BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1958

MÜNCHEN 1958

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über Geflechte kongruenter Flächen[1]

Von Ernst Schwarz in Stuttgart

Mit 12 Figuren

Vorgelegt von Herrn Frank Löbell am 6. Juni 1958

Übersicht

Einleitung

H. Graf hat in einer in diesen Berichten erschienenen Arbeit [1] u. a. die allgemeinsten – gewissen Eindeutigkeits- und Differenzierbarkeitsbedingungen genügenden – Abbildungen eines ebenen Bereiches $\mathfrak{B}$ auf einen ebensolchen angegeben, bei welchen die Bilder aller Scharen von parallelen Geraden aus $\mathfrak{B}$ – Kurvensysteme genannt – jeweils aus Kurven bestehen, die durch Parallelverschiebung in einer festen Richtung auseinander hervorgehen. Es werden dort auch die allgemeinsten Geflechte – das

[1] Die vorliegende Arbeit ist eine gekürzte Fassung meiner von der Technischen Hochschule Stuttgart genehmigten Dissertation. Eine ausführliche Fassung befindet sich in der Bibliothek der Mathematischen Institute der T. H. Stuttgart.

Herrn Professor Dr. O. Baier möchte ich auch an dieser Stelle für seine wertvollen Ratschläge bei der Fertigstellung der Arbeit bestens danken.

sind die Bilder aller Geraden von $\mathfrak{B}$ – bestimmt, worin nicht nur die Kurven der einzelnen Systeme durch Parallelverschiebung in einer festen Richtung auseinander hervorgehen, sondern bei welchen alle Kurven des Geflechts kongruent und parallelgestellt sind.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Erweiterung dieser Untersuchungen auf den dreidimensionalen Raum. An Stelle der Kurvensysteme und Kurvengeflechte treten die in § 1 definierten ein- und zweiparametrigen Flächensysteme und Flächengeflechte. In § 2 werden die allgemeinsten Flächengeflechte ermittelt, bei welchen die Flächen jedes einparametrigen Flächensystems durch Parallelverschiebung in einer für alle Systeme festen Richtung auseinander hervorgehen. Die allgemeinsten Geflechte dieser Art, welche der zusätzlichen Forderung genügen, daß sie auch ein zweiparametriges Flächensystem kongruenter und parallelgestellter Flächen enthalten, werden in § 3 hergeleitet. Schließlich führt die Forderung, daß diese Geflechte aus lauter kongruenten und parallelgestellten Flächen bestehen sollen, auf bestimmte Flächentypen, die sämtlich in § 4 angegeben werden.

Die in der genannten Arbeit [1] angewandten Methoden lassen sich so ausbauen, daß sie auch zur Ermittlung der entsprechenden Flächengeflechte dienen können. Jedoch ist der erforderliche mathematische Aufwand beim dreidimensionalen Problem wesentlich größer als beim zweidimensionalen, da an die Stelle der Funktionalgleichungen für Funktionen von einer Veränderlichen solche für Funktionen von zwei Veränderlichen treten, deren Lösung, obwohl sie erheblich schwieriger ist, in allen Fällen vollständig bestimmt werden konnte.

§ 1. Definition der Flächengeflechte

Alle Betrachtungen beziehen sich auf einen einfach zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{R}$ des dreidimensionalen euklidischen Raumes einschließlich der Berandung und dessen reelles, umkehrbar eindeutiges und stetiges Bild $\mathfrak{Z}$, das im folgenden noch näher präzisiert wird. Um eine kurze Ausdruckweise zu haben, werden folgende Definitionen eingeführt:

Definition 1: „Fläche" heißt das umkehrbar eindeutige und stetige Bild einer Ebene.

Unter dem Wort Ebene soll stets ein Ebenenstück verstanden werden, soweit es dem Bereich $\mathfrak{R}$ einschließlich des Randes angehört.

Definition 2: „Einparametriges Flächensystem" heißt das Bild[1] sämtlicher Ebenen des Bereiches $\mathfrak{R}$, welche zu einer festen Ebene parallel sind.

Definition 3: „Zweiparametriges Flächensystem" heißt das Bild sämtlicher Ebenen des Bereiches $\mathfrak{R}$, welche zu einer festen Geraden parallel sind.

Definition 4: „Flächengeflecht" heißt das Bild aller Ebenen des Bereiches $\mathfrak{R}$.

Für die Bereiche $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{Z}$ wird je ein räumliches rechtwinkliges (u_1, u_2, u_3)- bzw. (x_1, x_2, x_3)-Koordinatensystem eingeführt. Die zugehörigen Räume werden weiterhin kurz U- bzw. X-Raum genannt.

Die Bilder der Ebenen $u_i = \text{const.}$ $(i = 1, 2, 3)$ des U-Raumes werden als Parameterflächen des X-Raumes eingeführt, die folgende, leicht einzusehende Eigenschaften haben:

a) Durch jeden Punkt des Bereiches $\mathfrak{Z}$ im X-Raum geht genau je eine Parameterfläche der drei Systeme. Umgekehrt schneiden sich drei Parameterflächen, von denen jede einem anderen System angehört, höchstens in einem Punkt.

b) Irgend zwei Parameterflächen desselben Systems schneiden sich nicht.

Eine beliebige Ebene des U-Raumes läßt sich darstellen durch

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{3} u_i \cos\lambda_i = u_4\,, \quad \sum_{i=1}^{3} \cos^2\lambda_i = 1\,.$$

[1] Der Zusatz „umkehrbar eindeutig und stetig" wird weiterhin der Kürze halber weggelassen.

Für spätere Betrachtungen ist es zweckmäßiger, die Parameter λ_i durch Kugelkoordinaten ϑ, φ zu ersetzen. Gleichung (1) nimmt damit die Form an

$$u_1 \sin\vartheta \cos\varphi + u_2 \sin\vartheta \sin\varphi + u_3 \cos\vartheta = u_4. \tag{1 a}$$

§ 2. Geflechte aus einparametrigen Flächensystemen, wobei die Flächen jedes einzelnen Systems untereinander kongruent sind

Gesucht ist die allgemeinste, in gewissen Bereichen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{Z}$ definierte, umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung des U-Raumes auf den X-Raum, wobei alle gleichgestellten Ebenen des U-Raumes übergehen in kongruente Flächen des X-Raumes, welche durch Parallelverschiebung in einer festen Richtung x_1 auseinander hervorgehen. Für die Rechnung werde im X-Raum ein Zylinderstück ($\mathfrak{Z}$) herausgegriffen, dessen Mantellinien zur x_1-Achse parallel sind und das von zwei zur x_1-Achse senkrechten Ebenen begrenzt wird. Der Zylinderbereich $\mathfrak{Z}$ ist das Bild des Bereiches $\mathfrak{R}$ des U-Raumes. Der Rand von $\mathfrak{Z}$ möge aus der (x_2, x_3)-Ebene den Bereich $\mathfrak{B}$ ausschneiden.

Da speziell die Parameterflächen durch Parallelverschiebung in x_1-Richtung aus drei Ausgangsflächen $x_1 + f_i(x_2, x_3) = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ hervorgehen, müssen die Abbildungsgleichungen des U-Raumes auf den X-Raum die Form haben:

$$u_i = F_i(x_1 + f_i(x_2, x_3)), \quad (i = 1, 2, 3). \tag{2}$$

Die Funktionen f_i und F_i $(i = 1, 2, 3)$ sollen folgende Voraussetzungen erfüllen:

I. Die Funktionen $f_i(x_2, x_3)$ seien im endlichen Bereich $\mathfrak{B}$ der (x_2, x_3)-Ebene reell, eindeutig, endlich und nach jedem Argument zweimal differenzierbar.

