BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1962

MÜNCHEN 1963

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Zur Begründung einer Theorie der hydrostatischen Gleichgewichtsfiguren auf dem Außenraumpotential

Von Karl Ledersteger in Wien

Mit 1 Abbildung

Vorgelegt am 6. Juli 1962

Die hydrostatischen Gleichgewichtsfiguren sind bekanntlich dadurch definiert, daß die Flächen gleicher Dichte einschließlich der freien Oberfläche mit den Niveauflächen zusammenfallen. Dementsprechend geht die klassische Theorie der Gleichgewichtsfiguren vom Innenraum aus und operiert zwecks Integration der Clairautschen Differentialgleichung mit verschiedenen Ansätzen für das Dichtegesetz. Weil nun die Oberfläche der Gleichgewichtsfiguren gleichzeitig die oberste der inneren und die unterste der äußeren Niveauflächen ist, scheint sich die Möglichkeit zu eröffnen, das Problem vom Außenraum her zu lösen, falls es gelingt, gewisse unbedingt notwendige Voraussetzungen nachzuweisen.

Die erste Voraussetzung ist eine strenge Eindeutigkeit des Dichtegesetzes aller Gleichgewichtsfiguren. Denn soll eine derartige Figur aus dem Außenraumpotential berechnet werden können, so muß selbstverständlich die Vieldeutigkeit des Stokesschen Satzes aufgehoben sein, d. h. es darf zu einem gegebenen System Stokesscher Elemente $[M, \omega, S]$, also zu einer die gesamte Masse M umschließenden Niveaufläche S bei vorgegebener Rotationsgeschwindigkeit ω, wenn überhaupt, so eine und nur eine Massenanordnung im hydrostatischen Gleichgewicht geben. Die geforderte Eindeutigkeit des Dichtegesetzes steht jedenfalls für die ∞^2 MacLaurinschen Ellipsoide fest. Diese Ellipsoide sind homogen und haben daher wegen $\varrho = \text{const}$ anscheinend ein Dichtegesetz mit einer einzigen Konstante. In Wahrheit tritt aber noch ein geometrisches Bestimmungsstück, am bequemsten die Äquatorachse a, hinzu, weil es jeweils unendlich viele volumgleiche Ellipsoide gibt, welchen bei vorgegebener Masse natürlich dieselbe spezifische Konstante ϱ gemeinsam ist. Rein geometrisch ist die Oberfläche S einer beliebigen, heterogenen Gleichgewichtsfigur durch eine gewisse Anzahl von „Formparametern" charakterisiert, die ihre Abweichung vom achsengleichen Rotationsellipsoid beschreiben. Alle homogenen Ellipsoide sind also mögliche „nullparametrige" Gleichgewichtsfiguren, welche durch die Masse M und ihre Oberfläche $S(a, e)$, unter e die geometrische Abplattung verstanden, oder auch durch die Masse und das Dichtegesetz, d. h. durch $[M, a, \varrho]$ mit all ihren übrigen Daten eindeutig bestimmt sind. Hieraus folgt bereits, daß im Falle des Gleichgewichts die Rotationsgeschwindigkeit nicht mehr zu den Stokesschen Elementen zählt.

Ähnlich müssen die ∞^3 einparametrigen, heterogenen Gleichgewichtsfiguren, deren Oberfläche $S\ (a, e, f_4)$ durch Achse, Abplattung und den Darwinschen Formparameter f_4, eine kleine Größe 4. O. oder von der Ordnung des Quadrates der Abplattung bestimmt ist, ein Dichtegesetz mit drei Konstanten aufweisen, wofür wir zwar auf hypothetischer Grundlage, jedoch mit sehr hohem Wahrscheinlichkeitsgrad aus den Sphäroiden der größten Massenkonzentration gefunden haben:[1]

$$\varrho = \varrho_{\max}\left[1 - \nu\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^2. \tag{1}$$

Neben a treten hier zwei spezifische Konstanten des Dichtegesetzes auf, die Maximaldichte $\varrho_{\max}$ im Schwerpunkt und der Koeffizient ν, welcher für die homogenen Ellipsoide verschwindet und für die Sphäroide der größten Massenkonzentration knapp unter 1 liegt, derart, daß die Oberflächendichte

$$\varrho_{\min} = \varrho_{\max}\,(1 - \nu)^2 \tag{1 a}$$

der Poincaréschen Bedingung

$$\omega^2 = 2\pi k^2 \varrho_{\min} \tag{2}$$

[1] K. Ledersteger: „Zur Frage des Dichtegesetzes der einparametrigen heterogenen Gleichgewichtsfiguren", Schweiz. Zeitschrift f. Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie, Winterthur, 1960, S. 100–115. Der strenge Beweis des Dichtegesetzes (1) ist inzwischen bereits gelungen.

genügt. In (1) bedeutet noch x den Äquatorradius der laufenden, inneren Niveaufläche. Die Dreizahl dieser Konstanten ist für die strenge Eindeutigkeit des Dichtegesetzes wohl notwendig, aber natürlich nicht hinreichend.

