BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

# SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1961

MÜNCHEN 1962

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

# Über eine Beziehung zwischen Längen von Vektoren

Von Nikolaos Kritikos in Athen

Mit 3 Figuren

Vorgelegt von Herrn Robert Sauer am 8. Dezember 1961

Die vorliegende Mitteilung bezieht sich auf eine Relation zwischen Längen von Vektoren im Raum, die interessante Anwendungen gestattet und, soviel ich weiß, trotz ihrer einfachen Beschaffenheit noch nicht beachtet worden ist.

1. **Satz.** *Für beliebige Vektoren $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ im Raum gilt die Relation*

$$(1.1)\quad |-\bar{u}+\bar{v}+\bar{w}|\,|\bar{u}-\bar{v}+\bar{w}|+|\bar{u}+\bar{v}+\bar{w}|\,|-\bar{u}-\bar{v}+\bar{w}|\geqq 4|\bar{u}|\,|\bar{v}|,$$

*wo das Gleichheitszeichen dann und nur dann Gültigkeit hat, wenn die Vektoren $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ 1. komplanar sind und 2. die Bedingung*

$$(1.2)\qquad w^2 = t(u+v)^2 + (1-t)\,(u-v)^2, \qquad 0 \leqq t \leqq 1$$

*erfüllen, nachdem man sie in diesem Fall respektive durch die komplexen Zahlen $u$, $v$, $w$ dargestellt hat.*

Beweis. Es sei $\varepsilon$ eine Ebene, zu der die Vektoren $\bar{u}$ und $\bar{v}$ parallel sind, und es bezeichnen $\bar{u}^*$, $\bar{v}^*$ und $\bar{w}^*$ die orthogonalen Projektionen von $\bar{u}$ bzw. $\bar{v}$ und $\bar{w}$ auf $\varepsilon$. Es ist dann

$$|\bar{u}|\,|\bar{v}| = |\bar{u}^*|\,|\bar{v}^*|,$$

$$|-\bar{u}+\bar{v}+\bar{w}|\,|\bar{u}-\bar{v}+\bar{w}| + |\bar{u}+\bar{v}+\bar{w}|\,|-\bar{u}-\bar{v}+\bar{w}|$$

$$\geqq |-\bar{u}^*+\bar{v}^*+\bar{w}^*|\,|\bar{u}^*-\bar{v}^*+\bar{w}^*| + |\bar{u}^*+\bar{v}^*+\bar{w}^*|\,|-\bar{u}^*-\bar{v}^*+\bar{w}^*|,$$

wobei in der letzten Beziehung das Gleichheitszeichen nur dann vorkommen kann, wenn die $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ komplanar sind. In der Tat, falls die $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ ebenenfremd sind, kann keiner der vier Vektoren

$$-\bar{u}+\bar{v}+\bar{w}, \quad \bar{u}-\bar{v}+\bar{w}, \quad \bar{u}+\bar{v}+\bar{w}, \quad -\bar{u}-\bar{v}+\bar{w}$$

null sein und wenigstens einer darunter ist nicht parallel zu $\varepsilon$, also ist seine Länge größer als die Länge seiner Projektion auf $\varepsilon$.

Die Relation (1.1) wird also allgemein bewiesen sein, wenn sie insbesondere für drei beliebige komplanare Vektoren $\bar{u}^*$, $\bar{v}^*$, $\bar{w}^*$ erhärtet ist. In diesem Fall kann man aber die drei Vektoren $\bar{u}^*$, $\bar{v}^*$, $\bar{w}^*$ respektive durch drei komplexe Zahlen

$$u = u_1 + u_2 i, \quad v = v_1 + v_2 i, \quad w = w_1 + w_2 i$$

darstellen und das zu Beweisende in der Form

(1.3)
$$|-u+v+w|\,|u-v+w| + |u+v+w|\,|-u-v+w| \geqq 4|uv|,$$

also auch folgendermaßen schreiben:

