BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1965

MÜNCHEN 1966

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Folgen holomorpher Abbildungen, die gegen eine konstante Abbildung konvergieren

Von Wilhelm Kaup in Erlangen

Vorgelegt von Herrn Georg Nöbeling am 4. Juni 1965

Ist G ein Gebiet der komplexen Zahlebene und φ eine holomorphe Abbildung von G in ein relativ-kompaktes Teilgebiet von G, so besitzt φ nach einem Satz von Ritt genau einen Fixpunkt. Dieser Satz gilt entsprechend für Gebiete im C^n (vgl. [4], p. 83) und auch für komplexe Räume, die eine Carathéodory-Metrik zulassen (d. h. separabel sind bezüglich beschränkter holomorpher Funktionen; vgl. etwa [6]). Zum Beweis wird jeweils die Folge der iterierten Abbildungen φ^i betrachtet und gezeigt, daß G durch φ^i gleichmäßig auf einen Punkt zusammengezogen wird. In dieser Arbeit soll nun untersucht werden, unter welchen Bedingungen eine Folge holomorpher Abbildungen gegen eine konstante Abbildung konvergiert (Satz 1). Insbesondere ergibt sich daraus der Satz von Ritt für K-vollständige komplexe Räume.

1. Alle im folgenden auftretenden komplexen Räume seien *zusammenhängend, reduziert und von abzählbarer Topologie* (vgl. [2], [3]). Für jeden komplexen R sei $\mathfrak{H}(R)$ der Vektorraum aller holomorphen Funktionen auf R. $\mathfrak{H}(R)$ ist – versehen mit der Topologie der kompakten Konvergenz – ein komplexer Fréchet-Raum. Der Unterraum aller konstanten Funktionen auf R werde mit C bezeichnet und der Quotientenraum $\mathfrak{H}(R)/C$ mit $\mathfrak{H}^*(R)$. Vermöge der Quotiententopologie ist $\mathfrak{H}^*(R)$ ebenfalls ein Fréchet-Raum und isomorph zum Raum $\mathfrak{H}_p(R)$ aller $f \in \mathfrak{H}(R)$, die in einem festen Punkt $p \in R$ verschwinden. Für jedes $f \in \mathfrak{H}(R)$ sei $\bar{f}$ die zugehörige Restklasse aus $\mathfrak{H}^*(R)$ und für jede Teilmenge $A \subset R$ werde

$$p_A(\bar{f}) = \inf_{c \in C} \sup_{z \in A} |f(z) + c|$$

gesetzt. Sind p_1, p_2 zwei Punkte in A, so gilt offensichtlich

$$(*) \qquad p_A(\bar{f}) \geq \frac{1}{2} \, |f(p_1) - f(p_2)|\,.$$

Für jedes Kompaktum $K \subset R$ ist $p_K(\bar{f}) < \infty$, und eine Folge $g_i \in \mathfrak{H}^*(R)$ konvergiert genau dann gegen die $0 \in \mathfrak{H}^*(R)$, wenn $p_K(g_i)$ eine Nullfolge für jedes Kompaktum $K \subset R$ ist.

Nehmen wir an, für ein $f \in \mathfrak{H}(R)$ gelte $p_K(\bar{f}) = p_R(\bar{f})$. Die Funktion $\tau(c) = \sup\limits_{z \in R} |f(z) + c|$ ist halbstetig nach oben auf der komplexen Zahlenebene, und es gilt $\tau(c) \to \infty$ für $|c| \to \infty$. Also wird das Minimum für ein $\tilde{c}$ angenommen, d. h.

$$p_R(\bar{f}) = p_K(\bar{f}) \leq \sup_{z \in K} |f(z) + \tilde{c}\,| \leq \sup_{z \in R} |f(z) + \tilde{c}\,| = p_R(\bar{f})\,.$$