Damit sind bereits die Elemente für den Aufbau höherparametriger Gleichgewichtsfiguren gegeben. Jede derartige Figur wird aus zwei oder mehr Teilen bestehen, deren jeder entweder homogen ist oder ein Dichtegesetz der Gestalt (1) hat. Es gibt dann ∞^n Gleichgewichtsfiguren mit $(n - 2)$ Formparametern; ihr kombiniertes Dichtegesetz hat insgesamt n Konstanten. So repräsentieren z. B. die ∞^4 zweiparametrigen Gleichgewichtsfiguren die sogenannten Wiechertschen Modelle, welche jeweils aus einem homogenen Mantel und einem homogenen Kern bestehen und dementsprechend $2 + 2 = 4$ Konstanten ihres Dichtegesetzes aufweisen.

Einen weiteren Hinweis auf die strenge Eindeutigkeit des Dichtegesetzes liefert ein merkwürdiges klassisches Ergebnis, welches besagt, daß im Falle des Gleichgewichtes das Hauptträgheitsmoment C um die Rotationsachse mit großer Annäherung eine Stokessche Konstante, oder wie Wavre[1] dies ausdrückt, eine „Quasi-Stokessche Konstante" ist. Unter den Stokesschen Konstanten versteht man bekanntlich Integralinvarianten, d. h. Größen, welche für alle unendlich vielen, möglichen Massenanordnungen, die zu einem System Stokesscher Elemente gehören, gleich sind. Zu diesen Stokesschen Konstanten gehören die Bestimmungsstücke der Schwereverteilung auf der Fläche S und im ganzen Außenraum sowie die verschiedenen Massefunktionen des Außenraumpotentials, in erster Linie die statische Abplattung, welche derzeit durch die Möglichkeit ihrer Bestimmung aus den künstlichen Satelliten in den Vordergrund des Interesses gerückt ist. Mit der statischen Abplattung ist die Differenz der Trägheitsmomente $(C - A)$ eine echte Stokessche Konstante, jedoch niemals C oder A selbst. Dies läßt sich am Beispiel des homogenen MacLaurinschen Ellipsoides leicht zeigen. Schreibt man diesem mit der Polarachse eine Kugel ein und verschiebt in ihr die eingeschlossenen Massen in konzentrischen Kugelschalen

---

[1] R. Wavre: „Figures planétaires et Géodésie", Paris 1932.

bis zur völligen Konzentration im Mittelpunkt, so bleibt stets $(C - A)$ unverändert, während C natürlich mit wachsender Massenkonzentration abnimmt. Dabei geht allerdings auch das Gleichgewicht verloren. Somit bleiben zur Erklärung des erwähnten Ergebnisses nur zwei Möglichkeiten: entweder gibt es im Falle des Gleichgewichtes verschiedene Massenanordnungen in engbegrenztem Bereich, wobei C fast unverändert bleibt, oder das Dichtegesetz ist streng individuell. Erstere Annahme erscheint sehr unwahrscheinlich. Ist aber das Dichtegesetz eindeutig, so sind die Stokesschen Konstanten und mit ihnen auch die Trägheitsmomente gar keine Integralinvarianten, sondern streng eindeutige Funktionen der Stokesschen Elemente M und S.

Wir haben eingangs die unmittelbare Evidenz der Eindeutigkeit des Dichtegesetzes der homogenen Ellipsoide festgestellt. Damit ist aber noch nicht ausgeschlossen, daß es zu demselben Ellipsoid heterogene Massenanordnungen im Gleichgewicht gibt. Erst wenn die Eindeutigkeit des Dichtegesetzes im Sinne der obigen Definition erwiesen ist, ist das sogenannte „Niveauellipsoid", das in der neueren Geodäsie seit Pizzetti und Somigliana eine so große Rolle spielt, ad absurdum geführt.

