BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1958

MÜNCHEN 1958

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C.H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Die gravimetrische Methode zur Bestimmung der Erdfigur

Von Karl Ledersteger in Wien

Vorgelegt von Herrn Max Kneißl am 10. Oktober 1958

Die bisherige Entwicklung der gravimetrischen Methode zur Bestimmung der Erdfigur gibt in verschiedener Hinsicht Anlaß zu berechtigter Kritik:

1. Das physikalische Problem der Erdfigur wird meist zu eng gefaßt. Man leitet das „Erdellipsoid" auf astronomisch-geodätischem Wege nach dem Prinzip der bestanschließenden Ellipsoide ab und legt dieses der gravimetrischen Ableitung der Geoidundulationen mit Hilfe des Stokesschen Integrales als Referenzfläche zugrunde. Bekanntlich wird hierfür immer das auf isostatischer Grundlage berechnete Internationale Ellipsoid verwendet.

2. Das Internationale Ellipsoid wird einfach mit der Normalfigur der Erde identifiziert und im Sinne der Theorie von Pizzetti und Somigliana als Niveauellipsoid betrachtet. Diese potentialtheoretisch natürlich völlig einwandfreie und höchst geistreiche Theorie zwingt aber zur Annahme einer gänzlich fiktiven Massenanordnung, die mit der Regularisierung der Massen in der Erdkruste zwecks Herstellung des hydrostatischen Gleichgewichtes überhaupt nichts zu tun hat.

3. Verstrickt in diese Hypothese erweist es sich notwendig, die Schwereverteilung auf dem Ellipsoid als bekannt anzunehmen. Man betrachtet diese in abermals höchst fragwürdiger Weise als durch die Internationale Schwereformel gegeben.

Sowohl eine Kritik des derzeit üblichen Verfahrens zur Berechnung der Geoidundulationen wie auch der Versuch, hier neue Wege zu beschreiten, hat daher von dem auszugehen, was die Theorie möglichst hypothesenfrei über die Normalfigur der

Erde, das sogenannte „Normalsphäroid“, auszusagen gestattet.[1] Wollen wir die Kugelfunktionsentwicklung des Außenraumpotentiales auf das Geoid anwenden, so müssen zuerst die Kontinentalmassen gedanklich irgendwie nach innen verschoben werden. Durch jede Massenumgruppierung werden aber im allgemeinen die Niveauflächen deformiert. Es entstehen künstliche Geoide, für deren Definition zwei Möglichkeiten offenstehen: sie sind entweder äußere Niveaufläche vom Potentialwert des tatsächlichen Geoides oder freie Oberfläche der umgruppierten Erdmasse, in welch letzterem Falle sich der Potentialwert möglicherweise ändern kann. Vom Normalsphäroid fordern wir, daß seine freie Oberfläche Niveaufläche vom Potentialwert des aktuellen Geoides ist. Überdies soll in der Potentialzerlegung $W = U + T$ die Restfunktion T verschwinden, das Normalsphäroid also zu jenen künstlichen Geoiden gehören, die mit ihrem eigenen Niveausphäroid 4. Ranges:

$$U = \frac{k^2 E}{l} \left[1 + \frac{K}{2 l^2} (1 - 3 \sin^2 \varphi) + \frac{\omega^2 l^3}{2 k^2 E} \cos^2 \varphi + \right.$$
$$\left. + \frac{D}{l^4} \left(\sin^4 \varphi - \frac{6}{7} \sin^2 \varphi + \frac{3}{35} \right) \right] = W_0 \quad (1)$$

$$\text{mit} \quad K = \left(C - \frac{A + B}{2} \right) : E \; ; \quad \delta = \frac{D}{a^4}$$

zusammenfallen. Jedem Niveausphäroid entspricht ferner ein achsengleiches Rotationsellipsoid, über das sich das Niveausphäroid unter 45^0 Breite um den Maximalbetrag h_m erhebt. Das ganze Problem enthält dann neben den empirisch vorgegebenen Größen Rotationsgeschwindigkeit und Gravitationskonstante insgesamt 12 Bestimmungsstücke, nämlich die Erdmasse E, die mittlere Dichte ϱ_m, die statische Abplattung (K/a^2), Achse a und Abplattung α, die 3 Konstanten der Normalschwere γ_0, β und β_4, das Verhältnis ε von Fliehkraft zur Schwere am Äquator, den Potentialwert W_0 und die Parameter δ und h_m. Für diese 12 Größen liegen 8 Gleichungen vor (System I):

---

[1] K. Ledersteger: „Zur Theorie des Normalsphaeroides“, Geofisica pura e applicata, Band 40, Seite 1–14, Milano, 1958.

$$
\left.
\begin{aligned}
&1)\quad \alpha+\beta = {}^5/_2\,\varepsilon-\alpha^2-\frac{\alpha\varepsilon}{2}+\frac{2}{7}\,\delta \quad \text{(Theorem von Clairaut)}\\
&2)\quad \gamma_0 = \frac{k^2 E}{a^2}\left[1+\alpha-\frac{3}{2}\,\varepsilon-\alpha^2-\frac{\alpha\varepsilon}{2}+\frac{4}{7}\,\delta+\frac{9}{4}\,\varepsilon^2\right]\\
&3)\quad \frac{K}{a^2} = \frac{1}{3}\left[2\alpha-\varepsilon-2\alpha^2+\varepsilon\alpha+\frac{3}{2}\,\varepsilon^2+\frac{2}{7}\,\delta\right]\\
&4)\quad a = \frac{K^2 E}{W_0}\left[1+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\alpha}{3}-\frac{\alpha^2}{3}-\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{2}{3}\,\alpha\varepsilon+\frac{2}{15}\,\delta\right]\\
&5)\quad \beta_4 = 3\,\delta-11\,\alpha^2+10\,\alpha\varepsilon\\
&6)\quad \varepsilon = \frac{\omega^2 a}{\gamma_0} \quad \text{(Definitionsgleichung)}\\
&7)\quad \varrho_m = \frac{3E}{4\pi}\cdot\frac{1}{a^3(1-\alpha)}\\
&8)\quad h_m = \frac{a}{4}\left(\frac{7}{2}\,\alpha^2-\frac{5}{2}\,\alpha\varepsilon-\delta\right) = \frac{a}{4}\left(\frac{5}{2}\,\alpha^2-\alpha\beta-\delta\right)
\end{aligned}
\right\}\ \mathrm{I}
$$

Abgesehen von der Definitionsgleichung 6) gelten diese Formeln nur bis auf Größen 6. O., wenn man α, β und ε als Größen 2. O. auffaßt. Dann sind β_4 und δ Größen 4. O., während sich h_m sogar als Größe 5. O. erweist. An Stelle von δ wird in der Theorie vielfach der „Formparameter" $f = \left(\frac{5}{2}\,\alpha^2-\alpha\beta-\delta\right)$ verwendet. Die Dichtegleichung 7) verliert natürlich ihren Sinn, wenn das künstliche Geoid nicht gleichzeitig freie Oberfläche der Erdmasse ist.

