

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1962

MÜNCHEN 1963

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Die Änderung der Polarisation eines Strahles von Dirac-Teilchen bei der Wechselwirkung mit einem äußeren Feld

Von Hans-Joachim Meister in München

Vorgelegt von Herrn Fritz Bopp am 6. Juli 1962

Mit 2 Figuren

Inhalt

Zusammenfassung	85
§ 1. Der kovariante Polarisationsoperator in einer Quantenfeldtheorie	87
§ 2. Die kovariante Beschreibung der Polarisation in der Dirac-Theorie mit $m \neq 0$	94
§ 3. Die kovariante Beschreibung der Polarisation eines Strahles von Dirac-Teilchen mit scharfem Impuls	102
§ 4. Die Streuung eines polarisierten Strahles von Dirac-Teilchen mit $m \neq 0$ an einem Potential: Allgemeine Aussagen	105
§ 5. Die Streuung eines polarisierten Strahles von Dirac-Teilchen mit $m \neq 0$ an einem statischen Potential in erster Bornscher Näherung	120
§ 6. Die Bewegung des Polarisationsvektors eines Dirac-Wellenpaketes in einem makroskopischen elektromagnetischen Feld	149
Anhang A: Die kovariante Beschreibung der Polarisation in der Dirac-Theorie mit $m = 0$	154
Anhang B: Beweis von (4.26)	158
Anhang C: Beweis von (4.34)	159
Bezeichnungen	160

Zusammenfassung

Das Interesse am Verhalten polarisierter Teilchen hat in den letzten Jahren stark zugenommen, da man immer besser in der Lage ist, Strahlen polarisierter Teilchen herzustellen und nachzuweisen, und deshalb Polarisations-

effekte benutzen kann, um detailliertere Auskünfte über Struktur und Wechselwirkung der Elementarteilchen zu bekommen. Von den verschiedenen in der Literatur diskutierten Beschreibungen der Polarisation erweist sich für die Behandlung von relativistischen Streuproblemen der kovariante Formalismus von Michel und Wightman als besonders zweckmäßig. Dieser Formalismus wird in § 1 für beliebige Teilchen kurz erläutert und in § 2 und § 3 speziell für Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ (Dirac-Teilchen) in einer Form dargestellt, in der er in der vorliegenden Arbeit zur Untersuchung des Verhaltens des Polarisationsvektors bei Streuprozessen benutzt werden soll. Dabei beschränken wir uns auf die Streuung an einem äußeren Feld, weil das der einfachste und daher am besten zu überschauende Fall ist, bei dem sich aber schon viele charakteristische Züge der Polarisationseffekte deutlich zeigen. In § 4 werden aus der Transformation der die Polarisation eines Teilchenstrahles beschreibenden Dichtematrix bei der Streuung einige allgemeine Aussagen über Polarisationseffekte abgeleitet. Dabei ergibt sich, daß gewisse Polarisationseigenschaften des Coulombpotentials auch bei allgemeineren Potentialen vorhanden sind; denn diese Eigenschaften resultieren nicht aus einer speziellen Form der Wechselwirkung, sondern aus ihrer Symmetrie und Hermitezität. In § 5 wird zunächst das Verhalten des Polarisationsvektors bei der Streuung für die fünf möglichen Wechselwirkungstypen in erster Bornscher Näherung explizite angegeben und diskutiert. Dann wird die Streuung von Dirac-Teilchen, die eine Ladung, ein anomales magnetisches Moment und ein elektrisches Dipolelement besitzen, am elektromagnetischen Feld in erster Bornscher Näherung untersucht. Dabei ergibt sich, daß man durch Streuung an einem geeigneten Vektorpotential einen stark polarisierten Elektronenstrahl extremrelativistischer Energie gewinnen könnte; allerdings liefert eine solche Methode nur eine geringe Intensität und ist zudem an die Herstellung polarisierter Targets gebunden. Der quantitative Vergleich dieses Effektes mit den Aussagen, die man auf Grund der Behandlung der Elektron-Kern-Streuung als Zweikörperproblem erhält, führt zu dem Schluß, daß die Beschreibung eines polarisierten Targets als äußeres Potential bezüglich der Polarisationsaussagen auch dann schon nicht mehr zulässig sein kann, wenn man den Impulsrückstoß noch in guter Näherung vernachlässigen darf, daß also auch der Spin unendlich schwerer Targetteilchen noch einen beträchtlichen „Rückstoß“ erfahren kann. Die Diskussion der Möglichkeiten, unter Ausnutzung von Polarisationseffekten die Werte für ein strukturbedingtes anomales magnetisches Moment und elektrisches Dipolmoment der Leptonen weiter einzuschränken, liefert insofern ein negatives Resultat, als die Effekte erst bei derart hohen Energien beträchtlich werden könnten, daß die Behandlung des Streuers als äußeres Potential problematisch wird. In § 6 schließlich wird mit Hilfe des kovarianten Formalismus die Frequenz berechnet, mit der der Polarisationsvektor eines Dirac-Wellenpaketes in einem makroskopischen elektromagnetischen Feld präzediert.

§ 1. Der kovariante Polarisationsoperator in einer Quantenfeldtheorie

Der Zustand Φ soll die Resultate aller möglichen Experimente während der ganzen Geschichte des Systems beschreiben; wir benutzen also das Heisenberg-Bild. Die Lorentztransformation fassen wir aktiv auf, d. h. wir halten das Bezugssystem fest und transformieren den Zustand. Dann gilt das Relativitätsprinzip der Quantenmechanik:¹ Jede Theorie, die invariant gegen die inhomogene eigentliche orthochrone Lorentzgruppe L ist, liefert eine unitäre Darstellung dieser Gruppe bis auf den Faktor ± 1 , d. h. jedem L entspricht ein unitärer Operator $U(L)$ im Hilbertraum der Zustände Φ derart, daß $U(L_1)U(L_2) = \pm U(L_1L_2)$ gilt. Dieser Operator verknüpft physikalisch äquivalente Zustände, die durch ein L auseinander hervorgehen, gemäß

$$(1.1) \quad \Phi \xrightarrow{L} \Phi_L = U(L)\Phi.$$

Für infinitesimale Lorentztransformationen

$$(1.2) \quad x' = L^{\text{inf.}} x \quad \text{bzw.} \quad x'^{\mu} = \alpha^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + \alpha^{\mu}, \quad \alpha^{\mu\nu} = -\alpha^{\nu\mu}$$

gilt dann

$$(1.3) \quad U(L^{\text{inf.}}) = 1 + iK(L^{\text{inf.}}),$$

wobei der hermitesche Operator K linear in den $\alpha^{\mu\nu}$ und α^{μ} sein muß:

$$(1.4) \quad K(L^{\text{inf.}}) = \alpha^{\mu} P_{\mu} + \frac{1}{2} \alpha^{\mu\nu} M_{\mu\nu}.$$

Für die hermiteschen Operatoren P_{μ} und $M_{\mu\nu}$, die Operatoren des Impulses und des Drehimpulses, lassen sich dann bekanntlich die folgenden Vertauschungsrelationen ableiten

$$(1.5) \quad \begin{aligned} [P_{\mu}, P_{\nu}] &= 0, & [P_{\nu}, M_{\gamma\delta}] &= -i(g_{\nu\gamma} P_{\delta} - g_{\nu\delta} P_{\gamma}), \\ [M_{\gamma\delta}, M_{\rho\sigma}] &= i(g_{\gamma\rho} M_{\delta\sigma} + g_{\delta\sigma} M_{\gamma\rho} - g_{\gamma\sigma} M_{\delta\rho} - g_{\delta\rho} M_{\gamma\sigma}). \end{aligned}$$

Man kann aber auch umgekehrt die Operatoren P_{μ} und $M_{\mu\nu}$ durch diese Relationen definieren.

Die physikalisch interessanten irreduziblen Darstellungen der inhomogenen Lorentzgruppe lassen sich durch zwei Zahlen m und j charakterisieren,¹ wobei $m^2 = -p^\mu p_\mu$ und p^μ der Eigenwert von P^μ ist. Dementsprechend beschreibt eine Quantenfeldtheorie, die invariant gegen inhomogene eigentliche orthochrone Lorentztransformationen ist und die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt, Teilchen, die durch ihre Masse m und ihren sog. Spin j gekennzeichnet sind. Der Einteilchenzustand einer solchen Theorie ist dann durch Angabe des Impulses p^μ und der Polarisation, d. h. welche der verschiedenen Einstellmöglichkeiten des Spins bezüglich einer Richtung vorliegt, festgelegt. Wie sieht das System von kovarianten Operatoren aus, zu dem ein solcher Zustand Eigenzustand ist?²

Diese Operatoren müssen Elemente der aus den P_μ und $M_{\mu\nu}$ gebildeten Algebra (1.5) und untereinander vertauschbar sein. Zu dem gesuchten Operatorensystem gehören auf jeden Fall P_μ und $P_\mu P^\mu$. Weiter betrachten wir den Operator^{2a}

$$(1.6) \quad W^\mu := \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu M_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} M_{\nu\rho} P_\sigma,$$

der wegen der Hermitezität von P_ν und $M_{\rho\sigma}$ hermitesch ist. Für ihn ergeben sich aus (1.5) folgende Vertauschungsrelationen

$$(1.7) \quad [P^\nu, W^\mu] = 0, \quad [W^\mu, W^\nu] = i \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} W_\rho P_\sigma, \quad [W_\mu W^\mu, W^\nu] = 0.$$

Danach ist W^μ mit P^ν , P^2 und W^2 , nicht aber mit W^ν vertauschbar. Wir können also P^2 , W^2 , P^μ und eines der W^μ als das gesuchte System von Operatoren ansehen. Dazu müssen wir aber noch zeigen, welche physikalische Bedeutung und welches Eigenwertspektrum die Operatoren W^2 und W^μ besitzen. Letzteres geschieht im wesentlichen durch Aufsuchen der kleinen Gruppe,¹ d. h. derjenigen Untergruppe der homogenen Lorentzgruppe, die

¹ E. Wigner, Ann. Math. 40, 149 (1939). – A. S. Wightman, Nuovo Cimento, Suppl. 14, 81 (1959).

² Bei der Beantwortung dieser Frage folgen wir L. Michel, Nuovo Cimento, Suppl. 14, 95 (1959).

^{2a} V. Bargmann, E. Wigner, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 34, 211 (1948).

den Impuls p^μ ungeändert läßt und deren infinitesimale Erzeugende gerade der Operator W^μ aus (1.6) ist.

Da die betrachteten Eigenzustände einen scharfen Impuls besitzen sollen, können wir in (1.6) P_σ durch seinen Eigenwert p_σ ersetzen, d. h. schreiben

$$(1.8) \quad W^\mu(p) := \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} M_{\nu\varrho} p_\sigma.$$

Die folgenden Betrachtungen gelten also für jeden Punkt des Impulsraumes. An einen solchen Punkt p denken wir uns ein Vierbein aus orthogonalen Einheitsvektoren $t^{(\alpha)\mu}(p)$ angeheftet:

$$(1.9) \quad t^{(\alpha)\mu}(p) t^{(\beta)\mu}(p) = g^{\alpha\beta}.$$

Dabei sind $t^{(0)\mu}$ ein zeitartiger und die $t^{(i)\mu}$ drei raumartige Vektoren. Mit Hilfe der Matrizen

$$(1.10) \quad Q := (t^{(\alpha)\mu}), \quad R := (t_{(\alpha)\mu}),$$

wobei wir definiert haben

$$(1.11) \quad t_{(\alpha)\mu}(p) = g_{\alpha\beta} t^{(\beta)\mu}(p),$$

können wir (1.9) in der Form: $QR^T = 1$ schreiben. Daraus ergibt sich: $R^T Q = 1$, denn wegen der aus (1.9) folgenden linearen Unabhängigkeit der $t^{(\alpha)\mu}$ besitzt die Matrix Q ein Reziprokes. Es gilt also die Vollständigkeitsrelation

$$(1.12) \quad t_{(\alpha)\mu}(p) t^{(\alpha)\nu}(p) = g_{\mu\nu}.$$

Weiter folgt aus (1.9) mit (1.11)

$$(1.13) \quad \det(g^{\alpha\beta}) = (\det Q)^2 \det(g_{\mu\nu}), \quad \text{d. h. } \det Q = \pm 1.$$

Nun führen wir die Projektionen des Operators W^μ auf die Beine $t^{(\alpha)\mu}$ ein:

$$(1.14) \quad S^{(\alpha)}(p) := W^\mu(p) t^{(\alpha)\mu}(p).$$

Damit läßt sich W^μ in der Form

$$(1.15) \quad W^\mu(p) = S_{(\alpha)}(p) t^{(\alpha)\mu}(p), \quad W^2(p) = S_{(\alpha)}(p) S^{(\alpha)}(p)$$

schreiben. Schließlich finden wir aus (1.7) für die $S^{(\alpha)}$ folgende Vertauschungsrelationen

$$(1.16) \quad [S^{(k)}, S^{(l)}] = i \varepsilon^{kl\alpha\beta} p_\alpha t_{(\alpha)}^\beta S_{(\beta)} \det Q.$$

Die bisherigen Betrachtungen gelten für jeden Wert der Masse m . Jetzt machen wir die Annahme: $m \neq 0$. Dann können wir für $t^{(0)\mu}$ die Größe p^μ/m wählen, so daß (1.9) lautet

$$(1.17) \quad t^{(0)\mu}(p) = \frac{p^\mu}{m}, \quad t^{(i)\mu}(p) p_\mu = 0, \quad t^{(i)\mu}(p) t_\mu^{(j)}(p) = \delta^{ij}.$$

Damit findet man

$$(1.18) \quad \det Q = \frac{m}{p^0} \vec{t}^{(1)} \cdot (\vec{t}^{(2)} \times \vec{t}^{(3)}).$$

Man kann also nach (1.13) immer setzen

$$(1.19) \quad \det Q = 1,$$

indem man einfach die $t^{(i)\mu}$ derart numeriert, daß $\vec{t}^{(1)}$, $\vec{t}^{(2)}$, $\vec{t}^{(3)}$ ein Rechtssystem bildet. Wegen

$$(1.20) \quad W^\mu(p) p_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} M_{\nu\varrho} p_\sigma p_\mu = 0$$

folgt aus (1.17) weiter

$$(1.21) \quad S^{(0)}(p) = 0, \quad W^2(p) = \sum_{i=1}^3 S_{(i)}(p) S^{(i)}(p).$$

Damit und mit (1.19) vereinfachen sich die Vertauschungsrelationen (1.16) zu

$$(1.22) \quad \left[\frac{S^{(k)}}{m}, \frac{S^{(l)}}{m} \right] = i \varepsilon^{kl n} \frac{S^{(n)}}{m}.$$

Das sind aber die Vertauschungsrelationen der 3-dimensionalen Drehgruppe, der kleinen Gruppe im Falle $m \neq 0$. Aus (1.22) folgt in bekannter Weise, daß der Operator $\sum_{i=1}^3 S_{(i)} S^{(i)}/m^2$ die Eigenwerte $j(j+1)$ und der Operator $S^{(i)}/m$ die Eigenwerte $m_{i(j)} = j, j-1, \dots, -j$ mit $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ besitzt.

Das gesuchte System besteht somit im Falle $m \neq 0$ aus den kovarianten

$$(1.23) \quad \text{Operatoren } P^\mu, -P^2, W^2(\not{p})/m^2, W^\mu(\not{p})t_\mu(\not{p})/m \\ \text{mit den Eigenwerten } p^\mu, m^2, j(j+1), m_i = j, j-1, \dots -j.$$

Dabei ist t^μ eines der $t^{(i)\mu}$, und es gilt

$$(1.24) \quad t^\mu(\not{p})\not{p}_\mu = 0, \quad t^2 = 1.$$

Die physikalische Bedeutung der in (1.23) auftretenden Drehimpulsquantenzahl j erkennt man, wenn man den kovarianten Operator $W^\mu(\not{p})/m$ im Ruhssystem aufschreibt. Dort gilt nach (1.8)

$$(1.25) \quad \frac{W^\mu(\not{p})}{m} \Big|_{\vec{p}=0} = (0, \vec{J} \Big|_{\vec{p}=0}), \quad J^i := \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} M_{jk}.$$

Das ist aber gerade der Drehimpuls im Ruhssystem, den man üblicherweise Spin nennt. Der Operator $W^\mu(\not{p})/m$ ist also der kovariante Operator des Spindrehimpulses, denn sein Quadrat liefert den Spin des Teilchens und seine Projektion auf die Richtung $t^\mu(\not{p})$ dessen Polarisation bezüglich dieser Richtung. Die Eigenvektoren des Operators $W^\mu(\not{p})t_\mu(\not{p})/m$ spannen dann den zu jedem Punkt des Impulsraumes gehörigen $(2j+1)$ -dimensionalen Polarisationsraum auf.

Wir wenden uns jetzt dem Fall $m = 0$ zu. Dann ist p^μ ein Nullvektor und wir können das Vierbein (1.9) nicht mehr in der Form (1.17) wählen. Statt dessen setzen wir

$$(1.26) \quad t^{(1)\mu}(\not{p}) = -\frac{\not{p}^\mu}{p \cdot t^{(0)}} - t^{(0)\mu}.$$

Dann muß nach (1.9) gelten

$$(1.27) \quad t^{(2)\mu}(\not{p})\not{p}_\mu = t^{(3)\mu}(\not{p})\not{p}_\mu = 0.$$

Damit findet man

$$(1.28) \quad \det Q = \frac{\vec{p} \cdot (\vec{t}^{(2)} \times \vec{t}^{(3)})}{p^0},$$

so daß man nach (1.13) immer setzen kann

$$(1.29) \quad \det Q = 1,$$

indem man einfach \vec{p} , $\vec{i}^{(2)}$, $\vec{i}^{(3)}$ als Rechtssystem wählt. Weiter folgt aus (1.26) und (1.27) wegen (1.20)

$$(1.30) \quad S^{(0)}(\vec{p}) = -S^{(1)}(\vec{p}), \quad W^2(\vec{p}) = S^{(2)}(\vec{p})S^{(2)}(\vec{p}) + S^{(3)}(\vec{p})S^{(3)}(\vec{p}).$$

Damit und mit (1.29) ergibt sich aus den Vertauschungsrelationen (1.16)

$$(1.31) \quad \left[\frac{S^{(0)}}{\vec{p} \cdot \vec{i}^{(0)}}, S^{(2)} \right] = i S^{(3)}, \quad [S^{(2)}, S^{(3)}] = 0, \quad \left[S^{(3)}, \frac{S^{(0)}}{\vec{p} \cdot \vec{i}^{(0)}} \right] = i S^{(2)}.$$

Das sind aber die Vertauschungsrelationen der 2-dimensionalen Euklidischen Gruppe, der kleinen Gruppe im Falle $m = 0$, die man aus (1.5) durch die Umbenennung $S^{(0)}/\vec{p} \cdot \vec{i}^{(0)} \leftrightarrow M_{23}$, $S^{(2)} \leftrightarrow P_2$, $S^{(3)} \leftrightarrow P_3$ erhält. Nun weiß man, daß der Spin nur dann endlich sein kann, falls $W^2(\vec{p}) = 0$; andernfalls liefert (1.31) Darstellungen, die einem „ganz- oder halbzahlig unendlichen Spin“ entsprechen.¹ Das erkennt man anschaulich sofort, indem man in (1.23): $W^2(\vec{p}) = m^2 j(j+1)$ den Grenzübergang $m \rightarrow 0$ ausführt. $W^2(\vec{p}) = 0$ bedeutet nach (1.30) aber: $S^{(2)} = S^{(3)} = 0$, denn mit W^μ sind auch $S^{(2)}$ und $S^{(3)}$ hermitesch. Bei endlichem Spin, der für die Physik allein von Interesse ist, bleibt also in (1.31) nur $S^{(0)}/\vec{p} \cdot \vec{i}^{(0)}$, die Erzeugende der Drehungen um die Impulsrichtung [vgl. (1.34)] übrig, deren Eigenwerte bekanntlich $j = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2} \dots$ sind.

Das gesuchte System besteht somit im Falle $m = 0$ aus den kovarianten

$$(1.32) \quad \text{Operatoren} \quad P^\mu, -P^2, \quad W^\mu(\vec{p}) \vec{i}_\mu^{(0)}(\vec{p}) / \vec{p}^\mu \vec{i}_\mu^{(0)}(\vec{p})$$

mit den Eigenwerten $p^\mu, m^2=0, j=0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \dots$

Die physikalische Bedeutung der Quantenzahl j erkennt man folgendermaßen. Da $W^\mu(\vec{p})$ und \vec{p}^μ nach (1.20) aufeinander senkrecht stehen und beide Größen jetzt Nullvektoren sind, so müssen sie einander proportional sein. Weiter ist nach (1.8) allgemein

$$(1.33) \quad W^{(0)}(\vec{p}) = \vec{J} \cdot \vec{p}, \quad J^i := \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} M_{jk}.$$

Es muß also gelten

$$(1.34) \quad W^\mu(\not{p}) = \frac{\vec{j} \cdot \vec{p}}{p^0} \not{p}^\mu,$$

so daß $W \cdot \not{\epsilon}^{(0)} / \not{p} \cdot \not{\epsilon}^{(0)}$ gerade der Drehimpuls in Impulsrichtung ist, den man üblicherweise Helizität nennt. Im Falle $m = 0$ fallen also die Operatoren des Spindrehimpulses und der Polarisation zusammen, da sich der Spin nur in oder entgegen der Impulsrichtung einstellen kann; der Polarisationsraum ist somit immer 2- (oder 0-) dimensional. Der Spin des Teilchens ist $|j|$, während j selbst die Helizität angibt.

Abschließend stellen wir noch das Transformationsverhalten der Erwartungswerte der betrachteten Operatoren gegenüber den Elementen der vollen Lorentzgruppe zusammen:*

		eigentl. orthochr. Lorentztr.	Rauminversion	Zeitumkehr
P^μ		Vektor (V)	V	$-V$
$M^{\mu\nu}$		Tensor (T)	T	$-T$
$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$		Tensor (T)	$-T$	$-T$
(1.35)	W^μ	Vektor (V)	$-V$	$-V$
$m \neq 0$	$\not{\epsilon}^{(i)\mu}$	Vektor (V)	$-V$ bzw. $V, V, -V$	V bzw. $-V, -V, V$
	$\frac{W^\mu(\not{p}) \not{\epsilon}_\mu^{(i)}(\not{p})}{m}$	Skalar (S)	S bzw. $-S, -S, S$	$-S$ bzw. $S, S, -S$
$m = 0$	$\frac{W^\mu(\not{p}) \not{\epsilon}_\mu^{(0)}(\not{p})}{\not{p}^\mu \not{\epsilon}_\mu^{(0)}(\not{p})}$	Skalar (S)	$-S$	S

Dabei ergibt sich das Transformationsverhalten von W^μ auf Grund der Definition (1.6) aus dem bekannten Verhalten von Impuls- und Drehimpulsoperator. Das Verhalten der $\not{\epsilon}^{(i)\mu}$ haben wir (für alle drei raumartigen Beine in gleicher bzw. verschie-

* Mit $-S, -V, -T$ bezeichnen wir eine Größe, deren Komponenten sich bei der betreffenden Transformation mit dem entgegengesetzten Vorzeichen wie die Komponenten eines gewöhnlichen (d. h. etwa aus Ortsvektoren x^μ aufgebauten) Skalars, Vektors, Tensors transformieren.

dener Weise) so postuliert, daß sich Q wie ein gewöhnlicher Skalar transformiert. Die Aussagen über $W \cdot t^{(0)}/p \cdot t^{(0)}$ sind offensichtlich unabhängig von dem Verhalten von $t^{(0)\mu}$ bei den diskreten Transformationen.

§ 2. Die kovariante Beschreibung der Polarisation in der Dirac-Theorie mit $m \neq 0$

Die für eine beliebige relativistische Quantenfeldtheorie gültigen Ergebnisse des § 1. wollen wir jetzt für den Spezialfall der Dirac-Theorie ausführlich diskutieren. Dabei beschränken wir uns auf den uns im weiteren allein interessierenden Fall $m \neq 0$; eine kurze Darstellung des Falles $m = 0$ geben wir in Anhang A.

§ 2.1. Der Impulsraum

Da ein Dirac-Spinor $\psi(x)$ der Klein-Gordon-Gleichung genügen muß, läßt sich seine Fourierzerlegung in folgender Form schreiben

$$(2.1) \quad \psi(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_{\varepsilon=-1}^1 \int_{p^0 > 0} 2 \sqrt{m p^0} c^\varepsilon(p) u^\varepsilon(p) \delta(p^2 + m^2) e^{i\varepsilon p \cdot x} d^4 p.$$

Dabei gilt

$$(2.2) \quad p^0 := + \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \quad u^{(1)}(p) := u(p), \quad u^{(-1)}(p) := v(p)$$

und die $c^{(1)}(p) := a(p)$ bzw. $c^{(-1)}(p) := b^+(p)$ sind im Hilbertraum in bekannter Weise Vernichtungsoperatoren für Teilchen, bzw. Erzeugungsoperatoren für Antiteilchen. Da $\psi(x)$ auch der Dirac-Gleichung $(\gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi(x) = 0$ genügen muß, so erfüllen die Dirac-Amplituden $u^\varepsilon(p)$ die Gleichung

$$(2.3) \quad (i \varepsilon \hat{p} + m) u^\varepsilon(p) = 0.$$

Für den Operator im Spinorraum

$$(2.4) \quad P^\varepsilon(p) := \frac{(-i \varepsilon \hat{p} + m)}{2m}$$

lassen sich mit Hilfe der Vertauschungsrelationen für die γ^μ folgende Relationen beweisen:

$$(2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } P^\varepsilon(\not{p}) P^{\varepsilon'}(\not{p}) = \delta^{\varepsilon\varepsilon'} P^\varepsilon(\not{p}), \\ \text{b) } i\gamma^0 [P^\varepsilon(\not{p})] + i\gamma^0 = P^\varepsilon(\not{p}), \\ \text{c) } (i\varepsilon \hat{p} + m) P^\varepsilon(\not{p}) = 0, \\ \text{d) } \sum_{\varepsilon=-1}^1 P^\varepsilon(\not{p}) = 1, \\ \text{e) } \text{Sp} [P^\varepsilon(\not{p})] = 2. \end{array} \right.$$

Die Eigenschaften a) und b) besagen Idempotenz und Hermitizität,* so daß $P^\varepsilon(\not{p})$ ein Projektor ist. Dieser zerlegt nach c) und d) einen beliebigen Spinor in die Impulsamplitude des Teilchens $u^{(1)}(\not{p})$ und die des Antiteilchens $u^{(-1)}(\not{p})$, die jeweils, wie aus e) folgt, eine zweidimensionale Linearmanigfaltigkeit aufspannen. Letztere ist gerade der Polarisationsraum.

§ 2.2. Der kovariante Polarisationsoperator

In der Dirac-Theorie lauten Impuls- und Drehimpulsoperator im Impulsraum

$$(2.6) \quad P_\sigma = \not{p}_\sigma, \quad M_{\nu\varrho} = \not{p}_\nu \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \not{p}^\varrho} - \not{p}_\varrho \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \not{p}^\nu} + \frac{1}{4i} (\gamma_\nu \gamma_\varrho - \gamma_\varrho \gamma_\nu).$$

Damit ergibt sich nach (1.8)

$$(2.7) \quad W^\mu(\not{p}) = \frac{1}{8i} \varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} (\gamma_\nu \gamma_\varrho - \gamma_\varrho \gamma_\nu) \not{p}_\sigma,$$

denn es gilt offensichtlich

$$(2.8) \quad \varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} \left(\not{p}_\nu \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \not{p}^\varrho} - \not{p}_\varrho \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \not{p}^\nu} \right) \not{p}_\sigma = 0.$$

In W^μ geht also nur der Spin-, nicht aber der Bahnanteil von $M_{\nu\varrho}$ ein. (2.7) kann man auch in der Form

* Man beachte, daß wir im Spinorraum die indefinite Metrik $(a, b) := \bar{a}b$ benutzen, so daß für das Adjungierte eines Matrixoperators A gilt: $A^{ad} := i\gamma^0 A^\dagger i\gamma^0$.

$$(2.9) \quad W^\mu(\hat{p}) = \frac{1}{4i} \gamma^5 (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) \hat{p}_\nu = \frac{1}{2i} \gamma^5 (\gamma^\mu \hat{p} - \hat{p}^\mu)$$

schreiben und erhält damit auf Grund von (1.24)

$$(2.10) \quad \frac{W^\mu(\hat{p}) t_\mu(\hat{p})}{m} = \frac{1}{2im} \gamma^5 \hat{t}(\hat{p}) \hat{p}.$$

Daraus findet man

$$(2.11) \quad \frac{W^\mu(\hat{p}) W_\mu(\hat{p})}{m^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right), \quad \left(\frac{W^\mu(\hat{p}) t_\mu(\hat{p})}{m} \right)^2 = \left(\pm \frac{1}{2} \right)^2,$$

in Einklang mit der Tatsache, daß Dirac-Teilchen den Spin $\frac{1}{2}$ besitzen. Die Basisvektoren $u_\eta^\varepsilon(t, \hat{p})$ mit $\eta = \pm 1$, die den zum Impuls \hat{p} und zur „Teilchensorte“ ε gehörigen 2-dimensionalen Polarisationsraum aufspannen, sind dann durch folgende Eigenwertgleichung definiert:

$$(2.12) \quad \frac{W^\mu(\hat{p}) t_\mu(\hat{p})}{m} u_\eta^\varepsilon(t, \hat{p}) \equiv \frac{1}{2im} \gamma^5 \hat{t}(\hat{p}) \hat{p} u_\eta^\varepsilon(t, \hat{p}) = \frac{\varepsilon \eta}{2} u_\eta^\varepsilon(t, \hat{p})$$

oder, wegen (2.3),

$$(2.13) \quad \gamma^5 \hat{t}(\hat{p}) u_\eta^\varepsilon(t, \hat{p}) = \eta u_\eta^\varepsilon(t, \hat{p}), \quad \eta = \pm 1.$$

Wir können also die 4-Spinoren im Impulsraum mit Hilfe der beiden vertauschbaren Operatoren

$$(2.14) \quad \frac{\hat{p}}{im} \quad \text{und} \quad \gamma^5 \hat{t}(\hat{p}), \quad [\hat{p}, \gamma^5 \hat{t}(\hat{p})] = 0$$

klassifizieren, deren Eigenwerte ε das Teilchen ($\varepsilon = +1$) bzw. Antiteilchen ($\varepsilon = -1$) und $\eta = \pm 1$ die Polarisation bezüglich t^μ charakterisieren.