II. Die Funktionen $\psi_1(x_2, x_3) \equiv f_1(x_2, x_3) - f_2(x_2, x_3)$ und $\psi_2(x_2, x_3) \equiv f_2(x_2, x_3) - f_3(x_2, x_3)$ sollen im Bereich $\mathfrak{B}$ genau eine gemeinsame Nullstelle besitzen, d. h. es soll genau ein

Wertepaar (y_2, y_3) existieren, für welches $\psi_1(y_2, y_3) = \psi_2(y_2, y_3) = 0$ ist. Ferner sollen die beiden Funktionen $\bar{\psi}_1$ und $\bar{\psi}_2$, welche sich aus ψ_1, ψ_2 durch Auflösen nach den beiden Argumenten x_2, x_3 ergeben, im Definitionsbereich eindeutig sein.

Um die Voraussetzungen für die Funktionen F_i zu präzisieren, werde zur Abkürzung

$$(3) \qquad \mu_i = x_1 + f_i(x_2, x_3), \quad (i = 1, 2, 3)$$

gesetzt. Dann soll gelten:

III. Die Funktionen $F_i(\mu_i)$ sollen für den entsprechenden μ_i-Bereich reell, eindeutig, endlich und zweimal differenzierbar sein.

IV. Die zu $u_i = F_i(\mu_i)$ inversen Funktionen sollen in ihrem Definitionsbereich eindeutig sein.

Es ist zu fordern, daß nicht nur die zu den Koordinatenebenen parallelen Ebenen, sondern daß jedes beliebige Parallelebenenbüschel in je ein einparametriges System von Flächen übergeht, welche durch Parallelverschiebung längs der x_1-Achse auseinander hervorgehen. Speziell für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ mit $\cos\lambda = +\frac{1}{3}\sqrt{3}$, u_4 beliebig, ergibt (1) das Parallelebenenbüschel $u_1 + u_2 + u_3 = \sqrt{3}\, u_4$. Das zugehörige Flächensystem muß dann notwendig die Gleichung

$$(4) \qquad u_4 = F^*(x_1 + f_4(x_2, x_3))$$

haben. Aus den Gleichungen (2) und (4) folgt aber mit $\sqrt{3}\, F^* \equiv F_4$, daß die *Funktionalgleichung*

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{3} F_i(x_1 + f_i(x_2, x_3)) \equiv F_4(x_1 + f_4(x_2, x_3))$$

notwendig im ganzen Bereich $\mathfrak{Z}$ identisch für jedes Tripel (x_1, x_2, x_3) erfüllt sein muß. Nach leichter Rechnung ergibt (5) mit Hilfe der Gleichungen (3):

$$(6) \quad \sum_{i=1}^{3} F_i(\mu_i) \equiv F_4\left[\frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{3} \mu_i + \chi(\mu_1 - \mu_2,\ \mu_2 - \mu_3)\right)\right],$$

wobei χ eine bis auf die Voraussetzung I willkürliche Funktion ihrer beiden Argumente ist.

Bildet man die ersten und zweiten Ableitungen der Identität (6) nach den μ_i $(i = 1, 2, 3)$ und setzt für $\mu_1 - \mu_2 = \mu$, $\mu_2 - \mu_3 = \nu$, so erhält man unter Beachtung zweier Integrabilitätsbedingungen die folgenden Relationen:

$$\frac{F_1''}{F_1'} \equiv \frac{F_2''}{F_2'} \equiv \frac{F_3''}{F_3'} \equiv \frac{3(\chi_{\mu\mu} - \chi_{\mu\nu})}{(1 + \chi_\mu)(1 - \chi_\mu + \chi_\nu)}. \tag{7}$$

Die Fälle $1 + \chi_\mu \equiv 0$ und $1 - \chi_\mu + \chi_\nu \equiv 0$ sind auszuschließen, weil sie auf $F_i' \equiv 0$ $(i = 1, 2, 3)$ führen und keine eineindeutige Abbildung mehr liefern.

Da die Brüche $\frac{F_i''}{F_i'}$ $(i = 1, 2, 3)$ je nur von μ_i abhängen, gilt

$$\frac{F_i''}{F_i'} = a = \text{const.}, \quad (i = 1, 2, 3). \tag{8}$$

Dabei ist a eine beliebige reelle Zahl. Jede Lösung der Funktionalgleichung (5) ist notwendig auch Lösung des Systems (8). Daß auch das Umgekehrte richtig ist, ergibt sich durch Einsetzen der Lösungen von (8) in die Funktionalgleichung (5). Somit lauten die allgemeinen Lösungen:

$$\begin{array}{ll} a \neq 0: & F_i \equiv b_i e^{a\mu_i} + c_i, \\ & \\ a = 0: & F_i \equiv b_i \mu_i + c_i, \end{array} \qquad b_i \neq 0, \quad (i = 1, 2, 3). \tag{9}$$

Man kann ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit $c_i = 0$, $b_i = 1$ $(i = 1, 2, 3)$ und im Falle $a \neq 0$ noch $a = 1$ setzen. Dies bedeutet lediglich, daß man von Parallelverschiebungen und affinen Deformationen absieht, die an der wesentlichen Geflechtseigenschaft nichts ändern.

Mit Rücksicht auf (2) und (3) ergeben sich aus den obigen Formeln die Abbildungsgleichungen des X-Raumes auf den U-Raum und damit das Bild irgendeines Parallelebenensystems (1) des U-Raumes – bei variablem u_4 und konstanten λ_i – im X-Raum:

A. Logarithmisches Geflecht:

$$\ln u_i = x_1 + f_i(x_2, x_3), \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{10}$$

$$f_4(x_2, x_3) \equiv \ln\left(\sum_{i=1}^{3} e^{f_i(x_2,x_3)} \cos\lambda_i\right).$$

B. Lineares Geflecht:

$$u_i = x_1 + f_i(x_2, x_3), \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$u_4 = (x_1 + f_4(x_2, x_3)) \sum_{i=1}^{3} \cos\lambda_i, \tag{11}$$

$$f_4(x_2, x_3) \equiv \frac{\sum_{i=1}^{3} f_i(x_2, x_3) \cos\lambda_i}{\sum_{i=1}^{3} \cos\lambda_i}.$$

Man erkennt so, daß sich für jedes zulässige Wertsystem λ_i ein einparametriges Flächensystem ergibt, welches aus kongruenten und längs der x_1-Achse parallelverschobenen Flächen besteht und nicht nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, wie dies zunächst durch die Funktionalgleichung (5) gefordert war. Weiterhin folgt, daß die Funktion F_4 der Funktionalgleichung (5) genügt. Damit ist gezeigt, daß, wenn es überhaupt Flächengeflechte der geforderten Art gibt, deren Abbildungsgleichungen notwendig die Form (10) bzw. (11) haben müssen. Umgekehrt ist durch (10) und (11) immer ein Geflecht der verlangten Art gegeben, wenn die Funktionen f_i die Voraussetzungen I und II von S. 84 erfüllen. Somit gilt

Satz 1: Wenn ein Flächengeflecht vier verschiedene einparametrige Flächensysteme enthält mit der Eigenschaft, daß jedes einzelne dieser Systeme aus kongruenten, in einer festen Richtung parallelverschobenen Flächen besteht, dann haben alle einparametrigen Flächensysteme des Geflechts die gleiche Eigenschaft. Die Flächen verschiedener einparametriger Systeme sind dabei im allgemeinen nicht kongruent.

Satz 2: Das allgemeinste Flächengeflecht des Raumes, das aus einparametrigen Flächensystemen besteht, welche jeweils lauter *kongruente Flächen enthalten, die durch Parallelverschiebung in einer festen Richtung auseinander hervorgehen, hat folgende Eigenschaften:*

Drei Flächensysteme, aus denen man das Geflecht aufbauen kann, sind bis auf die Voraussetzungen I und II von S. 84 willkürlich wählbar. In jedem einparametrigen System des Geflechts sind die äquidistanten Ebenen des U-Raumes entsprechenden Flächen entweder A. logarithmisch (10) *oder B. linear* (11) *längs der x_1-Achse verteilt.*

Die Diskussion der Abbildungsgleichungen ergibt:

A. Logarithmisches Geflecht:

Durch die Gleichungen (10) wird dem Zylinderbereich $\mathfrak{Z}$ des X-Raumes einschließlich der Berandung ein Kegelbereich $\mathfrak{K}$ im U-Raum umkehrbar eindeutig und stetig zugeordnet, ebenfalls einschließlich der Berandung, aber mit Ausnahme der Kegelspitze O_u. Der Randkegel verläuft ganz innerhalb des ersten Oktanten, wenn O_u im Ursprung des (u_1, u_2, u_3)-Koordinatensystems liegt. Die Parallelen zur x_1-Achse des X-Raumes gehen über in die Halbgeraden durch O_u. Den Ebenen durch O_u – soweit sie innerhalb $\mathfrak{K}$ liegen – entsprechen Zylinder mit Mantellinien parallel zur x_1-Achse im X-Raum. Daher gibt es in den Geflechten einparametrige Flächensysteme, deren Flächen alle zueinander kongruent sind, und solche, deren Flächen jeweils zu verschiedenen Flächen kongruent sind. Die letzteren besitzen asymptotische Zylinder, deren Erzeugende parallel zur x_1-Achse verlaufen und die die verschiedenen Flächenarten trennen. Diese Zylinder sind die Bilder der durch den Ursprung gehenden Ebenen des U-Raumes.