Unser Gleichungssystem gilt für die Niveausphäroide aller äußeren Niveauflächen bei jeder beliebigen Massenkonfiguration der Erde. Stets sind vier Parameter bedingt frei wählbar, von denen einer natürlich die unveränderliche Erdmasse E sein muß. Definieren wir jetzt die dem natürlichen Geoid „benachbarten künstlichen Geoide" durch die strikte Forderung desselben Potentialwertes W_0 bei gleichzeitigem Verschwinden der Restfunktion ($T = 0$), so gibt es anscheinend eine zweifach unendliche Schar solcher benachbarter Geoide. Für diese ergeben sich die Differentialformeln:

$$\left.\begin{array}{c} d\alpha + d\beta = Gl_4\,; \quad \dfrac{da}{a} = \dfrac{1}{3}\,d\alpha + Gl_4\,; \quad \dfrac{d\gamma_0}{\gamma_0} = \dfrac{1}{3}\,d\alpha + Gl_4 \\ \left(\dfrac{da}{a} - \dfrac{d\gamma_0}{\gamma_0}\right) = Gl_4\,; \quad d\varepsilon = \varepsilon\left(\dfrac{da}{a} - \dfrac{d\gamma_0}{\gamma_0}\right) = Gl_6\,; \\ d\varrho_m = \varrho_m \cdot Gl_4 \end{array}\right\} \quad (2)$$

Dabei ist angenommen, daß die Änderungen $d\alpha$ und $d\beta$ selbst Größen 2. O. und die Änderungen von δ und β_4 Größen 4. O. sind. Man sieht, daß die relativen Änderungen von a und γ_0 gleichfalls Größen 2. O. sind, die sich nur um Größen 4. O. voneinander unterscheiden, und daß demzufolge ε innerhalb der Genauigkeitsgrenzen des Formelsystems I als konstant anzusehen ist. Doch ist das Verhältnis $(a : \gamma_0)$ noch nicht hinreichend konstant, so daß mit dem Parameter ε auch die Gleichung 6) ausscheidet. Ähnliches gilt für ϱ_m. Innerhalb der vernünftigerweise zu fordernden drei Dezimalen ist ϱ_m konstant, hingegen noch nicht das Produkt $a^3(1-\alpha)$, d. h. es scheidet mit ϱ_m auch die Gleichung 7) aus. Mithin bleiben für die benachbarten künstlichen Geoide noch sechs Gleichungen für die restlichen acht Parameter.

Da aber E und W_0 nicht unmittelbar empirisch gegeben sind, müssen wir zunächst ein geschlossenes System internationaler Näherungswerte aufstellen. Wir verfügen also wie üblich rein formal über die vier freien Parameter in folgender Weise: Achse und Abplattung werden vom Internationalen Ellipsoid übernommen, ebenso die Äquatorschwere von der Internationalen Schwereformel. Ferner soll das Hayfordsche Ellipsoid das Normalsphäroid vertreten, also dieses ein genähertes Niveauellipsoid sein, d. h. es soll h_m bis auf Größen 6. O. verschwinden. Damit ergibt sich aus der 8. Gleichung eine Bestimmungsgleichung für δ:

$$\delta = \left(\frac{7}{2}\,\alpha^2 - \frac{5}{2}\,\alpha\varepsilon\right)$$

und man erhält das Näherungssystem:

$$\left.\begin{array}{l} E \;= 5976{,}505 \cdot 10^{24}\,\mathrm{g}\,; \quad W_0 = 62639783 \cdot 10^4\,\mathrm{cm^2 sec^{-2}}\,; \\ \varrho_m = 5 \cdot 517\,; \quad \varepsilon = 34678{,}3 \cdot 10^{-7}\,; \quad a = 6378388\,\mathrm{m}\,; \\ \alpha \;= 1 : 297{,}0 = 33670{,}0 \cdot 10^{-7}\,; \quad \gamma_0 = 978{,}049\,\mathrm{gal}\,; \\ \beta \;= 52884{,}0 \cdot 10^{-7}\,; \quad \beta_4 = +235{,}2 \cdot 10^{-7}\,; \\ K/a^2 = 10920{,}7 \cdot 10^{-7}\,; \quad \delta = +104{,}9 \cdot 10^{-7}\,; \quad h_m \approx 0\,; \\ \qquad [K = 44429{,}6 \cdot 10^{10}\,\mathrm{cm^2}] \end{array}\right\} \quad (3)$$

Zu bemerken ist, daß sich die statische Abplattung hypothesenfrei, d. h. ohne jegliche Annahme über die Dichteverteilung im Erdinnern ergibt.

Damit haben wir für die benachbarten künstlichen Geoide die natürlich noch nicht richtigen, aber für eine theoretische Untersuchung ausreichenden Ausgangswerte E und W_0 gewonnen. Wegen der a priori gewissen generellen Dichtezunahme nach innen liegen alle benachbarten Geoide zwischen zwei Grenzfiguren, dem homogenen MacLaurinschen Ellipsoid und dem Sphäroid der größten Massenkonzentration. Beim homogenen Ellipsoid ist streng $h_m = 0$, d. h. dieser Parameter scheidet ähnlich wie beim genäherten Niveauellipsoid aus, während seine Gleichung zur Bestimmungsgleichung für δ wird. Außerdem tritt die MacLaurinsche Bedingung hinzu und man findet für die restlichen 9 Bestimmungsstücke das eindeutig lösbare Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned}
&1)\ \beta = \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^2 \quad \textit{oder} \quad \varepsilon = \frac{4}{5}\,\mathfrak{a} + \frac{138}{175}\,\mathfrak{a}^2\\
&2)\ \gamma_0 = \frac{k^2 E}{a^2}\left(1 - \frac{1}{5}\,\mathfrak{a} - \frac{2}{7}\,\mathfrak{a}^2\right)\\
&3)\ \frac{K}{a^2} = \frac{1}{5}\,(2\,\mathfrak{a} - \mathfrak{a}^2)\\
&4)\ a = \frac{k^2 E}{W_0}\left(1 + \frac{3}{5}\,\mathfrak{a} + \frac{12}{35}\,\mathfrak{a}^2\right)\\
&5)\ \text{und } 6):\ \beta_4 = \delta = \frac{3}{2}\,\mathfrak{a}^2\\
&7)\ \varrho = \frac{3E}{4\pi}\,\frac{1}{a^3(1-\mathfrak{a})}\ ; \quad 8)\ \varepsilon = \frac{\omega^2 a}{\gamma_0}\ :\\
&9)\ \frac{\omega^2}{2\pi k^2 \varrho} = \frac{8}{15}\,\mathfrak{a} - \frac{4}{35}\,\mathfrak{a}^2 \quad \textit{oder} \quad \frac{\omega^2 a^3}{k^2 E} = \frac{4}{5}\,\mathfrak{a} + \frac{22}{35}\,\mathfrak{a}^2.
\end{aligned}\right\}\ \text{II}$$