Der Projektor, der aus einem beliebigen Spinor die Amplituden $u_\eta^\varepsilon(t, \hat{p})$ herausprojiziert, lautet³

$$(2.15) \quad P_\eta^\varepsilon(t, \hat{p}) := \\ = \frac{1}{2} (1 + \eta \gamma^5 \hat{t}(\hat{p})) P^\varepsilon(\hat{p}) \equiv \frac{1}{2} (1 + \eta \gamma^5 \hat{t}(\hat{p})) \left(\frac{-i \varepsilon \hat{p} + m}{2m} \right),$$

³ L. Michel, A. S. Wightman, Phys. Rev. 98, 1190 (1955).

denn für diesen Ausdruck kann man, am einfachsten unter ausgiebiger Verwendung von (2.5), folgende Relationen beweisen

$$(2.16) \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } [P_{\eta}^{\varepsilon}(t, \hat{p}), P^{\varepsilon'}(\hat{p})] = 0, \\ \text{b) } P_{\eta}^{\varepsilon}(t, \hat{p}) P_{\eta'}^{\varepsilon'}(t, \hat{p}) = \delta^{\varepsilon\varepsilon'} \delta_{\eta\eta'} P_{\eta}^{\varepsilon}(t, \hat{p}), \\ \text{c) } i\gamma^0 [P_{\eta}^{\varepsilon}(t, \hat{p})]^{\dagger} i\gamma^0 = P_{\eta}^{\varepsilon}(t, \hat{p}), \\ \text{d) } (i\varepsilon \hat{p} + m) P_{\eta}^{\varepsilon}(t, \hat{p}) = 0, \\ \text{e) } \frac{W^{\mu}(\hat{p}) t_{\mu}(\hat{p})}{m} P_{\eta}^{\varepsilon}(t, \hat{p}) = \frac{\varepsilon\eta}{2} P_{\eta}^{\varepsilon}(t, \hat{p}), \\ \text{f) } \sum_{\eta=-1}^1 P_{\eta}^{\varepsilon}(t, \hat{p}) = P^{\varepsilon}(\hat{p}), \quad \sum_{\varepsilon, \eta=-1}^1 P_{\eta}^{\varepsilon}(t, \hat{p}) = 1, \\ \text{g) } \text{Sp} [P_{\eta}^{\varepsilon}(t, \hat{p})] = 1, \\ \text{h) } \text{Sp} \left[\frac{2\varepsilon W^{\mu}(\hat{p})}{m} P_{\eta}^{\varepsilon}(t, \hat{p}) \right] = \text{Sp} [\gamma^5 \gamma^{\mu} P_{\eta}^{\varepsilon}(t, \hat{p})] = \eta t^{\mu}(\hat{p}). \end{array} \right.$$

Den in den Amplituden $u_{\eta}^{\varepsilon}(t, \hat{p})$ auf Grund ihrer Definition gemäß (2.13) noch offenen Faktor schränken wir auf eine Phase ein, indem wir die übliche Normierung fordern:

$$(2.17) \quad \bar{u}_{\eta}^{\varepsilon'}(t, \hat{p}) u_{\eta}^{\varepsilon}(t, \hat{p}) = \varepsilon \delta^{\varepsilon'\varepsilon} \delta_{\eta'\eta}.$$

Daraus ergibt sich in bekannter Weise die Vollständigkeitsrelation

$$(2.18) \quad \sum_{\varepsilon, \eta=-1}^1 \varepsilon u_{\eta}^{\varepsilon}(t, \hat{p}) \bar{u}_{\eta}^{\varepsilon}(t, \hat{p}) = 1.$$

Multipliziert man diese Gleichung von links mit $P_{\eta}^{\varepsilon}(t, \hat{p})$, so erhält man mit (2.16b)

$$(2.19) \quad \varepsilon u_{\eta}^{\varepsilon}(t, \hat{p}) \bar{u}_{\eta}^{\varepsilon}(t, \hat{p}) = P_{\eta}^{\varepsilon}(t, \hat{p}).$$

Die Relation (2.19) läßt sich auf den Fall verallgemeinern, daß links verschiedene Indizes η stehen. Dazu nennen wir den die Polarisationsrichtung charakterisierenden Vektor $t^{(3)\mu}$. Dann folgt aus (2.15) und (1.17)

$$(2.20) \quad P_{\eta}^{\varepsilon}(t^{(3)}, \hat{p}) \gamma^5 \hat{t}^{(1)} = \gamma^5 \hat{t}^{(1)} P_{-\eta}^{\varepsilon}(t^{(3)}, \hat{p}) \text{ bzw. } u_{\eta}^{\varepsilon}(t^{(3)}, \hat{p}) = \gamma^5 \hat{t}^{(1)} u_{-\eta}^{\varepsilon}(t^{(3)}, \hat{p})$$

und damit aus (2.19)

$$(2.21) \quad \varepsilon u_{\eta}^{\varepsilon}(t^{(3)}, \hat{p}) \bar{u}_{-\eta}^{\varepsilon}(t^{(3)}, \hat{p}) = \gamma^5 \hat{t}^{(1)} P_{-\eta}^{\varepsilon}(t^{(3)}, \hat{p}).$$

Die Relationen (2.19) und (2.21) können wir zusammenfassen zu

$$(2.22) \quad \varepsilon u_{\eta'}^e(t^{(3)}, p) \bar{u}_{\eta}^e(t^{(3)}, p) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \gamma^5 \hat{t}^{(3)} & \gamma^5 \hat{t}^{(1)} - \hat{t}^{(1)} \hat{t}^{(3)} \\ \gamma^5 \hat{t}^{(1)} + \hat{t}^{(1)} \hat{t}^{(3)} & 1 - \gamma^5 \hat{t}^{(3)} \end{pmatrix} P^e(p).$$

Dabei bezieht sich die ausgeschriebene Matrix auf die Indizes η' und η mit der Zuordnung

$$(2.23) \quad (\eta' \eta) = \begin{pmatrix} 11 & 1-1 \\ -11 & -1-1 \end{pmatrix}.$$

Nun gilt mit (2.10), (1.14) und (1.22), da die $\vec{t}^{(i)}$ ein Rechtssystem bilden sollen,

$$(2.24) \quad \hat{t}^{(1)} \hat{t}^{(3)} = \frac{4}{m^2} S^{(1)} S^{(3)} = -\frac{2i}{m} S^{(2)} = -\frac{1}{m} \gamma^5 \hat{t}^{(2)} \hat{p}.$$

Damit lautet (2.22), wenn wir noch (2.5c) beachten,

$$(2.25) \quad \varepsilon u_{\eta'}^e(t^{(3)}, p) \bar{u}_{\eta}^e(t^{(3)}, p) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \gamma^5 \hat{t}^{(3)} & \gamma^5 (\hat{t}^{(1)} + i \varepsilon \hat{t}^{(2)}) \\ \gamma^5 (\hat{t}^{(1)} - i \varepsilon \hat{t}^{(2)}) & 1 - \gamma^5 \hat{t}^{(3)} \end{pmatrix} P^e(p).$$

Dafür können wir auch schreiben⁴

$$(2.26) \quad \begin{cases} u_{\eta'}(t^{(3)}, p) \bar{u}_{\eta}(t^{(3)}, p) = \frac{1}{2} \left[\delta_{\eta\eta'} + \gamma^5 \sum_{k=1}^3 \hat{t}^{(k)} (\tau^{(k)})_{\eta\eta'} \right] P^{(1)}(p) \\ v_{\eta'}(t^{(3)}, p) \bar{v}_{\eta}(t^{(3)}, p) = -\frac{1}{2} \left[\delta_{\eta\eta'} + \gamma^5 \sum_{k=1}^3 \hat{t}^{(k)} (\tau^{(k)*})_{\eta\eta'} \right] P^{(-1)}(p), \end{cases}$$

wobei die $\tau^{(k)}$ die Paulischen Matrizen

$$(2.27) \quad \tau^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sind, deren Indizes wir den Werten von η, η' folgendermaßen zugeordnet haben:

$$(2.28) \quad \tau - \text{Index} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \longleftrightarrow \eta, \eta' = \begin{cases} 1 \\ -1. \end{cases}$$

⁴ C. Bouchiat, L. Michel, Nuclear Physics 5, 416 (1958).

Wir wollen noch einige Bemerkungen über die diskreten Symmetrieoperationen anschließen. Die Fourierzerlegung (2.1) des Feldoperators $\psi(x)$ lautet jetzt vollständig

$$(2.29) \quad \psi(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_{\epsilon, \eta = -1}^1 \int_{p^0 > 0} 2 \sqrt{m p^0} c_{\eta}^{\epsilon}(t, p) u_{\eta}^{\epsilon}(t, p) \delta(p^2 + m^2) e^{i\epsilon p \cdot x} d^4 p.$$

Dabei ist $c_{\eta}^{(1)}(t, p) := a_{\eta}(t, p)$ der Vernichtungsoperator für ein Teilchen des Impulses p und der Polarisation in Richtung ηt , $u_{\eta}^{(1)}(t, p)$ die entsprechende Amplitude; $c_{\eta}^{(-1)}(t, p) := b_{\eta}^{+}(t, p)$ ist der Erzeugungsoperator für ein Antiteilchen mit dem Impuls p und der Polarisation in Richtung ηt , $u_{\eta}^{(-1)}(t, p)$ die zugehörige Amplitude. Nun gilt bekanntlich⁵ für 4-Spinoren bei

$$(2.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Rauminversion} : \psi(x) \rightarrow P \psi(x) P^{-1} = i \gamma^0 \psi(x^0, -\vec{x}), \\ \text{Zeitumkehr} : \psi(x) \rightarrow T \psi(x) T^{-1} = C i \gamma^5 \psi(-x^0, \vec{x}), \\ \text{Ladungs-} \\ \text{konjugation} : \psi(x) \rightarrow C \psi(x) C^{-1} = C^{-1} \bar{\psi}^T(x). \end{array} \right.$$

Dabei sind P und C unitäre, T ein antiunitärer Operator im Hilbertraum der Zustände Φ . Weiter ergeben sich aus (2.15) folgende Relationen

$$(2.31) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{\eta}^{\epsilon}(t, p) i \gamma^0 = i \gamma^0 P_{\eta}^{\epsilon}(-t^0, \vec{t}, p^0, -\vec{p}), \\ [P_{\eta}^{\epsilon}(t, p)]^* C i \gamma^5 = C i \gamma^5 P_{\eta}^{\epsilon}(t^0, -\vec{t}, p^0, -\vec{p}), \\ P_{\eta}^{\epsilon}(t, p) C^{-1} (i \gamma^0)^T = C^{-1} (i \gamma^0)^T [P_{\eta}^{-\epsilon}(t, p)]^*, \end{array} \right.$$

d. h. zwischen den Impulsamplituden besteht ein Zusammenhang gemäß

$$(2.32) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{\eta}^{\epsilon}(t, p) = i \gamma^0 u_{\eta}^{\epsilon}(-t^0, \vec{t}, p^0, -\vec{p}), \\ [u_{\eta}^{\epsilon}(t, p)]^* = C i \gamma^5 u_{\eta}^{\epsilon}(t^0, -\vec{t}, p^0, -\vec{p}), \\ u_{\eta}^{\epsilon}(t, p) = C^{-1} [\bar{u}_{\eta}^{-\epsilon}(t, p)]^T. \end{array} \right.$$

⁵ Vgl. etwa G. Grawert, G. Lüders, H. Rollnik, Fortschr. Phys. 7, 291 (1959).

Setzt man die Zerlegung (2.29) in (2.30) ein und benutzt (2.32), so findet man durch Koeffizientenvergleich

$$(2.33) \quad \begin{cases} P c_{\eta}^{\varepsilon}(t, \vec{p}) P^{-1} = c_{\eta}^{\varepsilon}(-t^0, \vec{t}, p^0, -\vec{p}), \\ T c_{\eta}^{\varepsilon}(t, \vec{p}) T^{-1} = c_{\eta}^{\varepsilon}(t^0, -\vec{t}, p^0, -\vec{p}), \\ C c_{\eta}^{\varepsilon}(t, \vec{p}) C^{-1} = [c_{\eta}^{-\varepsilon}(t, \vec{p})]^{\dagger}. \end{cases}$$

Danach gilt also für die Einteilchenzustände bei

$$(2.34) \quad \begin{cases} \text{Rauminversion:} & |\varepsilon, \vec{p}, t\rangle \rightarrow |\varepsilon, p^0, -\vec{p}, -t^0, \vec{t}\rangle, \\ \text{Zeitumkehr:} & |\varepsilon, \vec{p}, t\rangle \rightarrow |\varepsilon, p^0, -\vec{p}, t^0, -\vec{t}\rangle, \\ \text{Ladungskonjugation:} & |\varepsilon, \vec{p}, t\rangle \rightarrow |-\varepsilon, \vec{p}, t\rangle. \end{cases}$$

§ 2.3. Zusammenhang zwischen der kovarianten und der gewöhnlichen Beschreibung der Polarisation

Gewöhnlich benutzt man in der Dirac-Theorie als Operator des Spindrehimpulses die Größe $\frac{1}{2} \vec{\Sigma} := \frac{1}{2} i \gamma^0 \gamma^5 \vec{\gamma}$ und spannt den Polarisationsraum durch die Eigenvektoren von $\frac{1}{2} \vec{\Sigma} \cdot \vec{p} / |\vec{p}|$ auf. Wir wollen jetzt zeigen, wie diese Größen mit den ihnen in der kovarianten Beschreibung entsprechenden zusammenhängen.

Aus (1.24) folgt

$$(2.35) \quad t^0 = \frac{|\vec{p}| \cos \Theta}{\sqrt{m^2 + \vec{p}^2 \sin^2 \Theta}}, \quad |\vec{t}| = \frac{p^0}{\sqrt{m^2 + \vec{p}^2 \sin^2 \Theta}}, \quad \Theta := \sphericalangle(\vec{t}, \vec{p}).$$

Daraus ergibt sich speziell für

$$(2.36) \quad \begin{cases} \text{a) } \vec{t} \text{ parallel } \vec{p}, \text{ d. h. } \Theta = 0: & t^{\mu} = \left(\frac{|\vec{p}|}{m}, \frac{p^0}{m} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \right), \quad \vec{t}^2 = \frac{p^{02}}{m^2}; \\ \text{b) } \vec{t} \text{ senkrecht } \vec{p}, \text{ d. h. } \Theta = \frac{\pi}{2}: & t^{\mu} = (0, \vec{t}), \quad \vec{t}^2 = 1; \\ \text{c) Ruhesystem, d. h. } \vec{p} = 0: & t^{\mu} = (0, \vec{t}), \quad \vec{t}^2 = 1. \end{cases}$$

Weiter gilt nach (2.9) und (2.10)

$$(2.37) \quad \frac{W^\mu(\rho)}{m} = \frac{1}{2m} (\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}, p^0 \vec{\Sigma} + i \gamma^0 \vec{p} \times \vec{\gamma}),$$

$$(2.38) \quad \frac{W^\mu(\rho) t_\mu(\rho)}{m} = \frac{1}{2m p^0} [(\vec{\Sigma} \times \vec{p} + p^0 i \gamma^0 \vec{\gamma}) \cdot (\vec{t} \times \vec{p}) + m^2 \vec{\Sigma} \cdot \vec{t}].$$

Danach gilt mit (2.36) für

$$(2.39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \vec{t} \text{ parallel } \vec{p} \quad : \frac{W^\mu t_\mu}{m} = \frac{1}{2} \vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}; \\ \text{b) } \vec{t} \text{ senkrecht } \vec{p} : \frac{W^\mu t_\mu}{m} = \frac{p^0}{m} \frac{1}{2} \vec{\Sigma} \cdot \vec{t} + \frac{1}{2m} \gamma^5 \vec{\Sigma} \cdot (\vec{t} \times \vec{p}); \\ \text{c) } \text{Ruhsystem} \quad : \frac{W^\mu}{m} = (0, \frac{1}{2} \vec{\Sigma}), \quad \frac{W^\mu t_\mu}{m} = \frac{1}{2} \vec{\Sigma} \cdot \vec{t}. \end{array} \right.$$

Der kovariante Spinoperator $W^\mu(\rho)/m$ ist also die Verallgemeinerung des gewöhnlichen Spinoperators $\frac{1}{2} \vec{\Sigma}$ im Ruhssystem auf das Laborsystem, und der kovariante Polarisationsoperator $W^\mu(\rho) t_\mu(\rho)/m$ die Verallgemeinerung des gewöhnlichen Polarisationsoperators im Laborsystem $\frac{1}{2} \vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$ auf eine beliebige Richtung \vec{t} .

Gewöhnlich charakterisiert man die Spinrichtung der Dirac-Amplitude $u_\eta^e(t, \rho)$ durch den Erwartungswert des Operators $\vec{\Sigma}$. Für diesen ergibt sich mit (2.19) und (2.16 h)*

$$(2.40) \quad \langle \vec{\Sigma} \rangle_{\eta, t, \rho}^e := \varepsilon \frac{[u_\eta^e(t, \rho)]^+ i \gamma^0 \gamma^5 \vec{\gamma} u_\eta^e(t, \rho)}{[u_\eta^e(t, \rho)]^+ u_\eta^e(t, \rho)} = \\ = \varepsilon \frac{\text{Sp} [\gamma^5 \vec{\gamma} P_\eta^e(t, \rho)]}{\text{Sp} [i \gamma^0 P_\eta^e(t, \rho)]} = \frac{m}{p^0} \eta \vec{t}(\rho).$$

Die zum Impuls parallele Komponente des Erwartungswertes von $\vec{\Sigma}$ hat danach mit (2.36) die Länge 1, während die zum Im-

* Dabei rührt der Faktor ε in der Definition des Erwartungswertes davon her, daß dieser im Hilbertraum der Φ ein Wicksches Normalprodukt ist.

puls senkrechte Komponente die Länge $\frac{m}{p^0}$ besitzt, d. h. mit zunehmender Energie immer mehr hinter der longitudinalen Komponente zurücktritt. Deshalb beschreibt man zweckmäßigerweise die Spinrichtung nicht durch den Vektor $\vec{t}(\boldsymbol{p})$, sondern durch dessen Wert im Ruhssystem $\overset{\circ}{\vec{t}}$, in dem alle Komponenten gleichberechtigt sind.* Zwischen beiden besteht auf Grund der Lorentztransformation und der Nebenbedingung $t^\mu(\boldsymbol{p}) p_\mu = 0$ der Zusammenhang

$$(2.41) \quad \vec{t} = \overset{\circ}{\vec{t}} - \frac{\vec{p}(\vec{t} \cdot \vec{p})}{p^0(m+p^0)}, \quad \overset{\circ}{\vec{t}} = \vec{t} + \frac{\vec{p}(\vec{t} \cdot \vec{p})}{m(m+p^0)}.$$

In der gewöhnlichen Beschreibung der Polarisation muß man also $\overset{\circ}{\vec{t}}$ in zwei Schritten berechnen, nämlich gemäß (2.40) und (2.41). In der kovarianten Beschreibung dagegen kommt man in einem Schritt zum Ziel, denn es gilt nach (2.16h)

$$(2.42) \quad \eta t^\mu t_\mu^{(i)} = \eta \overset{\circ}{\vec{t}} \cdot \overset{\circ}{\vec{t}}^{(i)} = \text{Sp} [\gamma^5 \hat{t}^{(i)} P_\eta^\varepsilon(t, \boldsymbol{p})]; \quad \overset{\circ}{\vec{t}} = \sum_{i=1}^3 (\overset{\circ}{\vec{t}} \cdot \overset{\circ}{\vec{t}}^{(i)}) \overset{\circ}{\vec{t}}^{(i)}.$$

Daran erkennt man einen der großen Vorteile der kovarianten Beschreibung der Polarisation für die praktische Rechnung.

§ 3. Die kovariante Beschreibung der Polarisation eines Strahles von Dirac-Teilchen mit scharfem Impuls

In § 2.2. haben wir den Projektor $P_\eta^\varepsilon(t, \boldsymbol{p})$ untersucht, der eine reine Gesamtheit beschreibt. In einem Strahl von Dirac-Teilchen der Sorte ε und des Impulses \boldsymbol{p} hat man es im allgemeinen mit einer bezüglich der Polarisation gemischten Gesamtheit zu tun, so daß man den Strahl durch einen statistischen Operator beschreiben muß.

* Diese Vereinbarung scheint uns sogar die einzig sinnvolle zu sein, denn nach (1.25) kann man W^μ/m nur im Ruhssystem direkt als Operator des Spindrehimpulses deuten.

§ 3.1. Der statistische Operator im Spinorraum (4×4 — Matrix)

In einem Teilchenstrahl liege der Zustand, der durch die Amplitude $u_\eta^\varepsilon(t, \mathbf{p})$ beschrieben wird, mit der Wahrscheinlichkeit r_η vor, wobei die r_η reelle Zahlen zwischen Null und Eins mit $\sum_{\eta=-1}^1 r_\eta = 1$ sind. Diese Gesamtheit wird durch den statistischen Operator

$$(3.1) \quad \varrho^\varepsilon(t, \mathbf{p}) := \sum_{\eta=-1}^1 r_\eta P_\eta^\varepsilon(t, \mathbf{p})$$

beschrieben. Mit (2.16 g) gilt

$$(3.2) \quad \text{Sp} [\varrho^\varepsilon(t, \mathbf{p})] = \sum_{\eta=-1}^1 r_\eta = 1;$$

die Gesamtheit ist also normiert. Mit der Abkürzung

$$(3.3) \quad \begin{cases} \zeta^\mu(\mathbf{p}) := \sum_{\eta=-1}^1 \eta t^\mu(\mathbf{p}) r_\eta = (r_1 - r_{-1}) t^\mu(\mathbf{p}), \\ \zeta^\mu(\mathbf{p}) \hat{p}_\mu = 0, \quad 0 \leq \zeta^2 = (r_1 - r_{-1})^2 \leq 1 \end{cases}$$

lautet der statistische Operator (3.1)

$$(3.4) \quad \varrho^\varepsilon(t, \mathbf{p}) \equiv \varrho^\varepsilon(\zeta, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5 \hat{\zeta}) P^\varepsilon(\mathbf{p}) \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma^5 \hat{\zeta}) \left(\frac{-i\varepsilon \hat{\mathbf{p}} + m}{2m} \right).$$

In der gemischten Gesamtheit wird die Polarisation durch den raumartigen Vektor $\zeta^\mu(\mathbf{p})$ beschrieben, der auf \hat{p}^μ senkrecht steht. Seine Länge ist im allgemeinen kleiner als Eins; sie wird nur dann Eins, wenn eines der beiden r_η gleich Null ist, und sie wird Null, wenn $r_1 = r_{-1}$, d. h. beide Spineinstellungen gleichwahrscheinlich sind. Man nennt deshalb die Größe $\sqrt{\zeta^\mu \zeta_\mu}$ den Polarisationsgrad des Strahles.

Der statistische Operator $\varrho^\varepsilon(\zeta, \mathbf{p})$ beschreibt also einen Strahl von Teilchen der Sorte ε mit dem Impuls \mathbf{p} , der mit dem Grad $\sqrt{\zeta^2}$ in Richtung ζ^μ polarisiert ist. Ist umgekehrt der statistische Operator vorgegeben, so kann man die Größe $\zeta^\mu(\mathbf{p})$ nach (2.16 h) gemäß

$$(3.5) \quad \zeta^\mu(p) = \text{Sp} \left[\frac{2\varepsilon W^\mu(p)}{m} \varrho^\varepsilon(\zeta, p) \right] = \text{Sp} [\gamma^5 \gamma^\mu \varrho^\varepsilon(\zeta, p)]$$

berechnen. Im Experiment interessiert man sich für den Wert von $\zeta^\mu(p)$ im Ruhssystem [vgl. § 2.3.], d. h. für

$$(3.6) \quad \overset{\circ}{\zeta} = \sum_{i=1}^3 (\overset{\circ}{\zeta} \cdot \overset{\circ}{\hat{t}}^{(i)}) \overset{\circ}{\hat{t}}^{(i)}, \quad -1 \leq \overset{\circ}{\zeta} \cdot \overset{\circ}{\hat{t}}^{(i)} \leq 1,$$

den man durch Messung der Polarisation des Strahles bezüglich der drei Achsen eines Rechtssystems $\overset{\circ}{\hat{t}}^{(i)}$ erhält. Diese Größen lassen sich aus dem statistischen Operator nach (3.5) gemäß

$$(3.7) \quad \zeta^\mu \hat{t}_\mu^{(i)} \equiv \overset{\circ}{\zeta} \cdot \overset{\circ}{\hat{t}}^{(i)} = \text{Sp} \left[\frac{2\varepsilon W^\mu \hat{t}_\mu^{(i)}}{m} \varrho^\varepsilon(\zeta, p) \right] = \text{Sp} [\gamma^5 \hat{t}^{(i)} \varrho^\varepsilon(\zeta, p)]$$

berechnen. Der Polarisationsgrad ist dann $\sqrt{\sum_{i=1}^3 (\overset{\circ}{\zeta} \cdot \overset{\circ}{\hat{t}}^{(i)}) (\overset{\circ}{\zeta} \cdot \overset{\circ}{\hat{t}}^{(i)})}$.

§ 3.2. Der statistische Operator im Polarisationsraum (2×2 — Matrix)

Der zum Teilchen der Sorte ε mit dem Impuls p gehörige Polarisationsraum werde durch die Basis $w_\eta^\varepsilon(t, p)$ mit $\eta = \pm 1$ aufgespannt. Dann sind die Operatoren im Polarisationsraum einfach die Darsteller der Operatoren im Spinorraum bezüglich dieser Basis.

So ergibt sich etwa für den Darsteller der Projektionen des kovarianten Spinoperators mit (2.10) und (2.26)

$$(3.8) \quad \left(\frac{W^\mu(p) \hat{t}_\mu^{(i)}(p)}{m} \right)_{\eta\eta'}^{\varepsilon, t^{(3)}} := \\ = \varepsilon \bar{u}_\eta^\varepsilon(t^{(3)}, p) \frac{W^\mu(p) \hat{t}_\mu^{(i)}(p)}{m} u_{\eta'}^\varepsilon(t^{(3)}, p) = \begin{cases} \frac{1}{2} (\tau^{(i)})_{\eta\eta'} & \text{für } \varepsilon = 1 \\ -\frac{1}{2} (\tau^{(i)*})_{\eta\eta'} & \text{für } \varepsilon = -1. \end{cases}$$

Das war zu erwarten, denn die $W^\mu(p) \hat{t}_\mu^{(i)}(p)/m$ genügen den Vertauschungsrelationen (1.22), von denen bekanntlich die Paulischen Spinmatrizen $\frac{1}{2} \tau^{(i)}$ bzw. $-\frac{1}{2} \tau^{(i)*}$ eine zweidimensionale, irredu-

zibele Darstellung sind. Entsprechend ergibt sich für den Darsteller des statistischen Operators (3.4)⁶

$$(3.9) \quad (\varrho^\varepsilon(\zeta, \mathbf{p}))_{\eta\eta'}^{\varepsilon, t^{(3)}} := \varepsilon \bar{u}_\eta^\varepsilon(t^{(3)}, \mathbf{p}) \varrho^\varepsilon(\zeta, \mathbf{p}) u_{\eta'}^\varepsilon(t^{(3)}, \mathbf{p}) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{k=1}^3 \frac{\zeta}{\zeta} \cdot \frac{\zeta}{\zeta} \tau^{(k)} \right)_{\eta\eta'}, & \text{für } \varepsilon = 1, \\ \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{k=1}^3 \frac{\zeta}{\zeta} \cdot \frac{\zeta}{\zeta} \tau^{(k)*} \right)_{\eta\eta} & \text{für } \varepsilon = -1. \end{cases}$$

Allgemeine Überlegungen lassen sich oft im Polarisationsraum einfacher als im Spinorraum durchführen. Dagegen ist für die praktische Rechnung fast ausnahmslos der Spinorraum vorzuziehen, denn in der relativistischen Quantenfeldtheorie kennt man die Operatoren primär in diesem Raum, und alle Meßgrößen lassen sich dort durch Spuren über γ -Matrizen ausrechnen.

