^{-3/2}, \quad \psi^\dagger \to \psi^\dagger\, a^{-3/2} \tag{35}$$

ersetzen. Dabei geht (34) in die üblichen Vertauschungsrelationen über und Gl. (33) in

$$\{\psi_\mu(\boldsymbol{r}), \psi_\nu^\dagger(\boldsymbol{r}')\} = a^3\,\delta_{\mu\nu}\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{36}$$

mit

$$a \to 0, \quad a^3\,\delta(\mathbf{0}) = 1\,. \tag{37}$$

So problematisch diese Gleichung mathematisch auch sein mag,

---

* l. c. 5.

so zeigt sie doch, daß die Singularität der δ-Funktion bei der Verwendung auf Teilchen bezogener Operatoren herabgesetzt wird. Beispielsweise wird in der Heisenbergschen Theorie des η-Mesons,[11] soviel ich sehe, faktisch nur hiervon Gebrauch gemacht.

Anders als früher brauchen wir hier nicht den Versuch zu machen, die Definition der δ-Funktion so auszuweiten, daß Gl. (37) mathematisch wohldefiniert bleibt. Hier entnehmen wir der Gleichung nur, daß man im Gitterraum mit definiter Metrik ähnliche Ergebnisse erwarten darf, wie sie Heisenberg im Kontinuum mit indefiniter Metrik erhält.

Damit sind wir an dem Punkt angekommen, von dem aus nur spezielle Rechnungen weiterführen. Dabei ist man auf Näherungsmethoden angewiesen. Diese mögen noch grob sein, zu grob vielleicht, um gute quantitative Ergebnisse zu erhalten. Sie werden aber nicht mehr von Unsicherheiten in den mathematischen Grundlagen getrübt.

---

[11] Dürr, H.-P., Heisenberg, W., Mitter, H., Schlieder, S. und Yamazaki, K.: Z. Naturforschg. 14a, 441 (1959).