$$|w^2-(u-v)^2| + |(u+v)^2-w^2| \geqq |4uv|. \tag{1.4}$$

Nun gilt bekanntlich für beliebige komplexe Zahlen $z_1$ und $z_2$ die Beziehung

$$|z_1| + |z_2| \geqq |z_1+z_2|,$$

wobei Gleichheit dann und nur dann besteht, wenn

$$\text{entweder} \quad z_1 z_2 = 0 \quad \text{oder} \quad z_2 = \theta z_1 \quad \text{mit} \quad 0 < \theta < +\infty$$

ist. Aus dieser Beziehung kommt die zu beweisende (1.4) heraus, wenn man $z_1 = w^2-(u-v)^2$, $z_2 = (u+v)^2-w^2$ setzt. Folglich ist die Relation (1.4) wahr und das Gleichheitszeichen darin gilt dann und nur dann, wenn folgendes zutrifft:

$$w^2 = (u-v)^2 \quad \text{oder} \quad w^2 = (u+v)^2$$
$$\text{oder} \quad (u+v)^2-w^2 = \theta\,[w^2-(u-v)^2] \quad \text{mit} \quad 0 < \theta < +\infty.$$

Diese drei Fälle kann man durch die einzige Bedingung

$$w^2 = \frac{(u+v)^2+\theta(u-v)^2}{1+\theta} \quad \text{mit} \quad 0 \leqq \theta \leqq +\infty$$

oder durch die äquivalente

$$(1.5) \qquad w^2 = t(u+v)^2 + (1-t)\,(u-v)^2 \text{ mit } 0 \leqq t \leqq 1$$

charakterisieren, womit der Beweis des Satzes vollständig erbracht ist.

2. Es lohnt sich, etwas näher die Fälle zu betrachten, in denen die Relation (1.1) als Gleichheit gilt. Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Fall: $\bar{u} \parallel \bar{v}$. Dann darf man die komplexen Zahlen $u$ und $v$, die $\bar{u}$ bzw. $\bar{v}$ darstellen, als reell voraussetzen. Aus der notwendigen und hinreichenden Gleichheitsbedingung (1.5) folgert man jetzt, daß $w$ reell ist:

$$w = \pm\sqrt{t(u+v)^2 + (1-t)\,(u-v)^2}, \qquad 0 \leqq t \leqq 1,$$

und, absolut genommen, im abgeschlossenen Intervall mit den Endpunkten $|u-v|$ und $|u+v|$ liegt. Im betrachteten Fall ist also $\bar{w}$ ein beliebiger zu $\bar{u}$ und $\bar{v}$ kollinearer Vektor, dessen Länge der Bedingung genügt:

$$\operatorname{Min}(|\bar{u}-\bar{v}|,\ |\bar{u}+\bar{v}|) \leqq |\bar{w}| \leqq \operatorname{Max}(|\bar{u}-\bar{v}|,\ |\bar{u}+\bar{v}|).$$

2. Fall: nicht $\bar{u} \parallel \bar{v}$. Dann bestimmen $\bar{u}$ und $\bar{v}$ eine Ebene $\varepsilon$, wenn man sie von demselben Anfangspunkt o aufträgt. Der Vektor $\bar{w}$, der zusammen mit den gegebenen $\bar{u}$ und $\bar{v}$ die Gleichheit in (1.1) realisiert, ist in der Ebene $\varepsilon$ enthalten, wenn man o zu seinem Anfangspunkt macht; sein Endpunkt liegt dann irgendwo auf einem von zwei endlichen, in bezug auf o symmetrischen Bogen der gleichseitigen Hyperbel, die, in der Ebene $\varepsilon$, o zum Mittelpunkt hat und durch die Endpunkte der vom Anfangspunkt o aufgetragenen Vektoren $\pm(\bar{u}+\bar{v})$ und $\pm(\bar{u}-v)$ geht. Diese Bogen werden begrenzt durch die Endpunkte: der Vektoren $\bar{u}+\bar{v}$ und $\bar{u}-\bar{v}$ bzw. $-(\bar{u}+\bar{v})$ und $-(\bar{u}-\bar{v})$ falls $|\bar{u}| > |\bar{v}|$, der Vektoren $\bar{u}+\bar{v}$ und $-(\bar{u}-\bar{v})$ bzw. $-(\bar{u}+\bar{v})$ und $\bar{u}-\bar{v}$ falls $|\bar{u}| < |\bar{v}|$, und sie arten in die vier Strecken aus, welche o mit den Endpunkten von $\pm(\bar{u}+\bar{v})$ und $\pm(\bar{u}-\bar{v})$ verbinden, falls $|\bar{u}| = |\bar{v}|$. In der Tat, wenn man die Ebene $\varepsilon$ als