B. Lineares Geflecht:

Durch die Gleichungen (11) wird dem Zylinderbereich $\mathfrak{Z}$ des X-Raumes einschließlich der Berandung ein zweiter Zylinderbereich $\bar{\mathfrak{Z}}$ des U-Raumes einschließlich der Berandung umkehrbar eindeutig und stetig zugeordnet. Die Mantellinien des Randzylinders von $\bar{\mathfrak{Z}}$ verlaufen parallel zur Geraden $u_1 = u_2 = u_3$. Den zu dieser Geraden parallelen Ebenen des U-Raumes entsprechen im X-Raum Zylinderflächen mit Mantellinien parallel zur x_1-Achse. Sie gehören jedoch nicht zu den kongruenten und parallelgestellten Flächen des Geflechts, da die Voraussetzungen I und II von S. 84 nicht alle erfüllt sind. Die linearen Geflechte enthalten nur solche einparametrigen Flächensysteme, deren sämtliche Flächen untereinander kongruent sind. Es gibt in jedem linearen Geflecht ∞^1 einparametrige Systeme, welche aus Zylindern bestehen, deren Erzeugende parallel zur x_1-Achse sind.

Ersetzt man die kartesischen Koordinaten (x_1, x_2, x_3) durch Zylinderkoordinaten in der folgenden Weise

$$\text{a)}\ (\varphi, r, z), \qquad \text{b)}\ (\varphi, r, z + k\varphi),$$

wobei k eine reelle Konstante ist, so ergeben sich die allgemeinsten Flächengeflechte, bei welchen die Flächen der einzelnen einparametrigen Systeme durch

a) Drehung um eine feste Achse,

b) Schraubung längs einer festen Achse

ineinander übergeführt werden. Alle obigen Betrachtungen und Ergebnisse lassen sich sinngemäß auf diese Fälle übertragen.

§ 3. Geflechte, welche zweiparametrige Systeme kongruenter Flächen enthalten

Um diejenigen Geflechte (10), (11) zu ermitteln, welche mindestens ein zweiparametriges System kongruenter und parallelgestellter Flächen enthalten, werde bei der Abbildung des U-Raumes auf den X-Raum[1] die zweiparametrige spezielle Ebenenmannigfaltigkeit

$$u \cos \varphi + v \sin \varphi = u_4 \tag{12}$$

zugrunde gelegt, welche sich aus (1) für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ergibt. In dieser

[1] Im folgenden werden die Koordinaten des U- bzw. X-Raums mit (u, v, w) bzw. (x, y, z) bezeichnet, da die Indizes-Schreibweise keinen Vorteil mehr bringt.

Annahme liegt keine Einschränkung der Allgemeinheit, da man die Gleichung eines zweiparametrigen beliebigen Ebenensystems, d. h. aller zu einer beliebigen Geraden des U-Raumes parallelen Ebenen, durch Koordinatentransformation stets in diese Form bringen kann.

Sollen die Flächen aller Systeme φ kongruent und parallelgestellt sein, so muß sich die Funktion $f_4(y, z)$ in (10) bzw. (11) für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ in der Form

$$(13) \qquad f_4(y, z) \equiv p(\varphi) + h(y + q(\varphi), z + r(\varphi))$$

darstellen lassen. Die Verschiebungsgrößen $p(\varphi)$, $q(\varphi)$ und $r(\varphi)$ der Fläche $x + h(y, z) = 0$ in Richtung der Koordinatenachsen sollen endliche und zweimal differenzierbare Funktionen von φ sein. Speziell gilt dann für die beiden Ausgangsflächen der Parametersysteme $u =$ const. und $v =$ const.:

$$(14) \qquad x + f_i(y, z) \equiv x + p_i + h(y + q_i, z + r_i), \quad (i = 1, 2).$$

Dabei sind p_i, q_i und r_i feste reelle Zahlen, die beliebig gewählt werden können. Wegen II S. 4 dürfen q_i und r_i jedoch nicht paarweise einander gleich sein. Setzt man die Gleichungen (10) bzw. (11) unter Beachtung der Identitäten (13) und (14) in (12) ein, so ergeben sich für das logarithmische (A) und das lineare Geflecht (B) die folgenden *Funktionalgleichungen*:

$$(15) \qquad \text{A.}\ e^{p(\varphi) + h(y + q(\varphi), z + r(\varphi))} \equiv \cos\varphi \cdot e^{p_1 + h(y + q_1, z + r_1)} + \sin\varphi \cdot e^{p_2 + h(y + q_2, z + r_2)},$$

$$(16) \qquad \text{B.}\ [p(\varphi) + h(y + q(\varphi), z + r(\varphi))](\cos\varphi + \sin\varphi) \equiv [p_1 + h(y + q_1, z + r_1)]\cos\varphi + [p_2 + h(y + q_2, z + r_2)]\sin\varphi,$$

welche notwendig für jeden Wert von y, z und φ der entsprechenden Geflechtsbereiche erfüllt sein müssen.

Differenziert man die Identitäten (15) und (16) zweimal nach φ und addiert zu den so gewonnenen Gleichungen die ursprünglichen, so ergibt sich in beiden Fällen eine ebenfalls identisch in y, z und φ zu erfüllende Beziehung der Form:

$$(17)\qquad \sum_{i=0}^{2} A_{ik}(\varphi)\, H_{ik}(y+q(\varphi),\ z+r(\varphi)) \equiv 0,\quad A_{ik} = A_{ki},$$

wenn die partiellen Ableitungen von H nach dem ersten bzw. zweiten Argument mit dem Index 1 bzw. 2 bezeichnet werden. Dabei ist im Falle A. des logarithmischen Geflechts

$$H(y, z) \equiv e^{h(y,z)}, \qquad H_{i0} \equiv H_i,\ H_{00} \equiv H$$

und im Falle B. des linearen Geflechts

$$H(y, z) \equiv h(y, z), \qquad H_{i0} \equiv h_i,\ H_{00} \equiv 1$$

zu setzen.

Soll die Identität (17) für einen bestimmten Wert $\varphi = \varphi_0$ erfüllt werden, so muß H notwendig in beiden Fällen einer linearen partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten genügen, welche im Falle A. homogen ist und im Falle B. ein konstantes Glied enthält, also ebenfalls als homogen behandelt werden kann.

Jede Funktion $H(y, z)$, welche eine der beiden Identitäten (15) bzw. (16) erfüllt, muß notwendig in beiden Fällen auch einer Identität der Form (17) genügen. Man erhält also die allgemeinste Lösung jeder der Funktionalgleichungen (15) bzw. (16), wenn es gelingt, die allgemeinste Lösung einer linearen partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten anzugeben. Dies ist bekanntlich in Form von Integralen oder von unendlichen Reihen möglich, jedoch wäre dadurch für die durchzuführenden geometrischen Betrachtungen wenig gewonnen. Hierzu ist es vielmehr nötig, die Lösung in „geschlossener Form", d. h. durch zwei willkürliche Funktionen mit bestimmtem Argument, darzustellen. Dies ist dann und nur dann möglich, wenn die Koeffizientendeterminante $|A_{ik}|$ einer linearen partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten $A_{ik} (i, k = 0, 1, 2,)$ verschwindet. An dieser Stelle kann dies jedoch nicht näher ausgeführt werden.