Wir betrachten den zweiten Grenzfall. Beim Sphäroid der größten Massenkonzentration wird angenommen, daß die gesamte Erdmasse auf einen Punkt zusammenschrumpft. Da wir trotzdem die Rotation beibehalten, liegt eigentlich eine fiktive Lösung des Systems I vor. Die Dichtegleichung verliert hier ihren Sinn und scheidet aus. Die Potentialfunktion 1) reduziert sich auf

$$U = \frac{k^2 E}{l} \left(1 + \frac{\omega^2 l^3}{2 k^2 E} \cos^2 \varphi \right), \tag{1 a}$$

da ja die Trägheitsmomente und die Massengrößen 4. O. verschwinden, d. h. $K = D = \delta = 0$ ist. Mithin bleiben für 9 Bestimmungsstücke 7 Gleichungen, und das System ist bei vorgegebenem E und W_0 eindeutig lösbar:

$$\left.\begin{aligned}
&1)\ \varepsilon = 2\mathfrak{a} + 6\mathfrak{a}^2 \\
&2)\ \gamma_0 = \frac{k^2 E}{a^2} (1 - 2\mathfrak{a} - 2\mathfrak{a}^2) \\
&3)\ \beta = 4\mathfrak{a} + 13\mathfrak{a}^2 \\
&4)\ a = \frac{k^2 E}{W_0} (1 + \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^2) \\
&5)\ \beta_4 = 9\mathfrak{a}^2 \\
&6)\ h_m = -\frac{3}{8} a \mathfrak{a}^2 \\
&7)\ \varepsilon = \frac{\omega^2 a}{\gamma_0}
\end{aligned}\right\} \tag{III}$$

Die mit den internationalen Nährungswerten für E und W_0 gewonnenen Grenzsysteme stellen wir dem internationalen Näherungssystem gegenüber (IV):

	a) Homogenes Ellipsoid:	b) Sphäroid der größten Massenkonzentration	c) Internationales Näherungssystem:
$\mathfrak{a}$ =	$43163{,}7 \cdot 10^{-7}$	$17249{,}4 \cdot 10^{-7}$	$33670{,}0 \cdot 10^{-7}$
β =	$43350{,}0 \cdot 10^{-7}$	$69384{,}3 \cdot 10^{-7}$	$52884{,}0 \cdot 10^{-7}$
K/a^2 =	$17228{,}2 \cdot 10^{-7}$	0	$10920{,}7 \cdot 10^{-7}$
a =	6380415,2 m	6374889,4 m	6378388 m
γ_0 =	978,3581 gal	977,5172 gal	978,0490 gal
β_4 =	$+279{,}5 \cdot 10^{-7}$	$+267{,}8 \cdot 10^{-7}$	$+235{,}2 \cdot 10^{-7}$
δ =	$+279{,}5 \cdot 10^{-7}$	0	$+104{,}9 \cdot 10^{-7}$
ε =	$34678{,}3 \cdot 10^{-7}$	$34678{,}1 \cdot 10^{-7}$	$34678{,}3 \cdot 10^{-7}$
ϱ =	5,517	—	5,517
h_m =	0	− 7,11 m	0

Damit sind die beiden Laplaceschen Grenzwerte der Abplattung 1 : 231,7 und 1 : 579,7, die bekanntlich schon auf Clairaut und Huygens zurückgehen, aus der exakten Forderung der Konstanz der Erdmasse und des Potentialwertes des natürlichen Geoides abgeleitet worden. Gewöhnlich werden sie in erster Näherung gemäß

$$^1/_2\, \varepsilon < \alpha < {}^5/_4\, \varepsilon \tag{4}$$

aus dem empirischen ε-Wert der tatsächlichen Erde abgeleitet. Es hat sich gezeigt, daß die durch den kleinen Faktor ω^2 bedingte Konstanz von ε nicht dahin mißdeutet werden darf, daß a und γ_0 selbst unverändert bleiben. Vielmehr hat die Äquatorachse im 1. Fall um mehr als 2 km zugenommen, im 2. Fall um 3,5 km abgenommen. Würde man über die beiden freien Parameter der Systeme II und III mit den internationalen Näherungswerten für a und γ_0 verfügen, so würde sich im 1. Falle die Erdmasse um 0,9 ‰ verringern, im 2. Falle um 1,6 ‰ vergrößern.

Ferner bestätigt unsere Gegenüberstellung die Differentialgleichungen 2):

1. Die gesamten Änderungen von α und β – $\Delta\alpha = -25914{,}3 \cdot 10^{-7}$, $\Delta\beta = +26034{,}3 \cdot 10^{-7}$ – sind bis auf Größen 4. O. entgegengesetzt gleich.

2. Die relativen Änderungen von a und γ_0 – $\Delta a/a = -8660{,}6 \cdot 10^{-7}$, $\Delta\gamma_0/\gamma_0 = -8595{,}0 \cdot 10^{-7}$ – unterscheiden sich untereinander und von $\Delta\alpha/3$ um Größen 4. O.

3. $\Delta\varepsilon$ ist tatsächlich eine Größe 6. O.; eine absolute Konstanz von ε wäre auch a priori gar nicht einzusehen. Die Dichte ϱ_m bleibt in der 3. Dezimale noch unverändert.