Gauß'sche $z$-Ebene auffaßt und die darin liegenden Vektoren $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ durch die komplexen Zahlen $u$, $v$, $w$ darstellt, gilt für $w$ die Bedingung (1.5), welche besagt, daß der Punkt $w^2$ ein beliebiger Punkt der Verbindungsstrecke von $z_1 = (u+v)^2$ und $z_2 = (u-v)^2$ ist. Da $\bar{u}$ und $\bar{v}$ als nicht-kollinear vorausgesetzt wurden, sind die Punkte $z_1$ und $z_2$ vom Nullpunkt o und voneinander verschieden; außerdem ist der Quotient $\frac{z_1}{z_2}$ entweder nicht reell (im Fall $|u| \neq |v|$) oder negativ (im Fall $|u| = |v|$). Die Gerade durch $z_1$ und $z_2$ wird nun durch die Transformation $\sqrt{z}$ in die gleichseitige Hyperbel transformiert, die o zum Mittelpunkt hat, durch die Punkte $\sqrt{z_1} = \pm(u+v)$ und $\sqrt{z_2} = \pm(u-v)$ geht und, selbstverständlich, in zwei zueinander senkrechte Geraden ausartet, falls $|u| = |v|$. Mithin wird die Verbindungsstrecke von $z_1$ und $z_2$ in die besagten zwei Hyperbelbogen transformiert, und der Punkt $w$, Endpunkt von $\bar{w}$, gehört diesen Bogen an, wie wir

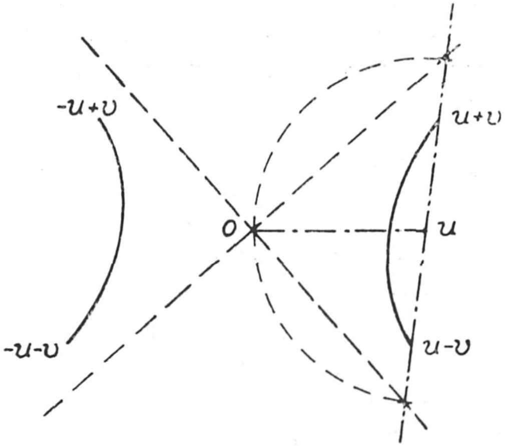


Abb. 1

behauptet haben. Die Asymptoten dieser Hyperbelbogen gehen durch o und die zwei Punkte $u \pm \frac{|u|}{|v|} v$; man kann sie sofort, ausgehend von den Punkten o, $u$, $u+v$, mit Zirkel und Lineal zeichnen. Hernach kann man in bekannter Weise soviel man will weitere Punkte der Bogen einzeichnen.

3. Wir wollen jetzt unsere Relation (1.1) zur Ableitung einer Beziehung anwenden, die von den Herren H o r n i c h und H l a w k a (Math. Zeitschr. 48 [1942], p. 274) entdeckt worden ist.

Wir setzen

$$\bar{a} = \frac{-\bar{u}+\bar{v}+\bar{w}}{2}, \quad \bar{b} = \frac{\bar{u}-\bar{v}+\bar{w}}{2}, \quad \bar{c} = \frac{\bar{u}+\bar{v}-\bar{w}}{2},$$

was äquivalent ist mit:

$$\bar{u} = \bar{b}+\bar{c}, \quad \bar{v} = \bar{c}+\bar{a}, \quad \bar{w} = \bar{a}+\bar{b}.$$