In den beiden vorliegenden Fällen ist $|A_{ik}| = 0$, wenn alle A_{ik} – mit Ausnahme von A_{00} im Falle B. – sich in der Form $A_{ik} = k(\varphi)\, a_{ik}$ darstellen lassen, wo die a_{ik} nicht mehr von φ abhängen. Durch geometrische Überlegungen läßt sich zeigen, daß die A_{ik} notwendig von dieser Gestalt sein müssen, wenn man Geflechte der verlangten Art erhalten will.

Die allgemeinsten Lösungen der partiellen Differentialgleichungen lauten in den Fällen A. und B., je nach dem Wert der Adjunkte $\alpha_{11} = A_{22}A_{00} - A_{20}^2$ der Koeffizientendeterminante:

A. Logarithmisches Geflecht:

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\; H = e^{m_1 z}\, n_1(y+bz)\cdot \cos\,[m_2 z + n_2(y+bz)], && \alpha_{11} > 0,\\
&\text{b)}\; H = e^{m_1 z}\, n_1(y+bz)\cdot \operatorname{Cof}\,[m_2 z + n_2(y+bz)], && \alpha_{11} < 0,\\
&\phantom{\text{b)}}\; H = e^{m_1 z}\, n_1(y+bz)\cdot \operatorname{Sin}\,[m_2 z + n_2(y+bz)], && \alpha_{11} < 0,\\
&\text{c)}\; H = e^{m z}\, n_1(y+bz)\cdot [z + n_2(y+bz)], && \alpha_{11} = 0.
\end{aligned}$$

B. Lineares Geflecht:

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\; \pm h = e^{m_1 z}\, n_1(y+bz) + n_2(y+bz) + m_2 z && \alpha_{11} < 0,\\
&\text{b)}\; \pm h = n_1(y+bz) + (m_1 z + m_2)\, n_2(y+bz) \\
&\qquad\qquad + (m_1 z + m_2)^2 && \alpha_{11} = 0.
\end{aligned}$$

Dabei sind b, m_1, m_2 und m reelle Konstanten, n_1 und n_2 willkürliche Funktionen einer Veränderlichen, die lediglich so beschaffen sein müssen, daß die Voraussetzungen I und II von S. 84 erfüllt sind.

Jede Funktion H, welche einer der Funktionalgleichungen (15) bzw. (16) genügt, muß notwendig die Form einer dieser Lösungen haben. Durch Einsetzen in die entsprechende Funktionalgleichung zeigt sich, daß diese erfüllt wird. Die gefundenen Lösungen sind somit die allgemeinsten.

Nach einigen Umformungen und affinen Transformationen, einschließlich eventueller Spiegelungen, läßt sich in jedem einzelnen Falle die Fläche $x + h(y, z) = \text{const.}$ in einer der folgenden Formen darstellen:

A. Logarithmisches Geflecht:

$$\begin{aligned}
&\text{a)} && x + \ln\,[n_1(y)\cos\,(z + n_2(y))] = \text{const.},\\
&\text{b)}\ \alpha) && x + \ln\,[n_1(y)\operatorname{Cof}\,(z + n_2(y))] = \text{const.},\\
&\beta),\ \gamma) && x + \ln\,[n_1(y)\operatorname{Sin}\,(\pm(z + n_2(y))] = \text{const.},\\
&\text{c)}\ \alpha)\ \beta,) && x + \ln\,[n_1(y)\,(\pm(z + n_2(y)))] = \text{const.}
\end{aligned}$$

B. Lineares Geflecht:

$$\text{a) } \alpha), \beta)\; x \pm e^z n_1(y) + n_2(y) = \text{const.},$$
$$\text{b) } \alpha), \beta)\; x + n_1(y) + z \cdot n_2(y) \pm z^2 = \text{const.}$$

Daraus ergibt sich

Satz 3: Die Flächen, welche einem zweiparametrigen Flächensystem aus lauter kongruenten und parallelgestellten Flächen angehören, sind sämtlich Schiebflächen, welche durch Verschieben der Kurven a) $x + \ln \cos z = 0$, *b)* $\alpha)$ $x + \ln \mathfrak{Cof}\; z = 0$, b) $\beta), \gamma)$ $x + \ln \mathfrak{Sin}(\pm z) = 0$, c) $\alpha), \beta)$ $x + \ln(\pm z) = 0$ *beim logarithmischen Geflecht und* a) $\alpha), \beta)$ $x \pm e^z = 0$, b) $x \pm z^2 = 0$ *beim linearen Geflecht längs einer beliebigen Raumkurve* $x = n_1(y)$, $z = n_2(y)$ *entstehen. Diese Kurven sind genau diejenigen, welche sich bei den ebenen Kurvengeflechten aus lauter kongruenten und parallelgestellten Kurven ergeben* [1].

Der Bereich, innerhalb dessen die Voraussetzungen I und II von S. 84 erfüllt sind, ist in den beiden Fällen des logarithmischen bzw. linearen Geflechts:

A. Der Bereich, welcher von den beiden Ebenen $y = y_1$, $y = y_2$ und a) von den beiden Zylindern $z + n_2(y) = \pm\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$, b), c) von dem Zylinder $z + n_2(y) = \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, begrenzt wird, wenn die Funktion $n_1(y)$ im Intervall $y_1 \leqq y \leqq y_2$ von Null verschieden ist.

B. Der gesamte euklidische Raum.

Die Verschiebungsgrößen $p(\varphi)$, $q(\varphi)$ und $r(\varphi)$ ergeben sich aus den Identitäten (15) und (16). Bei der getroffenen Wahl des Koordinatensystems im X-Raum ist die Verschiebungsgröße $q(\varphi)$ stets gleich Null. Die beiden anderen Verschiebungsgrößen lauten in den einzelnen Fällen:

$$\text{A. a) } p(\varphi) = \frac{1}{2} \ln (R_1^2 + R_2^2), \quad R_1 = e^{p_1} \cos r_1 \cos \varphi + e^{p_2} \cos r_2 \sin \varphi,$$

$$r(\varphi) = \operatorname{arcctg} \frac{R_1}{R_2}, \quad R_2 = e^{p_1} \sin r_1 \cos \varphi + e^{p_2} \sin r_2 \sin \varphi,$$

$$\text{b)}\ p(\varphi) = \frac{1}{2}\ln(R_1 \cdot R_2), \qquad R_1 = e^{p_1+r_1}\cos\varphi + e^{p_2+r_2}\sin\varphi,$$

$$r(\varphi) = \frac{1}{2}\ln\frac{R_1}{R_2}, \qquad R_2 = e^{p_1-r_1}\cos\varphi + e^{p_2-r_2}\sin\varphi,$$

$$\text{c)}\ p(\varphi) = \ln R_2, \qquad R_1 = e^{p_1} r_1 \cos\varphi + e^{p_2} r_2 \sin\varphi,$$

$$r(\varphi) = \frac{R_1}{R_2}, \qquad R_2 = e^{p_1}\cos\varphi + e^{p_2}\sin\varphi.$$

$$\text{B. a)}\ p(\varphi) = \frac{p_1\cos\varphi + p_2\sin\varphi}{\cos\varphi + \sin\varphi},$$

$$r(\varphi) = \ln\frac{e^{r_1}\cos\varphi + e^{r_2}\sin\varphi}{\cos\varphi + \sin\varphi},$$

$$\text{b)}\ p(\varphi) = \frac{(p_1 + r_1^2)\cos\varphi + (p_2 + r_2^2)\sin\varphi}{\cos\varphi + \sin\varphi} - r^2(\varphi),$$

$$r(\varphi) = \frac{r_1\cos\varphi + r_2\sin\varphi}{\cos\varphi + \sin\varphi}.$$

Aus diesen Formeln ist sofort zu erkennen, daß p und r nicht stets reell und endlich sind für alle in Betracht kommenden φ-Werte. Je nachdem, ob eine der Größen R_i ($i = 1, 2$) verschwindet – wegen der Voraussetzung II von S. 4 können nicht beide zugleich verschwinden –, beide jeweils dasselbe oder verschiedenes Vorzeichen haben, erhält man folgende Ergebnisse:

A. Logarithmisches Geflecht:

Das zweiparametrige Flächensystem besteht aus

a) einerlei Flächen vom Typus a) und ist vollkongruent (vgl. [1]),

b) den drei Flächenarten b) α), β) und γ) sowie den beiden einparametrigen Zylindersystemen $x \pm z + \ln(n_1(y)) \pm n_2(y) = \text{const.}$ und ist teilkongruent (vgl. [1]),

c) den beiden Flächenarten c) α) und β) sowie dem einparametrigen Zylindersystem $x + \ln(n_1(y)) = \text{const.}$ und ist teilkongruent.