Ein zweites wichtiges Fundament für die Begründung der neuen Theorie ist das Prinzip der Entblätterung, welches besagt, daß jede beliebige innere Niveaufläche durch Abhebung der darüber befindlichen Massen freigelegt und so zur Oberfläche einer in den Dimensionen und in der Masse reduzierten Gleichgewichtsfigur derselben Rotationsgeschwindigkeit gemacht werden kann. Auch dieses Prinzip kann für die MacLaurinschen Ellipsoide als bewiesen gelten. Denn einerseits sind die inneren Niveauflächen der MacLaurinschen Ellipsoide einschließlich der freien Oberflächen konzentrische und ähnliche Ellipsoide, während andererseits die Potentialtheorie lehrt, daß eine von zwei solchen Ellipsoiden begrenzte Schale auf die Punkte ihres inneren Hohlraumes keine Anziehung ausübt; ihr Potential ist im ganzen Hohlraum Null. Hebt man also von einem MacLaurinschen Ellipsoid Schale für Schale ab, so entsteht eine lineare Reihe MacLaurinscher Ellipsoide derselben Rotationsgeschwindigkeit, in welcher der Äquatorradius und die Masse bei unveränderter Abplattung ständig abnehmen. Um dieses Prinzip der Entblätterung für alle Gleichgewichtsfiguren zu verallgemeinern, wäre zu zeigen, daß jede von zwei Niveauflächen begrenzte Schale einer beliebigen, heterogenen Gleichgewichtsfigur auf die Punkte im Innenraum der kleineren der beiden Niveauflächen keine Anziehungskraft ausübt. Dieser Beweis scheint fast unmöglich zu sein. Denn denkt man auch die Schale aus differentiellen homogenen Schichten aufgebaut, die fast von ähnlichen Flächen begrenzt sind, so wäre es trotzdem äußerst schwierig nachzuweisen, daß bei der Integration nicht doch geringe Anziehungskräfte im Innenraum auftreten.

Ein drittes notwendiges Fundament der neuen Theorie ist der Nachweis einer charakteristischen Eigenschaft der freien Oberfläche, die es gestattet, die Gleichgewichtsbedingung zu ersetzen, welche kaum in voller Allgemeinheit als eine Gleichung zwischen den Parametern des Helmertschen Gleichungssystems formuliert werden kann, wie es für die homogenen Ellipsoide durch die MacLaurinsche Bedingung geschehen ist. Diese kann bekanntlich bei vorausgesetzter kleiner Abplattung geschrieben werden:

$$\omega^2 a^3 / k^2 M = \frac{4}{5}\, e + \frac{22}{35}\, e^2 + \cdots. \tag{3}$$

Das Problem würde also darin bestehen, in dem allgemeinen Ansatz für die Näherung 4. Ordnung:

$$\omega^2 a^3 / k^2 M = \alpha e + \beta e^2 + \cdots. \tag{3a}$$

die Koeffizienten α und β in Funktion von $[M, a, \omega]$ festzulegen. Diese Koeffizienten wären jeweils für ∞^2 einparametrige Gleichgewichtsfiguren dieselben. Von besonderem Interesse wären ihre Grenzwerte für die wirklichen Sphäroide der größten Massenkonzentration. Als diese Sphaeroide hat man bisher immer die Niveauflächen des Massenpunktes im Ursprung des rotierenden Koordinatensystemes betrachtet und dazu fiktiv postuliert, daß der ganze Hohlraum bis zur „Oberfläche" mit Flüssigkeit der Dichte null aufgefüllt ist. Für den Massenpunkt findet man leicht: $\alpha = 2$, $\beta = 2$. In Wahrheit aber muß für die rellen Sphäroide der größten Massenkonzentration α noch weit unter 2 liegen; denn es ist noch ein weiter Weg von diesen Grenzfiguren bis zum Massenpunkt.

Vorliegende Untersuchung ist dem Beweis der beiden ersten Fundamente gewidmet, der sich in verblüffender Einfachheit aus den von Wavre für die Schichtung der heterogenen Gleichgewichtsfiguren abgeleiteten Sätzen ergibt. Unter „Schichtung" verstehen wir dabei die rein geometrisch betrachtete Verteilung der Flächen gleicher Dichte, welche voraussetzungsgemäß mit den Niveauflächen zusammenfallen. Wir gehen von der bekannten Formel von Bruns aus, die wir in der Gestalt schreiben:

$$\frac{dg}{dn} - 2gH = -4\pi k^2 \varrho + 2\omega^2 = \sigma. \tag{4}$$

Hierin bedeuten H die mittlere Krümmung in dem betrachteten Punkt und n die Richtung der inneren Normale; den rechtsstehenden Ausdruck bezeichnet Wavre als die „transformierte Dichte" σ. Werden die Flächen gleicher Dichte durch einen Parameter t gekennzeichnet, so stellt die Funktion $\varrho(t)$ das Dichtegesetz dar. Neben ϱ sind natürlich auch die transformierte Dichte, das Potential W und der Druck p reine Funktionen von t.