Die Funktion $f(z) + \tilde{c}$ nimmt also in K ihr Maximum an und ist somit konstant. Wir haben damit für jedes $g \in \mathfrak{H}^*(R)$ und jedes Kompaktum $K \subset R$ gezeigt:

$$(**) \qquad p_K(g) = p_R(g) \quad \Leftrightarrow \quad g = 0\,.$$

Es sei nun S ein weiterer komplexer Raum und $\mathrm{Hol}(R, S)$ die Menge aller holomorphen Abbildungen von R in S. Vermöge der Kompakt-Offen-Topologie ist $\mathrm{Hol}(R, S)$ ein Hausdorffraum mit abzählbarer Topologie. Für jedes $\varphi \in \mathrm{Hol}(R, S)$ wird durch $\bar{f} \to \overline{f \circ \varphi}$ eine lineare Abbildung φ^* von $\mathfrak{H}^*(S)$ in $\mathfrak{H}^*(R)$ definiert. Da für alle $A \subset R$, $B \subset S$ mit $\varphi(A) \subset B$ offensichtlich gilt

$$(***) \qquad p_A(\varphi^*(f)) \leq p_B(f) \qquad\qquad (f \in \mathfrak{H}^*(S)),$$

ist φ^* stetig. Der Raum $L(\mathfrak{H}^*(S), \mathfrak{H}^*(R))$ aller stetigen linearen Abbildungen von $\mathfrak{H}^*(S)$ in $\mathfrak{H}^*(R)$ ist vermöge der punktweisen Konvergenz ein hausdorffscher topologischer Vektorraum, und die Zuordnung $\varphi \to \varphi^*$ liefert eine stetige Abbildung von $\mathrm{Hol}(R, S)$ in $L(\mathfrak{H}^*(S), \mathfrak{H}^*(R))$. Nun ist $\varphi^* = 0$ äquivalent damit, daß alle holomorphen Funktionen von S auf $\varphi(R)$ konstant sind. Insbesondere gilt also für eine Folge $\varphi_i \in \mathrm{Hol}(R, S)$, die gegen eine konstante Abbildung konvergiert, daß die Folge der

φ_i^* gegen $0 \in L(\mathfrak{H}^*(S), \mathfrak{H}^*(R))$ konvergiert. Eine Umkehrung dieser Behauptung gilt nur unter einschränkenden Bedingungen: Ein komplexer Raum S heißt bekanntlich *K-vollständig*, wenn zu jedem Punkt $p \in S$ eine holomorphe Abbildung τ von S in einen C^n existiert, die in einer Umgebung von p nur diskrete Fasern besitzt. Damit ist äquivalent, daß jede Teilmenge von S diskret ist, auf der alle holomorphen Funktionen von S konstant sind. Es gilt nun:

Satz 1: *Es seien R, S komplexe Räume und φ_i eine Folge holomorpher Abbildungen von R in S, so daß die Folge der φ_i^* gegen Null konvergiert (d. h. für jedes $f \in \mathfrak{H}^*(S)$ ist $\varphi_i^*(f)$ eine Nullfolge in $\mathfrak{H}^*(R)$). Ist S K-vollständig, so konvergiert die Folge φ_i bereits dann gegen eine konstante Abbildung, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(a) Es gibt ein $p \in R$, so daß $\varphi_i(p)$ eine konvergente Punktfolge in S ist.

(b) Es gibt ein Kompaktum $K \subset R$ mit $\varphi_{i+1}(K) \subset \varphi_i(K)$ für alle i (K sei zusammenhängend, wenn S nicht holomorph-separabel ist).