§ 4. Die Streuung eines polarisierten Strahles von Dirac-Teilchen mit $m \neq 0$ an einem Potential:

Allgemeine Aussagen

Bei der Streuung eines polarisierten Strahles stellt man vor allem die folgenden Fragen: Der Strahl habe vor der Streuung den Impuls \mathbf{p} und die Polarisation ζ , nach der Streuung den Impuls \mathbf{p}' . Wie hängt der über die Endspins summierte Wirkungsquerschnitt von der Anfangspolarisation ζ ab, und welchen Wert hat die Polarisation ζ' des Strahles nach der Streuung? Nach § 3. wird ein solcher Strahl vollständig durch den statistischen Operator beschrieben. Wir müssen also angeben, wie sich der statistische Operator nach der Streuung $\varrho'^\varepsilon(\mathbf{p}')$ aus dem statistischen Operator vor der Streuung $\varrho^\varepsilon(\zeta, \mathbf{p})$ berechnen läßt. Das und die

⁶ In dieser Form wurde der statistische Operator ausführlich von H. A. Tolhoek, S. R. de Groot, *Physica* 17, 1 (1951) und F. W. Lipps, H. A. Tolhoek, *Physica* 20, 85 (1954) diskutiert.

Antwort auf die obigen Fragen soll für den einfachsten Fall, die Streuung an einem äußeren Potential, im folgenden diskutiert werden.⁷

§ 4.1. Der statistische Operator nach der Streuung und sein Zusammenhang mit dem Wirkungsquerschnitt

Wir betrachten die Wechselwirkung eines quantisierten Dirac-Feldes $\psi(x)$ mit einem festvorgegebenen klassischen Feld (äußeren Potential), das nicht von der Zeit abhängen soll, so daß es mit dem Dirac-Feld nur Impuls, aber keine Energie austauschen kann. Ferner sollen „Strahlungskorrekturen“ jeglicher Art außer Betracht bleiben. Dann lautet die Lagrangedichte für die Wechselwirkung

$$(4.1) \quad L_w(x) = : \bar{\psi}(x) U(\vec{x}) \psi(x) :, \quad [L_w(x)]^+ = L_w(x);$$

dabei bedeutet $:$ das Wicksche Normalprodukt. Für die 4×4 -Matrix $U(\vec{x})$ machen wir den allgemeinen Ansatz

$$(4.2) \quad U(\vec{x}) = a(\vec{x}) + i b_\mu(\vec{x}) \gamma^\mu + \frac{i}{2} c_{\mu\nu}(\vec{x}) \gamma^\mu \gamma^\nu + d_\mu(\vec{x}) \gamma^5 \gamma^\mu + e(\vec{x}) \gamma^5,$$

wobei für die Potentialfunktionen wegen der Hermitezität von $L_w(x)$ gelten muß:

$$(4.3) \quad a(\vec{x}), b_\mu(\vec{x}), c_{\mu\nu}(\vec{x}) = -c_{\nu\mu}(\vec{x}), d_\mu(\vec{x}), e(\vec{x}) = \text{reelle Funktionen.}$$

Entsprechend dem bekannten Verhalten der aus den γ -Matrizen gebildeten Tensoren gegenüber orthochronen Lorentztransformationen bezeichnen wir die einzelnen Summanden in (4.2) als skalare, vektorielle, tensorielle, pseudovekterielle und pseudoskalare Wechselwirkung.

Der Streuoperator S lautet

$$(4.4) \quad S = T \left[\exp i \int L_w(x) d^4 x \right], \quad S^+ = S^{-1},$$

⁷ Für die Streuung zweier Dirac-Teilchen verweisen wir auf H. J. Meister, Institutsbericht, München 1961, und P. Merkel, Diplomarbeit, München 1962.

wobei T das zeitgeordnete Produkt bedeutet. Der Operator M ist dann definiert durch

$$(4.5) \quad \delta(E_f - E_i) \langle f | M | i \rangle := \langle f | S - 1 | i \rangle;$$

dabei drückt die δ -Funktion die bei statischem Potential gewährleistete Erhaltung der Energie aus. Für die Streuung eines Teilchens der Sorte ε

$$(4.6) \quad \text{von } |i\rangle = |\varepsilon, \eta, t, p\rangle \quad \text{nach} \quad |f\rangle = |\varepsilon, \eta', t', p'\rangle$$

führen wir für die Wahrscheinlichkeitsamplitude folgende Abkürzung ein:

$$(4.7) \quad \langle \varepsilon, \eta', t', p' | M | \varepsilon, \eta, t, p \rangle =$$

$$= \begin{cases} \bar{u}_{\eta'}(t', p') M^{(1)}(p', p) u_{\eta}(t, p) & = : c^{(1)}(\eta', \eta) \quad \text{für } \varepsilon = 1, \\ \bar{v}_{\eta}(t, p) i \gamma^0 [M^{(-1)}(p', p)]^+ i \gamma^0 v_{\eta'}(t', p') & = : [c^{(-1)}(\eta', \eta)]^+ \quad \text{für } \varepsilon = -1. \end{cases}$$

Die dadurch definierten 4×4 -Matrizen $M^\varepsilon(p', p)$ sind noch Funktionale der Potentialfunktionen a, b_μ, \dots, e aus (4.2). Liegt vor der Streuung der Zustand $|\varepsilon, \eta, t, p\rangle$ vor, und wissen wir von dem Endzustand nur, daß er den Impuls p' besitzt (nicht aber welche Spinrichtung), so wird der Endzustand im Impulsraum durch den (nichtnormierten) Spinor

$$(4.8) \quad \begin{cases} u^{(1)}(p') := P^{(1)}(p') M^{(1)}(p', p) u_{\eta}(t, p) \equiv \sum_{\eta'} u_{\eta'}(t', p') c^{(1)}(\eta', \eta), \\ \bar{u}^{(-1)}(p') := \bar{v}_{\eta}(t, p) i \gamma^0 [M^{(-1)}(p', p)]^+ i \gamma^0 P^{(-1)}(p') \equiv \\ \equiv - \sum_{\eta'} [c^{(-1)}(\eta', \eta)]^+ \bar{v}_{\eta'}(t', p') \end{cases}$$

beschrieben. Liegt vor der Streuung im Polarisationsraum eine gemischte Gesamtheit vor, in der der Zustand $|\varepsilon, \eta, t, p\rangle$ mit der Wahrscheinlichkeit r_η vertreten ist, so haben wir es auch nach der Streuung mit einer gemischten Gesamtheit zu tun, die – mit der Bezeichnung (3.3) – durch den (nichtnormierten) statistischen Operator

$$(4.9) \quad \varrho^{\varepsilon}(p') \equiv \varrho^{\varepsilon}(\zeta', p') \text{Sp}[\varrho^{\varepsilon}(p')] := \sum_{\eta} \varepsilon r_{\eta} u^{\varepsilon}(p') \bar{u}^{\varepsilon}(p') =$$

$$= P^{\varepsilon}(p') M^{\varepsilon}(p', p) \varrho^{\varepsilon}(\zeta, p) i \gamma^0 [M^{\varepsilon}(p', p)]^+ i \gamma^0 P^{\varepsilon}(p')$$

beschrieben wird. Bei Vorgabe des statistischen Operators vor der Streuung und des Streuoperators bzw. der Matrix $M^e(p', p)$ läßt sich also der statistische Operator nach der Streuung gemäß (4.9) berechnen. Für die Polarisation des Strahles nach der Streuung ergibt sich dann nach (3.5)

$$(4.10) \quad \zeta'^{\mu} = \frac{\text{Sp} \left[\frac{2\varepsilon W^{\mu}(p')}{m} \varrho'^e(p') \right]}{\text{Sp} [\varrho'^e(p')]} = \\ = \frac{\text{Sp} \left[\gamma^5 \left(\gamma^{\mu} + \frac{i\varepsilon}{m} p'^{\mu} \right) P^e(p') M^e(p', p) \varrho^e(\zeta, p) i\gamma^0 [M^e(p', p)]^+ i\gamma^0 \right]}{\text{Sp} [\varrho'^e(p')]}.$$

Dabei haben wir die Relation

$$(4.11) \quad P^e(p') \frac{2\varepsilon W^{\mu}(p')}{m} P^e(p') = \gamma^5 \left(\gamma^{\mu} + \frac{i\varepsilon}{m} p'^{\mu} \right) P^e(p')$$

benutzt und es ist

$$(4.12) \quad \text{Sp} [\varrho'^e(p')] = \text{Sp} [P^e(p') M^e(p', p) \varrho^e(\zeta, p) i\gamma^0 [M^e(p', p)]^+ i\gamma^0].$$

Für die Streuung eines Teilchens gemäß (4.6) lautet der Wirkungsquerschnitt

$$(4.13) \quad \sigma^e = (2\pi)^2 \frac{p^0}{|\vec{p}|} \mathfrak{S}_f \bar{\mathfrak{S}}_i \delta(p'^0 - p^0) |c^e(\eta', \eta)|^2.$$

Dabei bedeutet \mathfrak{S}_f bzw. $\bar{\mathfrak{S}}_i$ die Summierung bzw. Mittelung über alle Parameter des End- bzw. Anfangszustandes, die nicht beobachtet werden. Haben wir vor der Streuung ein Gemisch, in dem der Zustand $|\varepsilon, \eta, t, p\rangle$ mit dem Anteil r_{η} vertreten ist, so gilt $\bar{\mathfrak{S}}_i = \sum_{\eta} r_{\eta}$; fragen wir nach der Streuung in einen Endzustand mit dem Impuls im Winkelbereich $d\Omega' = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ und dem Spin in Richtung $\eta' t'$, so ist $\mathfrak{S}_f = d\Omega' \int_0^{\infty} |\vec{p}'|^2 d|\vec{p}'|$. Dann lautet der Wirkungsquerschnitt (4.13)

$$(4.14) \quad \frac{d\sigma^e(\eta' t', \vartheta, \varphi; \zeta, p)}{d\Omega'} = (2\pi)^2 p^{02} \sum_{\eta} r_{\eta} |c^e(\eta', \eta)|_{p'^0=p^0}^2.$$

Wird dagegen im Endzustand die Polarisation nicht gemessen, so müssen wir noch über η' summieren und erhalten

$$(4.15) \quad \frac{d\sigma^e(\vartheta, \varphi; \zeta, \not{p})}{d\Omega'} = (2\pi)^2 \not{p}^{02} \sum_{\eta, \eta'} r_\eta |c^e(\eta', \eta)|^2_{\not{p}'^0 = \not{p}^0}.$$

Wir wollen jetzt die Größen (4.10) und (4.12) in einer Form darstellen, die ihren Zusammenhang mit dem Wirkungsquerschnitt deutlich erkennen läßt. Aus (4.9) und (4.12) ergibt sich mit (3.1) und (2.26)

$$(4.16) \quad \text{Sp} [P^e(\not{p}') \not{e}'^e(\not{p}')] = \text{Sp} [\not{e}'^e(\not{p}')] = \sum_{\eta, \eta'} r_\eta |c^e(\eta', \eta)|^2;$$

die Größe $\text{Sp} [P^e(\not{p}') \not{e}'^e(\not{p}')]$ ist also – bis auf den Faktor $(2\pi \not{p}^0)^2$ – der über die Endspins summierte Wirkungsquerschnitt. Weiter findet man mit

$$(4.17) \quad \gamma^5 \hat{t}' P^e(\not{p}') = \sum_{\eta'} \eta' P_{\eta'}^e(t', \not{p}')$$

und (4.16) aus (4.10)

$$(4.18) \quad \zeta'^\mu t'_\mu = \frac{\sum_{\eta, \eta'} \eta' r_\eta |c^e(\eta', \eta)|^2}{\sum_{\eta, \eta'} r_\eta |c^e(\eta', \eta)|^2} = \frac{\sum_{\eta} r_\eta \{ |c^e(t', \eta)|^2 - |c^e(-t', \eta)|^2 \}}{\sum_{\eta} r_\eta \{ |c^e(t', \eta)|^2 + |c^e(-t', \eta)|^2 \}}.$$

Danach ergibt sich die Projektion der Endpolarisation auf die Richtung t' als die Differenz der Wirkungsquerschnitte für die Streuung in die Endzustände mit dem Spin in Richtung t' bzw. $-t'$ dividiert durch ihre Summe. Schließlich ergibt sich aus (4.9) sowie (4.16) und (4.18)

$$(4.19) \quad \text{Sp} [P_{\eta'}^e(t', \not{p}') \not{e}'^e(\not{p}')] = \\ = \frac{1}{2} (1 + \eta' t'_\mu \zeta'^\mu) \text{Sp} [\not{e}'^e(\not{p}')] = \sum_{\eta} r_\eta |c^e(\eta', \eta)|^2,$$

so daß wir für den Wirkungsquerschnitt (4.14) schreiben können

$$(4.20) \quad \frac{d\sigma^e(\eta' t', \vartheta, \varphi; \zeta, \not{p})}{d\Omega'} = (2\pi)^2 \not{p}^{02} \frac{1}{2} (1 + \eta' t'_\mu \zeta'^\mu) \text{Sp} [\not{e}'^e(\not{p}')]_{\not{p}'^0 = \not{p}^0}.$$

Der Faktor $\frac{1}{2}(1 + \eta' \epsilon'_\mu \zeta'^\mu)$ gibt also den Anteil an, den der Endzustand mit dem Spin in Richtung $\eta' \epsilon'$ zu dem über die Endspins summierten Wirkungsquerschnitt beiträgt. Ferner sehen wir, daß der Wirkungsquerschnitt (4.20) durch die Größen (4.10) und (4.12) vollständig bestimmt wird, die sich als Spuren im Raum der 4-Spinoren nach den bekannten Methoden berechnen lassen.

§ 4.2. Allgemeine Aussagen über das Verhalten des Polarisationsvektors bei der Streuung

Aus den Gleichungen (4.12) bzw. (4.16) und (4.10) bzw. (4.18) lassen sich bereits durch allgemeine Überlegungen, d. h. ohne explizite Berechnung der Spuren, eine Reihe von Aussagen über das Verhalten des Polarisationsvektors bei der Streuung gewinnen. Da in diese Gleichungen die Voraussetzung, daß das Potential statisch sein soll, nirgends eingeht, gelten die nachfolgenden Resultate auch für nichtstatische Potentiale, sofern dabei die spezielle Form (4.20) des Wirkungsquerschnittes nicht benutzt wird.

§ 4.2.1. Der Zusammenhang zwischen den beiden Formen des Motteffektes

In Verallgemeinerung der Verhältnisse bei der Mottstreuung, d. h. der Streuung auf Grund der speziellen Wechselwirkung $U(\vec{x}) = i b_0 (|\vec{x}|) \gamma^0$, werden wir von einem Motteffekt sprechen, wenn entweder der Wirkungsquerschnitt von der Anfangspolarisation abhängt oder ein anfangs unpolarisierter Strahl nach der Streuung eine Polarisation aufweist. Durch welche Größen wird ein solcher Motteffekt bestimmt? Wir schreiben (4.12) in der Form

$$(4.21) \quad \text{Sp} [\varrho'^e(\not{p}')] = \text{Sp} [\varrho'_0{}^e(\not{p}')] \{1 + \zeta'^\mu r_\mu^e(\not{p}', \not{p})\}.$$

Dabei gilt

$$(4.22) \quad \text{Sp} [\varrho'_0{}^e(\not{p}')] := \frac{1}{2} \text{Sp} [P^e(\not{p}') M^e(\not{p}', \not{p}) P^e(\not{p}) i \gamma^0 [M^e(\not{p}', \not{p})]^\dagger i \gamma^0],$$

$$(4.23) \quad r_{\mu}^e(\not{p}', \not{p}): = \\ = \frac{1}{2} \frac{\text{Sp} \left[P^e(\not{p}') M^e(\not{p}', \not{p}) \gamma^5 \left(\gamma_{\mu} + \frac{i e}{m} \not{p}_{\mu} \right) P^e(\not{p}) i \gamma^0 [M^e(\not{p}', \not{p})]^+ i \gamma^0 \right]}{\text{Sp} [\varrho_0^e(\not{p}')]}.$$

Für die Polarisation nach der Streuung eines anfangs unpolarisierten Strahles ergibt sich nach (4.10)

$$(4.24) \quad \zeta_M^{\prime \mu} \equiv \zeta^{\prime \mu} |_{\zeta=0} = s^e{}^{\mu}(\not{p}', \not{p}),$$

$$(4.25) \quad s_{\mu}^e(\not{p}', \not{p}): = \\ = \frac{1}{2} \frac{\text{Sp} \left[\gamma^5 \left(\gamma_{\mu} + \frac{i e}{m} \not{p}_{\mu} \right) P^e(\not{p}') M^e(\not{p}', \not{p}) P^e(\not{p}) i \gamma^0 [M^e(\not{p}', \not{p})]^+ i \gamma^0 \right]}{\text{Sp} [\varrho_0^e(\not{p}')]}.$$

Die Größen $r_{\mu}^e(\not{p}', \not{p})$ und $s_{\mu}^e(\not{p}', \not{p})$, die die beiden Formen des Motteffektes charakterisieren, sind im allgemeinen voneinander verschieden; das geht schon daraus hervor, daß die eine zu \not{p}^{μ} und die andere zu \not{p}'^{μ} orthogonal ist. Ihre Beträge sind aber einander gleich, denn es gilt (vgl. Anhang B)

$$(4.26) \quad r_{\mu}^e(\not{p}', \not{p}) r^{\mu e}(\not{p}', \not{p}) = s_{\mu}^e(\not{p}', \not{p}) s^{\mu e}(\not{p}', \not{p}) \equiv \zeta_M^{\prime 2}.$$

Wir können also von einem Motteffekt schlechthin sprechen, denn dieser ist nach (4.26) immer in beiden Formen vorhanden oder nichtvorhanden. Dieses Ergebnis war nach der Anschauung zu erwarten, denn danach bedeutet Motteffekt, daß bei dem Streuvorgang gewisse Spinrichtungen vor anderen ausgezeichnet werden. Die Relation (4.26) liefert uns auch eine Aussage über die Größe $\zeta^{\mu} r_{\mu}^e$ in (4.21), denn es gilt auf Grund der Schwarzschen Ungleichung

$$(4.27) \quad [\zeta^{\mu} r_{\mu}^e(\not{p}', \not{p})]^2 \leq \zeta^2 [r^e(\not{p}', \not{p})]^2 = \zeta^2 \zeta_M^{\prime 2} \leq 1, \\ \text{d. h.} \quad -1 \leq \zeta^{\mu} r_{\mu}^e(\not{p}', \not{p}) \leq 1.$$

Wenn der M-Operator bis auf eine Phase hermitesch ist, was z. B. in der 1. Bornschen Näherung gilt, so folgt aus (4.7)

$$(4.28) \quad i \gamma^0 [M^e(\not{p}', \not{p})]^+ i \gamma^0 = \alpha M^e(\not{p}, \not{p}'), \quad |\alpha|^2 = 1.$$

Dann ist $\text{Sp} [\varrho'^e]$ invariant gegen die Vertauschung von p und p' und es gilt

$$(4.29) \quad s_\mu^e(p', p) = r_\mu^e(p, p').$$

Diese Relation gibt uns die Möglichkeit, den Grad der Mottpolarisation durch das folgende Doppelstreuexperiment zu messen: Ein unpolarisierter Strahl wird an einem Target T_1 von p nach p' gestreut und erfährt dabei die Polarisation $\zeta_M'^e = s_\mu^e(p', p)$. Dieser polarisierte Strahl wird an einem Target T_2 , das im Laborsystem durch dasselbe Potential wie T_1 beschrieben wird, von p' nach p gestreut. Dann gilt für den über die Endspins summierten Wirkungsquerschnitt nach (4.21)

$$(4.30) \quad d\sigma_{T_2}^e(p; \zeta_M', p') = d\sigma_{T_1}^e(p; \zeta' = 0, p') \{1 + \zeta_M'^e r_\mu^e(p, p')\}.$$

Dafür können wir aber mit (4.29) auch schreiben

$$(4.31) \quad \frac{d\sigma_{T_2}^e(p; \zeta_M', p')}{d\sigma_{T_1}^e(p'; \zeta = 0, p)} = 1 + \zeta_M'^e.$$

Der Grad der Mottpolarisation ergibt sich also aus der Messung der über die Endspins summierten Wirkungsquerschnitte für die Streuung an jedem der beiden Targets.

§ 4.2.2. Der Zusammenhang zwischen dem Grad der Endpolarisation und dem der Anfangspolarisation

Aus (3.4) folgt

$$(4.32) \quad \text{Sp} [\varrho^e(\zeta, p) \varrho^e(\zeta, p)] = \frac{1}{2} (1 + \zeta^2).$$

Es gilt also nach (4.9)

$$(4.33) \quad \frac{1}{2} (1 + \zeta'^2) = \frac{\text{Sp} [\varrho'^e(p') \varrho'^e(p')]}{(\text{Sp} [\varrho'^e(p')])^2}.$$

Für die rechte Seite ergibt sich (vgl. Anhang C)

$$(4.34) \quad \frac{\text{Sp} [\varrho'^e(p') \varrho'^e(p')]}{(\text{Sp} [\varrho'^e(p')])^2} = 1 - \frac{1}{2} (1 - \zeta^2) \frac{[1 - r_\mu^e(p', p) r_\mu^e(p', p)]}{[1 + \zeta_\mu r_\mu^e(p', p)]^2}.$$

Setzt man das in (4.33) ein und benutzt (4.26), so erhält man

$$(4.35) \quad 1 - \zeta'^2 = (1 - \zeta^2) \frac{(1 - \zeta_M'^2)}{[1 + \zeta^\mu r_\mu^e(\not{p}', \not{p})]^2}.$$

Danach läßt sich über den Grad der Endpolarisation folgendes aussagen:

1. Aus $\zeta^2 = 1$ folgt $\zeta'^2 = 1$, d. h. die reine Gesamtheit bleibt bei der Streuung rein.
2. Tritt (für ein spezielles Potential oder eine spezielle Näherung) kein Motteffekt auf, d. h. gilt $\zeta_M'^2 = 0$ und $r_\mu^e = 0$, so bleibt der Polarisationsgrad bei der Streuung erhalten: $\zeta'^2 = \zeta^2$.
3. Für $1 > \zeta^\mu r_\mu^e \geq -(1 - \sqrt{1 - \zeta_M'^2})$ gilt $\zeta'^2 \geq \zeta^2$, d. h. der Polarisationsgrad kann bei der Streuung nicht abnehmen. Für $-1 < \zeta^\mu r_\mu^e < -(1 - \sqrt{1 - \zeta_M'^2})$ nimmt der Polarisationsgrad bei der Streuung ab; ist speziell $\zeta^\mu = -r^{\mu}(\not{p}', \not{p})$, so gilt $\zeta'^2 = 0$, d. h. der Strahl wird durch die Streuung vollständig depolarisiert.

§ 4.2.3. Folgerungen aus Invarianzeigenschaften der Wechselwirkung

Wir wollen generell annehmen, daß die Wechselwirkung lorentzinvariant ist. Dann muß sich die Lagrangedichte für die Wechselwirkung (4.1) gegenüber den Transformationen der eigentlichen orthochronen Lorentzgruppe wie ein Skalar verhalten. Daraus folgt in bekannter Weise, daß sich die Potentialfunktionen $a(x)$ und $e(x)$ wie ein Skalar, $b_\mu(x)$ und $d_\mu(x)$ wie ein Vektor, $c_{\mu\nu}(x)$ wie ein Tensor transformieren. Soll die Wechselwirkung außerdem noch invariant gegen Rauminversion oder Zeitumkehr oder Ladungskonjugation sein, so muß jeweils gelten

$$(4.36) \quad \begin{cases} L_w(x; F(x)) \xrightarrow{P} P L_w(x; F^P(x)) P^{-1} = L_w(x^0, -\vec{x}; F(x^0, -\vec{x})), \\ L_w(x; F(x)) \xrightarrow{T} T L_w(x; F^T(x)) T^{-1} = L_w(-x^0, \vec{x}; F(-x^0, \vec{x})), \\ L_w(x; F(x)) \xrightarrow{C} C L_w(x; F^C(x)) C^{-1} = L_w(x, F(x)). \end{cases}$$

Dabei steht $F(x)$ für die Funktionen des äußeren Feldes (4.3). Für diese Größen ergibt sich aus (4.36) mit (2.30) folgendes Transformationsverhalten:

(4.37)

bei Invar. gegen	$a(x) \rightarrow$	$b_\mu(x) \rightarrow$	$c_{\mu\nu}(x) \rightarrow$	$d_\mu(x) \rightarrow$	$e(x) \rightarrow$
Rauminv.	$a(x^0, -\vec{x})$	$-g_{\mu\mu} b_\mu(x^0, -\vec{x})$	$g_{\mu\mu} g_{\nu\nu} c_{\mu\nu}(x^0, -\vec{x})$	$g_{\mu\mu} d_\mu(x^0, -\vec{x})$	$-e(x^0, -\vec{x})$
Zeitumk.	$a(-x^0, \vec{x})$	$-g_{\mu\mu} b_\mu(-x^0, \vec{x})$	$-g_{\mu\mu} g_{\nu\nu} c_{\mu\nu}(-x^0, \vec{x})$	$-g_{\mu\mu} d_\mu(-x^0, \vec{x})$	$-e(-x^0, \vec{x})$
Raumzeit- inversion	$a(-x)$	$b_\mu(-x)$	$-c_{\mu\nu}(-x)$	$-d_\mu(-x)$	$e(-x)$
Ladungsk.	$a(x)$	$-b_\mu(x)$	$-c_{\mu\nu}(x)$	$d_\mu(x)$	$e(x)$

Aus der Invarianz der Wechselwirkung gegen irgendeine Transformation gewinnt man für den Streuvorgang nur die Aussage, daß alle Meßwerte bei der betreffenden Transformation ungeändert bleiben. Diese Aussage ist aber trivial, denn sie ist nur ein Synonym für Invarianz. Eine Invarianzforderung an die Wechselwirkung legt lediglich das Transformationsverhalten der Potentialfunktionen gemäß (4.37) fest. Wirkliche Aussagen liefern Invarianzforderungen nur zusammen mit anderen Eigenschaften der Wechselwirkung. Geben wir etwa das Transformationsverhalten der Potentialfunktionen vor, so beschränken Invarianzen im allgemeinen die möglichen Wechselwirkungstypen. Als Beispiel betrachten wir ein äußeres Potential, das sich gegenüber der vollen Lorentzgruppe wie die elektromagnetischen Potentiale $A_\mu(x)$ verhalten soll. Dann sind nach (4.37) bei Invarianz der Wechselwirkung gegen Zeitumkehr noch die vektorielle und die pseudovekterielle Wechselwirkung möglich, während die Invarianz gegen Raum inversion nur die vektorielle Wechselwirkung erlaubt. Im folgenden wollen wir zwei Beispiele dafür geben, daß Invarianzeigenschaften der Wechselwirkung für spezielle Potentiale bereits Aussagen über den Streuvorgang selbst liefern können.

Ist die Wechselwirkung invariant gegen Raumzeitinversion, so gilt nach (4.4), (4.36) und wegen der Antiunitarität von T

$$(4.38) \quad PT S(F^{PT}) T^{-1} P^{-1} = S^+(F),$$

$$(4.39) \quad \langle PT i | S(F) | PT f \rangle = \langle f | S(F^{PT}) | i \rangle.$$

Damit folgt aus (4.7) mit (2.34)

$$(4.40) \quad c^e(-\eta t, \boldsymbol{p}; -\eta' t', \boldsymbol{p}'; F) = c^e(\eta' t', \boldsymbol{p}'; \eta t, \boldsymbol{p}; F^{PT})$$

und mit (2.32)

$$(4.41) \quad M^e(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}; F^{PT}) = i\gamma^5 C^{-1} [M^e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'; F)]^T C i\gamma^5.$$

Mit Hilfe von (4.41) und den Relationen

$$(4.42) \quad \begin{cases} P^e(\boldsymbol{p}) i\gamma^5 C^{-1} = i\gamma^5 C^{-1} [P^e(\boldsymbol{p})]^T, \\ P^e(\boldsymbol{p}) \gamma^5 \left(\gamma_\mu - \frac{i\varepsilon}{m} \boldsymbol{p}_\mu \right) = \gamma^5 \left(\gamma_\mu + \frac{i\varepsilon}{m} \boldsymbol{p}_\mu \right) P^e(\boldsymbol{p}), \\ \gamma^5 \left(\gamma_\mu + \frac{i\varepsilon}{m} \boldsymbol{p}_\mu \right) i\gamma^5 C^{-1} = -i\gamma^5 C^{-1} \left[\gamma^5 \left(\gamma_\mu - \frac{i\varepsilon}{m} \boldsymbol{p}_\mu \right) \right]^T \end{cases}$$

findet man für die Größen (4.22), (4.23) und (4.25) folgenden Zusammenhang

$$(4.43) \quad \begin{aligned} \text{Sp} [\rho_0^{\prime e}(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}; F^{PT})] &= \text{Sp} [\rho_0^{\prime e}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'; F)], \\ r_\mu^e(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}; F^{PT}) &= -s_\mu^e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'; F). \end{aligned}$$

Jetzt nehmen wir noch an, daß das äußere Feld selbst ebenfalls invariant gegen Raumzeitinversion ist. Es soll also gelten

$$(4.44) \quad \begin{aligned} a(x) &= a(-x), \quad b_\mu(x) = b_\mu(-x), \quad c_{\mu\nu}(x) = -c_{\mu\nu}(-x), \\ d_\mu(x) &= -d_\mu(-x), \quad e(x) = e(-x). \end{aligned}$$

Ist schließlich noch der M-Operator bis auf eine Phase hermitesch, so gilt neben (4.43) mit $F^{PT} = F$ auch noch (4.29); daraus folgt aber

$$(4.45) \quad r_\mu^e(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}; F) = s_\mu^e(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}; F) = 0,$$

d. h. es tritt kein Motteffekt auf. Damit haben wir das für die praktische Rechnung sehr nützliche Ergebnis: Bei Invarianz der Wechselwirkung und des äußeren Feldes gegen Raumzeitinversion kann ein Motteffekt nur von der „Interferenz“ des Anteils $\frac{1}{2}(M + M^+)$ mit dem Anteil $\frac{1}{2}(M - M^+)$ des Streuoperators herrühren. Danach kann ein Motteffekt erst in zweiter Bornscher Näherung auftreten, denn in erster Näherung ist $M = -M^+$.