Da wir es mit Gleichgewichtsfiguren zu tun haben, welche sich an die schwach abgeplatteten MacLaurinschen Ellipsoide anschließen, dürfen wir Rotationssymmetrie annehmen. Dann aber liegen die orthogonalen Trajektorien der Flächen gleicher Dichte, die Lotlinien, in den Meridianebenen und hängen daher nur von einem Parameter θ ab. Wächst der Parameter t mit zunehmender Dichte, also nach innen, dann ist die durch

$$\frac{dn}{dt} = N(t, \theta) \tag{5}$$

definierte Funktion N niemals negativ. Der Parameter t wird am besten in der Polachse gezählt; es ist dann dort $dt = dn$ und $N = 1$. Schreibt man die Schwere

$$g = \frac{dW}{dt}\,\frac{dt}{dn}$$

und bezeichnet den ersten Faktor mit W', so folgt

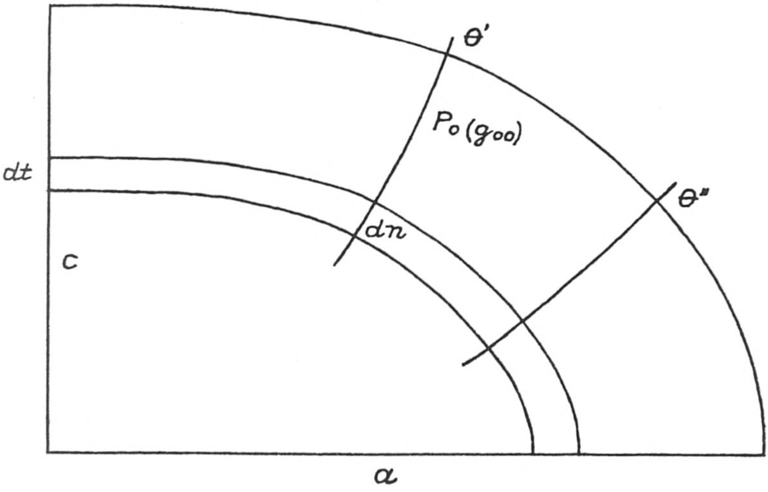
$$W' = gN. \tag{6}$$

Dies ist natürlich mit: $dW = g\,dn$ identisch und besagt, daß die Schwerkraft verkehrt proportional dem Abstand der Niveauflächen ist:

$$(gN)_{\theta'} = (gN)_{\theta''}, \tag{7}$$

woraus sich durch Differentiation ergibt:

$$\left(\frac{dg}{dt} N + g \frac{dN}{dt}\right)_{\theta'} = \left(\frac{dg}{dt} N + g \frac{dN}{dt}\right)_{\theta''}. \tag{8}$$



Bringt man mit (6) die Brunssche Formel in die Gestalt:

$$\frac{dg}{dt} = 2HW' + \sigma N \tag{9}$$

und setzt sie in die vorhergehende Gleichung ein, so findet man leicht:

$$\varphi(t) = \frac{\sigma(t)}{W'(t)} = -\frac{\left[2HN + \frac{d}{dt}(\operatorname{Log} N)\right]_{\theta'} - \left[2HN + \frac{d}{dt}(\operatorname{Log} N)\right]_{\theta''}}{N^2_{\theta'} - N^2_{\theta''}}, \tag{10}$$

worin Log den natürlichen Logarithmus bedeutet. Die neu eingeführte Funktion φ, welche mit σ stets $\leqq 0$ ist, hängt einerseits nur von physikalischen Größen ab, die selbst reine Funktionen von t sind, andererseits nur von der Schichtung, also von rein geometrischen Elementen. Sind speziell θ' und θ'' benachbarte Lotlinien und beachtet man, daß wegen (6)

$$\frac{\sigma}{g} = \varphi N, \tag{11}$$

so ergibt sich Satz I:

„Das Verhältnis der transformierten Dichte zur Schwere hängt in jedem Punkt nur von der Schichtung in seiner Umgebung ab.“