Jeder der genannten Geflechtstypen a), b) und c) enthält außerdem noch ∞^1 Zylinder mit Gleichungen der Form $z + n_2(y) = \text{const.}$

B. Lineares Geflecht:

Das zweiparametrige Flächensystem besteht aus

a) Flächen der beiden Typen a) α) und β) sowie den beiden einparametrigen Zylindersystemen $x + n_2(y) = \text{const.}$ und $z + \ln(n_1(y)) = \text{const.}$ und ist teilkongruent,

b) einerlei Flächen vom Ty b) sowie dem einparametrigen Zylindersystem $2z + n_1(y) = \text{const.}$ und ist vollkongruent.

Für Flächengeflechte, welche mehr als ein zweiparametriges Flächensystem enthalten, gilt der

Satz 4: Enthält ein Flächengeflecht zwei oder mehr zweiparametrige Flächensysteme der betrachteten Art, so sind nicht nur die Flächen jedes einzelnen zweiparametrigen Systems, sondern die Flächen aller zweiparametrigen Systeme untereinander kongruent und parallel gestellt.

Die Existenz derartiger Flächengeflechte läßt sich leicht an Hand von Beispielen aufzeigen.

§ 4. Geflechte aus lauter kongruenten Flächen

Es sollen nunmehr die Flächengeflechte (10), (11) der einschneidendsten Forderung unterworfen werden, nämlich der, daß die Kongruenz nicht nur in der bisherigen Art für die Flächen der ein- und zweiparametrigen Systeme, sondern für alle Flächen des Geflechts bestehen soll. Dabei sollen irgend zwei Flächen des Geflechts durch Parallelverschiebung stets zur Deckung gebracht werden können oder es sollen – im Falle der Teilkongruenz – höchstens endlich viele Flächenklassen existieren, innerhalb derer dies möglich ist.

Die Betrachtungen, welche zu einer analytischen Formulierung des Problems führen, sind bereits in § 3 enthalten mit dem Unterschied, daß die Verschiebungsgrößen p, q und r jetzt von zwei Parametern ϑ und φ abhängen. Sie werden für den gesamten Geflechtsbereich als endlich und dreimal differenzierbar vorausgesetzt.

Sollen alle Flächen verschiedener einparametriger Systeme (ϑ, φ) kongruent und parallelgestellt sein, so muß die Identität

$$(18) \qquad f_4(y, z) \equiv p(\vartheta, \varphi) + k(y + q(\vartheta, \varphi), z + r(\vartheta, \varphi))$$

für alle y, z und ϑ, φ erfüllt sein, wenn die Gleichung irgendeiner der kongruenten und parallelgestellten Flächen des Geflechts die Form $x + k(y, z) = \text{const.}$ hat. Die Funktion $k(y, z)$ soll dreimal differenzierbar sein. Speziell für die drei Ausgangsflächen der Parametersysteme $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ und $w = \text{const.}$ gilt dann

$$(19) \quad x + f_i(y, z) \equiv x + p_i + k(y + q_i, z + r_i), \qquad (i = 1, 2, 3)$$

wo die p_i, q_i, r_i $(i = 1, 2, 3)$ beliebige reelle Zahlen sind. Wegen II S. 84 dürfen jedoch nicht alle q_i bzw. alle r_i einander gleich sein.

Setzt man die Gleichungen (10) bzw. (11) unter Beachtung der Identitäten (18) und (19) in die Ebenengleichung (1 a) ein, so ergeben sich für das logarithmische bzw. lineare Geflecht die beiden *Funktionalgleichungen*

$$(20) \quad \text{A.} \quad e^{p(\vartheta,\varphi) + k(y + q(\vartheta,\varphi), z + r(\vartheta,\varphi))} \equiv \\ \sin\vartheta\cos\varphi\cdot e^{p_1 + k(y + q_1, z + r_1)} + \sin\vartheta\sin\varphi\cdot e^{p_2 + k(y + q_2, z + r_2)} \\ + \cos\vartheta\cdot e^{p_3 + k(y + q_3, z + r_3)},$$

$$(21) \quad \text{B.} \quad [p(\vartheta, \varphi) + k(y + q(\vartheta, \varphi), z + r(\vartheta, \varphi))]\,(\sin\vartheta\cos\varphi + \\ + \sin\vartheta\sin\varphi + \cos\vartheta) \\ \equiv [p_1 + k(y + q_1, z + r_1)]\sin\vartheta\cos\varphi + \\ + [p_2 + k(y + q_2, z + r_2)]\sin\vartheta\sin\varphi + \\ + [p_3 + k(y + q_3, z + r_3)]\cos\vartheta,$$

welche notwendig für alle Wertsysteme (y, z) und (ϑ, φ) der zugehörigen Geflechtsbereiche erfüllt sein müssen.

Die Lösung der Funktionalgleichungen (20) bzw. (21) erfolgt wiederum durch Zurückführung auf partielle Differentialgleichungen. Addiert man die Identitäten (20) bzw. (21) zu den sich durch zweimalige Differentiation nach ϑ ergebenden, desgleichen die einmal nach φ differenzierten Identitäten (20) bzw. (21) zu denjenigen, die durch dreimalige Differentiation nach φ daraus hervorgehen, so erhält man in beiden Fällen je zwei ebenfalls identisch in y, z und ϑ, φ zu erfüllende Gleichungen der Form:

$$(22)\qquad \sum_{i,j=0}^{2} B_{ij}(\vartheta, \varphi)\, K_{ij}(y + q(\vartheta, \varphi), z + r(\vartheta, \varphi)) \equiv 0,$$

$$(23)\qquad \sum_{i,j,l=0}^{2} C_{ijl}(\vartheta, \varphi)\, K_{ijl}(y + q(\vartheta, \varphi), z + r(\vartheta, \varphi)) \equiv 0,$$

wo die partiellen Ableitungen nach dem ersten bzw. zweiten Argument von K wieder mit dem Index 1 bzw. 2 bezeichnet sind. Dabei ist im Falle A. des logarithmischen Geflechts $K(y, z) \equiv e^{k(y,z)}$ und im Falle B. des linearen Geflechts $K(y, z) \equiv k(y, z)$, $K_{000} \equiv 1$ zu setzen. Ist ein Index gleich Null, so ist er einfach wegzulassen (vgl. S. 91). Die Koeffizienten B_{ij} und C_{ijl} sind symmetrisch, d. h. sie ändern sich nicht, wenn man die Indizes irgendwie permutiert.