4. Während δ um seinen ganzen Betrag bis auf Null absinkt, ist β_4 fast konstant; die Änderung $\Delta\beta_4 = -11{,}7 \cdot 10^{-7}$ ist eine Größe 5. O.! Interpoliert man das internationale Näherungsstem linear in die beiden Grenzfiguren hinein, so erhält man aus den ersten 5 Zeilen der Tabelle den β_4-Wert für die nächste Umgebung des Normalsphäroides mit hoher innerer Präzision:

$$\left.\begin{array}{lr} \text{aus } \alpha: & 25914{,}3 : 9493{,}7 = 11{,}7 : 4{,}29 \\ \text{aus } \beta: & 26034{,}3 : 9534{,}0 = 11{,}7 : 4{,}28 \\ \text{aus } K/a^2: & 17228{,}2 : 6307{,}5 = 11{,}7 : 4{,}28 \\ \text{aus } \Delta a/a: & 8660{,}6 : 3177{,}2 = 11{,}7 : 4{,}29 \\ \text{aus } \Delta\gamma_0/\gamma_0: & 8595{,}0 : 3159{,}4 = 11{,}7 : 4{,}30 \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Damit ergibt sich für das Normalsphäroid im gewählten System völlig hypothesenfrei:

$$\beta_4 = +279{,}5 - 4{,}3 = 275{,}2 \cdot 10^{-7} \qquad (6)$$

Es zeigt sich also, daß die auffallend geringe Veränderlichkeit von β_4 der eigentliche Angelpunkt für die Theorie des Normalsphäroides ist. Da nämlich der Parameter β_4 sich im gesamten Bereiche zwischen den beiden Grenzfiguren nur um eine Größe 5. O. ändert, kann jede der Proportionen 5) als 9. Gleichung aufgefaßt werden, die zum System I hinzutritt. Die benachbarten künstlichen Geoide sind keine zweifach unendliche Schar, sondern eine zwischen die beiden Grenzfiguren eingespannte lineare Reihe, der das Normalsphäroid angehören muß. Für den einzigen noch frei verfügbaren Parameter wählen wir zunächst bequemlichkeitshalber die Abplattung α. Da die Abplattung des Normalsphäroides sicherlich innerhalb der Grenzen 1 : 300 und 1 : 294 liegt, berechnen wir die drei zu den Reziprokwerten $1/\alpha = 300$, 297 und 294 gehörigen Figuren:

$$\left.\begin{array}{llll} \alpha & = 33333{,}3 \cdot 10^{-7} \;; & 33670{,}0 \cdot 10^{-7} \;; & 34013{,}6 \cdot 10^{-7} \\ a & = 6378317{,}3 \text{ m} & 6378389{,}1 \text{ m} & 6378462{,}3 \text{ m} \\ \gamma_0 & = 978{,}0386 \text{ gal} & 978{,}0496 \text{ gal} & 978{,}0606 \text{ gal} \\ \beta & = 53226{,}0 \cdot 10^{-7} & 52887{,}8 \cdot 10^{-7} & 52542{,}5 \cdot 10^{-7} \\ K/a^2 & = 10698{,}2 \cdot 10^{-7} & 10922{,}0 \cdot 10^{-7} & 11150{,}3 \cdot 10^{-7} \\ \delta & = +113{,}8 \cdot 10^{-7} & +118{,}2 \cdot 10^{-7} & +122{,}6 \cdot 10^{-7} \\ h_m & = -2{,}21 \text{ m} & -2{,}11 \text{ m} & -2{,}01 \text{ m}\,. \end{array}\right\} \qquad (\mathrm{V})$$

Die drei Figuren sind nicht streng äquidistant; man überprüft sie daher mit den genaueren Differentialformeln:

$$\left.\begin{aligned}
d\beta &= -d\mathfrak{a} - \frac{d\mathfrak{a}}{42}(61\,\varepsilon - 4\,\mathfrak{a}) \\
\frac{da}{a} &= \frac{1}{3}\,d\mathfrak{a} + \left(\frac{1}{5}\,\mathfrak{a} + \frac{1}{9}\,\varepsilon\right) d\mathfrak{a} \\
\frac{d\gamma_0}{\gamma_0} &= \frac{1}{3}\,d\mathfrak{a} + \left(\frac{83}{105}\,\mathfrak{a} - \frac{71}{63}\,\varepsilon\right) d\mathfrak{a} \\
d\left(\frac{K}{a^2}\right) &= \frac{2}{3}\,d\mathfrak{a} - \frac{d\mathfrak{a}}{63}(40\,\mathfrak{a} - \varepsilon) \\
d\delta &= \frac{d\mathfrak{a}}{3}(22\,\mathfrak{a} - 10\,\varepsilon)\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{a})$$

Trotzdem wir von den internationalen Näherungswerten für E und W_0 ausgegangen sind, ist die mittlere, mit der Hayfordschen Abplattung berechnete Figur nicht identisch mit dem internationalen Näherungssystem. Um von der neuen Figur auf das Näherungssystem zurückzukommen, das auf der Annahme des Niveauellipsoides ($\delta = +104{,}9 \cdot 10^{-7}$) beruht, müßte man in die Formeln des Systemes I die Änderungen

$$d\delta = -13{,}3 \cdot 10^{-7}\,; \quad d\beta_4 = -40{,}0 \cdot 10^{-7} \qquad (7)$$

einführen und findet damit der Reihe nach ganz richtig:

$$d\beta = +\frac{2}{7}\,d\delta = -3{,}8 \cdot 10^{-7}; \quad d(K/a^2) = +\frac{2}{21}\,d\delta = -1{,}3 \cdot 10^{-7};$$

$$da = \frac{k^2 E}{W_0} \cdot \frac{2}{15}\,d\delta = -[6363893 \cdot 1{,}77 \cdot 10^{-7}]\,\text{m} = -1{,}1\ \text{m};$$

$$d\gamma_0 = \frac{k^2 E}{a^2} \cdot \frac{4}{7}\,d\delta = -979831 \cdot 7{,}6 \cdot 10^{-7} = -0{,}7\ \text{mgal}.$$

Wir erkennen also ganz klar, daß das Näherungssystem wegen der willkürlichen Wahl von δ, resp. wegen der willkürlichen Annahme des Niveauellipsoides gar nicht der Schar der benachbarten Geoide angehört. Tatsächlich liegt in der Reihe der benachbarten Geoide mit E und W_0 bereits der β_4-Wert des Normalsphäroides fest, und es ist dann δ in der näheren Umgebung des Normalsphäroides eine reine Funktion von $\mathfrak{a}$. Die kleine Tabelle V zeigt aber auch, daß eine Änderung der Äquatorachse $da = 24$ m bereits eine Änderung des Reziprokwertes der Abplattung um eine Einheit bedingt. Wären also die Ausgangswerte für E und W_0 richtig, so müßte einer Achse $a = 6378293$ m die Abplattung 1 : 301 entsprechen. Nun dürfte die wahre Äquatorachse des Normalsphäroides nahe dem angenommenen Wert liegen, während die Abplattung eher größer als 1 : 297 ist. Dies beweist zur Genüge, daß das mit dem Normalsphäroid achsengleiche Rotationsellipsoid, das mittlere Erdellipsoid, nicht die Abmessungen des Internationalen Ellipsoides haben kann.