Wir wählen eine spezielle Kraftlinie θ_0 und in ihr den durch $t = t_0$ bestimmten Punkt P_0 zum Ursprung. Die Schwerebeschleunigung in dieser Lotlinie werde allgemein mit g_0 und speziell im Ursprung mit g_{00} bezeichnet. Mit $\sigma = \varphi W' = \varphi g N$ folgt dann aus (9)

$$\frac{dg}{dt} = W'(2H + \varphi N); \; \frac{1}{g}\frac{dg}{dt} = 2HN + \varphi N^2 = \frac{d}{dt}(\operatorname{Log} g) \tag{12}$$

und hieraus durch Integration:

$$g_0 = g_{00}\, e^{\int_{t_0}^{t} (2HN + \varphi N^2)_0 \, dt}. \tag{13}$$

Damit findet man in einem beliebigen Punkt gemäß (11) und (7)

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \varphi\,(gN) = \varphi\,(gN)_0 = g_{00}\,\varphi N_0\, e^{\int_{t_0}^{t} (2HN + \varphi N^2)_0 \, dt} \\ g &= \frac{(gN)}{N} = \frac{(gN)_0}{N} = g_{00}\, N_0 N^{-1}\, e^{\int_{t_0}^{t} (2HN + \varphi N^2)_0 \, dt} \end{aligned}\right\}. \tag{14}$$

Hierin ist g_{00} die Schwere in einem beliebigen Punkt, während alle übrigen Größen nur von der Schichtung abhängen. Dies liefert die Sätze

II: „Die transformierte Dichte und die Schwere sind in der ganzen Masse durch die Schichtung und durch die Schwere in einem Punkt bestimmt.“

III: „Auf einer gegebenen Schichtung ist die Verteilung der transformierten Dichten und der Schwere bis auf eine multiplikative Konstante nur auf eine Art möglich“.

Wählt man für den Faktor g_{00} die Schwere im Pol der freien Oberfläche S, so ist er durch die Stokesschen Elemente M, ω und S vollständig bestimmt, womit der Satz gewonnen ist:

IV: „Die Dichte und die Schwere sind in allen Punkten auf eindeutige Art durch die Schichtung, die Winkelgeschwindigkeit und die Gesamtmasse bestimmt."

Bisher wurden des leichteren Verständnisses wegen die Wavreschen Betrachtungen über die Schichtung im engsten Anschluß an das Original wiedergegeben.[1] Nunmehr schreiten wir an unsere Aufgabe und beginnen mit dem Beweis des Prinzipes der Entblätterung.

Wir betrachten eine beliebige innere Niveaufläche ($t < t_0$) einer heterogenen Gleichgewichtsfigur und in ihrem Innenraum den Punkt P_0 mit dem Parameterwert t_0 und dem Schwerewert g_{00}. Gemäß der ersten Gleichung (14) hängt die transformierte Dichte $\sigma(t)$ nur von g_{00} und der Schichtung zwischen den Dichteflächen t_0 und t ab. Weil nun $\sigma(t)$ und diese Schichtung bei einer Entblätterung der Figur bis zur Dichtefläche t völlig unverändert bleiben, kann sich auch g_{00} nicht ändern und in weiterer Folge gemäß der zweiten Gleichung (14) auch nicht die Schwereverteilung auf der Fläche t. Dies aber besagt, daß die unveränderten Flächen gleicher Dichte nach der Entblätterung die Niveauflächen der Restfigur bleiben oder daß die abgehobenen Schichten auf die Punkte der Restfigur keine Anziehungskraft ausüben. Damit ist aber das Prinzip der Entblätterung bereits bewiesen.

Auch der Beweis für die strenge Eindeutigkeit des Dichtegesetzes gestaltet sich sehr einfach. Wir wenden das bekannte Theorem von Stokes auf die freie Oberfläche S einer Gleichgewichtsfigur an. Das Theorem besagt, daß die Schwereverteilung auf S unabhängig von den möglichen Massenanordnungen durch die Stokesschen Elemente $[M, \omega, S]$ eindeutig bestimmt ist. Wir nehmen an, es gäbe für unsere Gleichgewichtsfigur zwei verschiedene Schichtungen, jedoch natürlich mit derselben Oberfläche S. Wählt man dann im Innenraum von S den Punkt P_0 in der Rotationsachse, so ist letztere sicherlich für beide Schichtungen gleich-

[1] Siehe auch: C. F. Baeschlin: „Lehrbuch der Geodäsie", Zürich 1948, § 89.