Wenn die Identitäten (22) und (23) für ein beliebiges festes Wertepaar (ϑ_0, φ_0) erfüllt sein sollen, dann muß $K(y, z)$ notwendig eine gemeinsame Lösung einer homogenen linearen partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und einer solchen von der dritten Ordnung sein. Zur Ermittlung der allgemeinsten Lösungen kann man jedoch nicht den in § 3 beschrittenen Weg einschlagen, da jetzt die Koeffizientendeterminante der jeweiligen partiellen Differentialgleichung nicht verschwindet. Man kann aber ausgehen von dem Ansatz

$$(24)\qquad K(y, z) = e^{\beta y + \gamma z},$$

wobei β, γ zunächst noch beliebige Parameter sind, die jetzt auch komplex sein können. Durch Einsetzen in (22) bzw. (23) ergibt sich eine binäre quadratische und eine binäre kubische Form mit den Variablen β, γ. Es kommen nur solche Wertepaare (β, γ) in Betracht, welche beiden Formen gemeinsam genügen. Die allgemeinste Lösung kann wegen der Linearität der Gleichungen (22) und (23) nur eine Linearkombination von höchstens sechs Funktionen der Form (24) sein. Eventuell können noch Polynome als Faktoren bei den Exponentialfunktionen oder als Summanden hinzutreten, dann muß jedoch die Anzahl der Summanden kleiner sein als sechs. Es zeigt sich jedoch, daß die Lösungen noch weiter eingeschränkt werden müssen, wenn sie auch den Funktionalgleichungen (20) bzw. (21) genügen sollen. Die allgemeinsten derartigen Lösungen können höchstens drei Exponentialfunktionen als Summanden enthalten. Treten weniger als drei Exponentialfunktionen auf, so enthält die Lösung noch lineare bzw. quadratische Funktionen in (y, z).

In den einzelnen Fällen ergeben sich unter Einführung passend gewählter Koordinatensysteme die folgenden Flächentypen, aus denen man Geflechte der verlangten Art aufbauen kann:

A. Logarithmisches Geflecht:

a) 1), 2)	$x + \ln(\cos y \pm e^z) = \text{const.},$	(Fig. 1, 2),
b) 1), 2)	$x + \ln(\mathfrak{Cof}\, y \pm e^z) = \text{const.},$	(Fig. 3, 4),
3)	$x + \ln(e^z - \mathfrak{Cof}\, y) = \text{const.},$	(Fig. 4),
4), 5)	$x + \ln(\mathfrak{Sin}\, y \pm e^z) = \text{const.},$	(Fig. 5),
6), 7)	$x + \ln(\pm e^z - \mathfrak{Sin}\, y) = \text{const.},$	(Fig. 6),
c) 1), 2)	$x + \ln(y \pm e^z) = \text{const.},$	(Fig. 7),
3), 4)	$x + \ln(\pm e^z - y) = \text{const.},$	(Fig. 8).

B. Lineares Geflecht:

a)	$x + \cos y \cdot e^z = \text{const.},$	(Fig. 9),
b) 1)	$x + \mathfrak{Cof}\, y \cdot e^z = \text{const.},$	(Fig. 10),
2), 3)	$x \pm \mathfrak{Sin}\, y \cdot e^z = \text{const.},$	(Fig. 11),
c) 1), 2)	$x \pm y \cdot e^z = \text{const.},$	(Fig. 12),
d) 1), 2)	$x + y^2 \pm z^2 = \text{const.}$	

Man erhält sehr rasch ein anschauliches Bild vom Verlauf der durch diese Funktionen dargestellten Flächen, wenn man ihr asymptotisches Verhalten untersucht. Die Figuren 1 bis 12 geben die ungefähre Gestalt dieser Flächen wieder. Dabei sind nur diejenigen Flächen berücksichtigt, welche nicht durch Spiegelungen oder Drehungen ineinander überführbar sind. Ferner ist von der Darstellung des elliptischen und hyperbolischen Paraboloids abgesehen worden.

Der Bereich, innerhalb dessen die Voraussetzungen I und II von S. 84 erfüllt sind, ist in allen Fällen der gesamte euklidische Raum, lediglich mit Ausnahme von A. a) 1) und 2), wo er von zwei zur y-Achse senkrechten, voneinander um eine Strecke $< \pi$ abstehenden Ebenen begrenzt wird.

Die Verschiebungsgrößen $p(\vartheta, \varphi)$, $q(\vartheta, \varphi)$ und $r(\vartheta, \varphi)$ ergeben sich jeweils mit Hilfe der entsprechenden Funktionalgleichung. Sie lauten in den einzelnen Fällen:

A. Logarithmisches Geflecht:

a) $$p = \frac{1}{2} \ln (R_1^2 + R_2^2), \qquad R_1 = \sum_{i=1}^{3} A_i \cos q_i,$$

$$q = \operatorname{arcctg} \frac{R_1}{R_2}, \qquad R_2 = \sum_{i=1}^{3} A_i \sin q_i,$$

$$r = \frac{1}{2} \ln \frac{R_3^2}{R_1^2 + R_2^2}, \qquad R_3 = \sum_{i=1}^{3} A_i e^{r_i},$$

b) $$p = \frac{1}{2} \ln (R_1 R_2), \qquad R_1 = \sum_{i=1}^{3} A_i e^{q_i},$$

$$q = \frac{1}{2} \ln \frac{R_1}{R_2}, \qquad R_2 = \sum_{i=1}^{3} A_i e^{-q_i},$$

$$r = \frac{1}{2} \ln \frac{R_3^2}{R_1 R_2}, \qquad R_3 = \sum_{i=1}^{3} A_i e^{r_i},$$

c) $$p = \ln R_2, \qquad R_1 = \sum_{i=1}^{3} A_i q_i,$$

$$q = \frac{R_1}{R_2}, \qquad R_2 = \sum_{i=1}^{3} A_i,$$

$$r = \ln \frac{R_3}{R_2}, \qquad R_3 = \sum_{i=1}^{3} A_i e^{r_i}.$$

Dabei haben die Größen A_i in allen Fällen folgende Bedeutung:

$$A_1 = e^{p_1} \sin\vartheta \cos\varphi, \quad A_2 = e^{p_2} \sin\vartheta \sin\varphi, \quad A_3 = e^{p_3} \cos\vartheta.$$

B. Lineares Geflecht:

a) $$p = \frac{R_3}{A}, \qquad R_1 = \sum_{i=1}^{3} \bar{A}_i e^{r_i} \cos q_i,$$

$$q = \operatorname{arctg} \frac{R_2}{R_1} \qquad R_2 = \sum_{i=1}^{3} \bar{A}_i e^{r_i} \sin q_i,$$

$$r = \frac{1}{2} \ln \frac{R_1^2 + R_2^2}{A^2} \qquad R_3 = \sum_{i=1}^{3} \bar{A}_i p_i,$$

b) $$p = \frac{R_3}{A}, \qquad R_1 = \sum_{i=1}^{3} \bar{A}_i e^{r_i} \operatorname{Cos} q_i,$$

$$q = \operatorname{ArTg} \frac{R_2}{R_1}, \qquad R_2 = \sum_{i=1}^{3} \bar{A}_i e^{r_i} \operatorname{Sin} q$$

$$r = \frac{1}{2} \ln \frac{R_1^2 - R_2^2}{A^2}, \qquad R_3 = \sum_{i=1}^{3} \bar{A}_i p_i,$$

c) $$p = \frac{R_3}{A} \qquad R_1 = \sum_{i=1}^{3} \bar{A}_i e^{r_i},$$

$$q = \frac{R_2}{R_1}, \qquad R_2 = \sum_{i=1}^{3} \bar{A}_i q_i e^{r_i},$$

$$r = \ln \frac{R_1}{A}, \qquad R_3 = \sum_{i=1}^{3} \bar{A}_i p_i,$$

d) $$p = \frac{R_3}{A} - q^2 \mp r^2, \qquad R_1 = \sum_{i=1}^{3} \bar{A}_i q_i,$$

$$q = \frac{R_1}{A}, \qquad R_2 = \sum_{i=1}^{3} \bar{A}_i r_i,$$

$$r = \frac{R_2}{A}, \qquad R_3 = \sum_{i=1}^{3} \bar{A}_i (p_i + q_i^2 \pm r_i^2),$$

wobei jeweils das obere Vorzeichen für den Unterfall d) 1), das untere für den Unterfall d) 2) gilt.