Wir haben in V über den letzten noch freien Parameter mit der Abplattung α verfügt. Dies ist ohne weiteres erlaubt, wenn es gilt, einen kleinen Ausschnitt aus der Reihe der benachbarten künstlichen Geoide zu berechnen. Das Normalsphäroid selbst ist aber streng physikalisch als die Figur des hydrostatischen Gleichgewichts der Erde definiert. Leider ist jedoch das Gesetz, nach welchem die Massen in der Erdkruste zwecks Herstellung des Gleichgewichtes oder der „regularisierten" Erde zu verschieben wären, höchstens unter Einführung gewisser Hypothesen, etwa der Isostasie, mit mehr oder minder guter Annäherung erfaßbar. Da überdies zu jeder Figur unserer Reihe nach dem Satz von Stokes verschiedene Massenanordnungen gehören, scheint es fast aussichtslos, das Normalsphäroid mit der nötigen Sicherheit aus der Reihe der benachbarten Geoide herausheben zu können. Glücklicherweise gibt es aber noch eine andere, ebenfalls durch die Massenanordnung bedingte physikalische Größe, die das Normalsphäroid eindeutig charakterisiert, nämlich den Drehimpuls. Denn da das Geoid bloß aus der Eigengravitation und Rotation der Erde definiert ist, muß das Normalsphäroid denselben Drehimpuls besitzen wie die tatsächliche Erde. Es läßt sich nun sehr leicht zeigen,[1] daß bei den relativ geringen Massenverschiebungen, die zur Regularisierung der Erdkruste nötig sind, die Konstanz des Drehimpulses durch die Konstanz der Massengröße K ersetzt werden darf. Leider ist die empirisch aus der Mondbewegung abgeleitete statische Abplattung ziemlich unsicher. In dieser Hinsicht dürften also die künftigen Beoachtungen der künstlichen „astronomischen" Erdsatelliten, d. h. jener, die infolge ihrer großen Höhe

---

[1] K. Ledersteger: „Normalsphäroid und Niveauellipsoid", Schweiz. ZfV, 1958.

ungestört von der Erdatmosphäre eine Lebensdauer von mehreren Jahren haben werden, eine große Genauigkeitssteigerung und damit einen wesentlichen Fortschritt in der Bestimmung des Normalsphäroides bringen. Mit dem von K. Jung[1] angegebenen, derzeit besten astronomischen Wert für die statische Abplattung: 0,001106 ± 0,00001 folgt mit den Differentialformeln 2a), ausgehend von der mittleren Figur V

$$d(K/a^2) = +138 \cdot 10^{-7}; \; d\alpha = +207{,}6 \cdot 10^{-7}; \; da = +44\,\mathrm{m};$$

und schließlich

$$a = 6378433 \pm 32\,\mathrm{m}. \tag{8}$$

Obwohl die Ausgangswerte E und W_0 noch fehlerhaft sind, dürfen wir trotzdem vermuten, daß der empirische Wert der statischen Abplattung etwas zu groß ist. Denn durch die Angleichung des internationalen Näherungswertes der statischen Abplattung an den empirischen Wert wird die ohnedies um fast 100 m zu große Achse des Hayfordschen Ellipsoides weiter vergrößert. Andererseits könnte die relativ große Spannung zwischen diesen beiden Werten der statischen Abplattung durch eine etwas größere geometrische Abplattung gemildert werden.

Zwecks Abschätzung der möglichen Änderungen der Ausgangswerte sei daher versucht, das internationale Näherungssystem durch eine andere Figur zu ersetzen. Zumal wir wissen, daß der fundamentale Parameter ε für die Reihe der benachbarten künstlichen Geoide fast konstant ist und daß sich sein empirischer Wert durch die möglichen Verbesserungen für die Achse und die Äquatorschwere nur geringfügig ändern kann, berechnen wir mit $\varepsilon = 34678 \cdot 10^{-7}$ aus den Formelsystemen II und III für β_4 die beiden Grenzwerte:

$$\text{MacLaurin-Ellipsoid:}\; \beta_4 = \frac{75}{32}\left[\varepsilon^2 - \frac{69}{28}\,\varepsilon^3\right] = +279{,}4 \cdot 10^{-7}$$

$$\text{Massenkonzentration:}\; \beta_4 = \frac{72}{32}\left[\varepsilon^2 - 3\,\varepsilon^3\right] = +267{,}8 \cdot 10^{-7},$$

[1] K. Jung: „Schwerkraft und Erdfigur", in Landoldt-Börnstein, Zahlenwerte, Band 3, 6. Aufl., S. 262, 1952.

womit klar gezeigt ist, daß wir den für das Normalsphäroid aus den internationalen Näherungswerten für E und W_0 abgeleiteten Wert 6) beibehalten dürfen. Selbstverständlich sind hier die an sich unlogischen Glieder 6. O. nur wegen der inneren Übereinstimmung mitgenommen. Für die restlichen drei freien Parameter des Systemes I wählen wir:

$$a = 6378300\,\mathrm{m}; \quad \gamma_0 = 978{,}039\,\mathrm{gal}; \quad K/a^2 = 11000 \cdot 10^{-7}, \tag{9}$$

wobei auch die Verbesserung des Potsdamer Schweresystems mit 10 mgal berücksichtigt ist. Man findet damit:

$$\begin{aligned} &\varepsilon = 34678{,}2 \cdot 10^{-7}; \quad \alpha = 33787{,}4 \cdot 10^{-7} = 1:295.97; \quad \delta = +119{,}8 \cdot 10^{-7} \\ &\beta = 52735{,}3 \cdot 10^{-7}; \quad E = 5976{,}204 \cdot 10^{24}; \quad W_0 = 626377{,}5 \cdot 10^{6}. \end{aligned} \tag{9a}$$

Die Erdmasse erscheint um $5 \cdot 10^{-5}$ und der Potentialwert W_0 um $33 \cdot 10^{-6}$ seines Betrages im internationalen Näherungssystem verkleinert.