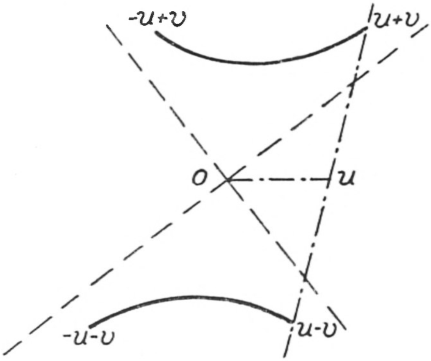

Abb. 2

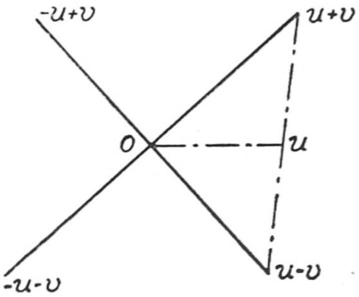

Abb. 3

Dadurch wird (1.1) in die Beziehung

$$(3.1) \qquad |\bar{a}|\,|\bar{b}| + |\bar{c}|\,|\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}| \geqq |\bar{a}+\bar{c}|\,|\bar{b}+\bar{c}|$$

umgeformt, worin das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn die Vektoren $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ 1. komplanar sind und 2., dargestellt durch die komplexen Zahlen $a$, $b$, $c$, die Bedingung

$$(a+b)^2 = t_1(a+b+2c)^2 + (1-t_1)(a-b)^2, \qquad 0 \leqq t_1 \leqq 1$$

oder die mit derselben äquivalente

$$(3.2) \qquad (1-t_1)\,ab = t_1 c\,(a+b+c), \qquad 0 \leqq t_1 \leqq 1$$

befriedigen.

Da (3.1) für beliebige Vektoren $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ wahr ist, haben wir noch folgende zwei Relationen zwischen denselben:

$$(3.3)\qquad |\bar{b}|\,|\bar{c}| + |\bar{a}|\,|\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}| \geqq |\bar{b}+\bar{a}|\,|\bar{c}+\bar{a}|,$$

$$(3.4)\qquad |\bar{c}|\,|\bar{a}| + |\bar{b}|\,|\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}| \geqq |\bar{c}+\bar{b}|\,|\bar{a}+\bar{b}|.$$

Aus (3.1), (3.3) und (3.4) erhalten wir durch Addition

(3.5)

$$|\bar{a}|\,|\bar{b}| + |\bar{b}|\,|\bar{c}| + |\bar{c}|\,|\bar{a}| + (|\bar{a}| + |\bar{b}| + |\bar{c}|)\,|\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}| \geqq$$
$$\geqq |\bar{a}+\bar{c}|\,|\bar{b}+\bar{c}| + |\bar{b}+\bar{a}|\,|\bar{c}+\bar{a}| + |\bar{c}+\bar{b}|\,|\bar{a}+\bar{b}|;$$

dabei gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn die Vektoren $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ 1. komplanar sind und 2., dargestellt durch die komplexen Zahlen $a$, $b$, $c$, außer der Bedingung (3.2) noch folgende zwei erfüllen:

$$(3.6)\qquad (1-t_2)\,b\,c = t_2\,a\,(a+b+c), \qquad 0 \leqq t_2 \leqq 1,$$

$$(3.7)\qquad (1-t_3)\,c\,a = t_3\,b\,(a+b+c), \qquad 0 \leqq t_3 \leqq 1.$$

Nun ist bei beliebigen $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$

$$\begin{aligned}|\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 + |\bar{c}|^2 + |\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}|^2 &= \\ &= \bar{a}^2 + \bar{b}^2 + \bar{c}^2 + (\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})^2 \\ &= 2\bar{a}^2 + 2\bar{b}^2 + 2\bar{c}^2 + 2\bar{a}\bar{b} + 2\bar{b}\bar{c} + 2\bar{c}\bar{a} \\ &= (\bar{a}+\bar{b})^2 + (\bar{b}+\bar{c})^2 + (\bar{c}+\bar{a})^2 \\ &= |\bar{a}+\bar{b}|^2 + |\bar{b}+\bar{c}|^2 + |\bar{c}+\bar{a}|^2.\end{aligned}$$