Ist die Wechselwirkung invariant gegen Rauminversion, so gilt in Analogie zu den Überlegungen in vorstehendem Abschnitt

$$(4.46) \quad \langle Pf | S(F) | P i \rangle = \langle f | S(F^P) | i \rangle,$$

$$(4.47) \quad c^e(-\eta' t^0, \eta' \vec{t}', p'^0, -\vec{p}'; -\eta t^0, \eta \vec{t}, p^0, -\vec{p}; F) = \\ = c^e(\eta' t', p'; \eta t, p; F^P),$$

$$(4.48) \quad M^e(p', p; F^P) = i \gamma^0 M^e(p'^0, -\vec{p}', p^0, -\vec{p}; F) i \gamma^0.$$

Damit findet man unter Beachtung der Relationen

$$(4.49) \quad P^e(p) i \gamma^0 = i \gamma^0 P^e(p^0, -\vec{p}), \\ \gamma^5 \left(\gamma_\mu + \frac{i \varepsilon}{m} p_\mu \right) i \gamma^0 = i \gamma^0 g_{\mu\mu} \gamma^5 \left(\gamma_\mu + \frac{i \varepsilon}{m} (p^0, -\vec{p}) \right)$$

für die Größen (4.22), (4.23) und (4.25)

$$(4.50) \quad \text{Sp} [\rho_0^e(p', p, F^P)] = \text{Sp} [\rho_0^e(p'^0, -\vec{p}', p^0, -\vec{p}; F)],$$

$$(4.51) \quad r_\mu^e(p', p; F^P) = g_{\mu\mu} r_\mu^e(p'^0, -\vec{p}', p^0, -\vec{p}; F),$$

$$(4.52) \quad s_\mu^e(p', p; F^P) = g_{\mu\mu} s_\mu^e(p'^0, -\vec{p}', p^0, -\vec{p}; F).$$

Schreibt man die Größen r_μ^e bzw. s_μ^e in der Form (B. 2) bzw. (B. 6), so erkennt man, daß darin wegen (4.47) alle Größen invariant sind bis auf die Vektoren $t_\mu^{(k)}$ bzw. $t_\mu'^{(k)}$. Deren Raumanteile müssen sich also bei Rauminversion nach (4.51) bzw. (4.52) wie ein Axialvektor verhalten. Jetzt nehmen wir an, daß in (4.2) nur solche Potentialfunktionen auftreten, die keine Richtung auszeichnen, die nicht durch \vec{p} und \vec{p}' beschreibbar ist; die Potentialfunktionen sollen sich also bei räumlichen Drehungen wie Skalare oder deren Ableitungen verhalten, was etwa für

$$(4.53) \quad a(x), b_0(x), d_0(x), e(x), b_k(x) = \partial_k a(x), \\ d_k(x) = \partial_k e(x), c_{0k}(x) = \partial_k b_0(x)$$

zutrifft. Dann können die $\vec{t}^{(k)}$ bzw. $\vec{t}'^{(k)}$ nur aus den Vektoren \vec{p} und \vec{p}' gebildet werden. Der einzige Axialvektor, der sich aus diesen Größen aufbauen läßt, ist aber $\vec{p} \times \vec{p}'$. Es gilt also

$$(4.54) \quad r_\mu^e(p', p; F) = t_\mu r^e(p', p; F), \\ s_\mu^e(p', p; F) = t_\mu s^e(p', p; F), \quad t_\mu := \left(0, \frac{\vec{p} \times \vec{p}'}{|\vec{p} \times \vec{p}'|} \right),$$

wobei für die Skalare r^e und s^e aus (4.26) folgt

$$(4.55) \quad r^e(p', p; F) = \pm s^e(p', p; F).$$

Wir haben damit das für den Spezialfall der Mottstreuung schon lange bekannte Ergebnis: Ist die Wechselwirkung invariant gegen Rauminversion und sind die Potentialfunktionen von der Form (4.53), so wird ein anfangs unpolarisierter Strahl senkrecht zur Streuebene polarisiert und der Wirkungsquerschnitt hängt nur von der Komponente der Anfangspolarisation senkrecht zur Streuebene ab; ferner sind die Größen r_μ^e und s_μ^e , die die beiden Formen des Motteffektes charakterisieren, bis auf das Vorzeichen einander gleich.

§ 4.2.4. Der Motteffekt in erster Bornscher Näherung

In erster Bornscher Näherung ergibt sich aus (4.4)

$$(4.56) \quad M_1 = i \int : \bar{\psi}(x) U(x) \psi(x) : d^4x = -M_1^+.$$

Damit und mit (2.29) finden wir aus (4.7)

$$(4.57) \quad M_1^{(1)}(p', p) = \frac{i}{2\pi} \frac{m}{\sqrt{p'^0 p^0}} U(q) = -i \gamma^0 [M_1^{(-1)}(p', p)]^+ + i \gamma^0,$$

wobei gilt

$$(4.58) \quad U(q) := \frac{1}{(2\pi)^2} \int U(x) e^{iq \cdot x} d^4x, \quad q := p - p'.$$

Nun schreiben wir die Matrix $U(x)$ in der Form

$$(4.59) \quad U(x) = \sum_{r=1}^5 [A_{(r)}(x) + B_{(r)}(x)] \gamma^{(r)},$$

wobei die neuen Größen folgende Bedeutung haben:

für $r =$	1	2	3	4	5
$\gamma^{(r)} =$	1	$i \gamma^\mu$	$i \gamma^\mu \gamma^\nu, \mu \neq \nu$	$\gamma^5 \gamma^\mu$	γ^5
$A_{(r)}(x) =$	$a(x)$	$b_\mu(x)$	0	0	$e(x)$
$B_{(r)}(x) =$	0	0	$\frac{1}{2} c_{\mu\nu}(x) = -\frac{1}{2} c_{\nu\mu}$	$d_\mu(x)$	0

Mit diesen Bezeichnungen lautet (4.57)

$$(4.61) \quad M_1^{(1)}(\rho', \rho) = -i \gamma^0 [M_1^{(-1)}(\rho', \rho)] + i \gamma^0 = \\ = \frac{i}{2\pi} \frac{m}{\sqrt{\rho'^0 \rho^0}} \sum_{r=1}^5 [A_{(r)}(q) + B_{(r)}(q)] \gamma^{(r)}$$

und, wegen $i \gamma^0 \gamma^{(r)} + i \gamma^0 = \gamma^{(r)}$,

$$(4.62) \quad i \gamma^0 [M_1^{(1)}(\rho', \rho)] + i \gamma^0 = -M_1^{(-1)}(\rho', \rho) = \\ = -\frac{i}{2\pi} \frac{m}{\sqrt{\rho'^0 \rho^0}} \sum_{s=1}^5 [A_{(s)}^*(q) + B_{(s)}^*(q)] \gamma^{(s)}.$$

Wir betrachten jetzt zunächst nur Teilchen, d. h. $\varepsilon = 1$. Dann lautet (4.22) mit (4.61) und (4.62)

$$(4.63) \quad \text{Sp} [\varrho_0^{(1)}(\rho')] = \frac{1}{8(2\pi)^2 \rho'^0 \rho^0} \times \\ \times \sum_{r,s=1}^5 \text{Sp} [(-i \hat{\rho}' + m)(A_{(r)} + B_{(r)}) \gamma^{(r)} (-i \hat{\rho} + m)(A_{(s)}^* + B_{(s)}^*) \gamma^{(s)}].$$

Bei einer reinen A -Wechselwirkung ($r, s = 1, 2, 5$) und bei einer reinen B -Wechselwirkung ($r, s = 3, 4$) stimmt in $\gamma^{(r)} \gamma^{(s)}$ nach (4.60) die Ordnung der Anzahl der Faktoren i immer mit der Anzahl der γ -Matrizen überein, d. h. beide sind entweder von gerader oder von ungerader Ordnung. Da das gleiche für die übrigen Faktoren in (4.63) gilt und nur Spuren über eine gerade Anzahl von γ -Matrizen von Null verschieden sind, so liefert die Spur in (4.63) keinen Faktor i . Nun muß aber $\text{Sp} [\varrho_0^{(1)}(\rho')]$ reell sein; es können also die Potentialfunktionen nur in der Kombination $\text{Re}(A_{(r)} A_{(s)}^*)$ und $\text{Re}(B_{(r)} B_{(s)}^*)$ auftreten. Bei den Interferenztermen zwischen einer A - und einer B -Wechselwirkung ist in $\gamma^{(r)} \gamma^{(s)}$ die Ordnung der Anzahl der Faktoren i immer von der der Anzahl der γ -Matrizen verschieden, so daß die Potentialfunktionen nur in der Kombination $\text{Im}(A_{(r)} B_{(s)}^*)$ auftreten können. Damit bekommen wir bezüglich der Abhängigkeit von den Potentialfunktionen folgende Struktur

$$(4.64) \quad \text{Sp} [\varrho_0^{(1)}(\rho')] = \sum_{r,s=1}^5 \{ \alpha_{(r)(s)}^{(1)}(\rho', \rho) \text{Re}(A_{(r)} A_{(s)}^*) + \\ + \beta_{(r)(s)}^{(1)}(\rho', \rho) \text{Re}(B_{(r)} B_{(s)}^*) + \gamma_{(r)(s)}^{(1)}(\rho', \rho) \text{Im}(A_{(r)} B_{(s)}^*) \},$$

wobei die $\alpha_{(r)(s)}^{(1)}, \beta_{(r)(s)}^{(1)}, \gamma_{(r)(s)}^{(1)}$ reelle Koeffizienten sind. Eine analoge Betrachtung liefert für (4.23)

$$(4.65) \quad \text{Sp} [\rho_0^{(1)}(\not{p}')] r^{(1)\mu}(\not{p}', \not{p}) = \sum_{r,s=1}^5 \{ \tilde{\alpha}_{(r)(s)}^{(1)}(\not{p}', \not{p}) \text{Im} (A_{(r)} A_{(s)}^*) + \\ + \tilde{\beta}_{(r)(s)}^{(1)}(\not{p}', \not{p}) \text{Im} (B_{(r)} B_{(s)}^*) + \tilde{\gamma}_{(r)(s)}^{(1)}(\not{p}', \not{p}) \text{Re} (A_{(r)} B_{(s)}^*) \}.$$

Dasselbe ergibt sich für Antiteilchen, denn für diese müssen wir nach (4.61) und (4.62) nur überall $A_{(r)}$ durch $A_{(s)}^*$, $B_{(r)}$ durch $B_{(s)}^*$ und \not{p} durch $-\not{p}$, \not{p}' durch $-\not{p}'$ ersetzen, was aber lediglich die Koeffizienten in (4.64) und (4.65) ändert.

Aus (4.65) ergeben sich folgende Aussagen über das Verschwinden von $r_\mu^e(\not{p}', \not{p})$ und damit des Motteffektes:

1. Bei einer reinen A - oder B -Wechselwirkung tritt kein Mott-effekt auf, wenn gilt

$$(4.66) \quad A_{(r)}^*(q) = \pm A_{(r)}(q), \quad \text{d. h. } A_{(r)}(-x) = \pm A_{(r)}(x)$$

und entsprechendes für $B_{(r)}(q)$. Dabei muß bei allen Größen der Menge $A_{(r)}(q)$ mit $r = 1, 2, 5$ dasselbe Vorzeichen stehen.

2. Bei einer reinen A - oder B -Wechselwirkung tritt kein Mott-effekt auf, wenn gilt

$$(4.67) \quad A_{(r)}(q) = \alpha_{(r)}(q) A(q), \quad \alpha_{(r)}^*(q) = \alpha_{(r)}(q)$$

und entsprechendes für $B_{(r)}(q)$. Das ist z. B. der Fall für $b_\mu(x) = \partial_\mu a(x)$ oder wenn die Menge der $A_{(r)}(q)$ nur aus einer einzigen Potentialfunktion besteht.

3. Bei einer gemischten A -, B -Wechselwirkung tritt kein Mott-effekt auf, wenn gilt

$$(4.68) \quad A_{(r)}^*(q) = A_{(r)}(q), \quad B_{(r)}^*(q) = -B_{(r)}(q)$$

oder

$$(4.69) \quad A_{(r)}^*(q) = -A_{(r)}(q), \quad B_{(r)}^*(q) = B_{(r)}(q).$$

Die Bedingung (4.68) ist identisch mit (4.44), so daß wir es hier mit einem Spezialfall des allg. Theorems aus § 4. 2. 3. zu tun haben;

dieses gilt allerdings in erster Bornscher Näherung auch für (4.69), d. h. bereits ohne die Invarianz der Wechselwirkung gegen Raumzeitinversion.

Wir schließen mit einer Bemerkung über den Zusammenhang zwischen Teilchen- und Antiteilchenstreuung am gleichen Potential. Wenn man die äußeren Potentiale ungeändert läßt oder um ein gemeinsames Vorzeichen ändert, so ist nach (4.37) für ein Gemisch aus einer skalaren, pseudovektoriellen und pseudoskalaren Wechselwirkung und für ein Gemisch aus einer vektoriellen und einer tensoriellen Wechselwirkung die Wechselwirkungslagrangedichte gegenüber Ladungskonjugation „invariant bis auf das Vorzeichen“. Dieses Vorzeichen spielt aber in der 1. Bornschen Näherung keine Rolle für die Meßgrößen, so daß man für die Streuung von Teilchen und die von Antiteilchen immer denselben Wirkungsquerschnitt und dieselbe Endpolarisation erhält, sofern nur eine der beiden oben genannten Wechselwirkungen (und kein Gemisch aus ihnen) vorliegt.

§ 5. Die Streuung eines polarisierten Strahles von Dirac-Teilchen mit $m \neq 0$ an einem statischen Potential in erster Bornscher Näherung

Wir wollen jetzt den Wirkungsquerschnitt und die Endpolarisation in erster Bornscher Näherung für die Streuung an einem statischen Potential für die einzelnen Wechselwirkungstypen ausführlich diskutieren.⁸ Dazu müssen wir nach (4.20), (4.12), (4.10) und (4.56) für die Streuung von Teilchen die folgenden Ausdrücke berechnen:

⁸ Dieses Problem wurde von A. A. Sokolov, M. M. Kolesnikova, Soviet Physics JETP 11, 120 (1960) und 11, 1281 (1960) für den Spezialfall eines total polarisierten Strahles bei longitudinaler Anfangspolarisation für alle Wechselwirkungstypen und bei transversaler Anfangspolarisation für einige Wechselwirkungstypen behandelt. Unsere Untersuchung zeigt, wie stark die teilweise recht einfachen Resultate dieser Autoren von den dabei benutzten sehr speziellen Voraussetzungen abhängen.

$$(5.1) \quad (2\pi)^2 p^{02} \text{Sp} [\varrho^{(1)}(p')]_{p'^0=p^0} = \\ = \frac{1}{8} \text{Sp} [(-i\hat{p}' + m) U(\vec{q}) (1 + \gamma^5 \hat{\zeta}) (-i\hat{p} + m) i\gamma^0 U^+(\vec{q}) i\gamma^0]_{p'^0=p^0},$$

$$(5.2) \quad (2\pi)^2 p^{02} \text{Sp} [\varrho^{(1)}(p')]_{p'^0=p^0} \zeta'^{\mu} t'_{\mu} = \\ = \frac{1}{8} \text{Sp} [\gamma^5 \hat{t}' (-i\hat{p}' + m) U(\vec{q}) (1 + \gamma^5 \hat{\zeta}) (-i\hat{p} + m) i\gamma^0 U^+(\vec{q}) i\gamma^0]_{p'^0=p^0}$$

und entsprechende Ausdrücke für die Streuung von Antiteilchen. Dabei ist nach (4.57)

$$(5.3) \quad U(\vec{q}) := \frac{1}{2\pi} \int U(\vec{x}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} d^3x, \quad \vec{q} := \vec{p} - \vec{p}'$$

und \vec{q} der an das äußere Feld übertragene Impuls. In den Spuren treten Terme auf, die γ^5 enthalten. Für deren Berechnung erweisen sich folgende Formeln als nützlich

$$\text{Sp} [\gamma^5 \gamma^{\mu} \gamma^{\nu}] = 0, \quad \text{Sp} [\gamma^5 \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\rho} \gamma^{\sigma}] = -4 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \\ (5.4) \quad \text{Sp} [\gamma^5 \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\rho} \gamma^{\sigma} \gamma^{\gamma} \gamma^{\delta}] = -4 \{ g^{\mu\nu} \varepsilon^{\rho\sigma\gamma\delta} + g^{\nu\rho} \varepsilon^{\mu\sigma\gamma\delta} - g^{\mu\rho} \varepsilon^{\nu\sigma\gamma\delta} + \\ + g^{\sigma\gamma} \varepsilon^{\mu\nu\rho\delta} + g^{\gamma\delta} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} - g^{\sigma\delta} \varepsilon^{\mu\nu\rho\gamma} \}.$$

Den Polarisationsvektor vor der Streuung $\zeta^{\mu}(p)$ beziehen wir auf das Dreibein

$$(5.5) \quad t^{(1)\mu}(p) = \left(\frac{|\vec{p}|}{m}, \frac{p^0}{m} \vec{k} \right), \quad t^{(2)\mu}(p) = (0, \vec{l}), \quad t^{(3)\mu}(p) = (0, \vec{n}), \\ \vec{k} := \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}, \quad \vec{l} := \vec{n} \times \vec{k}, \quad \vec{n} := \frac{\vec{p} \times \vec{p}'}{|\vec{p} \times \vec{p}'|},$$

den Polarisationsvektor nach der Streuung $\zeta^{\mu}(p')$ auf das Dreibein

$$(5.6) \quad t'^{(1)\mu}(p') = \left(\frac{|\vec{p}'|}{m}, \frac{p'^0}{m} \vec{k}' \right), \quad t'^{(2)\mu}(p') = (0, \vec{l}'), \quad t'^{(3)\mu}(p') = (0, \vec{n}'), \\ \vec{k}' := \frac{\vec{p}'}{|\vec{p}'|}, \quad \vec{l}' := \vec{n}' \times \vec{k}', \quad \vec{n}' \equiv \vec{n} := \frac{\vec{p} \times \vec{p}'}{|\vec{p} \times \vec{p}'|}.$$

Dabei ist zu beachten, daß wegen der Erhaltung der Energie gilt: $p'^0 = p^0$ und $|\vec{p}'| = |\vec{p}|$. Das Dreibein nach der Streuung im Ruhssystem $\vec{t}'^{(i)}$ erhält man also durch Drehung von $\vec{t}^{(i)}$ um die Richtung \vec{n} um den Streuwinkel $\vartheta := \sphericalangle(\vec{p}', \vec{p})$.

§ 5.1. Die Wechselwirkungen reinen Typs

Wir wollen zunächst das Verhalten des Polarisationsvektors bei der Streuung für solche Wechselwirkungen diskutieren, bei denen in (4.2) nur einer der fünf Summanden von Null verschieden ist. Dann braucht man nur die Streuung von Teilchen zu untersuchen, da man für Antiteilchen nach § 4. 2. 4. dieselben Resultate erhält; dementsprechend werden wir den Index $\varepsilon = 1$ immer weglassen. Weiter brauchen wir die Ausdrücke (5.1) und (5.2) nicht für alle Wechselwirkungstypen zu berechnen, denn es besteht der folgende Zusammenhang: Wenn sich zwei Wechselwirkungen bis auf eine Phase nur um die Matrix $i\gamma^0$ unterscheiden, d. h. wenn gilt

$$(5.7) \quad U_2(\vec{q}) = \alpha U_1(\vec{q}) i\gamma^0, \quad |\alpha|^2 = 1,$$

so folgt aus (2.31)

$$(5.8) \quad U_2(\vec{q}) \varrho(\zeta, \vec{p}) i\gamma^0 U_2^+(\vec{q}) i\gamma^0 = U_1(\vec{q}) \varrho(-\zeta^0, \vec{\zeta}; \vec{p}^0, -\vec{p}) i\gamma^0 U_1^+(\vec{q}) i\gamma^0.$$

Man erhält somit die Ausdrücke (5.1) und (5.2) für die Streuung von \vec{p} nach \vec{p}' für die Wechselwirkung $U_2(\vec{q})$ aus denen für die Wechselwirkung $U_1(\vec{q})$, indem man in den letzteren \vec{p} durch $-\vec{p}$ und damit ϑ durch $\pi - \vartheta$ ersetzt, d. h. im einzelnen folgende Substitution durchführt:

$$(5.9) \quad \begin{aligned} \sin \vartheta &\rightarrow \sin \vartheta, \quad \cos \vartheta \rightarrow -\cos \vartheta, \quad \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \rightarrow \cos^2 \frac{\vartheta}{2}, \quad \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \rightarrow \sin^2 \frac{\vartheta}{2}, \\ \vec{k} &\rightarrow -\vec{k}, \quad \vec{l} \rightarrow \vec{l}, \quad \vec{n} \rightarrow -\vec{n}, \quad \vec{k}' \rightarrow \vec{k}', \quad \vec{l}' \rightarrow -\vec{l}'. \end{aligned}$$

In allen denjenigen Spezialfällen, in denen die Substitution der Winkelfunktionen keine Rolle spielt, unterscheiden sich also die Komponenten der Endpolarisation in der Streuebene für die Wechselwirkungen $U_1(\vec{q})$ und $U_2(\vec{q})$ nur um das Vorzeichen, während die Komponente senkrecht zur Streuebene für beide Wechselwirkungen gleich ist.

§ 5.1.1. Die skalare Wechselwirkung $U(\vec{x}) = a(\vec{x})$

In diesem Fall kann nach (4.67) kein Motteffekt auftreten, so daß nach (4.35) der Polarisationsgrad bei der Streuung erhalten bleibt. Man findet

$$(5.10) \quad (2\pi)^2 p^{02} \text{Sp} [\rho'(\rho')]_{\rho'^0 = \rho^0} = |a(\vec{q})|^2 N_s,$$

$$N_s := p^{02} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + m^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2};$$

$$(5.11) \quad \begin{cases} \vec{\zeta}' \cdot \vec{k}' = -N_s^{-1} \left\{ \vec{\zeta} \cdot \vec{k} \left(p^{02} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} - m^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right) - \vec{\zeta} \cdot \vec{l} m p^0 \sin \vartheta \right\}, \\ \vec{\zeta}' \cdot \vec{l}' = -N_s^{-1} \left\{ \vec{\zeta} \cdot \vec{k} m p^0 \sin \vartheta + \vec{\zeta} \cdot \vec{l} \left(p^{02} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} - m^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right) \right\}, \\ \vec{\zeta}' \cdot \vec{n} = \vec{\zeta} \cdot \vec{n}. \end{cases}$$

Der Polarisationsvektor wird also durch die Streuung um die Richtung \vec{n} um einen Winkel zwischen $-\vartheta$ und $-\pi$ gegen das Bezugsdreibein gedreht. Den Winkelbereich erkennt man an den energetischen Grenzfällen. Für nichtrelativistische Energien folgt aus (5.11)

$$(5.12) \quad \vec{\zeta}' = \vec{\zeta} + \left(\left(\frac{p^0 - m}{m} \right) \right),$$

d. h. der Polarisationsvektor bleibt im Raum stehen. Für extremrelativistische Energien und nicht zu kleine Streuwinkel folgt aus (5.11)

$$(5.13) \quad \vec{\zeta}' = -\vec{k}' (\vec{\zeta} \cdot \vec{k}) - \vec{l}' (\vec{\zeta} \cdot \vec{l}) + \vec{n} (\vec{\zeta} \cdot \vec{n}) + \left(\left(\frac{m}{p^0 \vartheta} \right) \right),$$

d. h. der Polarisationsvektor wird im Raum um den Winkel $-(\pi - \vartheta)$ gedreht.

§ 5.1.2. Die vektorielle Wechselwirkung $U(\vec{x}) = i b_\mu(\vec{x}) \gamma^\mu$

Wir untersuchen zunächst den Motteffekt. Für diesen ergibt sich mit der Bezeichnung (4.21) und (4.24)

$$(5.14) \quad (2\pi)^2 p^{02} \text{Sp} [\rho'_0(\rho')]_{\rho'^0 = \rho^0} \zeta^\mu(\rho) r_\mu(\rho', \rho) =$$

$$= \vec{p}^2 [\vec{\zeta} \cdot \vec{k} K_M + \vec{\zeta} \cdot \vec{l} L_M + \vec{\zeta} \cdot \vec{n} N_M];$$

$$(5.15) \quad \vec{\zeta}'_M = \{ (2\pi)^2 p^{02} \text{Sp} [\rho'_0(\rho')]_{\rho'^0 = \rho^0} \}^{-1} \vec{p}^2 [\vec{k}' K_M - \vec{l}' L_M + \vec{n} N_M].$$

Dabei haben die Größen K_M , L_M und N_M die folgende Bedeutung:

$$(5.16) \begin{cases} K_M := \operatorname{Im} (b_n^* b_k) \sin \vartheta - 2 \operatorname{Im} (b_l^* b_n) \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + L_M \frac{p^0}{m} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2}, \\ L_M := -\frac{2m}{|\vec{p}|} \operatorname{Im} (b_0^* b_n) \sin^2 \frac{\vartheta}{2}, \\ N_M := \frac{m}{|\vec{p}|} \left\{ \operatorname{Im} (b_0^* b_k) \sin \vartheta + 2 \operatorname{Im} (b_0^* b_l) \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right\}, \end{cases}$$

wobei wir die Komponenten des 3-Vektors $\vec{b}(\vec{q})$ auf das Dreibein $\vec{k}, \vec{l}, \vec{n}$ bezogen haben, so daß etwa gilt $b_n := \vec{b} \cdot \vec{n}$ usw. Die Koeffizienten für den Effekt in der jeweiligen Impulsrichtung K_M und für den Effekt senkrecht zur Streuebene N_M treten in beiden Formen des Motteffektes mit demselben Vorzeichen auf, während der Koeffizient für den Effekt in der Streuebene und senkrecht zum jeweiligen Impuls L_M in die beiden Formen des Motteffektes mit verschiedenen Vorzeichen eingeht. Weiter erkennt man folgendes:

1. Für $\vec{b}(\vec{q}) = 0$ oder $b_0(\vec{q}) = b_n(\vec{q}) = 0$ verschwindet der Motteffekt.
2. Für $b_0(\vec{q}) = 0$ kann nur ein longitudinaler Motteffekt, d. h. in Richtung des jeweiligen Impulses, auftreten.
3. Für $b_n(\vec{q}) = 0$, d. h. falls $\vec{b}(\vec{q})$ in der Streuebene liegt, kann nur ein Motteffekt senkrecht zur Streuebene auftreten.
4. Für $b_k(\vec{q}) = b_l(\vec{q}) = 0$, d. h. falls $\vec{b}(\vec{q})$ senkrecht zur Streuebene steht, kann nur ein Motteffekt in der Streuebene auftreten; wegen $K_M/L_M = \frac{p^0}{m} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2}$ herrscht dabei mit wachsender Energie der longitudinale Motteffekt immer mehr vor.

Die Ausdrücke für das Verhalten des Polarisationsvektors bei der Streuung werden für eine allgemeine vektorielle Wechselwirkung zu unübersichtlich, so daß wir sie nur für die nachfolgenden Spezialfälle diskutieren.