Berechnet man mit diesen neuen Ausgangswerten für E und W_0 ähnlich wie in V die zu den Reziprokwerten der Abplattung 300, 297 und 294 gehörigen benachbarten Geoide, so bleiben, da sich ε dank der gleichzeitigen Abnahme von a und γ_0 überhaupt nicht geändert hat, alle Parameter bis auf a und γ_0 unverändert und man findet:

$$\left.\begin{array}{llll} \alpha & = 33333{,}3 \cdot 10^{-7}; & 33670{,}0 \cdot 10^{-7}; & 34013{,}6 \cdot 10^{-7} \\ a & = 6378203{,}3\,\mathrm{m} & 6378275{,}0\,\mathrm{m} & 6378348{,}3\,\mathrm{m} \\ \gamma_0 & = 978{,}0234\,\mathrm{gal} & 978{,}0353\,\mathrm{gal} & 978{,}0465\,\mathrm{gal} \\ K/a^2 & = 10698{,}2 \cdot 10^{-7} & 10922{,}0 \cdot 10^{-7} & 11150{,}6 \cdot 10^{-7} \end{array}\right\} \quad (\mathrm{VI})$$

Damit ist tatsächlich die angestrebte Annäherung an den empirischen Wert für die statische Abplattung erzielt. Es zeigt sich deutlich, daß entgegen der weitverbreiteten Meinung derzeit die Achse des Normalsphäroides bereits besser bekannt ist als die geometrische Abplattung. Der Autor hat selbst durch eine absolute Lotabweichungsausgleichung auf Grund des europäischen und amerikanischen Materials die Achse zu $a = 6378284 \pm$

34 m bestimmt, während Krassowskij und Isotow[1] aus dem derzeit umfassendsten Material ein Rotationsellipsoid mit der Achse 6378295 ± 16 m berechnet haben, welch letzterer Wert wegen der unterlassenen Reduktion der Grundlinien vom Geoid auf das mittlere Erdellipsoid noch um 5–10 m zu verringern sein dürfte. Unser System VI liefert zur Achse 6378290 m die Abplattung $33740 \cdot 10^{-7} = 1 : 296{,}4$ und die statische Abplattung $10968 \cdot 10^{-7}$. Es besteht mithin eine gewisse Wahrscheinlichkeit, daß die Abplattung des Normalsphäroides etwas größer ist, als man zumeist annimmt.

Die bisherigen Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung lassen sich wie folgt zusammenfassen:

1. Das Gleichungssystem I hat an sich vier bedingt freie Parameter. Sucht man aber die Normalfigur der Erde, so muß man von der Erdmasse E und vom Potentialwert W_0 des aktuellen Geoides ausgehen. Mit den numerischen Werten dieser beiden Parameter lassen sich die beiden Grenzfiguren, das homogene MacLaurinsche Ellipsoid und das Sphäroid der größten Massenkonzentration, eindeutig berechnen. Dabei erweist sich die Änderung von β_4 trotz des großen Bereiches als eine Größe 5. O., so daß β_4 mit völliger Sicherheit linear interpoliert werden kann. Diese Proportion (vgl. 5.) ist aber eine 9. Gleichung, und das System I hat in diesem Fall nur mehr einen dritten freien Parameter. Mit anderen Worten: Für die vorgegebene Erdmasse und die vorgegebene Rotationsgeschwindigkeit ω gibt es eine dreifach unendliche Schar künstlicher Geoide ($T = 0$). Aus ihr kann eine lineare Reihe benachbarter künstlicher Geoide ($W = W_0$, $T = 0$) herausgehoben werden, die zwischen die beiden Grenzfiguren eingespannt ist und der das Normalsphäroid angehören muß. Für dieses ist der gefundene Wert $\beta_4 = + 275{,}2 \cdot 10^{-7}$ übrigens weitgehend unabhängig von den Fehlern in den angenommenen Zahlwerten für E und W_0. Besonders wichtig scheint die Tatsache, daß so β_4 hypothesenfrei gefunden wurde und fast völlig mit dem Wert übereinstimmt,

---

[1] F. N. Krassowskij: „Handbuch der Höheren Geodäsie", Bd. 2, Moskau 1942. A. A. Isotow: „Form und Dimensionen der Erde nach den modernen Daten", Lieferung 73, Moskau 1950.

den namhafte Forscher unter gewissen Annahmen über die Dichteverteilung abgeleitet haben. Der dritte Koeffizient der Schwereformel wird damit:

$$-\beta_4/4 = -68{,}8 \cdot 10^{-7}. \tag{10}$$

Wiechert, Darwin, Klussmann und Haalck haben für diesen Koeffizienten auf Grund verschiedener hypothetischer Dichtegesetze über den Formparameter f in guter Übereinstimmung $-7 \cdot 10^{-6}$ gefunden. Dies erweist sich jetzt als selbstverständlich, da β_4 fast völlig unabhängig von der Dichteverteilung aus Oberflächenwerten gewonnen wird. Ansel[1] glaubte in den Darwinschen Rechnungen einen Fehler gefunden zu haben, so daß aus dem Rocheschen Dichtegesetz der gänzlich unmögliche Wert $\beta_4 = -68 \cdot 10^{-7}$ folgen müßte. Tatsächlich konnte kürzlich G. Oliwa[2] dies als irrig zurückweisen.

2. Ebenso wie E und W_0 muß auch der dritte freie Parameter eine physikalische Größe des tatsächlichen Erdkörpers sein. Hierfür kommt einzig und allein die statische Abplattung in Frage, die die Erhaltung des Drehimpulses garantiert. Damit ist gleichzeitig bereits in der Definition der Normalfigur das unbekannte Regularisierungsgesetz für die Erdkruste umgangen, was für eine möglichst hypothesenfreie Bestimmung des Normalsphäroides von wesentlicher Bedeutung ist. Es muß nämlich zu den möglichen Massenanordnungen der durch die statische Abplattung bestimmten Figur auch die Massenanordnung des hydrostatischen Gleichgewichtes gehören, da ja bei der Regularisierung der Erdkruste a priori der Drehimpuls des tatsächlichen Erdkörpers unverändert bleiben muß.

3. Das internationale Näherungssystem ist eine Lösung des Systemes I, bei welcher als freie Parameter a, α, γ_0 und δ gedient haben, wobei letzterer entsprechend der Forderung des Niveauellipsoides gewählt wurde. Es ist klar, daß diese formale

---

[1] E. A. Ansel: „Theorie des irdischen Schwerefeldes", Gutenbergs Handbuch der Geophysik, Band 1, Seite 668, Berlin 1936.

[2] G. Oliwa: „Die Schwere auf dem Niveausphäroid", Zeitschrift f. Geophysik, 24. Jg., Seite 143–147, Würzburg 1958.

Lösung die drei physikalischen Größen nur genähert liefern konnte. Wegen der willkürlichen Forderung des Niveauellipsoides paßt das internationale Näherungssystem auch nicht vollständig in die Reihe IV der benachbarten künstlichen Geoide, obwohl diese Reihe aus den internationalen Näherungswerten für E und W_0 abgeleitet wurde.