Beweis ad (a): Angenommen, φ_i konvergiert nicht gegen die Abbildung $R \to q = \lim \varphi_i(p)$. Dann gibt es ein zusammenhängendes Kompaktum $A \subset R$ mit $p \in A$ und eine Umgebung U von q, so daß $\varphi_i(A) \subset U$ für unendlich viele i nicht erfüllt ist. Bei geeigneter Wahl von U und nach Vorgabe eines $\varepsilon > 0$ läßt sich erreichen, daß auf U eine stetige Metrik $d(x, y)$ existiert, derart daß für jedes $t < \varepsilon$ die Menge $K_t = \{x \in U, d(x, q) = t\}$ kompakt ist. Da jedes $\varphi_i(A)$ zusammenhängend ist und für fast alle i gilt $d(q, \varphi_i(p)) < \varepsilon/2$, gibt es zu jedem t mit $\varepsilon/2 < t < \varepsilon$ eine Folge von Punkten $p_t^i \in A$, so daß $\varphi_i(p_t^i)$ einen Punkt $q_t \in K_t$ als Häufungspunkt besitzt. Da S K-vollständig ist, kann t so fixiert werden, daß ein $f \in \mathfrak{H}(S)$ existiert mit $f(q) - f(q_t) = 1$. Wegen (*) gilt damit also

$$p_A(\varphi_i^*(\bar{f})) \geq \frac{1}{2} \left| f(\varphi_i(p)) - f(\varphi_i(p_t^i)) \right| > a$$

für ein $a > 0$ und unendlich viele i. Das widerspricht der Annahme $\varphi_i^*(\bar{f}) \to 0$ und Satz 1 (a) ist damit bewiesen.

ad (b): Angenommen, $Q = \bigcap_i \varphi_i(K)$ enthält mehr als einen Punkt. Dann lassen sich Punkte $q, q' \in Q$ und $f \in \mathfrak{H}(S)$ finden mit $f(q) - f(q') = 1$ (falls S nicht holomorph separabel ist, sind alle $\varphi_i(K)$ zusammenhängend, so daß Q wegen $\varphi_{i+1}(K) \subset \varphi_i(K)$ nicht diskret ist). Wegen (*) gilt für dieses f im Widerspruch zur Voraussetzung

$$p_K(\varphi_i^*(\bar{f})) \geq \frac{1}{2} \text{ für alle } i.$$

Also ist $Q = \{q\}$ für ein gewisses $q \in S$, d. h. für jedes $p \in K$ konvergiert die Folge $\varphi_i(p)$ gegen q. Wegen (a) ist Satz 1 damit bewiesen.

2. Für jeden komplexen Raum R ist $\mathrm{Hol}(R, R)$ eine topologische Halbgruppe (vgl. [5] (3)), und man kann fragen, unter welchen Bedingungen für ein $\varphi \in \mathrm{Hol}(R, R)$ die Folge der Potenzen φ^i gegen eine konstante Abbildung konvergiert. Es gilt:

Satz 2: *Es sei R ein holomorph-separabler komplexer Raum und $\varphi : R \to R$ eine holomorphe Abbildung. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(α) *Die Folge der Iterierten φ^i konvergiert gegen eine konstante Abbildung $R \to p$. (Der Punkt p ist dann Fixpunkt von φ).*

(β) *Es gibt eine Folge $\{K_n\}$ kompakter Teilmengen mit $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ und $\varphi(K_{n+1}) \subset K_n$ für alle n.*

Beweis: (α) ⇒ (β). Die Folge $\varphi_i = \varphi^i$ konvergiere gegen die konstante Abbildung $R \to p$. Wegen $\varphi(\lim \varphi_i(p)) = \lim \varphi_{i+1}(p)$ ist dann p ein Fixpunkt. Es sei nun $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ eine aufsteigende Folge kompakter Teilmengen, so daß $R = \bigcup A_n$ ist und A_1 eine volle Umgebung von p umfaßt. Zu jedem n gibt es ein $\mu_n \geq 0$ mit $\varphi_{\mu_n}(A_n) \subset A_1$. Ersetzen wir in der Ausgangsfolge $A_1, A_2, \ldots$ jedes A_n durch die Folge $\varphi_{\mu_{n-1}}(A_n), \varphi_{\mu_{n-2}}(A_n), \ldots, \varphi(A_n), A_n$, so erhalten wir eine Folge $\{K_n\}$ der gewünschten Art.