Wenn man also (3.5) mit 2 beiderseits multipliziert und zur letzten Gleichung seitenweise addiert, bekommt man

$$\{|\bar{a}| + |\bar{b}| + |\bar{c}| + |\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}|\}^2 \geqq \{|\bar{a}+\bar{b}| + |\bar{b}+\bar{c}| + |\bar{c}+\bar{a}|\}^2$$

und mithin

$$|\bar{a}| + |\bar{b}| + |\bar{c}| + |\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}| \geqq |\bar{a} + \bar{b}| + |\bar{b} + \bar{c}| + |\bar{c} + \bar{a}|. \tag{3.8}$$

Das ist aber die von den Herren Hornich und Hlawka bewiesene Relation. Darin hat das Gleichheitszeichen genau dann Gültigkeit, wenn die Vektoren $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ 1. komplanar sind und 2., durch die komplexen Zahlen $a$, $b$, $c$ ersetzt, die Bedingungen (3.2), (3.6) und (3.7) erfüllen. Dies trifft ersichtlich zu, wenn mindestens einer der vier Vektoren $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$ null ist. Ist letzteres nicht der Fall, so folgt aus (3.2), (3.6) und (3.7) durch Division:

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{t_2(1-t_1)}{t_1(1-t_2)} > 0, \quad \frac{b^2}{a^2} = \frac{t_2(1-t_3)}{t_3(1-t_2)} > 0.$$

Also sind die Vektoren $\bar{b}$, $\bar{c}$ zu $\bar{a}$ kollinear. Sind die drei Vektoren gleichsinnig, so darf man die komplexen Zahlen $a$, $b$, $c$ als positiv voraussetzen und man sieht sofort ein, daß dann die drei bewußten Bedingungen immer erfüllt sind. Sind sie ungleichsinnig, so darf man $a$ und $b$ als positiv und $c$ als negativ voraussetzen; man folgert dann aus den Bedingungen, daß $a + b + c < 0$ sein muß; umgekehrt ist letzteres hinreichend, damit die Bedingungen mit geeigneten Werten von $t_1$, $t_2$, $t_3$ erfüllt werden. Zusammenfassend können wir also folgendes behaupten: Das Gleichheitszeichen in der Relation (3.8) gilt dann und nur dann, wenn entweder mindestens einer der vier Vektoren $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$ null ist oder, im entgegengesetzten Fall, wenn die $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ kollinear sind, und zwar, im Fall der Gleichsinnigkeit, beliebig und, im Fall der Ungleichsinnigkeit, derartig, daß die Summe der zwei darunter gleichsinnigen eine kleinere Länge besitzt als der ungleichsinnige dritte Vektor.

4. Zum Schluß möchten wir bemerken, daß die vorangehenden Ausführungen eine neue Probe von der Nützlichkeit der Einführung der Methoden der Vektoralgebra in die Elementargeometrie geben. Mit Hilfe der Relationen (1.1) und (3.8) kann man nämlich sofort elementargeometrische Sätze begründen, die ohne Vektorrechnung wohl schwer beweisbar wären. Z. B. der Relation (1.1) entspringt der Satz:

In einer Pyramide $SABCD$ mit dem Parallelogramm $ABCD$ als Grundfläche ist die Summe $SA \cdot SC + SB \cdot SD$ der Rechtecke aus je zwei gegenüberliegenden Seitenkanten größer als das Rechteck $AB \cdot BC$ aus zwei aufeinanderfolgenden Seiten der Grundfläche. (Um das einzusehen, braucht man nur $\bar{u} = \overline{AB}$, $\bar{v} = \overline{BC}$ und $\bar{w} = 2\overline{OS}$ zu nehmen, wenn $O$ den Mittelpunkt des Parallelogramms $ABCD$ bezeichnet.)

Entsprechend kann man der Relation (3.8) den Satz entnehmen:

In einem Parallelepiped ist die Summe der drei Kanten und der Körperdiagonale, die von einer Ecke ausgehen, größer als die Summe der Flächendiagonalen, die dieselbe Ecke als Ausgangspunkt haben.

Der Beweis dieser beiden Sätze ohne Vektoralgebra scheint nun nicht einfach zu sein, während ihr Nachweis mit den Hilfsmitteln dieser Lehre sehr leicht zu führen ist, wie unsere Auseinandersetzung zeigt.