Die Größen A und $\bar{A}_i$ haben in allen Fällen folgende Bedeutung:

$$A = \sum_{i=1}^{3} \bar{A}_i, \quad \bar{A}_1 = \sin\vartheta\cos\varphi, \quad \bar{A}_2 = \sin\vartheta\sin\varphi, \quad \bar{A}_3 = \cos\vartheta.$$

Die weitere Untersuchung der Verschiebungsgrößen führt zu folgenden Ergebnissen:

A. Logarithmisches Geflecht:

a) Das Geflecht ist teilkongruent und enthält die zwei Flächentypen a) 1) und a) 2), das zweiparametrige vollkongruente Zylindersystem $x + \ln\cos y = \text{const.}$ und die ∞^2 Zylinder $z - \ln(\pm\cos y) = \text{const.}$, ferner das einparametrige Parallelebenensystem $x + z = \text{const.}$ und die ∞^1 Ebenen $y = \text{const.}$

b) Das Geflecht ist teilkongruent und enthält die sieben verschiedenen Flächentypen b) 1) bis b) 7) sowie drei zweiparametrige teilkongruente Zylindersysteme, die aus je dreierlei Zylindertypen bestehen:

$$\begin{array}{lll}
\alpha)\ 1),\ 2) & x + \ln(e^{-y} \pm e^{z}) & = \text{const.}, \\
\quad\ 3) & x + \ln(-e^{-y} + e^{z}) & = \text{const.}, \\
\beta)\ 1),\ 2) & x + \ln(e^{y} \pm e^{z}) & = \text{const.}, \\
\quad\ 3) & x + \ln(-e^{y} + e^{z}) & = \text{const.}, \\
\gamma)\ 1) & x + \ln \mathfrak{Cof}\, y & = \text{const.}, \\
\quad\ 2),\ 3) & x + \ln \mathfrak{Sin}\,(\pm y) & = \text{const.}
\end{array}$$

Ferner enthält das Geflecht die ∞^2 Zylinder $z - \ln \mathfrak{Cof}\, y = \text{const.}$ und $z - \ln \mathfrak{Sin}\,(\pm y) = \text{const.}$ Schließlich gehören dem Geflecht noch die drei einparametrigen Parallelebenensysteme $x + z = \text{const.}$, $x \pm y = \text{const.}$ und die drei Parallelebenenbüschel $y \pm z = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ an.

c) Das Geflecht ist teilkongruent und enthält die vier verschiedenen Flächentypen c) 1) bis c) 4) sowie zwei zweiparametrige teilkongruente Zylindersysteme, von denen das eine aus zwei, das andere aus drei verschiedenen Zylindertypen besteht:

$$\begin{array}{lll} \alpha)\ 1),\ 2) & x + \ln(1 \pm e^z) & = \text{const.,} \\ 2) & x + \ln(e^z - 1) & = \text{const.,} \\ \beta)\ 1),\ 2) & x + \ln(\pm y) & = \text{const.} \end{array}$$

Weiter enthält das Geflecht die ∞^2 Zylinder $z - \ln(\pm y) = \text{const.}$, die beiden einparametrigen Parallelebenensysteme $x + z = \text{const.}$ und $x = \text{const.}$ sowie die beiden Parallelebenenbüschel $y = \text{const.}$ und $z = \text{const.}$

B. Lineares Geflecht:

a) Das Geflecht besteht aus Flächen des Typs a). Die ∞^3 Flächen des Geflechts sind sämtlich untereinander kongruent und innerhalb zweier Teilbereiche zueinander parallelgestellt. Das Geflecht soll daher „bikongruent" heißen. Daneben enthält das Geflecht das zweiparametrige vollkongruente Zylindersystem $z + \ln\cos y = \text{const.}$ und das einparametrige Ebenensystem $x = \text{const.}$

b) Das Geflecht ist teilkongruent und enthält dreierlei Flächentypen. Die ∞^3 Flächen der Typen b) 2) und b) 3) sind untereinander kongruent und parallelgestellt. Die ∞^3 Flächen des Typs b) 1) sind sämtlich untereinander kongruent und innerhalb zweier Teilbereiche je zueinander parallelgestellt. Daneben enthält das Geflecht die beiden aus je zwei Flächentypen bestehenden zweiparametrigen teilkongruenten Zylindersysteme $x \pm e^{y+z} = \text{const.}$ und $x \pm e^{-y+z} = \text{const.}$, das zweiparametrige teilkongruente Zylindersystem $x + \ln \mathfrak{Cof}\, y = \text{const.}$ und $x + \ln \mathfrak{Sin}\, y = \text{const.}$, sowie das einparametrige Parallelebenensystem $x = \text{const.}$

c) Das Geflecht ist teilkongruent und enthält die beiden Flächentypen c) 1) und c) 2).

Daneben enthält das Geflecht das zweiparametrige teilkongruente Zylindersystem $x \pm e^z = \text{const.}$ und das zweiparametrige vollkongruente Zylindersystem $z + \ln y = \text{const.}$ sowie die beiden einparametrigen Parallelebenensysteme $x = \text{const.}$ und $z = \text{const.}$

d) Das Geflecht ist vollkongruent und enthält einerlei Flächen, entweder vom Typ d) 1) oder vom Typ d) 2).

Daneben enthält das Geflecht nur noch das zweiparametrige Ebenensystem $R_1 y \pm R_2 z = \text{const.}$

Die nicht entarteten ∞^3 Flächen einerlei Art sind in allen Fällen des logarithmischen und des linearen Geflechts untereinander kongruent und parallelgestellt, soweit nichts anderes bemerkt wurde.

Literatur:

[1] Graf, H.: Über Geflechte kongruenter oder ähnlicher Kurven. Sitz.-Ber. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Jahrg. 1928, S. 205–246.