(β) ⇒ (α). Da $\varphi(K_1)$ kompakt ist, gibt es ein s mit $\varphi(K_1) \subset \subset \bigcup_{n=1}^{s} K_n = K$. Für dieses K gilt $\varphi(K) \subset K$ und somit $\varphi_{i+1}(K) \subset \varphi_i(K)$ für alle i. Wegen Satz 1 (b) benötigen wir also nur noch den folgenden

Hilfssatz: *Für jedes $f \in \mathfrak{H}(R)$ konvergiert die Folge $f_i = \varphi_i^*(\bar{f})$ in $\mathfrak{H}^*(R)$ gegen Null.*

Beweis: Zu jeder kompakten Menge $A \subset R$ gibt es ein r mit $\varphi_r(A) \subset K = \bigcup_{n=1}^{s} K_n$ und $\varphi(K) \subset K$. Es genügt deshalb zu zeigen, daß $p_K(f_i)$ für laufendes i eine Nullfolge ist. Dazu wählen wir eine zusammenhängende offene Umgebung $U \subset\subset R$ von K. $\{f \circ \varphi_i | U\}$ ist eine beschränkte und damit relativ-kompakte Teilmenge des Montelraumes $\mathfrak{H}(U)$ (vgl. [1]). Also stellt auch die Folge $\{f_i | U\}$ eine relativ-kompakte Teilmenge von $\mathfrak{H}^*(U)$ dar und besitzt wenigstens einen Häufungspunkt $g \in \mathfrak{H}^*(U)$. Wegen $U \subset\subset R$ existiert ein k mit $\varphi_k(U) \subset K$. Damit ist $h = (\varphi_k | U)^*(g)$ definiert und ebenfalls ein Häufungspunkt der Folge $f_i | U$. Wegen $p_K(f_{i+1}) \leq p_K(f_i)$ muß gelten $p_K(g) = p_K(h)$. Wegen (***) ist $p_U(h) \leq p_K(g) = p_K(h)$, und damit folgt wegen (**), daß $h = 0$ ist. Dann ist aber $p_K(g) = p_K(h) = 0$; also stellt $p_K(f_i)$ eine Nullfolge dar. q. e. d.

Der Beweis des Hilfssatzes benutzt nicht, daß R holomorph-separabel ist. Deshalb gilt Satz 2 auch für K-vollständige Räume, wenn eine zusammenhängende kompakte Teilmenge $K \subset R$ existiert mit $\varphi(K) \subset K$. Gilt $\varphi(R) \subset\subset R$ für ein $\varphi \in \mathrm{Hol}(R, R)$, so kann eine aufsteigende Ausschöpfungsfolge $\overline{\varphi(R)} = K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ von R gewählt werden. Für diese Folge gilt dann

$$\varphi(K_{n+1}) \subset K_1 \subset K_n,$$

und aus Satz 2 ergibt sich somit insbesondere die

Folgerung: *Ist R ein K-vollständiger komplexer Raum und $\varphi: R \to R$ eine holomorphe Abbildung mit $\varphi(R) \subset\subset R$, so be-*

sitzt φ genau einen Fixpunkt p und die Folge der Iterierten konvergiert gegen die konstante Abbildung $R \to p$.

Für reell-analytische Abbildungen ist Satz 2 nicht richtig, wie das Beispiel $R = C^*$ und $z \to z/|z|$ zeigt.

Literatur

[1] Bourbaki, N.: Espaces vectoriells topologiques. Paris. 1953/55.

[2] Grauert, H.: Ein Theorem der analytischen Garbentheorie. Publ. Math. 5 (1960) 233–292.

[3] Grauert, H. und R. Remmert: Komplexe Räume. Math. Ann. 136 (1958) 25–318.

[4] Hervé, M.: Several Complex Variables. Oxford University Press 1963.

[5] Kaup, W.: Infinitesimale Transformationsgruppen komplexer Räume. Erscheint in den Math. Ann. 160 (1965) 72–92.

[6] Reiffen, H. J.: Die Carathéodorysche Metrik auf komplexen Räumen. Erscheint demnächst.