4. Für die folgenden Überlegungen sind auch die Volumina der benachbarten künstlichen Geoide von Bedeutung. Da die maximalen Abstände dieser Geoide von ihren achsengleichen Rotationsellipsoiden bei 2 m liegen, dürfen wir die Volumina dieser Ellipsoide vergleichen, die durch den Faktor $a^3(1-\mathfrak{a})$ bestimmt sind. Daraus findet man mit den Differentialformeln 2a)

$$\frac{dV}{V} = \left(\frac{\varepsilon}{3} - \frac{2}{5}\,\mathfrak{a}\right) d\mathfrak{a} \sim -2\cdot 10^{-4}\, d\mathfrak{a}. \qquad (11)$$

Die benachbarten Geoide sind also nur bis auf Größen 5. O. volumgleich. Der Abschätzung liegt die Hayfordsche Abplattung zugrunde. Wählt man $|d\mathfrak{a}| = 500\cdot 10^{-7}$, entsprechend einer Achsenänderung $da = 106$ m, so wird $|dV| \leqq 10^{-8}\,V$.

Auf dieser theoretischen Grundlage muß eine möglichst hypothesenfreie Lösung des gesamten Problemes der Erdfigur aufgebaut werden. Man wird unter dem mittleren Erdellipsoid das mit dem Normalsphäroid achsengleiche Rotationsellipsoid verstehen und hat die Undulationen des aktuellen Geoides auf dieses streng physikalisch definierte Ellipsoid zu beziehen; nur so sind die Undulationen streng eindeutige und insoferne absolute Größen. Die große Schwierigkeit dieser Aufgabe besteht nun darin, daß weder die Erdmasse noch der Potentialwert des aktuellen Geoides unmittelbar der Beobachtung zugänglich sind und daß die statische Abplattung derzeit noch nicht mit hinreichender Genauigkeit ermittelt werden kann. Daher muß die Lösung indirekt angestrebt werden:

1. Die Unkenntnis des Potentialwertes W_0 zwingt zu der leider nicht völlig hypothesenfreien Forderung, daß das Normalsphäroid mit dem tatsächlichen Geoid volumgleich ist. Die Annahme würde streng zutreffen, wenn das tatsächliche Geoid äußere Niveaufläche der nicht regularisierten Erdmasse und

das Normalsphäroid das zugehörige Niveausphäroid 4. Ranges wäre. Damit wäre aber gleichzeitig auch die Konstanz des Drehimpulses verbürgt. Da natürlich nur eines der benachbarten künstlichen Geoide mit dem wirklichen Geoid volumgleich sein kann, ersetzt also die an sich recht plausible Forderung der Volumgleichheit die beiden unbekannten Bestimmungsstücke W_0 und $^K/_{a^2}$, d. h. diese beiden Größen werden durch die Achse a und die Abplattung des Normalsphäroides ersetzt. Praktisch wird die Forderung der Volumgleichheit selbstverständlich unmittelbar für das mittlere Erdellipsoid erhoben werden können, woraus folgt, daß die Undulationen des Geoides in ihrer Summe über die ganze Erde verschwinden.

2. Die angenommene Volumgleichheit von aktuellem Geoid und Normalsphäroid darf übrigens nicht als ein Rückfall in die ältere geometrische Methode aufgefaßt werden. Helmert hat bekanntlich das Erdellipsoid als das bestanschließende Ellipsoid für das gesamte Geoid definiert. Demnach müßte die Quadratsumme der Geoidundulationen zu einem Minimum werden, welche Forderung nebenbei bemerkt wegen der Wasserhülle der Erde praktisch weder direkt auf dem Wege ausgedehnter astronomischer Nivellements noch auf dem Umweg über das Minimalsystem der restlichen Lotabweichungen durchführbar ist. Obige physikalische Definition des Erdellipsoides verlangt vielmehr, daß dessen Abplattung physikalisch bestimmt wird. Zu jeder Achse gibt es aber, natürlich nur innerhalb gewisser Grenzen, eine Abplattung derart, daß die Undulationen in ihrer Summe verschwinden, und ähnlich zu jeder Abplattung eine und nur eine entsprechende Achse. Es erhebt sich daher das Problem, aus dieser unendlichen Mannigfaltigkeit volumgleicher Ellipsoide jenes herauszufinden, dessen beide Parameter das der linearen Reihe der benachbarten künstlichen Geoide angehörende Normalsphäroid bestimmen.

3. Die primäre Unkenntis der Erdmasse kann durch die Aufsuchung eines künstlichen Geoides vom Potentialwert des natürlichen Geoides wettgemacht werden, für welches nicht nur der indirekte Effekt, sondern auch die zugehörige Schwereverteilung angegeben werden kann. Dies leistet streng hypothesen-

frei die sogenannte wahre Freiluftreduktion.[1] Sie beruht auf dem Satz von Stokes. Man denkt sich die beobachteten Schwerewerte nach oben auf eine die ganze Erdmasse einschließende Niveaufläche reduziert, die durch eine vorgegebene Potentialdifferenz gegenüber dem Geoid eindeutig bestimmt ist. Sodann geht man mit dieser Potentialdifferenz streng in freier Luft zurück und erhält so ohne eine bestimmte Annahme von Massenverschiebungen ein künstliches Geoid, das sogenannte Freiluftgeoid, dessen indirekter Effekt genau berechenbar ist. Das Freiluftgeoid fällt auf den Meeren mit dem tatsächlichen Geoid zusammen und erhebt sich über den Kontinenten bis zu maximal 9 m. Gleichzeitig ist auf diesem Freiluftgeoid auch die Schwereverteilung gegeben, wobei sehr zu beachten ist, daß die zuerst rein gedanklich begangenen großen Reduktionsfehler beim Rückgang wieder streng aufgehoben werden. Die wahre Freiluftreduktion unterscheidet sich somit von der gewöhnlichen nur in zweierlei Hinsicht: die beobachteten Schwerewerte werden topographisch reduziert und sodann mit dem üblichen Freiluftgradienten nicht auf das tatsächliche Geoid, sondern auf das Freiluftgeoid übertragen.

4. Das Freiluftgeoid ist wohl ein zur wirklichen Erdmasse gehöriges künstliches Geoid vom Potentialwert W_0 des natürlichen Geoides; trotzdem gehört es nicht unserer linearen Reihe benachbarter Geoide an, weil wir nicht erwarten dürfen, daß dafür bereits die Restfunktion T verschwindet. Wohl aber gehört das entsprechende Niveausphäroid dieser Reihe an. Entwickelt man also die Schwereverteilung des Freiluftgeoides nach Kugelfunktionen, so erhält man die zugehörige theoretische Schwereverteilung auf dem Niveausphäroid, d. h. die zwei Größen γ_0' und β', während β_4 nach 6) bereits bekannt ist, da ja dieses Niveausphäroid bereits in der nächsten Umgebung des Normalsphäroides liegt.

