BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

# SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1965

MÜNCHEN 1966

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

# Ein allgemeiner Satz über die Hülle einer Teilalgebra

Von Giorgio Letta und Giovanni Vidossich in Pisa

Vorgelegt von Herrn Georg Aumann am 5. Februar 1965

Es sei auf einer Menge $M$ eine *Algebra* (im Sinne von [6], S. 153) gegeben, die auch durch unendlich viele Operationen definiert sein darf. Die Menge $M$ sei gleichzeitig der Träger eines topologischen Raumes. Dabei setzt man voraus, daß die algebraische Struktur mit der topologischen Struktur von $M$ *verträglich* ist, im Sinne, daß die definierenden Operationen der Algebra in bezug auf die Topologie stetig sind. Dann gilt bekanntlich der folgende

Satz 1. *Ist $A \subseteq M$ eine Teilalgebra von $M$ (im Sinne von* [6], S. 154), *so bildet die topologische Hülle $\bar{A}$ von $A$ wieder eine Teilalgebra von $M$.*

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, zu zeigen, daß der Satz 1 auch dann noch gültig ist, wenn man die Voraussetzungen folgendermaßen abschwächt:

(1) man faßt den Begriff des topologischen Raumes nicht auf die klassische Weise, sondern im Sinne von [9] (nach [9], S. 47: $M$ ist der Träger eines topologischen Raumes, falls man eine *Hüllenoperation*[1] $A \to \bar{A}$ in $\mathfrak{P}(M)$, oder [was auf dasselbe hinausläuft],[2] das zugehörige *Hüllensystem*[1] $\mathfrak{H}$, gegeben hat);

(2) man schwächt die Verträglichkeitsbedingung ab, indem man lediglich fordert, daß jede der definierenden Operationen der Algebra in bezug auf ihre einzelnen Veränderlichen partiell stetig ist (hierbei ist der Begriff der Stetigkeit einer Abbildung $f: M \to M$ im Sinne von [9], S. 71 zu verstehen, d. h. $f$ ist dann

[1] Im Sinne von [6], § 6.

[2] S. [6], Satz 6.5.

und nur dann stetig, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(i) $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ für jedes $A \subseteq M$; (ii) $f^{-1}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{H}$).

Die Bedeutung einer solchen Verallgemeinerung des Satzes 1 besteht darin, daß sie verschiedene spezielle Sätze enthält, die eine wichtige Rolle, insbesondere für die Maßtheorie, spielen, u. a. die folgenden Sätze 2 und 3:[3]

Satz 2. *Ist $\mathfrak{R}$ ein Boolescher Mengenring (von Teilmengen einer festen Menge $X$), so bildet das kleinste $\mathfrak{R}$ umfassende monotone Mengensystem wieder einen Booleschen Mengenring* ([4] 6. B).

Satz 3. *Es sei $X$ ein topologischer Raum (im klassischen Sinne) und es seien $f_i : X \to \boldsymbol{R}$ $(1 \leq i \leq n)$ Bairesche Funktionen.*[4] *Dann ist für jede stetige (und folglich auch für jede Bairesche) Funktion $G : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ die zusammengesetzte Funktion $x \to G(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ wieder eine Bairesche Funktion* (vgl. [8], V, (7. 5)).

Um den Satz 2 auf den Satz 1 zurückzuführen, betrachten wir auf der Menge $M = \mathfrak{P}(X)$:

a) die Algebra, die (z. B.) durch die zweistelligen Operationen $(E, F) \to E \cup F$, $(E, F) \to E - F$ und die nullstellige Operation "$\theta$" definiert ist;

b) die Topologie, die die Gesamtheit aller monotonen Mengensysteme als abgeschlossene Basis hat.

Im Falle des Satzes 3 betrachten wir auf der Menge $M = \boldsymbol{R}^X$:

a) die Algebra, die durch die einzige Operation $\Phi : M^n \to M$ definiert ist, wobei, für jedes $n$-Tupel $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle$ von Funktionen aus $M$, $\Phi(f_1, \ldots, f_n)$ die zusammengesetzte Funktion $x \to G(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ ist;

b) die Topologie, die die Gesamtheit aller Baireschen Systeme[5] von Funktionen aus $M$ als abgeschlossene Basis hat.

Die Menge $A$ aller stetigen Funktionen aus $M$ ist dann eine Teilalgebra von $M$, und die Behauptung des Satzes ist, daß auch $\bar{A}$ eine Teilalgebra von $M$ bildet.