§ 5.1.2.1. Die V^Z -Wechselwirkung $U(\vec{x}) = i b_0(\vec{x}) \gamma^0$

Der Zeitanteil der vektoriellen Wechselwirkung unterscheidet sich von der skalaren Wechselwirkung nur um die Matrix $i\gamma^0$, so daß wir den Wirkungsquerschnitt und die Endpolarisation aus

(5.10) und (5.11) durch die Substitutionen $a(\vec{q}) \rightarrow b_0(\vec{q})$ und (5.9) erhalten. Das liefert

$$(5.17) \quad (2\pi)^2 p^{02} \text{Sp} [q'(p')]_{p'^0=p^0} = |b_0(\vec{q})|^2 N_{VZ},$$

$$N_{VZ} := p^{02} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + m^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2};$$

$$(5.18) \quad \begin{cases} \vec{\zeta}' \cdot \vec{k}' = (N_{VZ})^{-1} \left\{ \vec{\zeta} \cdot \vec{k} \left(p^{02} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} - m^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) + \vec{\zeta} \cdot \vec{l} m p^0 \sin \vartheta \right\}, \\ \vec{\zeta}' \cdot \vec{l}' = (N_{VZ})^{-1} \left\{ -\vec{\zeta} \cdot \vec{k} m p^0 \sin \vartheta + \vec{\zeta} \cdot \vec{l} \left(p^{02} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} - m^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) \right\}, \\ \vec{\zeta}' \cdot \vec{n} = \vec{\zeta} \cdot \vec{n}. \end{cases}$$

Bei der Streuung bleibt der Polarisationsgrad erhalten, denn es tritt kein Motteffekt auf, und der Polarisationsvektor wird um die Richtung \vec{n} um einen Winkel zwischen $-\vartheta$ und 0 gegen das Bezugsdreibein gedreht. Den Winkelbereich erkennt man aus den energetischen Grenzfällen. Für nichtrelativistische Energien ergibt sich aus (5.18)

$$(5.19) \quad \vec{\zeta}' = \vec{\zeta} + \left(\left(\frac{p^0 - m}{m} \right) \right),$$

d. h. der Polarisationsvektor bleibt im Raum stehen. Für extremrelativistische Energien und nicht zu große Streuwinkel ergibt sich

$$(5.20) \quad \vec{\zeta}' = \vec{k}' (\vec{\zeta} \cdot \vec{k}) + \vec{l}' (\vec{\zeta} \cdot \vec{l}) + \vec{n} (\vec{\zeta} \cdot \vec{n}) + \left(\left(\frac{m}{p^0 (\pi - \vartheta)} \right) \right),$$

d. h. der Polarisationsvektor wird im Raum um den Winkel ϑ gedreht, behält also seine Lage relativ zum Dreibein.

§ 5.1.2.2. Die V^R -Wechselwirkung $U(\vec{x}) = i\vec{b}(\vec{x}) \cdot \vec{\gamma}$

Für den Raumanteil der vektoriellen Wechselwirkung findet man

$$(5.21) \quad (2\pi)^2 p^{02} \text{Sp} [q'(p')]_{p'^0=p^0} = \vec{p}^2 N_{VR},$$

$$N_{VR} := \vec{\zeta} \cdot \vec{k} K_M + A + 2 |b_n|^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2};$$

$$(5.22) \quad \begin{cases} \vec{\zeta}' \cdot \vec{k}' = \vec{\zeta} \cdot \vec{k} + (N_{\nu R})^{-1} [1 - (\vec{\zeta} \cdot \vec{k})^2] K_M, \\ \vec{\zeta}' \cdot \vec{l}' = (N_{\nu R})^{-1} \{ \vec{\zeta} \cdot \vec{l} A + \vec{\zeta} \cdot \vec{n} B \}, \\ \vec{\zeta}' \cdot \vec{n} = (N_{\nu R})^{-1} \{ -\vec{\zeta} \cdot \vec{l} B + \vec{\zeta} \cdot \vec{n} A \}. \end{cases}$$

Dabei haben die Größen K_M , A und B die folgende Bedeutung:

$$(5.23) \quad \begin{cases} K_M := \text{Im} (b_n^* b_k) \sin \vartheta - 2 \text{Im} (b_l^* b_n) \sin^2 \frac{\vartheta}{2}, \\ A := |b_k|^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + (|b_l|^2 - |b_n|^2) \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + \text{Re} (b_k^* b_l) \sin \vartheta, \\ B := \text{Re} (b_n^* b_k) \sin \vartheta + 2 \text{Re} (b_l^* b_n) \sin^2 \frac{\vartheta}{2}, \end{cases}$$

wobei wir die Komponenten des Vektors $\vec{b}(\vec{q})$ auf das Dreibein $\vec{k}, \vec{l}, \vec{n}$ bezogen haben. Nach (5.22) kann nur ein longitudinaler Motteffekt auftreten, wie wir bereits aus § 5. 1. 2. wissen. Das hat zur Folge, daß für eine transversale Anfangspolarisation die Endpolarisation i. allg. auch eine longitudinale Komponente besitzt, während eine longitudinale Polarisation bei der Streuung longitudinal bleibt. Ist dagegen $K_M = 0$, d. h. verschwindet der Motteffekt, so „transformieren“ sich die longitudinale und die transversale Komponente des Polarisationsvektors bei der Streuung getrennt. Weiter wird i. allg. der Polarisationsvektor bei der Streuung aus der Streuebene herausgedreht, d. h. ist für die Anfangspolarisation $\vec{\zeta} \cdot \vec{n} = 0$, so gilt nach der Streuung $\vec{\zeta}' \cdot \vec{n} \neq 0$.

In den folgenden Spezialfällen „transformieren“ sich die einzelnen Komponenten des Polarisationsvektors bei der Streuung getrennt:

1. Liegt das äußere Potential in der Streuebene, d. h. ist $b_n(\vec{q}) = 0$, so gilt

$$(5.24) \quad \vec{\zeta}' = \vec{k}' (\vec{\zeta} \cdot \vec{k}) + \vec{l}' (\vec{\zeta} \cdot \vec{l}) + \vec{n} (\vec{\zeta} \cdot \vec{n});$$

wir haben also dasselbe Resultat wie bei einer V^Z -Wechselwirkung bei extremrelativistischen Energien.

2. Steht das äußere Potential senkrecht auf der Streuebene, d. h. ist $b_k(\vec{q}) = b_l(\vec{q}) = 0$, so gilt

$$(5.25) \quad \vec{\zeta}' = \vec{k}' (\vec{\zeta} \cdot \vec{k}) - \vec{l}' (\vec{\zeta} \cdot \vec{l}) - \vec{n} (\vec{\zeta} \cdot \vec{n});$$

wir haben also dasselbe Resultat wie bei einer P^Z -Wechselwirkung (vgl. § 5. 1. 4. 2.).

3. Ist die Anfangspolarisation longitudinal und total, d. h. ist $(\vec{\zeta} \cdot \vec{k})^2 = 1$, so gilt

$$(5.26) \quad \vec{\zeta}' = \vec{k}' (\vec{\zeta} \cdot \vec{k}).$$

Es sei abschließend darauf hingewiesen, daß die Endpolarisation (5.22) allein über die Fouriertransformierten der Potentialfunktionen $\vec{b}(\vec{q})$ von der Energie abhängt, so daß wir für allgemeine Potentiale auch in den energetischen Grenzfällen keine Vereinfachung der Ausdrücke bekommen, wie das bei der skalaren und der V^Z -Wechselwirkung der Fall ist.

§ 5.1.3.1. Die T^{RZ} -Wechselwirkung $U(\vec{x}) = i c_{oj}(\vec{x}) \gamma^0 \gamma^j$

Da für die allgemeine tensorielle Wechselwirkung die Ausdrücke zu unübersichtlich würden, betrachten wir ihre beiden „Vektoranteile“ getrennt. Der Raumzeitanteil unterscheidet sich nur durch die Matrix $i\gamma^0$ von der V^R -Wechselwirkung, so daß wir lediglich in (5.21)–(5.23) $b_j(\vec{q})$ durch $c_{oj}(\vec{q})$ und die anderen Größen gemäß (5.9) zu ersetzen haben. Das liefert

$$(5.27) \quad (2\pi)^2 p^{02} \text{Sp} [q'(\not{p}')]_{p' \cdot \not{p} = p^0} = \vec{p}^2 N_{TRZ},$$

$$N_{TRZ} = - \vec{\zeta} \cdot \vec{k} K_M + A + 2 |c_{on}|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2};$$

$$(5.28) \quad \begin{cases} \vec{\zeta}' \cdot \vec{k}' = - \vec{\zeta} \cdot \vec{k} + (N_{TRZ})^{-1} [1 - (\vec{\zeta} \cdot \vec{k})^2] K_M, \\ \vec{\zeta}' \cdot \vec{l}' = (N_{TRZ})^{-1} \{- \vec{\zeta} \cdot \vec{l} A + \vec{\zeta} \cdot \vec{n} B\}, \\ \vec{\zeta}' \cdot \vec{n} = (N_{TRZ})^{-1} \{ \vec{\zeta} \cdot \vec{l} B + \vec{\zeta} \cdot \vec{n} A \}. \end{cases}$$

Dabei haben die Größen K_M , A und B die folgende Bedeutung

$$(5.29) \left\{ \begin{array}{l} K_M := \operatorname{Im}(c_{on}^* c_{ok}) \sin \vartheta + 2 \operatorname{Im}(c_{ol}^* c_{on}) \cos^2 \frac{\vartheta}{2}, \\ A := |c_{ok}|^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + (|c_{ol}|^2 - |c_{on}|^2) \cos^2 \frac{\vartheta}{2} - \operatorname{Re}(c_{ok}^* c_{ol}) \sin \vartheta, \\ B := \operatorname{Re}(c_{on}^* c_{ok}) \sin \vartheta - 2 \operatorname{Re}(c_{ol}^* c_{on}) \cos^2 \frac{\vartheta}{2}. \end{array} \right.$$

Alle qualitativen Aussagen des § 5. 1. 2. 2. gelten somit auch für die T^{RZ} -Wechselwirkung; wir können uns also darauf beschränken, auf einige Unterschiede in den quantitativen Aussagen hinzuweisen.

Der Koeffizient K_M , der den allein auftretenden longitudinalen Motteffekt kennzeichnet, geht in die beiden Formen des Mott-effektes mit verschiedenem Vorzeichen ein. In den Spezialfällen, in denen sich die einzelnen Komponenten des Polarisationsvektors bei der Streuung getrennt „transformieren“, haben wir folgende Verhältnisse:

1. Ist $c_{on}(\vec{q}) = 0$, so gilt

$$(5.30) \quad \vec{\xi}' = -\vec{k}' (\vec{\xi} \cdot \vec{k}) - \vec{l}' (\vec{\xi} \cdot \vec{l}) + \vec{n} (\vec{\xi} \cdot \vec{n});$$

wir haben also dasselbe Resultat wie bei einer skalaren Wechselwirkung bei extremrelativistischen Energien.

2. Ist $c_{ok}(\vec{q}) = c_{ol}(\vec{q}) = 0$, so gilt

$$(5.31) \quad \vec{\xi}' = -\vec{k}' (\vec{\xi} \cdot \vec{k}) + \vec{l}' (\vec{\xi} \cdot \vec{l}) - \vec{n} (\vec{\xi} \cdot \vec{n});$$

wir haben also dasselbe Resultat wie bei einer pseudoskalaren Wechselwirkung [vgl. § 5. 1. 5.].

3. Ist die Anfangspolarisation longitudinal und total, d. h. ist $(\vec{\xi} \cdot \vec{k})^2 = 1$, so gilt

$$(5.32) \quad \vec{\xi}' = -\vec{k}' (\vec{\xi} \cdot \vec{k}).$$

§ 5.1.3.2. Die T^{RR} -Wechselwirkung $U(\vec{x}) = \frac{i}{2} c_{ij}(\vec{x}) \gamma^i \gamma^j$

Bei dem Raumraumanteil der tensoriellen Wechselwirkung erweist es sich als zweckmäßig, die Potentialfunktionen $c_{ij}(\vec{x})$ durch die zu ihnen dualen Größen

$$(5.33) \quad h^h(\vec{x}) = \frac{1}{2} \varepsilon^{hij} c_{ij}(\vec{x})$$

zu beschreiben. Damit ergibt sich

$$(5.34) \quad \begin{cases} (2\pi)^2 p^{02} \text{Sp} [\varrho'(\rho')]_{\rho^0 = \rho^0} = N_{TRR}, \\ N_{TRR} = \vec{\xi} \cdot \vec{k} K_M + \vec{\xi} \cdot \vec{l} L_M + \vec{\xi} \cdot \vec{n} N_M - A_{nn} + 2|h_n|^2 \gamma; \end{cases}$$

$$(5.35) \quad \begin{cases} \vec{\xi}' \cdot \vec{k}' = (N_{TRR})^{-1} \{ \bar{K}_M + \vec{\xi} \cdot \vec{k} A_{k'k} + \vec{\xi} \cdot \vec{l} A_{k'l} + \vec{\xi} \cdot \vec{n} A_{k'n} \}, \\ \vec{\xi}' \cdot \vec{l}' = (N_{TRR})^{-1} \{ \bar{L}_M + \vec{\xi} \cdot \vec{k} A_{l'k} + \vec{\xi} \cdot \vec{l} A_{l'l} + \vec{\xi} \cdot \vec{n} A_{l'n} \}, \\ \vec{\xi}' \cdot \vec{n}' = (N_{TRR})^{-1} \{ -N_M + \vec{\xi} \cdot \vec{k} A_{nk} + \vec{\xi} \cdot \vec{l} A_{nl} + \vec{\xi} \cdot \vec{n} A_{nn} \}. \end{cases}$$

Dabei gilt für die Koeffizienten des Motteffektes

$$(5.36) \quad \begin{cases} K_M = 2 \text{Im} (h_l^* h_n) \gamma - \text{Im} (h_n^* h_k) \vec{p}^2 \sin \vartheta, \\ \bar{K}_M = 2 \text{Im} (h_l^* h_n) \delta + \text{Im} (h_n^* h_k) (p^{02} + m^2) \sin \vartheta, \\ L_M = 2 m p^0 \text{Im} (h_n^* h_k), \\ \bar{L}_M = -2 m p^0 \{ \text{Im} (h_l^* h_n) \sin \vartheta - \text{Im} (h_n^* h_k) \cos \vartheta \}, \\ N_M = -2 m p^0 \text{Im} (h_k^* h_l), \end{cases}$$

und die Größen $A_{k'k}, A_{k'l}, \dots$ haben folgende Bedeutung:

$$(5.37) \quad \begin{cases} A_{k'k} = -|h_k|^2 \beta - (|h_l|^2 + |h_n|^2) \delta + \text{Re} (h_k^* h_l) (p^{02} + m^2) \sin \vartheta, \\ A_{k'l} = m p^0 \{ (-|h_k|^2 + |h_l|^2 - |h_n|^2) \sin \vartheta + 2 \text{Re} (h_k^* h_l) \cos \vartheta \}, \\ A_{k'n} = 2 m p^0 \{ \text{Re} (h_n^* h_k) \cos \vartheta + \text{Re} (h_l^* h_n) \sin \vartheta \}; \end{cases}$$

$$(5.38) \quad \begin{cases} A_{l'k} = m p^0 \{ (-|h_k|^2 + |h_l|^2 + |h_n|^2) \sin \vartheta + 2 \text{Re} (h_k^* h_l) \cos \vartheta \}, \\ A_{l'l} = |h_k|^2 \beta + (|h_l|^2 - |h_n|^2) \delta - \text{Re} (h_k^* h_l) (p^{02} + m^2) \sin \vartheta, \\ A_{l'n} = -\text{Re} (h_n^* h_k) (p^{02} + m^2) \sin \vartheta + 2 \text{Re} (h_l^* h_n) \delta; \end{cases}$$

$$(5.39) \quad \begin{cases} A_{nk} = 2 m p^0 \text{Re} (h_n^* h_k), \\ A_{nl} = -\text{Re} (h_n^* h_k) \vec{p}^2 \sin \vartheta + 2 \text{Re} (h_l^* h_n) \gamma, \\ A_{nn} = -|h_k|^2 \alpha - (|h_l|^2 - |h_n|^2) \gamma + \text{Re} (h_k^* h_l) \vec{p}^2 \sin \vartheta, \end{cases}$$

wobei wir die Komponenten des Vektors $\vec{h}(\vec{q})$ auf das Dreibein $\vec{k}, \vec{l}, \vec{n}$ bezogen und zur Abkürzung gesetzt haben

$$(5.40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha := p^{02} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + m^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}, \quad \beta := p^{02} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} - m^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}, \\ \gamma := p^{02} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + m^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}, \quad \delta := p^{02} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} - m^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}. \end{array} \right.$$

Nach (5.34) und (5.35) kann ein Motteffekt in allen drei Richtungen auftreten; die Koeffizienten für den Effekt senkrecht zur Streuebene unterscheiden sich bei den beiden Formen nur durch das Vorzeichen, während sie für die anderen Richtungen bei den beiden Formen nach (5.36) i. allg. verschieden sind. Der Zusammenhang zwischen Anfangs- und Endpolarisation hat also für die T^{RR} -Wechselwirkung schon fast die allgemeinste mögliche Form. Wir werden deshalb im folgenden Spezialfälle betrachten, bei denen sich dieser Zusammenhang vereinfacht, indem wir einerseits annehmen, daß einige der Komponenten des äußeren Potentials verschwinden, und andererseits den Fall extremrelativistischer Energien untersuchen; für nichtrelativistische Energien vereinfacht sich (5.35) nicht.

Für $\underline{h_k(\vec{q})} = \underline{h_l(\vec{q})} = 0$, d. h. nur $c_{kl}(\vec{q}) \neq 0$, verschwindet der Motteffekt nach (4.67) und wir erhalten aus (5.35)

$$(5.41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\zeta}' \cdot \vec{k}' = -\gamma^{-1} \{ \vec{\zeta} \cdot \vec{k} \delta + \vec{\zeta} \cdot \vec{l} m p^0 \sin \vartheta \}, \\ \vec{\zeta}' \cdot \vec{l}' = -\gamma^{-1} \{ -\vec{\zeta} \cdot \vec{k} m p^0 \sin \vartheta + \vec{\zeta} \cdot \vec{l} \delta \}, \\ \vec{\zeta}' \cdot \vec{n} = \vec{\zeta} \cdot \vec{n}, \\ N_{T^{RR}} = |h_n|^2 \gamma. \end{array} \right.$$

Das ist aber derselbe Zusammenhang wie bei einer V^Z -Wechselwirkung, wenn man nur dort $|b_0(\vec{q})|^2$ durch $|c_{kl}(\vec{q})|^2$, $\vec{\zeta} \cdot \vec{k}$ durch $-\vec{\zeta} \cdot \vec{k}$ und $\vec{\zeta} \cdot \vec{l}$ durch $-\vec{\zeta} \cdot \vec{l}$ ersetzt. Entsprechend ergibt sich für $\underline{h_n(\vec{q})} = \underline{h_k(\vec{q})} = 0$ derselbe Zusammenhang wie bei einer V^Z -Wechselwirkung, wenn man nur dort $\vec{\zeta} \cdot \vec{n}$ durch $-\vec{\zeta} \cdot \vec{n}$ und $\vec{\zeta} \cdot \vec{k}$ durch $-\vec{\zeta} \cdot \vec{k}$ ersetzt, und für $\underline{h_l(\vec{q})} = \underline{h_n(\vec{q})} = 0$ derselbe Zu-

sammenhang wie bei einer skalaren Wechselwirkung, wenn man nur in (5.8) $|a(\vec{q})|^2$ durch $|c_{ln}(\vec{q})|^2$, $\vec{\zeta} \cdot \vec{l}$ durch $-\vec{\zeta} \cdot \vec{l}$ und $\vec{\zeta} \cdot \vec{n}$ durch $-\vec{\zeta} \cdot \vec{n}$ ersetzt. Für $\underline{h_n(\vec{q})} = 0$, d. h. $c_{kl}(\vec{q}) = 0$, gibt es nur einen Motteffekt senkrecht zur Streuebene und wir finden aus (5.35)

$$(5.42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\zeta}' \cdot \vec{k}' = (N_{TRR})^{-1} \{ \vec{\zeta} \cdot \vec{k} A_{k'k} + \vec{\zeta} \cdot \vec{l} A_{k'l} \}, \\ \vec{\zeta}' \cdot \vec{l}' = (N_{TRR})^{-1} \{ \vec{\zeta} \cdot \vec{k} A_{k'l} - \vec{\zeta} \cdot \vec{l} A_{k'k} \}, \\ \vec{\zeta}' \cdot \vec{n} = -\vec{\zeta} \cdot \vec{n} - (N_{TRR})^{-1} [1 - (\vec{\zeta} \cdot \vec{n})^2] N_M. \end{array} \right.$$

Das ist eine ähnliche Struktur wie bei der T^{RZ} -Wechselwirkung, nur ist hier nicht die longitudinale Richtung, sondern die Richtung senkrecht zur Streuebene ausgezeichnet, so daß für $(\vec{\zeta} \cdot \vec{n})^2 = 1$ gilt

$$(5.43) \quad \vec{\zeta}' = -\vec{n} (\vec{\zeta} \cdot \vec{n}).$$

Bei dem Verschwinden einer der beiden anderen Komponenten von $\vec{h}(\vec{q})$ gibt es keine entsprechend einfachen Resultate, da die Ausdrücke (5.34)–(5.39) von diesen Komponenten nicht so stark abhängen wie von $h_n(\vec{q})$. Für $\underline{h_k(\vec{q})} = 0$ und $(\vec{\zeta} \cdot \vec{k})^2 = 1$ gilt

$$(5.44) \quad \vec{\zeta}' = \gamma^{-1} (-\vec{k}' \delta + \vec{l}' m p^0 \sin \vartheta) \vec{\zeta} \cdot \vec{k}$$

und für $\underline{h_l(\vec{q})} = 0$ gilt bei $(\vec{\zeta} \cdot \vec{l})^2 = 1$ und nichtrelativistischen Energien

$$(5.45) \quad \vec{\zeta}' = -\vec{l} (\vec{\zeta} \cdot \vec{l}) + \left(\left(\frac{p^0 - m}{m} \right) \right).$$

Für extremrelativistische Energien und Streuwinkel ϑ , die weder dicht bei 0 noch bei π liegen, ergibt sich aus (5.35)

$$(5.46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\zeta}' \cdot \vec{k}' = -\vec{\zeta} \cdot \vec{k} + (N_{TRR})^{-1} [1 - (\vec{\zeta} \cdot \vec{k})^2] K_M, \\ \vec{\zeta}' \cdot \vec{l}' = -(N_{TRR})^{-1} \{ -\vec{\zeta} \cdot \vec{l} A + \vec{\zeta} \cdot \vec{n} B \}, \\ \vec{\zeta}' \cdot \vec{n} = -(N_{TRR})^{-1} \{ \vec{\zeta} \cdot \vec{l} B + \vec{\zeta} \cdot \vec{n} A \}, \end{array} \right.$$

wobei gilt

$$(5.47) \left\{ \begin{array}{l} N_{TRR} = -\vec{\zeta} \cdot \vec{k} K_M + A + 2 |h_n|^2 p^{02} \cos^2 \frac{\vartheta}{2}, \\ K_M = p^{02} \{ 2 \operatorname{Im} (h_l^* h_n) \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + \operatorname{Im} (h_n^* h_k) \sin \vartheta \}, \\ A: = p^{02} \{ |h_k|^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + (|h_l|^2 - |h_n|^2) \cos^2 \frac{\vartheta}{2} - \operatorname{Re} (h_k^* h_l) \sin \vartheta \}, \\ B: = p^{02} \{ \operatorname{Re} (h_n^* h_k) \sin \vartheta - 2 \operatorname{Re} (h_l^* h_n) \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \}. \end{array} \right.$$

Das geht aber in die Ausdrücke für T^{RZ} -Wechselwirkung bei hohen Energien über, wenn man $h_k(\vec{q})$ durch $c_{ok}(\vec{q})$ usw., $\vec{\zeta}' \cdot \vec{l}'$ durch $-\vec{\zeta}' \cdot \vec{l}'$ und $\vec{\zeta}' \cdot \vec{n}$ durch $-\vec{\zeta}' \cdot \vec{n}$ ersetzt, so daß alles in § 5.1.3.1. Gesagte auch für die T^{RR} -Wechselwirkung bei extrem-relativistischen Energien gültig ist. Insbesondere finden wir für $h_n(\vec{q}) = 0$

$$(5.48) \quad \vec{\zeta}' = -\vec{k}' (\vec{\zeta} \cdot \vec{k}) + \vec{l}' (\vec{\zeta} \cdot \vec{l}) - \vec{n} (\vec{\zeta} \cdot \vec{n}),$$

d. h. dasselbe Resultat wie bei einer pseudoskalaren Wechselwirkung (vgl. § 5.1.5.), und für $h_k(\vec{q}) = h_l(\vec{q}) = 0$

$$(5.49) \quad \vec{\zeta}' = -\vec{k}' (\vec{\zeta} \cdot \vec{k}) - \vec{l}' (\vec{\zeta} \cdot \vec{l}) + \vec{n} (\vec{\zeta} \cdot \vec{n}),$$

d. h. dasselbe Resultat wie bei einer skalaren Wechselwirkung bei hohen Energien. Zum Schluß möchten wir darauf hinweisen, daß in (5.46) alle Terme von erster oder höherer Ordnung in $\frac{m}{p^0}$ gegenüber den Haupttermen vernachlässigt wurden. Das ist nur dann erlaubt, wenn die Hauptterme von Null verschieden sind; verschwinden einzelne der Hauptterme für spezielle äußere Potentiale, so müssen die vorstehenden Resultate nicht mehr unbedingt richtig sein. Das ist z. B. der Fall, wenn wir für $c_{ij}(\vec{x})$ das Magnetfeld einsetzen, das ein magnetischer Dipol hervorruft, der in der Streuebene liegt [vgl. § 5.2.3.]; dann gilt für

$(\vec{\zeta} \cdot \vec{k})^2 = 1$ für die Endpolarisation $\vec{\zeta}' = \vec{k}' (\vec{\zeta} \cdot \vec{k})$, während aus (5.46) folgen würde $\vec{\zeta}' = -\vec{k}' (\vec{\zeta}' \cdot \vec{k})$.

§ 5.1.4.1. Die P^R -Wechselwirkung $U(\vec{x}) = \vec{d}(\vec{x}) \cdot \gamma^5 \vec{\gamma}$

Da für die allgemeine pseudovektorielle Wechselwirkung die Ausdrücke sehr unübersichtlich werden, betrachten wir die beiden Anteile getrennt. Für den Raumteil erhalten wir die Ergebnisse aus denen der T^{RR} -Wechselwirkung durch die Substitutionen $\vec{h}(\vec{q}) \rightarrow \vec{d}(\vec{q})$ und (5.9), denn beide Wechselwirkungen unterscheiden sich nur um die Matrix $i\gamma^0$, da mit (5.33) gilt

$$(5.50) \quad \frac{i}{2} \epsilon_{ij}(\vec{x}) \gamma^i \gamma^j = -i \gamma^0 \vec{h}(\vec{x}) \cdot \gamma^5 \vec{\gamma}.$$

Auf diese Weise ergibt sich für den Wirkungsquerschnitt und die Endpolarisation

$$(5.51) \quad \left\{ \begin{array}{l} (2\pi)^2 p^{02} \text{Sp} [q'(p')]_{p^0=p^0} = N_{PR}, \\ N_{PR} := -\vec{\zeta} \cdot \vec{k} K_M + \vec{\zeta} \cdot \vec{l} L_M - \vec{\zeta} \cdot \vec{n} N_M - A_{nn} + 2 |d_n|^2 \alpha; \end{array} \right.$$

$$(5.52) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\zeta}' \cdot \vec{k}' = (N_{PR})^{-1} \{ \vec{K}_M - \vec{\zeta} \cdot \vec{k} A_{k'k} + \vec{\zeta} \cdot \vec{l} A_{k'l} - \vec{\zeta} \cdot \vec{n} A_{k'n} \}, \\ \vec{\zeta}' \cdot \vec{l}' = -(N_{PR})^{-1} \{ L_M - \vec{\zeta} \cdot \vec{k} A_{l'k} + \vec{\zeta} \cdot \vec{l} A_{l'l} - \vec{\zeta} \cdot \vec{n} A_{l'n} \}, \\ \vec{\zeta}' \cdot \vec{n}' = (N_{PR})^{-1} \{ N_M + \vec{\zeta} \cdot \vec{k} A_{nk} - \vec{\zeta} \cdot \vec{l} A_{nl} + \vec{\zeta} \cdot \vec{n} A_{nn} \}. \end{array} \right.$$

Dabei gilt für die Koeffizienten des Motteffektes

$$(5.53) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_M := 2 \text{Im} (d_l^* d_n) \alpha - \text{Im} (d_n^* d_k) \vec{p}^2 \sin \vartheta, \\ \bar{K}_M := -2 \text{Im} (d_l^* d_n) \beta + \text{Im} (d_n^* d_k) (p^{02} + m^2) \sin \vartheta, \\ L_M := -2 m p^0 \text{Im} (d_n^* d_k), \\ \bar{L}_M := 2 m p^0 \{ \text{Im} (d_l^* d_n) \sin \vartheta - \text{Im} (d_n^* d_k) \cos \vartheta \}, \\ N_M := 2 m p^0 \text{Im} (d_k^* d_l), \end{array} \right.$$

und die Größen $A_{k'k}$, $A_{k'l}$, ... haben die folgende Bedeutung

$$(5.54) \quad \begin{cases} A_{k'k} := -|d_k|^2 \delta - (|d_l|^2 + |d_n|^2) \beta - \operatorname{Re}(d_k^* d_l) (p^{02} + m^2) \sin \vartheta, \\ A_{k'l} := m p^0 \{ (-|d_k|^2 + |d_l|^2 - |d_n|^2) \sin \vartheta + 2 \operatorname{Re}(d_k^* d_l) \cos \vartheta \}, \\ A_{k'n} := -2 m p^0 \{ \operatorname{Re}(d_n^* d_k) \cos \vartheta + \operatorname{Re}(d_l^* d_n) \sin \vartheta \}; \end{cases}$$

$$(5.55) \quad \begin{cases} A_{l'k} := m p^0 \{ (-|d_k|^2 + |d_l|^2 + |d_n|^2) \sin \vartheta + 2 \operatorname{Re}(d_k^* d_l) \cos \vartheta \}, \\ A_{l'l} := |d_k|^2 \delta + (|d_l|^2 - |d_n|^2) \beta + \operatorname{Re}(d_k^* d_l) (p^{02} + m^2) \sin \vartheta, \\ A_{l'n} := -\operatorname{Re}(d_n^* d_k) (p^{02} + m^2) \sin \vartheta - 2 \operatorname{Re}(d_l^* d_n) \beta; \end{cases}$$

$$(5.56) \quad \begin{cases} A_{nk} := 2 m p^0 \operatorname{Re}(d_n^* d_k), \\ A_{nl} := -\operatorname{Re}(d_n^* d_k) \vec{p}^2 \sin \vartheta - 2 \operatorname{Re}(d_l^* d_n) \alpha, \\ A_{nn} := -|d_k|^2 \gamma - (|d_l|^2 - |d_n|^2) \alpha - \operatorname{Re}(d_k^* d_l) \vec{p}^2 \sin \vartheta. \end{cases}$$

Ganz entsprechend kann man alle in § 5.1.3.2. behandelten Spezialfälle „übersetzen“.