5. Das Stokessche Integral liefert jetzt die Erhebungen N des Freiluftgeoides über sein Niveausphäroid, und zwar unabhängig von einem Fehler in der angenommenen Achse a'', für die man

[1] K. Ledersteger: „Eine Modifikation der Freiluftreduktion", Festschrift C. F. Baeschlin, Zürich 1957, Seite 155–164.

heute am besten $a'' = 6378300$ m wählen wird. Es ist dies ein wesentliches Charakteristikum aller aus dem Schwerefeld abgeleiteten sogenannten „gravimetrischen Höhen". Die Höhen N verschwinden in ihrer Summe über die ganze Erde hin; denn jedes künstliche Geoid ist mit seinem Niveausphäroid volumgleich. Für unser Niveausphäroid sind wohl nur die drei Parameter der Schwereformel numerisch gegeben. Dennoch können mit dem Näherungswert a'' für a' exakt seine Erhebungen h über das achsengleiche Rotationsellipsoid berechnet werden; diese sind nämlich im gleichen Sinne wie die Geoidhöhen N gravimetrische Höhen, was auch für die Höhen c des Freiluftgeoides über dem tatsächlichen Geoid gilt. Aus den drei Arten der gravimetrischen Höhen können nun die Erhebungen $z = (N + h - c)$ des aktuellen Geoides über das genannte Rotationsellipsoid gebildet werden, die nicht mehr in ihrer Summe verschwinden.

6. Von diesem Ellipsoid ist unmittelbar nur ein Näherungswert (a'') für seine Achse a' gegeben. Da aber dieser Wert völlig für die strenge Berechnung von ε ausreicht, können mit der 1. und 5. Gleichung des Systemes I aus β' und β_4 die beiden Parameter α' und δ' abgeleitet werden. Durch bloße Variation der Abplattung α' kann dann der Mittelwert der z zum Verschwinden gebracht werden: die neue Figur ist volumgleich mit dem aktuellen Geoid, d. h. wir haben damit die Abplattung $\alpha = (\alpha' + d\alpha')$ des Normalsphäroides gefunden. Überdies bestimmen die zugehörigen Änderungen $dz = -a'\, d\alpha' \sin^2 \varphi$ bereits die definitiven Geoidundulationen $\zeta = z + dz$.

7. Anschließend erhält man für das Normalsphäroid δ aus Gleichung (5) und β aus Gleichung (1). Die 2. Gleichung kann sowohl für das ursprüngliche Niveausphäroid wie auch für das Normalsphäroid angesetzt werden:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{k^2 E}{(a')^2} = \frac{\gamma_0'}{\left[1 + \alpha' - \frac{3}{2}\varepsilon - \alpha'^2 - \frac{\alpha'\varepsilon}{2} + \frac{4}{7}\delta' + \frac{9}{4}\varepsilon^2\right]} \\
&\gamma_0 = \frac{k^2 E}{a^2}\left[1 + \alpha - \frac{3}{2}\varepsilon - \alpha^2 - \frac{\alpha\varepsilon}{2} + \frac{4}{7}\delta + \frac{9}{4}\varepsilon^2\right] \\
&\text{mit} \\
&\quad a = a' + da'; \quad \frac{da'}{a'} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\alpha + \frac{1}{9}\varepsilon\right) d\alpha',
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

woraus eindeutig γ_0 und die theoretische Schwereverteilung auf dem Normalsphäroid folgt, die mittels der Höhen

$$h = \frac{a}{4}\left(\frac{7}{2}\,\alpha^2 - \frac{5}{2}\,\alpha\varepsilon - \delta\right)\sin^2 2\varphi \tag{13}$$

unter Verwendung der gewöhnlichen Freiluftformel weiter auf das mittlere Erdellipsoid reduziert werden kann. Auf diese Weise ist das mittlere Erdellipsoid die einheitliche Bezugsfläche für die Großraumtriangulationen, für das irdische Schwerefeld und für die Geoidundulationen.

8. Zu beachten ist, daß die in 12) aufscheinenden Achsenwerte a' und a noch immer mit dem gleichen Fehler der Annäherung behaftet sind. Bezieht man jetzt aber die relativen Lotabweichungen kontinentaler Netze auf ein Ellipsoid mit der angenommenen Achse a'', jedoch mit der Abplattung des Normalsphäroides und berechnet aus den definitiven Geoidundulationen die absoluten Lotabweichungen, so liefert die „absolute Lotabweichungsausgleichung"[1] nicht nur die definitive Achse a des Erdellipsoides, sondern auch die absolute Lage der Netze und damit die geodätische Verbindung der Kontinentalnetze über die Ozeane hinweg mit einer durch kein anderes Verfahren erreichbaren Genauigkeit.

9. Nach der Bestimmung der Achse a liefert das Formelsystem I zum Schluß noch die restlichen Bestimmungsstücke des ganzen Problemes, nämlich E, W_0, K/a^2 und ϱ_m.

Das hier skizzierte Verfahren unterscheidet sich von der vor zwei Jahren angegebenen Lösung[2] wesentlich in einem Punkt: damals konnte die Hypothese des Niveauellipsoides noch nicht ausgeschaltet werden, d. h. es wurde statt mit der hier empirisch

[1] K. Ledersteger: „Die Achse des Normalsphäroides der Erde", ÖZfV, Wien 1950, und: „Die Bestimmung des mittleren Erdellipsoides und der absoluten Lage der Landestriangulationen", Sonderheft 12 der ÖZfV, Wien 1951.

[2] K. Ledersteger: „Theoretischer Versuch einer exakten Lösung des gesamten Problemes der Erdfigur", Sonderheft 2 der Schweiz. ZfV, Zürich 1957.

bestimmten Größe β_4 mit der fiktiven Annahme $\delta = +105 \cdot 10^{-7}$ operiert. Die vorliegende Lösung ist somit noch von dem zweiten hypothetischen Element gereinigt. Vorstehende Betrachtungen sind eine nicht unwesentliche Fortführung und Ergänzung der in der eingangs zitierten Untersuchung entwickelten Gedanken. Der prinzipielle Aufbau hat natürlich gewisse Wiederholungen notwendig gemacht, die aber im Interesse des klaren Verständnisses gerechtfertigt sein dürften.