---

[3] S. auch: [1] 2.9.4; [5] 1.5.1 (II); [2] S. 151; [3] Lemma (1.1); [7] (12. H.).

[4] Hier sowie im folgenden bedeutet $\boldsymbol{R}$ die Menge der reellen Zahlen.

[5] Im Sinne von [1] 5.6.1.

Nun wollen wir den Satz 1 mit den oben angegebenen allgemeineren Voraussetzungen beweisen.

Es genügt zu zeigen, daß, wenn $\Phi$ eine der definierenden Operationen der Algebra ist und $A$ eine in bezug auf $\Phi$ abgeschlossene Teilmenge von $M$, dann auch $\bar{A}$ in bezug auf $\Phi$ abgeschlossen ist.

Ist $\Phi$ nullstellig, so ist die Behauptung trivial. Wir dürfen also annehmen, daß $\Phi$ $n$-stellig ist, $n \geq 1$, also eine Abbildung

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

vorliegt mit $x_1, \ldots, x_n \in M$ und $\Phi(x_1, \ldots, x_n) \in M$.

Nach Voraussetzung gilt wegen $A \subseteq \bar{A}$

$$\Phi(y_1, \ldots, y_n) \in \bar{A} \text{ für alle } y_1, \ldots, y_n \in A. \tag{1}$$

Es genügt zu zeigen, daß für alle $k$ mit $0 \leq k \leq n$

$$\Phi(x_1, \ldots, x_k, y_{k+1}, \ldots, y_n) \in \bar{A} \text{ für alle } x_1, \ldots, x_k \in \bar{A} \text{ und } y_{k+1}, \ldots, y_n \in A. \tag{2}$$

In der Tat, für $k = 0$ ist (2) mit (1) identisch, also richtig. Es sei jetzt (2) für $k = i$ richtig ($i < n$). Dann setze man bei fest gewählten $x_1, \ldots, x_i$ aus $\bar{A}$ und $y_{i+2}, \ldots, y_n$ aus $A$

$$\varphi(t) = \Phi(x_1, \ldots, x_i, t, y_{k+2}, \ldots, y_n), \; t \in M.$$

Da $\varphi$ nach Voraussetzung stetig ist, so folgt aus $\varphi(A) \subseteq \bar{A}$

$$\varphi(\bar{A}) \subseteq \overline{\varphi(A)} \subseteq \bar{\bar{A}} = \bar{A}$$

für alle $x_1, \ldots, x_i, y_{i+2}, \ldots, y_n$ obiger Wahl, d. h. es gilt (2) für $k = i + 1$. Damit ist (2) auch für $k = n$ richtig und der Beweis des Satzes geschlossen.

Bemerkung. Gleichzeitig haben wir damit die folgende (etwas stärkere) Behauptung bewiesen:

Sind die Operation $\Phi: M^n \to M$ und die Teilmenge $A$ von $M$ miteinander so verknüpft, daß (1) gilt, so ist $\bar{A}$ in bezug auf $\Phi$ abgeschlossen.

Anmerkung bei der Korrektur. Die Topologien, die wir benützt haben, um die Sätze 2 und 3 auf den Satz 1 zurückzuführen, sind beide klassisch. Eine nicht klassische Topologie tritt dagegen beim Beweis des (in Fußnote 3 zitierten) Satzes 23, S. 151 von [2] auf. (Dieser Satz ist nur ein wenig allgemeiner als Lemma (1.1) von [3]).

## Literatur

[1] G. Aumann: *Reelle Funktionen*. Springer (1954).

[2] F. Cafiero: *Misura e Integrazione*. Cremonese (1959).

[3] E. B. Dynkin: *Die Grundlagen der Theorie der Markoffschen Prozesse*. Springer (1961).

[4] P. R. Halmos: *Measure Theory*. Van Nostrand (1950).

[5] O. Haupt-G. Aumann-C. pauc: *Differential- und Integralrechnung*. (Band III) W. de Gruyter (1955).

[6] H. Hermes: *Einführung in die Verbandstheorie*. Springer (1955).

[7] L. H. Loomis: *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis*. Van Nostrand (1953).

[8] E. J. McShane-T. Botts: *Real Analysis*. Van Nostrand (1959).

[9] G. Nöbeling: *Die Grundlagen der analytischen Topologie*. Springer (1954).