Aus (5.52) erhält man für $\underline{d_k(\vec{q})} = \underline{d_l(\vec{q})} = 0$ bzw. für $\underline{d_n(\vec{q})} = \underline{d_k(\vec{q})} = 0$ einen Ausdruck, der aus dem für die skalare Wechselwirkung (5.11) durch die Ersetzung von $|a(\vec{q})|^2$ durch $|d_n(\vec{q})|^2$ bzw. durch $|d_l(\vec{q})|^2$ und von $\vec{\zeta} \cdot \vec{k}$ durch $-\vec{\zeta} \cdot \vec{k}$ sowie von $\vec{\zeta} \cdot \vec{l}$ durch $-\vec{\zeta} \cdot \vec{l}$ bzw. $\vec{\zeta} \cdot \vec{n}$ durch $-\vec{\zeta} \cdot \vec{n}$ hervorgeht; für $\underline{d_l(\vec{q})} = \underline{d_n(\vec{q})} = 0$ erhält man einen Ausdruck, der aus dem für die V^Z -Wechselwirkung (5.18) durch die Ersetzung von $|b_0(\vec{q})|^2$ durch $|d_k(\vec{q})|^2$, von $\vec{\zeta} \cdot \vec{l}$ durch $-\vec{\zeta} \cdot \vec{l}$ und von $\vec{\zeta} \cdot \vec{n}$ durch $-\vec{\zeta} \cdot \vec{n}$ hervorgeht. Während man also in diesen Spezialfällen i. allg. für eine T^{RR} - und eine P^R -Wechselwirkung durchaus verschiedene Resultate erhält, liefern beide Wechselwirkungen im nichtrelativistischen Grenzfall dasselbe, da für diese Energien die Endpolarisation der V^R -Wechselwirkung mit der der skalaren Wechselwirkung übereinstimmt.

Für extremrelativistische Energien und Streuwinkel ϑ , die weder dicht bei π noch dicht bei 0 liegen, ergibt sich aus (5.52) ein Ausdruck, der aus dem für die V^R -Wechselwirkung (5.22) bei

hohen Energien durch die Ersetzung von $\vec{b}(\vec{q})$ durch $\vec{d}(\vec{q})$, von $\vec{\zeta}' \cdot \vec{l}'$ durch $-\vec{\zeta}' \cdot \vec{l}'$ und von $\vec{\zeta}' \cdot \vec{n}$ durch $-\vec{\zeta}' \cdot \vec{n}$ hervorgeht; insbesondere ergibt sich also für $(\vec{\zeta} \cdot \vec{k})^2 = 1$ die Endpolarisation

$$(5.57) \quad \vec{\zeta}' = \vec{k}' (\vec{\zeta} \cdot \vec{k}),$$

für $d_n(\vec{q}) = 0$ die Endpolarisation

$$(5.58) \quad \vec{\zeta}' = \vec{k}' (\vec{\zeta} \cdot \vec{k}) - \vec{l}' (\vec{\zeta} \cdot \vec{l}) - \vec{n} (\vec{\zeta} \cdot \vec{n}),$$

d. h. dasselbe Resultat wie für eine P^Z -Wechselwirkung, und für $d_k(\vec{q}) = d_l(\vec{q}) = 0$ die Endpolarisation

$$(5.59) \quad \vec{\zeta}' = \vec{k}' (\vec{\zeta} \cdot \vec{k}) + \vec{l}' (\vec{\zeta} \cdot \vec{l}) + \vec{n} (\vec{\zeta} \cdot \vec{n}),$$

d. h. dasselbe Resultat wie für eine V^Z -Wechselwirkung bei hohen Energien.

§ 5.1.4.2. Die P^Z -Wechselwirkung $U(\vec{x}) = d_0(\vec{x}) \gamma^5 \gamma^0$

Für den Zeitanteil der pseudovektoriellen Wechselwirkung finden wir für beliebige Energie

$$(5.60) \quad (2\pi)^2 p^{02} \text{Sp} [\varrho'(\rho')]_{\rho'^0 = \rho^0} = |d_0(\vec{q})|^2 \vec{p}^2 \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

$$(5.61) \quad \vec{\zeta}' = \vec{k}' (\vec{\zeta} \cdot \vec{k}) - \vec{l}' (\vec{\zeta} \cdot \vec{l}) - \vec{n} (\vec{\zeta} \cdot \vec{n}).$$

Dieses Resultat geht aus dem für die V^Z -Wechselwirkung bei hohen Energien (5.20) durch die Ersetzung von $\vec{\zeta}' \cdot \vec{l}'$ durch $-\vec{\zeta}' \cdot \vec{l}'$ und von $\vec{\zeta}' \cdot \vec{n}$ durch $-\vec{\zeta}' \cdot \vec{n}$ hervor.

§ 5.1.5. Die pseudoskalare Wechselwirkung $U(\vec{x}) = e(\vec{x}) \gamma^5$

Da sich diese Wechselwirkung von der P^Z -Wechselwirkung nur um die Matrix $i \gamma^0$ unterscheidet, erhalten wir mit (5.9)

$$(5.62) \quad (2\pi)^2 p^{02} \text{Sp} [\varrho'(\rho')]_{\rho'^0 = \rho^0} = |e(\vec{q})|^2 \vec{p}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

$$(5.63) \quad \vec{\zeta}' = -\vec{k}' (\vec{\zeta} \cdot \vec{k}) + \vec{l}' (\vec{\zeta} \cdot \vec{l}) - \vec{n} (\vec{\zeta} \cdot \vec{n}).$$

Dieses Resultat kann man durch die Substitution $\vec{\zeta}' \cdot \vec{l}' \rightarrow -\vec{\zeta}' \cdot \vec{l}'$ und $\vec{\zeta}' \cdot \vec{n} \rightarrow -\vec{\zeta}' \cdot \vec{n}$ in das für die skalare Wechselwirkung bei hohen Energien (5.13) überführen.

§ 5.1.6. Zusammenfassung für die Wechselwirkungen reinen Typs

Auf Grund der Diskussion für die einzelnen Wechselwirkungstypen lassen sich folgende zusammenfassende Aussagen machen:

1. Bei der P^Z - und der pseudoskalaren Wechselwirkung hängt die Endpolarisation weder vom Streuwinkel noch von der Einfallenergie ab. Bei der V^R - und der T^{RZ} -Wechselwirkung hängt die Endpolarisation vom Streuwinkel und über die Potentialfunktionen auch vom übertragenen Impuls ab. Bei der skalaren und der V^Z -Wechselwirkung hängt die Endpolarisation vom Streuwinkel und der Einfallenergie ab. Bei der T^{RR} - und der P^R -Wechselwirkung hängt die Endpolarisation vom Streuwinkel, der Einfallenergie und über die Potentialfunktionen auch vom übertragenen Impuls ab.

2. Für zwei Wechselwirkungen, die sich nur durch die Matrix γ^5 unterscheiden, sind die Endpolarisationen bei extremrelativistischen Energien im allg. nur um das Vorzeichen der transversalen Komponenten verschieden. Auf mögliche Einschränkungen dieser Aussage haben wir am Ende von § 5.1.3.2. hingewiesen.

3. In denjenigen Spezialfällen, in denen sich die Komponenten des Polarisationsvektors bei der Streuung getrennt „transformieren“, ist der Zusammenhang zwischen Anfangs- und Endpolarisation durch Tabelle (5.64) gegeben. Dabei müssen die Aussagen für extremrelativistische Energien bei der T^{RR} - und der P^R -Wechselwirkung nicht unbedingt für jede mögliche Potentialfunktion gelten [vgl. § 5.1.3.2.]. Aus (5.64) folgt, daß für $(\vec{\zeta} \cdot \vec{k})^2 = 1$ bei extremrelativistischen Energien die Polarisation nur bei der vektoriellen und der pseudovektoriellen Wechselwirkung ihre Richtung relativ zum Impuls beibehält; für $(\vec{\zeta} \cdot \vec{l})^2 = 1$ oder $(\vec{\zeta} \cdot \vec{n})^2 = 1$ läßt sich keine Aussage in einer entsprechend geschlossenen Form machen.

Wechselw.	Spezialfall	$\frac{\overset{\circ}{\zeta}' \cdot \vec{k}'}{\overset{\circ}{\zeta} \cdot \vec{k}}$	$\frac{\overset{\circ}{\zeta}' \cdot \vec{l}'}{\overset{\circ}{\zeta} \cdot \vec{l}}$	$\frac{\overset{\circ}{\zeta}' \cdot \vec{n}'}{\overset{\circ}{\zeta} \cdot \vec{n}}$
		$=$	$=$	$=$
skalare	extremrel. Energie oder $(\overset{\circ}{\zeta} \cdot \vec{n})^2 = 1$	- 1	- 1	+ 1
V^Z	extremrel. Energie oder $(\overset{\circ}{\zeta} \cdot \vec{n})^2 = 1$	+ 1	+ 1	+ 1
V^R	$(\overset{\circ}{\zeta} \cdot \vec{k})^2 = 1$	+ 1		
	Potentialf. $\left\{ \begin{array}{l} \text{in Streuebene} \\ \text{senkr. zur Streuebene} \end{array} \right.$	+ 1 + 1	+ 1 - 1	+ 1 - 1
T^{RZ}	$(\overset{\circ}{\zeta} \cdot \vec{k})^2 = 1$	- 1		
	Potentialf. $\left\{ \begin{array}{l} \text{in Streuebene} \\ \text{senkr. zur Streuebene} \end{array} \right.$	- 1 - 1	- 1 + 1	+ 1 - 1
T^{RR}	$(\overset{\circ}{\zeta} \cdot \vec{k})^2 = 1$ und extremrel. Energie	- 1		
	$\overset{\circ}{\zeta} \cdot \vec{n} = 1$ od. extremrel. En.	Pot. f. $\left\{ \begin{array}{l} \text{in Streuebene} \\ \text{senkr. zur Streuebene} \end{array} \right.$	+ 1	- 1
			- 1	+ 1
P^R	$(\overset{\circ}{\zeta} \cdot \vec{k})^2 = 1$ und extremrel. Energie	+ 1		
	$\overset{\circ}{\zeta} \cdot \vec{n} = 1$ od. extremrel. En.	Pot. f. $\left\{ \begin{array}{l} \text{in Streuebene} \\ \text{senkr. zur Streuebene} \end{array} \right.$	+ 1	- 1
			+ 1	+ 1
P^Z	allgemein	+ 1	- 1	- 1
pseudosk.	allgemein	- 1	+ 1	- 1

§ 5.2. Beispiel für eine gemischte vektorielle und tensorielle Wechselwirkung

Wir betrachten die Streuung eines Strahls von Dirac-Teilchen an einem äußeren elektromagnetischen Feld. Die Teilchen sollen die Ladung e , das anomale magnetische Moment μ_a und das elek-

trische Dipolmoment ε besitzen;* dabei nehmen wir an, daß die Größen e , μ_a und ε Konstante sind, d. h. nicht von dem bei der Streuung übertragenen Impuls abhängen. Dann lautet die Wechselwirkungsmatrix (4.2)

$$(5.65) \quad U(\vec{x}) = -ie A_\mu(\vec{x}) \gamma^\mu + \frac{i}{2} (\mu_a - \varepsilon \gamma^5) F_{\mu\nu}(\vec{x}) \gamma^\mu \gamma^\nu$$

oder, mit (5.3) und wegen der Lorentzkonvention $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$,

$$(5.66) \quad U(\vec{q}) = -ie A_\mu(\vec{q}) \gamma^\mu + (\mu_a - \varepsilon \gamma^5) \vec{q} \cdot \vec{\gamma} A_\mu(\vec{q}) \gamma^\mu.$$

Es liegt also eine gemischte vektorielle und tensorielle Wechselwirkung vor. Somit können wir uns auf die Untersuchung der Streuung von Teilchen beschränken, denn für Antiteilchen erhält man nach § 4.2.4. dieselben Resultate. Das elektromagnetische Vektorpotential denken wir uns von einem konstanten magnetischen Dipol $\vec{\mu}$, einem polarisierten Kern, erzeugt, d. h. wir setzen

$$(5.67) \quad \vec{A}(\vec{x}) = \vec{\partial} \times \frac{\vec{\mu}}{\sqrt{x^2}}, \quad \vec{A}(\vec{q}) = -2i \frac{\vec{q} \times \vec{\mu}}{q^2};$$

das Potential $A_0(\vec{q})$ soll beliebig sein.

§ 5.2.1. Der Motteffekt

Wir haben es hier im Sinne von § 4.2.4. mit einer gemischten A -, B -Wechselwirkung zu tun. Dann folgt aus (4.65) mit (5.67), daß ein Motteffekt nur von der Interferenz zwischen $\vec{A}(\vec{q})$ und $\text{Re}(A_0(\vec{q}))$ herrühren kann. Im einzelnen ergibt sich aus (5.1) und (5.2) mit (5.66) und (5.67)

$$(5.68) \quad (2\pi)^2 p^{02} \text{Sp} [\varrho'_0(\not{p}')]_{\rho^0 = \rho^0} = (e + 2\mu_a m)^2 \left(-\frac{1}{4} \vec{q}^2 |A_0|^2 + E^2 + N^2 \right) + [e^2 + (\mu_a^2 + \varepsilon^2) \vec{q}^2] \left[|A_0|^2 p^{02} + 2 \text{Im}(A_0) N p^0 \text{ctg} \frac{\vartheta}{2} + N^2 \text{ctg}^2 \frac{\vartheta}{2} \right],$$

$$(5.69) \quad \zeta^\mu(\not{p}) r_\mu(\not{p}', \not{p}) = \frac{2(e + 2\mu_a m) \text{Re}(A_0)}{(2\pi)^2 p^{02} \text{Sp} [\varrho'_0(\not{p}')]_{\rho^0 = \rho^0}} \left\{ \vec{\zeta} \cdot \vec{k} K_M + \vec{\zeta} \cdot \vec{l} L_M + \vec{\zeta} \cdot \vec{n} N_M \right\},$$

* Für die Definition von μ_a und ε vgl. man (6.1).

$$(5.70) \quad \zeta_M^{\vec{q}} = \frac{2(e + 2\mu_a m) \operatorname{Re}(A_0)}{(2\pi)^2 p^0{}^2 \operatorname{Sp}[\varrho'_0(\vec{p}')]_{p^0=p^0}} \{ \vec{k}' K_M + \vec{l}' L_M + \vec{n} N_M \}.$$

Dabei gilt für die Koeffizienten des Mott-effektes

$$(5.71) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_M: = \cos \frac{\theta}{2} [E e p^0 + N \varepsilon m |\vec{q}|], \\ \bar{K}_M: = \cos \frac{\theta}{2} [E e p^0 - N \varepsilon m |\vec{q}|]; \\ L_M: = \sin \frac{\theta}{2} [E (e m - 2\mu_a \vec{p}^2) + N \varepsilon p^0 |\vec{p}|], \\ \bar{L}_M: = \sin \frac{\theta}{2} [-E (e m - 2\mu_a \vec{p}^2) + N \varepsilon p^0 |\vec{q}|]; \\ N_M: = N \left(e m - \mu_a \frac{\vec{q}^2}{2} \right) - E \varepsilon p^0 |\vec{q}|, \\ \bar{N}_M: = N \left(e m - \mu_a \frac{\vec{q}^2}{2} \right) + E \varepsilon p^0 |\vec{q}|; \end{array} \right.$$

ferner wurden folgende Abkürzungen benutzt

$$(5.72) \quad E: = \vec{\mu} \cdot \vec{k} \cos \frac{\theta}{2} + \vec{\mu} \cdot \vec{l} \sin \frac{\theta}{2}, \quad N: = \vec{\mu} \cdot \vec{n}, \quad |\vec{q}| = 2 |\vec{p}| \sin \frac{\theta}{2}.$$

Sehen wir in den Koeffizienten für die beiden Formen des Mott-effektes von dem Anteil proportional ε ab, so besteht zwischen ihnen derselbe Zusammenhang wie bei einer rein vektoriellen Wechselwirkung (vgl. § 5.1.2.); der von der Wechselwirkung auf Grund von ε herrührende Anteil zeigt gerade das entgegengesetzte Verhalten. Weiter erkennt man aus (5.68), daß der über Anfangs- und Endspins summierte Wirkungsquerschnitt für kleine Impulsübertragungen vorwiegend durch die vektorielle Wechselwirkung auf Grund von e und die Streuung an A_0 bestimmt wird,* während für große Impulsübertragungen die tensorielle Wechselwirkung auf Grund von μ_a und ε und die Streuung an \vec{A} vorherrscht. Entsprechende Verhältnisse liegen in den Mott-koeffizienten L_M und N_M vor; in dem Koeffizienten K_M dagegen hängen die Anteile proportional e und proportional ε praktisch in gleicher Weise von der Energie ab, so daß dieser Koeffizient wegen der Kleinheit von ε im wesentlichen durch die vektorielle Wechselwirkung bestimmt wird.

* Das sieht man besonders deutlich für das Coulombpotential (5.77).

Den Anteil, den das elektrische Dipolmoment zum Motteffekt beiträgt, kann man abtrennen, indem man den das Vektorpotential \vec{A} erzeugenden magnetischen Dipol $\vec{\mu}$ gegenüber der Streuebene geeignet ausrichtet. So ist nach (5.71) für $N = 0$ ein Motteffekt senkrecht zur Streuebene nur vorhanden, falls $\varepsilon \neq 0$; das gleiche gilt bei $E = 0$ für den Motteffekt in der Streuebene. Das ist insofern von Interesse, als die Existenz eines elektrischen Dipolmomentes die Verletzung der Invarianz gegen Raum inversion und Zeitumkehr bedeuten würde. Wie eine genauere Diskussion ergibt, ist dieser Effekt aber z. B. für Elektronen selbst unter optimalen Bedingungen und $|\vec{q}| = 0.7 \text{ f}^{-1}$ noch kleiner als 1%; von meßbarer Größenordnung könnte er für die z. Z. mit dem Experiment noch verträglichen Werte von ε erst bei so großen Impulsübertragungen werden, daß die Behandlung des Streuers als äußeres Feld nicht mehr zulässig ist.

Der Motteffekt kann aber auch für Impulsübertragungen, die die Behandlung des Streuers als äußeres Feld noch zulassen, beträchtliche Werte annehmen, wenn man die Terme proportional ε ins Auge faßt; diese rühren von einer rein vektoriellen Wechselwirkung her, so daß für sie die in § 5.1.2. unter 3. und 4. gemachten Aussagen gelten. Das wollen wir uns jetzt für Elektronen etwas genauer ansehen. Die Quantenelektrodynamik liefert für $q^2 \rightarrow 0$

$$(5.73) \quad \mu_a = 1,16 \cdot 10^{-3} \frac{e}{2m_e} = 2,11 \cdot 10^{-14} e \text{ cm.}$$

Dieser Wert wird aber mit zunehmendem q^2 rasch kleiner,* so daß dann nur noch ein von einer eventuell vorhandenen Struktur des Elektrons herrührendes anomales Moment eine Rolle spielen kann. Für dieses fand man⁹ aus der Streuung von Elektronen an α -Teilchen bei $q^2 \approx 1 \text{ f}^{-2}$

$$(5.74) \quad \sqrt{\mu_a^2 + \varepsilon^2} \leq 0,6 \cdot 10^{-14} e \text{ cm.}$$

Das liefert zugleich eine obere Grenze für ein eventuell vorhandenes elektrisches Dipolmoment, die mit dem aus der Präzession freier Elektronen im Magnetfeld für $q^2 \rightarrow 0$ gewonnenen Wert¹⁰

* Für $q^2 = 1 \text{ f}^{-2}$ erhält man $\mu_a \approx 10^{-19} e \text{ cm.}$

⁹ G. R. Burleson, H. W. Kendall, Nuclear Phys. 19, 68 (1960).

¹⁰ R. L. Garwin, L. M. Ledermann, Nuovo Cimento II, 776 (1959); D. F. Nelson, A. A. Schupp, R. W. Pidd, H. R. Crane, Phys. Rev. Letters 2, 492 (1959).

$$(5.75) \quad \varepsilon \leq 0.3 \cdot 10^{-14} e \text{ cm}$$

übereinstimmt. Es gilt also für $\vec{q}^2 \leq 1 \text{ f}^{-2}$, d. h. für Rückwärtsstreuung: $p^0 \leq 100 \text{ MeV}$,

$$(5.76) \quad e \gg m_e \mu_a, \quad e^2 \gg \vec{q}^2 (\mu_a^2 + \varepsilon^2).$$

Damit erhält man für die Streuung an einem Coulombpotential

$$(5.77) \quad A_0(\vec{x}) = \frac{-e_K Z}{\sqrt{\vec{x}^2}}, \quad A_0(\vec{q}) = -\frac{2e_K Z}{\vec{q}^2}$$

und $N = 0$, d. h. für $\vec{\mu}$ in der Streuebene, aus (5.68), (5.70) und (5.71)

$$(5.78) \quad |\vec{\zeta}'_M \cdot \vec{k}'| = \frac{2y}{1+y^2}, \quad y := 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \frac{|\vec{\mu}| p^0}{e_K Z} \begin{cases} 1 & \text{für } \vec{\mu} \cdot \vec{l} = 0, \\ \text{tg } \frac{\vartheta}{2} & \text{für } \vec{\mu} \cdot \vec{k} = 0; \end{cases}$$

dabei haben wir extremrelativistische Energien, d. h. $p^0 \gtrsim 5 \text{ MeV}$ vorausgesetzt. Der Effekt wächst also mit der Einfallenergie und dem Streuwinkel; letzteres für $\vec{\mu} \cdot \vec{k} = 0$ stärker als für $\vec{\mu} \cdot \vec{l} = 0$. Dagegen ist der Effekt umgekehrt proportional zur Kernladung, da $|\vec{\mu}|$ nur wenig variiert. Für die leichten Kerne, die ein magnetisches Moment besitzen, wie $\text{H}^1, \text{H}^3, \text{He}^3, \text{Li}^7$, ist

$$(5.79) \quad \frac{|\vec{\mu}|}{e_K Z} \approx \frac{1}{2 m_p}, \quad m_p = \text{Protonmasse.}$$

Für solche Kerne ergeben sich für $|\vec{\zeta}'_M \cdot \vec{k}'| \cdot 10^2$ folgende Werte:

Lage der Targetpol.	$\vartheta =$ $p^0 =$	60°	90°	120°	150°	170°
		$\vec{\mu} \cdot \vec{n} = 0$ und $\vec{\mu} \cdot \vec{l} = 0$	10 MeV	0,5	1	1,5
	100 MeV	5	10	15	18	20
$\vec{\mu} \cdot \vec{n} = 0$ und $\vec{\mu} \cdot \vec{k} = 0$	10 MeV	0,3	1	2,7	6,8	21,7
	50 MeV	1,5	5	13,5	33	85
	100 MeV	3	10	26,5	61	99,5

(5.80)

Dabei ist der spinsummierte Wirkungsquerschnitt für $p^0 = 100$ MeV und $\vartheta = 90^\circ$ von der Ordnung $d\sigma \approx 10^{-30}$ cm² und für $p^0 = 50$ MeV und $\vartheta = 170^\circ$ von der Ordnung $d\sigma \approx 5 \cdot 10^{-32}$ cm².

Bisher haben wir nur die longitudinale Polarisation untersucht.

Davon unterscheidet sich $\vec{\zeta}'_M \cdot \vec{l}'$ nach (5.71) im wesentlichen nur um den Faktor m_e/p^0 , so daß diese Größe praktisch nicht von der Einfallenergie abhängt und selbst für sehr große Streuwinkel den Wert von 10^{-2} nicht übersteigt. Größere Werte für $\vec{\zeta}'_M \cdot \vec{l}'$ könnten nur für so hohe Einfallenergien auftreten, daß in \vec{L}_M der Term proportional μ_a ins Spiel kommt; das wäre aber nach (5.74) erst für $|\vec{q}| > 0,5$ f⁻¹ der Fall, d. h. für Impulsübertragungen, bei denen die Behandlung des Streuers als äußeres Feld nicht mehr erlaubt ist. Der Term $\vec{\zeta}'_M \cdot \vec{n}$ kann für $N = 0$ außer Betracht bleiben, wie bereits oben ausgeführt. Entsprechend spielen für $E = 0$ die Komponenten $\vec{\zeta}'_M \cdot \vec{k}'$ und $\vec{\zeta}'_M \cdot \vec{l}'$ keine Rolle;

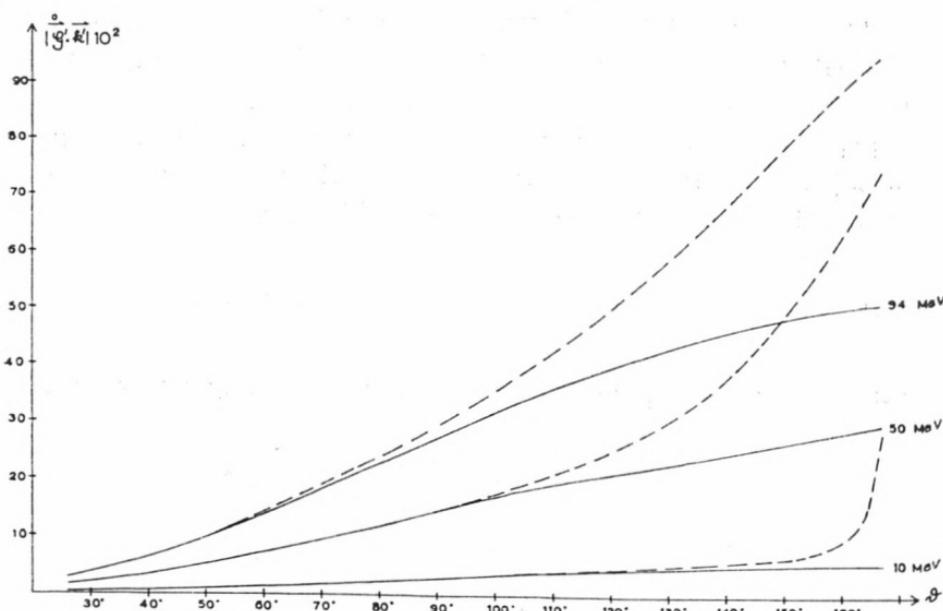


Fig. 1

Longitudinalpolarisation der Elektronen nach der Streuung an in Einfallrichtung polarisierten Protonen. Die ausgezogenen Kurven ergeben sich ohne, die gestrichelten Kurven mit Berücksichtigung des Impuls- und Spinrückstoßes des Protons. Die einzelnen Kurven beziehen sich auf verschiedene Elektroneneinfallenergien; ϑ ist der Streuwinkel des Elektrons.

$\frac{\vec{\zeta}'_M \cdot \vec{n}}{\zeta'_M}$ verhält sich für $E = 0$ wie $\frac{\vec{\zeta}'_M \cdot \vec{l}'}{\zeta'_M}$ im Falle $N = 0$, d. h. es bleibt kleiner als 10^{-2} .

Für μ -Mesonen erhält man für $m_\mu \leq p^0 < 170$ MeV entsprechende Resultate wie für Elektronen, was aber bezüglich der Longitudinalpolarisation von geringerem Interesse ist, da die μ -Mesonen bereits longitudinal polarisiert entstehen. Bemerkenswert ist aber, daß für $E = 0$ die Größe $\frac{\vec{\zeta}'_M \cdot \vec{n}}{\zeta'_M}$ bei μ -Mesonen auf Grund der größeren Masse Werte bis zu ≈ 0.15 annehmen kann; das ist eine durchaus meßbare und mit dem eigentlichen Mott-effekt für Elektronen vergleichbare Polarisation senkrecht zur Streuebene.