zeitig die Lotlinie von P_0 und es muß an der Oberfläche der Schwerewert g_0 im Pol beidemal derselbe sein. Es muß also das auf der rechten Seite der Gleichung (13) stehende Produkt für beide Schichtungen denselben Wert besitzen. Aus der zweiten Gleichung (14) können wir dann folgern, daß für alle Oberflächenpunkte das Produkt $N_0 N^{-1}$ für beide Schichtungen gleich ist. Weil nun in der Rotationsachse stets $N_0 = 1$ ist, muß über die ganze Oberfläche hin auch N unverändert bleiben, was besagt, daß dort die beiden Schichtungen identisch sind. Gemäß dem Prinzip der Entblätterung kann aber diese Argumentation der Reihe nach für alle Flächen gleicher Dichte wiederholt werden. Mithin sind die beiden Schichtungen in der ganzen Figur identisch und es ist daher nach Satz III wegen der unveränderten Gesamtmasse auch das Dichtegesetz streng eindeutig.

Eine weitere Folge ist, daß auch die Rotationsgeschwindigkeit eindeutig ist. Die Stokesschen Elemente stellen demnach, wie schon weiter oben bemerkt wurde, im Gleichgewichtsfalle eine Überbestimmung dar; jede Gleichgewichtsfigur ist durch $[M, S]$ allein mit allen ihren physikalischen Daten einschließlich der Rotationsgeschwindigkeit und des Trägheitsmomentes C eindeutig bestimmt. Damit läßt sich der vierte Wavresche Schichtungssatz wesentlich verschärfen:

IVa: „Die Dichte und die Schwere sowie die gesamte Schichtung sind in allen Punkten einer Gleichgewichtsfigur eindeutig durch die Gesamtmasse M und die Gestalt S der freien Oberfläche bestimmt."

Schließlich kann auch der dritte Satz strenger formuliert werden:

IIIa: „Allein durch die freie Oberfläche einer Gleichgewichtsfigur ist eindeutig die gesamte Schichtung bestimmt, die Verteilung der transformierten Dichte und der Schwere sowie das Quadrat der Rotationsgeschwindigkeit jedoch nur bis auf eine multiplikative Konstante λ, welche von der Gesamtmasse abhängt."

In dieser Formulierung ist auch zum Ausdruck gebracht, daß zwei geometrisch völlig identischen Gleichegewichtsfiguren verschiedener Gesamtmasse ($M_2 = \lambda\, M_1$) auch entsprechend verschiedene Rotationsgeschwindigkeiten ($\omega_2^2 = \lambda\, \omega_1^2$) zugehören, während sich im Dichtegesetz der einparametrigen Figuren nur die Maximaldichte ändert: $\varrho_{\max, 2} = \lambda \varrho_{\max, 1}$. Mit der Schichtung ist auch die sogenannte „Abplattungsfunktion" identisch. Hingegen gehört dasselbe Dichtegesetz ($\varrho_{\max,}$ ν, a) unendlich vielen einparametrigen Figuren an, bei denen mit der Gesamtmasse M auch die Abplattungsfunktion, also die Schichtung variiert.

Die beiden hiermit bewiesenen Prinzipien sind von weittragender Bedeutung für die Entwicklung einer neuen Theorie der Gleichgewichtsfiguren. Eine besondere Anwendung betrifft das Normalsphäroid der Erde. Das Prinzip der Entblätterung ermöglicht auch eine Revision der Clairautschen Theorie. Die berühmte Clairautsche Differentialgleichung 2. O., mit deren Integration sich bedeutende Mathematiker beschäftigt haben, wird durch eine wesentlich einfachere Differentialgleichung 1. O. ersetzt, die dennoch aufschlußreicher ist. Doch sei diesen Folgerungen eine eigene Untersuchung gewidmet.

Zusammenfassung

Zwei wesentliche Fundamente einer neuen Theorie der Gleichgewichtsfiguren, welche mit dem Außenraumpotential operiert, lassen sich leicht aus den Wavreschen Schichtungssätzen ableiten. Es sind dies das Prinzip der Entblätterung und die strenge Eindeutigkeit des Dichtegesetzes, welche schließlich auch eine wesentliche Verschärfung der Wavreschen Sätze gestatten.

Summary

Two essential fundamentals of a new theory of equilibrium figures, operating with the potential of outer space, can easily be derived from Wavre's theorems on stratification. These proofs of the principle of peeling and of the uniqueness of the density law finally permit an intensification of Wavre's Theorems.