Nach diesen Resultaten sollte man durch Streuung hochenergetischer Elektronen an leichten Kernen, die in der Streuebene und senkrecht zum Einfallsimpuls polarisiert sind, für große Streuwinkel eine starke Longitudinalpolarisation erhalten. Allerdings wären die so polarisierten Elektronenstrahlen von ge-

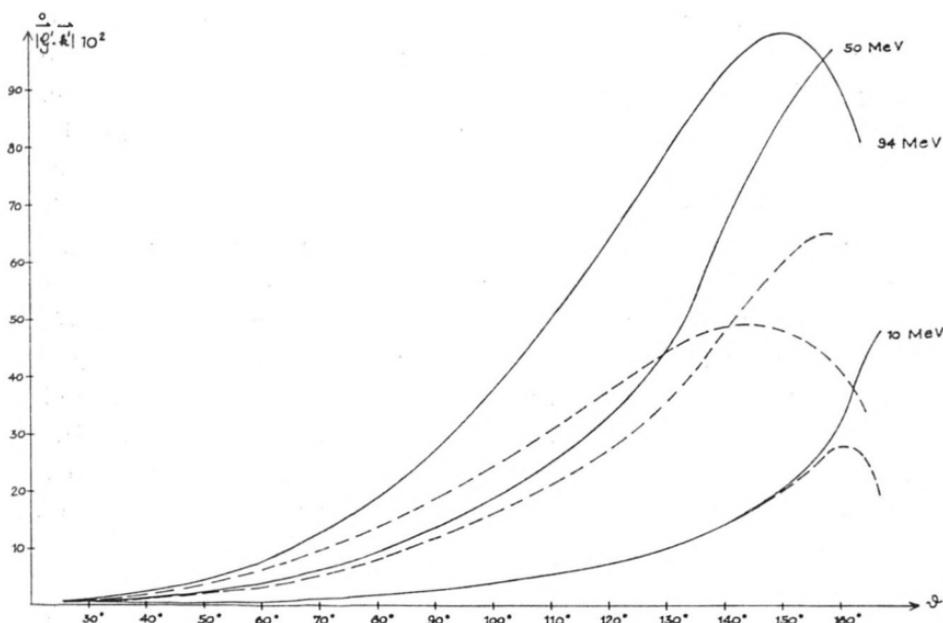


Fig. 2

Longitudinalpolarisation der Elektronen nach der Streuung an in der Streuebene senkrecht zur Einfallrichtung polarisierten Protonen. Die ausgezogenen Kurven ergeben sich ohne, die gestrichelten Kurven mit Berücksichtigung des Impuls- und Spinrückstoßes des Protons. Die einzelnen Kurven beziehen sich auf verschiedene Elektroneneinfallenergien; ϑ ist der Streuwinkel des Elektrons.

ringer Intensität. Dabei haben wir das Target als äußeres Potential behandelt. Das läßt sich dadurch rechtfertigen, daß der dabei vernachlässigte Rückstoßfaktor $\left(1 + \frac{2\beta^0}{m_K} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^{-1}$ bei den hier betrachteten Energien selbst für Protonen nicht mehr als 15% von Eins abweicht. Bei einer solchen statischen Beschreibung des Targets wird aber nicht nur der Impulsrückstoß, sondern auch der „Spinrückstoß“ vernachlässigt, d. h. es wird angenommen, daß der Spin des Targets auch nach der Streuung derselbe ist wie vorher. Der Fehler, den man bei einer solchen Annahme macht, läßt sich nicht so ohne weiteres wie beim Impulsrückstoß übersehen.* Deshalb haben wir in Fig. 1 und Fig. 2 die Werte der Elektronenpolarisation nach der Streuung an einem polarisierten Protonentarget, d. h. für $\frac{|\vec{\mu}|}{e_K Z} = \frac{2.79}{2 m_p}$, die sich auf Grund unserer Berechnung ergeben (ausgezogene Kurve), mit denen verglichen, die die Behandlung der Elektron-Proton-Streuung als Zweikörperproblem in derselben elektromagnetischen Näherung liefert¹¹ (gestrichelte Kurve). Dabei zeigt sich wohl eine grobe qualitative Übereinstimmung, jedoch treten quantitativ besonders für große Energien und Streuwinkel Unterschiede auf, die sich keinesfalls durch die Impulsrückstoßkorrektur erklären lassen. So ist etwa nach der statischen Rechnung eine Transversalpolarisation des Targets günstiger, während die dynamische Rechnung die größte Elektronenendpolarisation bei einer Longitudinalpolarisation des Targets liefert. Wir schließen daraus, daß die Behandlung eines polarisierten Targets als äußeres Potential bezüglich der Polarisationsaussagen auch dann schon nicht mehr zulässig sein kann, wenn man den Impulsrückstoß noch in guter Näherung vernachlässigen darf, m. a. W. auch bei „unendlich schweren“ Targetteilchen kann deren Spin noch einen „Rückstoß“ erfahren.

* Eine allgemeine Diskussion ergibt lediglich, daß man den „Spinrückstoß“ für $\vec{q}^2/m_K^2 \approx 0$ und bei $|\vec{\mu}| = |\vec{\mu} \cdot \vec{k}|$ für $\cos^2 \frac{\theta}{2} \approx -1$ bzw. bei $|\vec{\mu}| = |\vec{\mu} \cdot \vec{l}|$ für $\sin^2 \frac{\theta}{2} \approx 1$ vernachlässigen darf; wie klein bzw. groß die Streuwinkel θ dabei im Spezialfall sein müssen, zeigen Fig. 1 und Fig. 2.

¹¹ G. V. Frolov, Soviet Physics JETP 7, 525 (1958); Herrn P. Merkel danke ich für die numerische Auswertung.

§ 5.2.2. Das Verhalten des Polarisationsvektors für $\vec{A}(\vec{x}) = 0$ ¹²

Aus (5.68) und (5.2) ergibt sich mit (5.66)

$$(5.81) \quad \begin{cases} (2\pi)^2 p^{02} \text{Sp} [q' (p')]_{p'^0 = p^0} = |A_0(\vec{q})|^2 N_e, \\ N_e := e^2 \left(p^{02} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + m^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) - \vec{q}^2 [\mu_a (em - \mu_a \vec{p}^2) - \varepsilon^2 p^{02}]; \end{cases}$$

$$(5.82) \quad \begin{cases} \vec{\zeta}' \cdot \vec{k}' = N_e^{-1} \left\{ \vec{\zeta} \cdot \vec{k} \left[e^2 \left\langle p^{02} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} - m^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right\rangle + \right. \right. \\ \quad \left. \left. + \vec{q}^2 \langle \mu_a (em - \mu_a \vec{p}^2) - \varepsilon^2 p^{02} \rangle \right] + \right. \\ \quad \left. + \vec{\zeta} \cdot \vec{l} e (em - 2\mu_a \vec{p}^2) p^0 \sin \vartheta - \vec{\zeta} \cdot \vec{n} 2e\varepsilon |\vec{p}| p^{02} \sin \vartheta \right\}, \\ \vec{\zeta}' \cdot \vec{l}' = N_e^{-1} \left\{ -\vec{\zeta} \cdot \vec{k} e (em - 2\mu_a \vec{p}^2) p^0 \sin \vartheta + \right. \\ \quad \left. + \vec{\zeta} \cdot \vec{l} \left[e^2 \left\langle p^{02} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} - m^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right\rangle + \vec{q}^2 \langle \mu_a (em - \mu_a \vec{p}^2) + \varepsilon^2 p^{02} \rangle \right] + \right. \\ \quad \left. + \vec{\zeta} \cdot \vec{n} \varepsilon (em - 2\mu_a \vec{p}^2) |\vec{p}| p^0 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right\}, \\ \vec{\zeta}' \cdot \vec{n} = N_e^{-1} \left\{ \vec{\zeta} \cdot \vec{k} 2e\varepsilon |\vec{p}| p^{02} \sin \vartheta + \vec{\zeta} \cdot \vec{l} 4\varepsilon (em - 2\mu_a \vec{p}^2) |\vec{p}| p^0 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + \right. \\ \quad \left. + \vec{\zeta} \cdot \vec{n} \left[e^2 \left\langle p^{02} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + m^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right\rangle - \vec{q}^2 \langle \mu_a (em - \mu_a \vec{p}^2) + \varepsilon^2 p^{02} \rangle \right] \right\}. \end{cases}$$

Wenn man für A_0 das Coulombpotential (5.77) einsetzt, so nimmt der Wirkungsquerschnitt zunächst mit wachsender Einfallenergie ab; erst für so hohe Energien, daß die Terme proportional μ_a und ε eine Rolle spielen, wird er von der Energie unabhängig. Weiter sehen wir, daß μ_a und ε in (5.81) und (5.82) immer in der Kombination $\mu_a \vec{p}^2$ und $\varepsilon |\vec{p}| p^0$ auftreten, so daß die

¹² Dieser Fall wurde für die Streuung an einem Coulombpotential für $\varepsilon = 0$ von G. V. Avakov, K. A. Ter-Martirosyan, Nuclear Phys. 13, 685 (1959) bezüglich des Wirkungsquerschnittes, und für $\mu_a = 0$ von B. Margolis, S. Rosendorff, A. Sirlin, Phys. Rev. 114, 1530 (1959) allgemein untersucht; die letztgenannten Autoren haben auch den Wirkungsquerschnitt in zweiter Bornscher Näherung und damit den Motteffekt berechnet.

tensorielle Wechselwirkung im nichtrelativistischen Grenzfall zu vernachlässigen ist. Da kein Motteffekt auftritt, bleibt der Polarisationsgrad erhalten. Die Polarisationen in der Streuebene und senkrecht dazu werden bei der Streuung durch die von der Wechselwirkung auf Grund von ε herrührenden Terme gemischt, d. h. liegt die Polarisation vor der Streuung in der Streuebene, so tritt nach der Streuung eine Polarisation senkrecht zur Streuebene auf, die zu ε proportional ist und umgekehrt. Für Elektronen ergibt sich für $\vec{\xi} \cdot \vec{k} = \vec{\xi} \cdot \vec{l} = 0$ und $5 \text{ MeV} \lesssim p^0 \lesssim 100 \text{ MeV}$ mit den Werten (5.74)

$$(5.83) \quad \sqrt{(\vec{\xi}' \cdot \vec{k}')^2 + (\vec{\xi}' \cdot \vec{l}')^2} \approx 4 \cdot 10^{-5} |\vec{\xi} \cdot \vec{n}| \frac{p^0}{m} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2},$$

d. h. wir haben bei $p^0 = 100 \text{ MeV}$ eine Endpolarisation in der Streuebene von 1% für $\vartheta = 90^\circ$ und 10% für $\vartheta = 170^\circ$. Der umgekehrte Effekt ist von derselben Größenordnung.

Für die allgemeine Diskussion von (5.82) für $\mu_a = 0$ verweisen wir auf die Arbeit von Margolis u. a.,¹² die dort gemachten Aussagen werden allerdings für $\mu_a \neq 0$ weitgehend ungültig. Es sei aber bemerkt, daß für Elektronen und noch mehr für μ -Mesonen nur derart kleine Werte von ε und μ_a noch mit den Experimenten verträglich sind, daß sich der Einfluß dieser Größen in (5.82) erst bei so hohen Energien deutlich bemerkbar machen könnte, bei denen die Behandlung des Streuers als äußeres Potential sehr fragwürdig ist. Formal erhalten wir aus (5.82) für so hohe Energien, daß die vektorielle Wechselwirkung auf Grund von ε vernachlässigbar ist, mit $x := \varepsilon/\mu_a$

$$(5.84) \quad \vec{\xi}' = -\vec{k}' (\vec{\xi} \cdot \vec{k}) - \vec{l}' \left[\vec{\xi} \cdot \vec{l} \frac{1-x^2}{1+x^2} + \vec{\xi} \cdot \vec{n} \frac{2x}{1+x^2} \right] - \vec{n} \left[\vec{\xi} \cdot \vec{l} \frac{2x}{1+x^2} - \vec{\xi} \cdot \vec{n} \frac{1-x^2}{1+x^2} \right];$$

es werden also nur noch die transversalen Komponenten gemischt, wie wir bereits aus der allg. Diskussion der tensoriellen Wechselwirkung in § 5.1.3. wissen. Der Wirkungsquerschnitt wäre allerdings dann für Elektronen mit (5.74) kleiner als 10^{-33} cm^2 .

§ 5.2.3. Das Verhalten des Polarisationsvektors für $A_0(\vec{x}) = 0$

Aus (5.68) und (5.2) ergibt sich mit (5.66) und (5.67)

$$(5.85) \quad \begin{cases} (2\pi)^2 p^{02} \text{Sp} [\varrho' (p')]_{p^0 = p^0} = N_m / \sin^2 \frac{\vartheta}{2}, \\ N_m := a^2 E^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + \langle b^2 + (\mu_a^2 p^{02} + \varepsilon^2 \vec{p}^2) \sin^2 \vartheta \rangle N^2; \end{cases}$$

$$(5.86) \quad \begin{cases} \vec{\xi}' \cdot \vec{k}' = N_m^{-1} \left\{ \vec{\xi} \cdot \vec{k} \left[a^2 E^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + \langle b^2 - (\mu_a^2 p^{02} + \varepsilon^2 \vec{p}^2) \sin^2 \vartheta \rangle N^2 \right] - \right. \\ \quad - \vec{\xi} \cdot \vec{l} \, 2 \sin \vartheta \left[\varepsilon a EN |\vec{p}| \sin \frac{\vartheta}{2} + \mu_a b N^2 p^0 \right] + \\ \quad \left. + \vec{\xi} \cdot \vec{n} \, 2 \sin \vartheta \left[\mu_a a EN p^0 \sin \frac{\vartheta}{2} - \varepsilon b N^2 |\vec{p}| \right] \right\}, \\ \vec{\xi}' \cdot \vec{l}' = N_m^{-1} \left\{ - \vec{\xi} \cdot \vec{k} \, 2 \sin \vartheta \left[\varepsilon a EN |\vec{p}| \sin \frac{\vartheta}{2} - \mu_a b N^2 p^0 \right] + \right. \\ \quad + \vec{\xi} \cdot \vec{l} \left[-a^2 E^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + \langle b^2 - (\mu_a^2 p^{02} - \varepsilon^2 \vec{p}^2) \sin^2 \vartheta \rangle N^2 \right] - \\ \quad \left. - \vec{\xi} \cdot \vec{n} \, 2 \sin \frac{\vartheta}{2} \left[a b EN + 4 \mu_a \varepsilon N^2 |\vec{p}| p^0 \sin \frac{\vartheta}{2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right] \right\}, \\ \vec{\xi}' \cdot \vec{n}' = N_m^{-1} \left\{ \vec{\xi} \cdot \vec{k} \, 2 \sin \vartheta \left[\mu_a a EN p^0 \sin \frac{\vartheta}{2} + \varepsilon b N^2 |\vec{p}| \right] + \right. \\ \quad + \vec{\xi} \cdot \vec{l} \, 2 \sin \frac{\vartheta}{2} \left[a b EN - 4 \mu_a \varepsilon N^2 |\vec{p}| p^0 \sin \frac{\vartheta}{2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right] + \\ \quad \left. + \vec{\xi} \cdot \vec{n} \left[-a^2 E^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + \langle b^2 + (\mu_a^2 p^{02} - \varepsilon^2 \vec{p}^2) \sin^2 \vartheta \rangle N^2 \right] \right\}. \end{cases}$$

Dabei haben wir die Abkürzungen (5.72) benutzt und gesetzt

$$(5.87) \quad a := e + 2 \mu_a m, \quad b := e + 2 \mu_a m \sin^2 \frac{\vartheta}{2}.$$

Der Wirkungsquerschnitt ist unabhängig von der Einfallenergie und von der Größenordnung 10^{-32} cm^2 ; erst für so große Energien, daß die Terme proportional μ_a und ε eine Rolle spielen, wächst er mit der Energie an. Da kein Motteffekt vorhanden ist, bleibt der Polarisationsgrad erhalten. Weiter erkennt man, daß ε in (5.85) und (5.86) immer in der Kombination $\varepsilon |\vec{p}| N \sin \vartheta$ auftritt, so daß der Wirkungsquerschnitt und die Endpolarisation sowohl im nichtrelativistischen Grenzfall als auch für $N = 0$

nicht von dem elektrischen Dipolmoment abhängen. Im letzteren Fall ergibt sich

$$(5.88) \quad \vec{\zeta}' = \vec{k}' (\vec{\zeta} \cdot \vec{k}) - \vec{l}' (\vec{\zeta} \cdot \vec{l}) - \vec{n} (\vec{\zeta} \cdot \vec{n}),$$

d. h. dasselbe Verhalten wie bei einer reinen V^R -Wechselwirkung mit der Potentialfunktion senkrecht zur Streuebene [vgl. (5.64)], obwohl über μ_a durchaus eine T^{RR} -Wechselwirkung vorhanden sein kann.

Für $E = 0$ werden die Komponenten des Polarisationsvektors in der Streuebene und senkrecht dazu durch die Streuung allein mittels der Wechselwirkung auf Grund von ε gemischt, genauso wie in § 5. 2. 2. Darüberhinaus werden $\vec{\zeta} \cdot \vec{k}$ und $\vec{\zeta} \cdot \vec{n}$ mit $\vec{\zeta} \cdot \vec{l}$ bei der Streuung für $E = 0$ allein durch die Wechselwirkung auf Grund von μ_a gemischt. Danach besteht im Prinzip die folgende Möglichkeit, den Einfluß von μ_a und ε auf die Endpolarisation zu trennen: Für $\vec{\zeta} \cdot \vec{l} = \vec{\zeta} \cdot \vec{n} = 0$ gilt $\vec{\zeta}' \cdot \vec{l}' \neq 0$ bzw. $\vec{\zeta}' \cdot \vec{n} \neq 0$ nur, falls $\mu_a \neq 0$ bzw. $\varepsilon \neq 0$ ist; entsprechendes gilt für eine andere Anfangspolarisation. Allerdings ist der Effekt klein. So findet man für Elektronen mit (5.74) unter optimalen Bedingungen, d. h. für $\vartheta = 90^\circ$ und $p^0 = 100$ MeV, $\vec{\zeta}' \cdot \vec{l}' \approx \vec{\zeta}' \cdot \vec{n} \approx 6 \cdot 10^{-2}$. Eine beträchtliche Größe würde der Effekt erst wieder bei Energien erreichen, bei denen die Behandlung des Streuers als Potential problematisch ist. Für derart extremrelativistische Energien, daß man die vektorielle Wechselwirkung auf Grund von e vernachlässigen kann, spielt E keine Rolle mehr und es ergibt sich aus (5.86) mit $x := \varepsilon/\mu_a$

$$(5.89) \quad \vec{\zeta}' = -\vec{k}' (\vec{\zeta} \cdot \vec{k}) - \vec{l}' \left[\vec{\zeta} \cdot \vec{l} \frac{1-x^2}{1+x^2} + \vec{\zeta} \cdot \vec{n} \frac{2x}{1+x^2} \right] - \\ - \vec{n} \left[\vec{\zeta} \cdot \vec{l} \frac{2x}{1+x^2} - \vec{\zeta} \cdot \vec{n} \frac{1-x^2}{1+x^2} \right];$$

das stimmt mit der Endpolarisation überein, die wir unter den gleichen Energiebedingungen für $\vec{A}(\vec{q}) = 0$ in § 5. 2. 2. gefunden haben.

§ 6. Die Bewegung des Polarisationsvektors eines Dirac-Wellenpaketes in einem makroskopischen elektromagnetischen Feld

Wir betrachten ein Wellenpaket, das der Dirac-Gleichung in einem äußeren elektromagnetischen Feld genügen soll. Das Wellenpaket soll so beschaffen sein, daß man es einigermaßen sinnvoll als ein klassisches Teilchen beschreiben kann. Dann müssen die Streuungen der den Observablen „Ort“ und „Impuls“ zugeordneten Operatoren klein sein. Damit diese Eigenschaft durch das elektromagnetische Feld nicht zerstört wird, müssen die Strecken, auf denen sich das Feld nennenswert ändert, groß gegen die Dimensionen des Wellenpaketes sein; dasselbe gilt dann auf Grund der Maxwell-Gleichungen auch für die Zeiten $x^0 = ct$. In diesem Sinne soll das äußere Feld, unter dessen Einfluß sich das Wellenpaket bewegt, makroskopisch sein. Für solche Felder kann man die Bewegung des Polarisationsvektors vollständig durch klassische Größen beschreiben und so das im allgemeinen komplizierte Problem der Lösung der Feldgleichungen umgehen.

§ 6.1. Die kovariante Bewegungsgleichung für den Polarisationsvektor

Die Dirac-Gleichung soll Teilchen beschreiben, die ein anomales magnetisches Moment μ_a und ein elektrisches Dipolmoment ε besitzen, wobei gilt

$$(6.1) \quad \mu_a := \left(\frac{g}{2} - 1 \right) \frac{e}{2m}, \quad \varepsilon := \frac{g'}{2} \frac{e}{2m}.$$

Wir geben uns nun in ein Bezugssystem, gegen das sich das Wellenpaket so langsam bewegt, daß wir die nichtrelativistische Näherung benutzen dürfen. Dann lautet der Hamiltonoperator*

$$(6.2) \quad H = -e \overset{\circ}{A}_0(x) + \frac{1}{2m} \left[\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} - e \overset{\circ}{A}(x) \right]^2 - \\ - \left(\frac{e}{2m} + \mu_a \right) \vec{\sigma} \cdot \overset{\circ}{H}(x) - \varepsilon \vec{\sigma} \cdot \overset{\circ}{E}(x).$$

* Dabei soll der Index Null über den Feldgrößen auf das spezielle Bezugssystem hinweisen, von dem aus wir das Wellenpaket betrachten.

Daraus ergeben sich in bekannter Weise für makroskopische Felder folgende Bewegungsgleichungen für die mit dem Wellenpaket gebildeten Erwartungswerte:

$$(6.3) \quad \frac{d\vec{v}}{dx^0} = \frac{e}{m} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{H}), \quad \vec{v} := \left\langle \frac{1}{m} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} - e \vec{A}(x) \right) \right\rangle,$$

$$(6.4) \quad \frac{d\vec{s}}{dx^0} = -\frac{e}{m} \left(\frac{g}{2} \vec{H} + \frac{g'}{2} \vec{E} \right) \times \vec{s}, \quad \vec{s} := \langle \vec{\sigma} \rangle.$$

Das sind aber die klassisch nichtrelativistischen Bewegungsgleichungen für ein Teilchen mit der Ladung e , dem magnetischen Moment $\vec{\mu} = \frac{ge}{4m} \vec{s}$ und dem elektrischen Dipolmoment $\vec{\varepsilon} = \frac{g'e}{4m} \vec{s}$ in einem hinreichend homogenen elektromagnetischen Feld. Nun denken wir uns das Bezugssystem so gewählt, daß $\vec{v} = 0$ gilt; es soll also in der klassischen Beschreibung das Ruhssystem sein. Dann ist (6.4) die Bewegungsgleichung für den Polarisationsvektor des Wellenpaketes \vec{s} im Ruhssystem.

Im Hinblick auf das Experiment interessiert aber die Bewegung des Polarisationsvektors, die ein Beobachter vom Laborsystem aus sieht. Wir müssen also (6.3) und (6.4) in eine kovariante Form bringen. Diese lautet für (6.3) bekanntlich

$$(6.5) \quad \frac{d u^\mu}{d\tau} = \frac{e}{m} F^{\mu\nu} u_\nu, \quad u^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad d\tau = \sqrt{1 - \vec{v}^2} dx^0;$$

$$(6.6) \quad (u^\mu) = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}} (1, \vec{v}), \quad u^2 = -1.$$

Den Polarisationsvektor kann man in kovarianter Weise durch einen Vierervektor $s^\mu(u)$ beschreiben, für den gilt

$$(6.7) \quad s^\mu(u) \xrightarrow{\text{Ruhssystem}} (0, \vec{s}).$$

Für diesen Vektor ergibt sich aus (6.6) und (6.4)

$$(6.8) \quad s^\mu(u) u_\mu = 0, \quad 0 \leq s^2 = \vec{s}^2 \leq 1.$$

Er hat also dieselben Eigenschaften wie der kovariante Polarisationsvektor des freien Teilchens ζ^μ aus (3.3): s^μ ist ein raumartiger

Vektor, der auf dem Viererimpuls senkrecht steht. Das muß für jeden Zeitpunkt während der Bewegung gelten, d. h. es muß gelten

$$(6.9) \quad u_\mu \frac{ds^\mu}{d\tau} = -s_\mu \frac{du^\mu}{d\tau}.$$

Daraus folgt mit (6.5) und der Nebenbedingung (6.4)

$$(6.10) \quad \frac{ds^\mu}{d\tau} = \frac{e}{m} \left\{ \left[\frac{g}{2} F^{\mu\nu} - \frac{g'}{2} \tilde{F}^{\mu\nu} \right] s_\nu - s_\nu \left[\left(\frac{g}{2} - 1 \right) F^{\nu\sigma} - \frac{g'}{2} \tilde{F}^{\nu\sigma} \right] u_\sigma u^\mu \right\}.$$

Das ist die kovariante Gleichung für die Bewegung des Polarisationsvektors eines Wellenpaketes in einem makroskopischen elektromagnetischen Feld.¹³ Bei dieser Bewegung bleibt der Polarisationsgrad erhalten, denn aus (6.10) folgt: $s^2 = \text{const.}$

§ 6.2. Die Integration der kovarianten Bewegungsgleichung

Wegen (6.8) können wir den Vektor s^μ auf ein (1.17) entsprechendes Dreibein beziehen, d. h. schreiben

$$(6.11) \quad s^\mu(u) = \sum_{i=1}^3 (s^i(u) t^{(i)\mu}(u)),$$

wobei gilt

$$(6.12) \quad t^{(i)\mu}(u) u_\mu = 0, \quad t^{(i)\mu}(u) t^{(j)\mu}(u) = \delta^{ij}.$$

Dabei ist zu beachten, daß u^μ keine Konstante der Bewegung ist, so daß sich das Dreibein $t^{(i)\mu}$ längs der Bahnkurve ändert. Für die Projektion von s^μ auf $t^{(i)\mu}$ ergibt sich aus (6.10) folgende Bewegungsgleichung:

$$(6.13) \quad \frac{d(s^\mu t^{(i)\mu})}{d\tau} = \sum_{k=1}^3 s^k t^{(k)} \left\{ \frac{e}{m} t^{(i)}_\mu \left[\frac{g}{2} F^{\mu\nu} - \frac{g'}{2} \tilde{F}^{\mu\nu} \right] t^{(k)}_\nu + \frac{d t^{(i)\mu}}{d\tau} t^{(k)}_\mu \right\}.$$

¹³ Bei der Herleitung von (6.10) sind wir V. Bargmann, L. Michel, V. L. Telegdi, Phys. Rev. Letters 2, 435 (1959) gefolgt. (6.10) läßt sich auch direkt als der Erwartungswert der Bewegungsgleichung für den in (1.6) definierten Operator $\frac{2W^\mu}{m}$ ableiten, wie D.M. Fradkin, R. H. Good, Revs. Modern Phys. 33, 343 (1961) gezeigt haben.

Das können wir auch in der Form

$$(6.14) \quad \frac{d(s^\mu t_\mu^{(i)})}{dx^0} = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon^{ijk} \omega^{(j)} s^l t_l^{(k)}$$

schreiben, wobei wir gesetzt haben

$$(6.15) \quad \omega^{(j)} := \frac{1}{2} \sqrt{1-\vec{v}^2} \sum_{k,i=1}^3 \varepsilon^{jki} \left\{ \frac{e}{m} t_\mu^{(i)} \left[\frac{g}{2} F^{\mu\nu} - \frac{g'}{2} \tilde{F}^{\mu\nu} \right] t_\nu^{(k)} + \frac{dt^{(i)\nu}}{d\tau} t_\nu^{(k)} \right\}.$$

Die Gleichung (6.14) besagt: Der Polarisationsvektor im Ruhesystem \vec{s} dreht sich gegen das mitbewegte Dreibein $\vec{t}^{(i)}$ mit der in der Zeit des Laborsystems x^0 gemessenen Frequenz $\vec{\omega}$, wobei $\omega^{(j)} = \vec{\omega} \cdot \vec{t}^{(j)}$ durch (6.15) gegeben ist.

Um die Frequenz $\omega^{(j)}$ berechnen zu können, müssen wir die Bewegungsgleichung für das Dreibein $t^{(i)\mu}$ kennen. Diese ergibt sich aus (6.12) und mit (6.5) zu

$$(6.16) \quad \frac{dt^{(i)\nu}}{d\tau} = \frac{e}{m} F^{\nu\mu} t_\mu^{(i)} + \sum_{l=1}^3 \alpha^{il} t^{(l)\nu}, \quad \alpha^{il} = -\alpha^{li}.$$

Dabei entsprechen die drei Koeffizienten α^{il} der Willkür in der Wahl des Dreibeins $t^{(i)\mu}$, denn dessen zwölf Komponenten sind nur den neun Bedingungen (6.12) unterworfen. Wir wollen über diese drei Koeffizienten so verfügen, daß $\vec{t}^{(i)}/|\vec{t}^{(i)}|$ gerade das begleitende Dreibein der Kurventheorie ist.¹⁴ Es soll also gelten

$$(6.17) \quad \frac{\vec{t}^{(1)}}{|\vec{t}^{(1)}|} = \vec{t} := \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|},$$

$$\vec{t}^{(2)} = \vec{n} := \frac{\vec{u} \vec{u}^2 - \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{u})}{|\vec{u}| \sqrt{\vec{u}^2 \vec{u}^2 - (\vec{u} \cdot \vec{u})^2}}, \quad \vec{t}^{(3)} = \vec{b} := \vec{t} \times \vec{n}; \quad \dot{\vec{u}} := \frac{d\vec{u}}{d\tau}.$$

¹⁴ V. S. Popov, Soviet Physics JETP 11, 1141 (1960) hat sich ebenfalls mit Bewegung des Polarisationsvektors eines relativistischen Teilchens beschäftigt und als Dreibein $t^{(i)\mu}$ das vierdimensionale Analogon der Frenetschen Achsen gewählt. Das mag wohl vom Standpunkt einer kovarianten Beschreibung aus konsequenter sein, erschwert aber die anschauliche Beschreibung der Bewegung.

Damit ergibt sich aus (6.16)

$$(6.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha^{12} = \frac{e}{m} \frac{\vec{E} \cdot \vec{t}^{(2)}}{|\vec{u}|}, \quad \alpha^{13} = \frac{e}{m} \frac{\vec{E} \cdot \vec{t}^{(3)}}{|\vec{u}|}, \\ \alpha^{23} = \frac{e}{m} \frac{\vec{H} \cdot \vec{t}^{(1)}}{|\vec{t}^{(1)}|} + |\vec{u}| \tau_W, \quad \tau_W := \frac{\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \ddot{\vec{u}})}{\vec{u}^2 \dot{\vec{u}}^2 - (\vec{u} \cdot \ddot{\vec{u}})^2}, \end{array} \right.$$

wobei τ_W die Windung der Bahnkurve ist, und

$$(6.19) \quad \frac{d}{dx^0} \left(\frac{\vec{t}^{(i)}}{|\vec{t}^{(i)}|} \right) = \vec{\omega}_B \times \frac{\vec{t}^{(i)}}{|\vec{t}^{(i)}|},$$

$$\vec{\omega}_B := -\frac{e}{m} \frac{1}{u^0} \left\{ \vec{H} - \frac{\vec{u} (\vec{H} \cdot \vec{u})}{\vec{u}^2} - \frac{\vec{u} \times \vec{E}}{\vec{u}^2} u^0 - \frac{m}{e} \vec{u} \tau_W \right\}.$$

Da nach (6.17) die beiden Dreibeine $\vec{t}^{(i)}$ und $\vec{t}^{\dot{(i)}}$ zueinander parallel sind, so ist $\vec{\omega}_B$ gerade die in der Laborzeit x^0 gemessene Frequenz, mit der das Dreibein $\vec{t}^{\dot{(i)}}$ gegen das Laborsystem rotiert.

Gehen wir mit (6.16), (6.17) und (6.18) in (6.15) ein, so erhalten wir schließlich

$$(6.20) \quad \omega^{(j)} \equiv \vec{\omega} \cdot \vec{t}^{\dot{(j)}} = \vec{\omega} \cdot \vec{t}^{(j)} / |\vec{t}^{(j)}|,$$

$$\vec{\omega} = -\frac{e}{m} \left\{ \left(\frac{g}{2} - 1 \right) \vec{H} + \frac{\vec{v} (\vec{H} \cdot \vec{v})}{\vec{v}^2} \left[\frac{g}{2} \sqrt{1 - \vec{v}^2} - \left(\frac{g}{2} - 1 \right) \right] - \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{\vec{v}^2} \left[\frac{g}{2} \vec{v}^2 - 1 \right] \right\} +$$

$$+ \frac{m}{e} \vec{v} \tau_W + \frac{g'}{2} \left[\vec{E} + \frac{\vec{v} (\vec{E} \cdot \vec{v})}{\vec{v}^2} (\sqrt{1 - \vec{v}^2} - 1) + \vec{v} \times \vec{H} \right].$$

Damit haben wir die Bewegung des Polarisationsvektors im Ruhssystem \vec{s} vollständig durch Größen des Laborsystems, also des Experimentes, beschrieben. Für ein vorgegebenes elektromagnetisches Feld im Laborsystem $(F^{\mu\nu}) = (\vec{E}, \vec{H})$ muß man zunächst aus (6.5) unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung die Bahnkurve des Wellenpaketes ermitteln. Damit kann man dann nach (6.20) die in der Laborzeit gemessene Frequenz $\vec{\omega}$, mit der sich der Polarisationsvektor im Ruhssystem \vec{s} gegen das mitbewegte Dreibein $\vec{t}^{\dot{(i)}}$ dreht, und nach (6.19) die in der Labor-

zeit gemessene Frequenz $\vec{\omega}_B$, mit der das Dreibein $\vec{t}^{(i)}$ gegen das Laborsystem rotiert, berechnen. Das haben wir für spezielle Feldanordnungen, die bestimmten experimentellen Situationen entsprechen, an anderer Stelle ausführlich diskutiert.¹⁵

Das Manuskript wurde im November 1961 abgeschlossen. Herrn Prof. Dr. F. Bopp und Herrn Dr. H. Friedmann bin ich für anregende Diskussionen zu Dank verpflichtet.

Anhang A: Die kovariante Beschreibung der Polarisation in der Dirac-Theorie mit $m = 0$

Ein Dirac-Teilchen mit verschwindender Ruhmasse scheint in der Natur als Neutrino verwirklicht zu sein. Da es mehrere Neutrino-Theorien gibt, die sich insbes. durch die Beschreibung des Antiteilchens unterscheiden, wollen wir uns im folgenden zur Vereinfachung auf Teilchen beschränken.

Die Dirac-Gleichung im Impulsraum lautet nach (2.3)

$$(A. 1) \quad \hat{p} u(p) = 0, \quad p^0 := |\vec{p}|.$$

Daraus folgt

$$(A. 2) \quad \bar{u}(p) u(p) = 0,$$

so daß man im Spinorraum die definite Metrik benutzen muß. Dann lautet der Impulsprojektor

$$(A. 3) \quad P(p) := \frac{\hat{p} \gamma^0}{2p^0}.$$

Der Polarisationsoperator lautet nach (1.34) und (2.6)

$$(A. 4) \quad \frac{W \cdot t^{(0)}}{p \cdot t^{(0)}} = \frac{1}{2} i \gamma^0 \gamma^5 \vec{\gamma} \cdot \frac{\vec{p}}{p^0} \equiv \frac{1}{2} \vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{p^0}.$$

Daraus findet man

$$(A. 5) \quad \left(\frac{W \cdot t^{(0)}}{p \cdot t^{(0)}} \right)^2 = \frac{1}{4p^{02}} (\vec{\gamma} \cdot \vec{p})^2 = \left(\pm \frac{1}{2} \right)^2,$$

¹⁵ H. J. Meister, Z. Phys. 166, 468 (1962).

im Einklang mit der Tatsache, daß Dirac-Teilchen den Spin $\frac{1}{2}$ besitzen. Die Basisvektoren $u_\eta(\not{p})$ mit $\eta = \pm 1$, die den zum Impuls \not{p} gehörigen Polarisationsraum aufspannen, sind dann durch folgende Gleichung definiert:

$$(A. 6) \quad \frac{W \cdot \not{t}^{(0)}}{\not{p} \cdot \not{t}^{(0)}} u_\eta(\not{p}) \equiv \frac{1}{2} i \gamma^0 \gamma^5 \vec{\gamma} \cdot \frac{\vec{p}}{p^0} u_\eta(\not{p}) = \frac{1}{2} \eta u_\eta(\not{p}).$$

Da die $u_\eta(\not{p})$ auch (A. 1) genügen müssen, d. h. gilt

$$(A. 7) \quad i \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{p} u_\eta(\not{p}) = -i p^0 u_\eta(\not{p}),$$

können wir an Stelle von (A. 6) auch schreiben

$$(A. 8) \quad i \gamma^5 u_\eta(\not{p}) = \eta u_\eta(\not{p}), \quad \eta = \pm 1.$$

Auf diese Gleichung wäre man direkt gekommen, wenn man in $W \cdot \not{t}^{(0)} / \not{p} \cdot \not{t}^{(0)}$ für W^μ den Ausdruck (2.9) eingesetzt hätte.

Der auf die Amplituden $u_\eta(\not{p})$ projizierende Operator lautet

$$(A. 9) \quad P_\eta(\not{p}) := \frac{1}{2} (1 + i \eta \gamma^5) P(\not{p}) \equiv \frac{1}{2} (1 + i \eta \gamma^5) \frac{\hat{p} \gamma^0}{2 p^0},$$

denn dieser Operator hat die Eigenschaften

$$(A. 10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } P_\eta(\not{p}) P_{\eta'}(\not{p}) = \delta_{\eta\eta'} P_\eta(\not{p}), \\ \text{b) } [P_\eta(\not{p})]^+ = P_\eta(\not{p}), \\ \text{c) } \hat{p} P_\eta(\not{p}) = 0, \\ \text{d) } i \gamma^5 P_\eta(\not{p}) = \eta P_\eta(\not{p}), \\ \text{e) } \text{Sp} [P_\eta(\not{p})] = 1, \\ \text{f) } \langle \vec{\Sigma} \rangle_\eta := \text{Sp} [\vec{\Sigma} P_\eta(\not{p})] = \eta \frac{\vec{p}}{p^0}. \end{array} \right.$$

Ferner gilt

$$(A. 11) \quad P_\eta(\not{p}) = u_\eta(\not{p}) u_\eta^+(\not{p}),$$

wenn wir die Amplituden $u_\eta(\not{p})$ auf

$$(A. 12) \quad u_\eta^+(\not{p}) u_{\eta'}(\not{p}) = \delta_{\eta\eta'}$$

normiert annehmen.

Wir wollen die Relation (A. 11) noch auf den Fall verallgemeinern, daß rechts verschiedene Indizes stehen. Dazu führen wir ein raumartiges Dreibein $n^{(i)\mu}$ derart ein, daß es mit (1.26) und (1.27) bei der Wahl $t^{(0)\mu} = (1, \vec{0})$ übereinstimmt:

$$(A. 13) \quad n^{(1)\mu} := \left(0, \frac{\vec{p}}{p^0}\right), \quad n^{(2)\mu} := (0, \vec{n}^{(2)}), \quad n^{(3)\mu} := (0, \vec{n}^{(3)}); \quad \vec{n}^{(2)} \times \vec{n}^{(3)} = \frac{\vec{p}}{p^0}.$$

Dann gilt

$$(A. 14) \quad P_\eta(p) \gamma^5 \hat{n}^{(2)} = \gamma^5 \hat{n}^{(2)} P_{-\eta}(p), \quad \text{d. h. } u_\eta(p) = \gamma^5 \hat{n}^{(2)} u_{-\eta}(p).$$

Daraus folgt mit (A. 11), (A. 9), (A. 7) und (A. 13)

$$(A. 15) \quad u_\eta(p) u_{-\eta}^+(p) = \frac{1}{2} \gamma^5 (\hat{n}^{(2)} + i \eta \hat{n}^{(3)}) P(p).$$

Die Relationen (A. 11) und (A. 15) bilden das Analogon zu (2.25) für den Fall $m = 0$.

Der Operator (A. 9) projiziert auf die zu positiver ($\eta = 1$) bzw. negativer ($\eta = -1$) Helizität gehörigen Amplituden. Die allgemeine Lösung von (A. 1) ist eine Linearkombination aus beiden Amplituden:

$$(A. 16) \quad {}_1u(p) := a_1 u_1(p) + a_{-1} u_{-1}(p), \quad |a_1|^2 + |a_{-1}|^2 = 1,$$

wobei auf Grund der letzten Gleichung auch ${}_1u(p)$ auf Eins normiert ist. Die dazu orthogonale Amplitude ist offensichtlich

$$(A. 17) \quad {}_{-1}u(p) := a_{-1}^* u_1(p) - a_1^* u_{-1}(p).$$

* Diesen Projektor kann man auch erhalten, indem man den Operator (2.15) durch Multiplikation von rechts mit $i\gamma^0 m/p^0$ auf die definite Metrik im Spinorraum umschreibt [vgl. dazu (2.4) und (A. 3)] und dann in geeigneter Weise den Grenzübergang $m \rightarrow 0$ durchführt.¹⁶ Daß die Betrachtungen in § 1. nur auf die Zustände reiner Helizität und nicht, wie im Fall $m \neq 0$, auf die einer beliebigen Linearkombination führen, hängt damit zusammen, daß im Falle $m = 0$ die beiden Helizitätszustände zu nichtäquivalenten Darstellungen der inhomogenen Lorentzgruppe gehören; bei $m \neq 0$ dagegen gehören sie zur gleichen Darstellung.

¹⁶ A.S. Wightman in *Relations de dispersion et particules élémentaires* (Edit. C. de Witt, R. Omnes), S. 220, Paris, 1961. – Herrn Prof. Dr. L. Michel danke ich für den Hinweis auf diese Vorlesungsveröffentlichung.

Für den zu diesen Amplituden gehörigen Projektor* findet man mit (A. 11), (A. 15) und (A. 9)

$$(A. 18) \quad \eta u(p) \eta u^\dagger(p) = : P_\eta(\xi, \vec{s}^{(2)}, \vec{s}^{(3)}; p) = \\ = \frac{1}{2} \{1 + \eta \gamma^5 (i\xi + \hat{s}^{(2)} + \hat{s}^{(3)})\} \frac{\hat{p} \gamma^0}{2p^0},$$

wobei wir zur Abkürzung gesetzt haben

$$(A. 19) \quad \xi := |a_1|^2 - |a_{-1}|^2, \quad s^{(2)\mu} := 2 \operatorname{Re}(a_1^* a_{-1}) n^{(2)\mu}, \\ s^{(3)\mu} := 2 \operatorname{Im}(a_1^* a_{-1}) n^{(3)\mu}; \quad \xi^2 + \vec{s}^{(2)} \cdot \vec{s}^{(2)} + \vec{s}^{(3)} \cdot \vec{s}^{(3)} = 1.$$

Für (A. 18) findet man neben den definierenden Projekteigenschaften

$$(A. 20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \operatorname{Sp}[P_\eta(\xi, \vec{s}^{(2)}, \vec{s}^{(3)}; p)] = 1, \\ \text{b) } \langle \vec{\Sigma} \rangle_\eta := \operatorname{Sp}[\vec{\Sigma} P_\eta(\xi, \vec{s}^{(2)}, \vec{s}^{(3)}; p)] = \eta \xi \frac{\vec{p}}{p^0}, \\ \text{c) } \langle \gamma^5 \vec{\gamma} \rangle_\eta := \operatorname{Sp}[\gamma^5 \vec{\gamma} P_\eta(\xi, \vec{s}^{(2)}, \vec{s}^{(3)}; p)] = \eta (\vec{s}^{(2)} + \vec{s}^{(3)}). \end{array} \right.$$

Die drei die Polarisation im allgemeinen Fall charakterisierenden Größen (A. 19) können wir als die Komponenten eines Polarisationsvektors \vec{s} bezüglich der drei in (A. 13) definierten Achsen $\vec{n}^{(i)}$ auffassen:

$$(A. 21) \quad s^1 := \vec{s} \cdot \vec{n}^{(1)} = |a_1|^2 - |a_{-1}|^2, \quad s^2 := \vec{s} \cdot \vec{n}^{(2)} = 2 \operatorname{Re}(a_1^* a_{-1}), \\ s^3 := \vec{s} \cdot \vec{n}^{(3)} = 2 \operatorname{Im}(a_1^* a_{-1}).$$

Die Größe $\sqrt{\vec{s}^2}$ ist dann nach (A. 19) der Polarisationsgrad; die Komponenten von \vec{s} sind gerade die Stokesschen Parameter. Übernehmen wir die Sprechweise der Optik, so können wir sagen: Im allgemeinen Fall liegt elliptische Polarisation vor; für $s^1 \equiv \xi = 0$ ist die Polarisation transversal (\equiv linear), für $s^2 = s^3 = 0$ ist die Polarisation zirkular. Nach (A. 20) erhält man den zirkularen Anteil als Erwartungswert von $\vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{p^0}$, den transversalen Anteil als Erwartungswert von $\gamma^5 \hat{n}^{(k)}$ mit $k = 2, 3$. Durch eine Transformation aus der kleinen Gruppe, d. h. durch eine Drehung um \vec{p}/p^0 , werden nur die verschiedenen Richtungen der transversalen Polarisation ineinander übergeführt; der zirkulare

Anteil der Polarisation bleibt dabei ungeändert. Im Falle $m \neq 0$ dagegen lassen sich alle Polarisationsrichtungen durch eine Transformation aus der kleinen Gruppe ineinander überführen.

Bisher haben wir nur die reine Gesamtheit im Polarisationsraum behandelt. Damit kann man aber die gemischte Gesamtheit analog zu § 3. beschreiben. Der Polarisationsgrad ist dann $\sqrt{\vec{s}^2} \leq 1$; für $\vec{s} = 0$ ist der Strahl unpolarisiert.

Anhang B: Beweis von (4.26)

Mit (4.11) und (4.7) ergibt sich aus (4.23)

$$(B. 1) \quad \text{Sp} [\rho_0^{\prime \varepsilon}(\rho')] r_\mu^\varepsilon(\rho', \rho) = \\ = \frac{1}{2} \sum_{\eta, \bar{\eta}, \eta'} c^\varepsilon(\eta', \eta) [c^\varepsilon(\eta', \bar{\eta})]^+ \text{Sp} \left[\gamma^5 \left(\gamma_\mu + \frac{i\varepsilon}{m} \not{p}_\mu \right) \varepsilon u_{\bar{\eta}}^\varepsilon(t^{(3)}, \rho) \bar{u}_\eta^\varepsilon(t^{(3)}, \rho) \right].$$

Die darin rechts auftretende Spur berechnen wir mit Hilfe von (2.26) und finden so

$$(B. 2) \quad \text{Sp} [\rho_0^{\prime \varepsilon}(\rho')] r_\mu^\varepsilon(\rho', \rho) = \\ = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 t_\mu^{(k)} \sum_{\eta, \bar{\eta}, \eta'} c^\varepsilon(\eta', \eta) \left\{ \begin{array}{c} \tau^{(k)} \\ \tau^{(k)*} \end{array} \right\}_{\eta \bar{\eta}} [c^\varepsilon(\eta', \bar{\eta})]^+ \quad \text{für } \varepsilon = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}.$$

Nun fassen wir die Wahrscheinlichkeitsamplituden $c^\varepsilon(\eta', \eta)$ als 2×2 -Matrizen mit den Indizes $\eta' \eta$ auf, d. h. wir setzen

$$(B. 3) \quad c^{(1)}(\eta', \eta) = : a^{(1)}(t'^{(3)}, p'; t^{(3)}, p) \delta_{\eta' \eta} + \sum_{l=1}^3 b^{(1)(l)}(t'^{(3)}, p'; t^{(3)}, p) [\tau^{(l)}]_{\eta' \eta} \\ c^{(-1)}(\eta', \eta) = : a^{(-1)}(t'^{(3)}, p'; t^{(3)}, p) \delta_{\eta' \eta} + \sum_{l=1}^3 b^{(-1)(l)}(t'^{(3)}, p'; t^{(3)}, p) [\tau^{(l)*}]_{\eta' \eta}.$$

Damit erhalten wir

$$(B. 4) \quad \text{Sp} [\rho_0^{\prime \varepsilon}(\rho')] r_\mu^\varepsilon(\rho', \rho) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 t_\mu^{(k)} \text{Sp}_2 \left[c^\varepsilon \left\{ \begin{array}{c} \tau^{(k)} \\ \tau^{(k)*} \end{array} \right\} c^{\varepsilon*} \right] = \\ = \sum_{k=1}^3 t_\mu^{(k)} \left\{ 2 \text{Re} (a^{\varepsilon*} b^{\varepsilon(k)}) + i\varepsilon \sum_{l, n=1}^3 \varepsilon^{kln} b^{\varepsilon(l)*} b^{\varepsilon(n)} \right\}$$

und weiter

$$(B.5) \quad (\text{Sp} [\varrho_0^{\prime\epsilon}(\mathcal{P}')])^2 r_\mu^\epsilon r^{\epsilon\mu} = \\ = \sum_{k=1}^3 \left\{ 4 \text{Re} (a^{\epsilon*} b^{\epsilon(k)}) \text{Re} (a^{\epsilon*} b^{\epsilon(k)}) + \sum_{l=1}^3 [|b^{\epsilon(k)}|^2 |b^{\epsilon(l)}|^2 - (b^{\epsilon(k)*} b^{\epsilon(l)})^2] \right\}.$$

Ganz entsprechend ergibt sich aus (4.25)

$$(B.6) \quad \text{Sp} [\varrho_0^{\prime\epsilon}(\mathcal{P}')] s_\mu^\epsilon(\mathcal{P}', \mathcal{P}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 t'_\mu{}^{(k)} \text{Sp}_2 \left[c^{\epsilon*} \begin{Bmatrix} \tau^{(k)} \\ \tau^{(k)*} \end{Bmatrix} c^\epsilon \right] = \\ = \sum_{k=1}^3 t'_\mu{}^{(k)} \left\{ 2 \text{Re} (a^{\epsilon*} b^{\epsilon(k)}) - i \epsilon \sum_{l,n=1}^3 \epsilon^{kln} b^{\epsilon(l)*} b^{\epsilon(n)} \right\}$$

und weiter

$$(B.7) \quad (\text{Sp} [\varrho_0^{\prime\epsilon}(\mathcal{P}')])^2 s_\mu^\epsilon s^{\epsilon\mu} = \\ = \sum_{k=1}^3 \left\{ 4 \text{Re} (a^{\epsilon*} b^{\epsilon(k)}) \text{Re} (a^{\epsilon*} b^{\epsilon(k)}) + \sum_{l=1}^3 [|b^{\epsilon(k)}|^2 |b^{\epsilon(l)}|^2 - (b^{\epsilon(k)*} b^{\epsilon(l)})^2] \right\}.$$

Der Vergleich von (B. 5) mit (B. 7) liefert

$$(B.8) \quad r_\mu^\epsilon(\mathcal{P}', \mathcal{P}) r^{\epsilon\mu}(\mathcal{P}', \mathcal{P}) = s_\mu^\epsilon(\mathcal{P}', \mathcal{P}) s^{\epsilon\mu}(\mathcal{P}', \mathcal{P}).$$

Anhang C: Beweis von (4.34)

Wir schreiben (4.9) in der Form

$$(C.1) \quad \varrho^{\prime\epsilon}(\mathcal{P}') = \Omega^\epsilon(\mathcal{P}', \mathcal{P}) \varrho^\epsilon(\zeta, \mathcal{P}) i\gamma^0 [\Omega^\epsilon(\mathcal{P}', \mathcal{P})]^+ i\gamma^0, \\ \Omega^\epsilon(\mathcal{P}', \mathcal{P}) := P^\epsilon(\mathcal{P}') M^\epsilon(\mathcal{P}', \mathcal{P}) P^\epsilon(\mathcal{P}).$$

Dann gilt

$$(C.2) \quad \text{Sp} [\varrho^{\prime\epsilon}(\mathcal{P}') \varrho^{\prime\epsilon}(\mathcal{P}')] = \\ = \text{Sp} [i\gamma^0 [\Omega^\epsilon(\mathcal{P}', \mathcal{P})]^+ i\gamma^0 \Omega^\epsilon(\mathcal{P}', \mathcal{P}) \varrho^\epsilon(\zeta, \mathcal{P}) i\gamma^0 [\Omega^\epsilon(\mathcal{P}', \mathcal{P})]^+ i\gamma^0 \Omega^\epsilon(\mathcal{P}', \mathcal{P}) \varrho^\epsilon(\zeta, \mathcal{P})].$$

Nun ergibt sich mit (2.26) und (4.22)

$$(C.3) \quad i\gamma^0 [\Omega^\varepsilon(\not{p}', \not{p})]^+ i\gamma^0 \Omega^\varepsilon(\not{p}', \not{p}) = \text{Sp} [\varrho_0^{\prime\varepsilon}(\not{p}')] P^\varepsilon(\not{p}) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \text{Sp} \left[i\gamma^0 [M^\varepsilon(\not{p}', \not{p})]^+ i\gamma^0 P^\varepsilon(\not{p}') M^\varepsilon(\not{p}', \not{p}) \times \right. \\ \left. \times \sum_{\eta, \bar{\eta}} \left\{ \begin{matrix} \tau^{(k)} \\ \tau^{(k)*} \end{matrix} \right\}_{\bar{\eta}\eta} \varepsilon u_{\bar{\eta}}^\varepsilon(t^{(3)}, \not{p}) \bar{u}_{\eta}^\varepsilon(t^{(3)}, \not{p}) \right] \gamma^5 \hat{t}^{(k)} P^\varepsilon(\not{p}).$$

Benutzen wir hierin nochmals (2.26), so erhalten wir mit (4.23) schließlich

$$(C.4) \quad i\gamma^0 [\Omega^\varepsilon(\not{p}', \not{p})]^+ i\gamma^0 \Omega^\varepsilon(\not{p}', \not{p}) = \text{Sp} [\varrho_0^{\prime\varepsilon}(\not{p}')] \left\{ 1 + \sum_{k=1}^3 r_\mu^\varepsilon(\not{p}', \not{p}) \hat{t}^{(k)\mu} \right\} P^\varepsilon(\not{p}).$$

Damit wird (C.2)

$$(C.5) \quad \text{Sp} [\varrho^{\prime\varepsilon}(\not{p}') \varrho^{\prime\varepsilon}(\not{p}')] = (\text{Sp} [\varrho_0^{\prime\varepsilon}(\not{p}')])^2 \times \\ \times \text{Sp} \left[\left(1 + \sum_{k=1}^3 r_\mu^\varepsilon \hat{t}^{(k)\mu} \gamma^5 \hat{t}^{(k)} \right) \varrho^\varepsilon(\zeta, \not{p}) \left(1 + \sum_{l=1}^3 r_\mu^\varepsilon \hat{t}^{(l)\mu} \gamma^5 \hat{t}^{(l)} \right) \varrho^\varepsilon(\zeta, \not{p}) \right].$$

Die zweite Spur rechts kann man ausrechnen, denn alle darin auftretenden Matrizen sind bekannt. Man findet mit (4.21)

$$(C.6) \quad \text{Sp} [\varrho^{\prime\varepsilon}(\not{p}') \varrho^{\prime\varepsilon}(\not{p}')] = \\ = (\text{Sp} [\varrho_0^{\prime\varepsilon}(\not{p}')])^2 \left\{ [1 + \zeta^\mu r_\mu^\varepsilon(\not{p}', \not{p})]^2 + \frac{1}{2} (1 - \zeta^2) [r_\mu^\varepsilon(\not{p}', \not{p}) r^{\varepsilon\mu}(\not{p}', \not{p}) - 1] \right\} = \\ = (\text{Sp} [\varrho_0^{\prime\varepsilon}(\not{p}')])^2 \left\{ 1 - \frac{1}{2} (1 - \zeta^2) \frac{[1 - r_\mu^\varepsilon(\not{p}', \not{p}) r^{\varepsilon\mu}(\not{p}', \not{p})]}{[1 + \zeta^\mu r_\mu^\varepsilon(\not{p}', \not{p})]^2} \right\}.$$

Bezeichnungen

1. Wir benutzen natürliche Einheiten, d. h. setzen $\hbar = c = 1$.
2. Als metrischen Fundamentaltensor verwenden wir

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ 0 & & & +1 \end{pmatrix}.$$

Griechische Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \nu, \varrho, \sigma$ durchlaufen die Werte 0, 1, 2, 3, lateinische Indizes i, j, k, l, n die Werte 1, 2, 3; griechische Indizes nehmen ε, η die Werte $+1$ und -1 an. Den Raumanteil eines Vierervektors bezeichnen wir durch einen Pfeil, das Skalarprodukt durch einen Punkt:

$$a \equiv (a^\mu) = (a^0, \vec{a}), \quad a \cdot b \equiv a_\mu b^\mu = -a^0 b^0 + \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Ferner gilt: $\varepsilon^{ijk} := \varepsilon^{0ijk}$ mit

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1, & \text{falls } \mu\nu\rho\sigma \text{ eine gerade Permutation von } 0123, \\ -1, & \text{falls } \mu\nu\rho\sigma \text{ eine ungerade Permutation von } 0123, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

3. Die zu einer Matrix M transportierte Matrix ist M^T und die dazu konjugiert komplexe Matrix ist M^* ; $M^+ := M^T*$. Die Diracschen γ -Matrizen sind definiert durch

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad \gamma^5 = -\gamma_5 := \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3, \quad \gamma^5 \gamma^5 = -1.$$

Wir benutzen für sie Darstellungen, in denen gilt

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x) &:= \psi^+(x) i \gamma^0, & (i \gamma^0)^+ &= i \gamma^0, & \vec{\gamma}^+ &= \vec{\gamma}, & (i \gamma^5)^+ &= i \gamma^5; \\ \gamma^{\mu T} &= -C \gamma^\mu C^{-1}, & \text{mit } C &= -C^T, & C^+ &= C^{-1}. \end{aligned}$$

Für die Verjüngung eines Vektors mit γ^μ schreiben wir $\hat{p} := \not{p} \gamma^\mu$.

4. Die Ladung eines Teilchens bezeichnen wir mit e ; die Ladung des Elektrons ist also $e < 0$. Die elektromagnetischen Feldgrößen sind

$$(A_\mu) = (-\Phi, \vec{A}), \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma};$$

$$E_k = F_{k0} = -\tilde{F}_{ln}, \quad H_k = F_{ln} = \tilde{F}_{k0}, \quad kln = \text{zykl. Perm. von } 123.$$