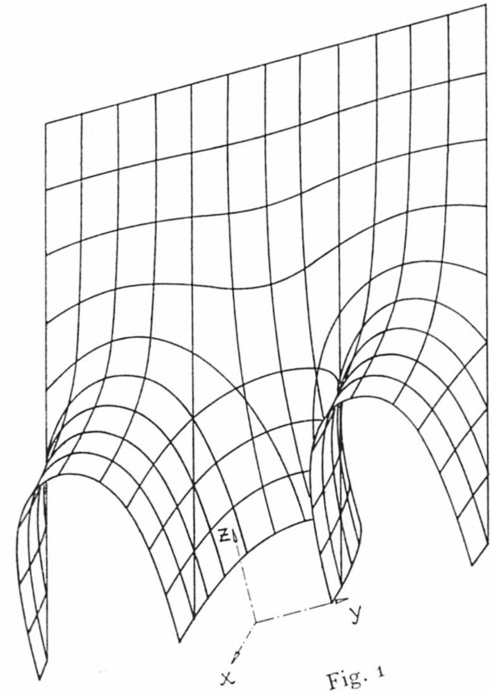

Fig. 1

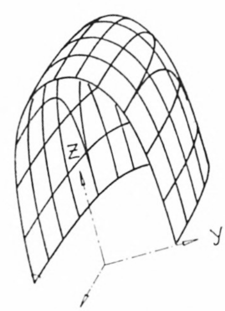

Fig. 2

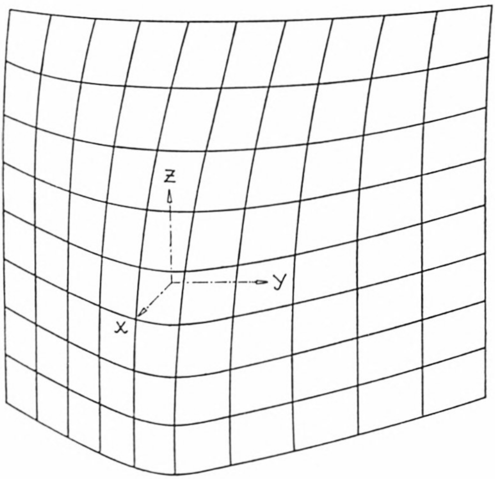

Fig. 3

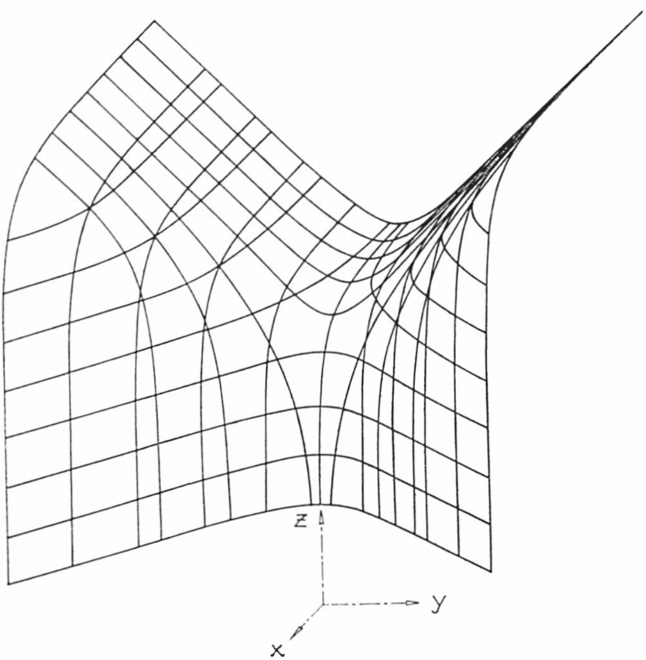

Fig. 4

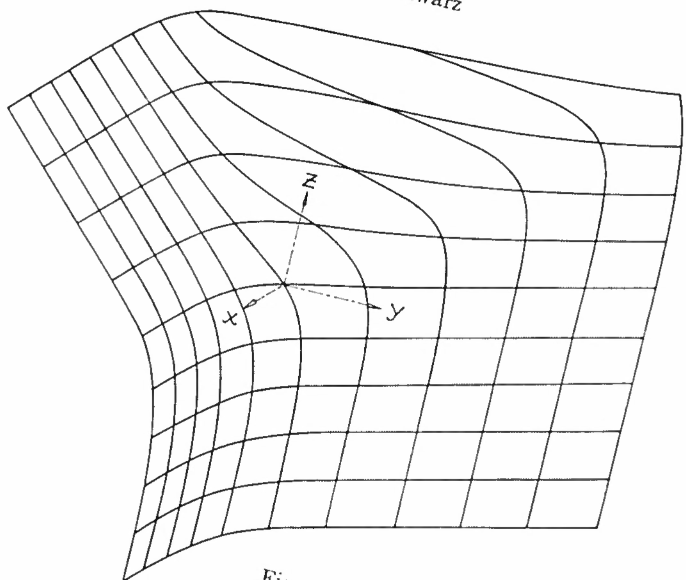

Fig. 5

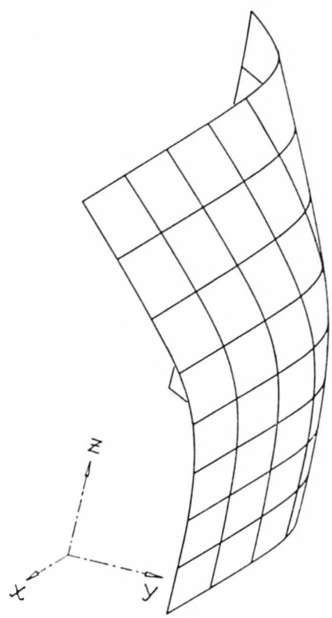

Fig. 6

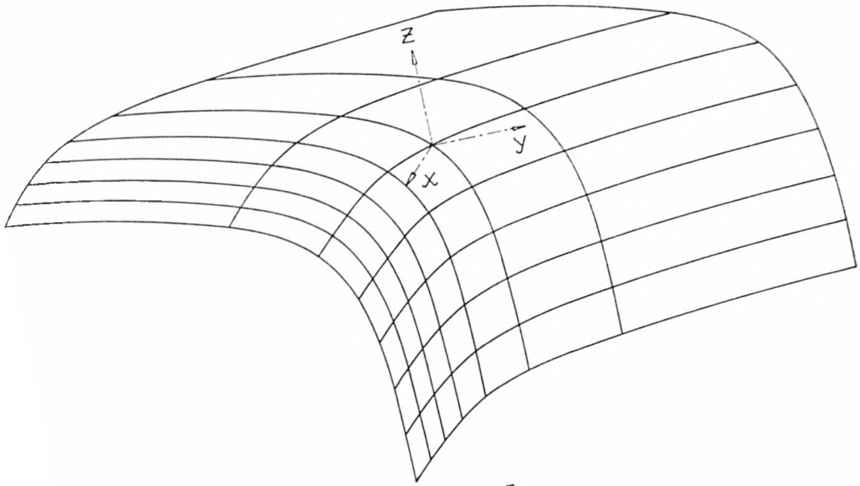

Fig. 7

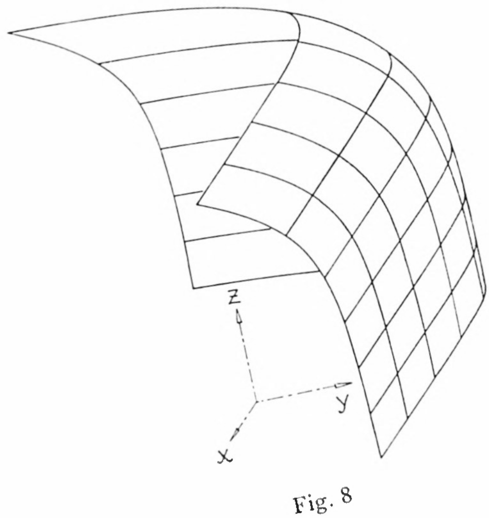

Fig. 8

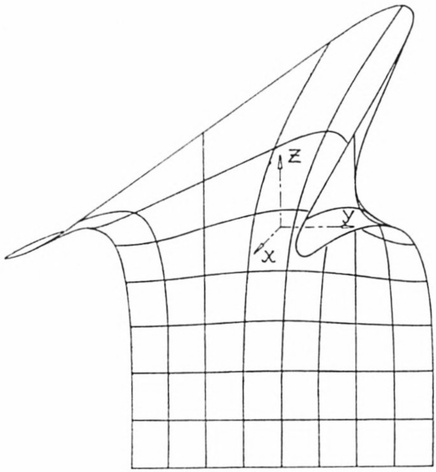

Fig. 9

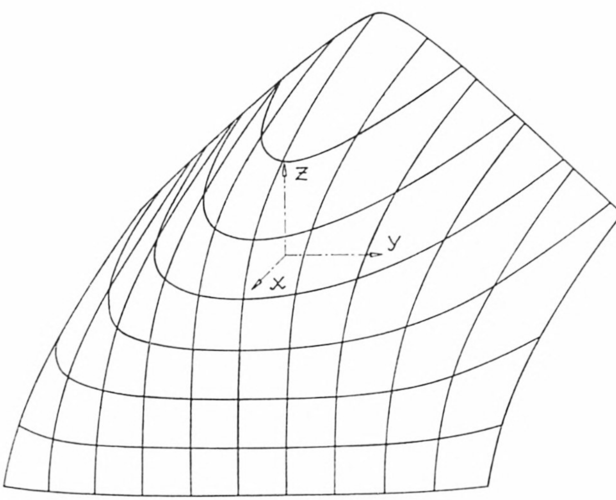

Fig. 10

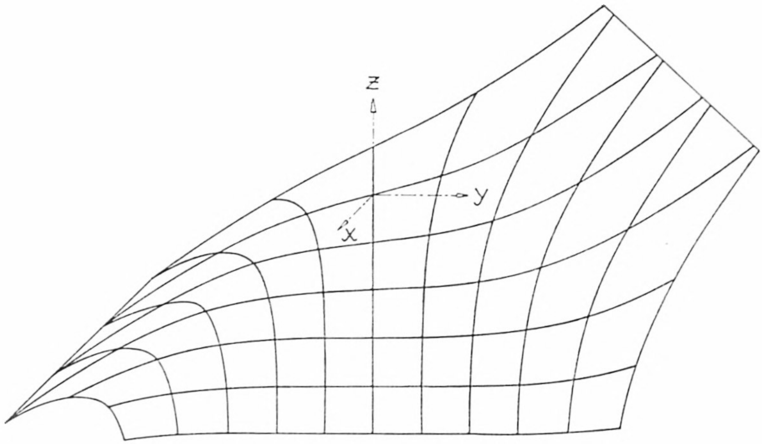

Fig. 11

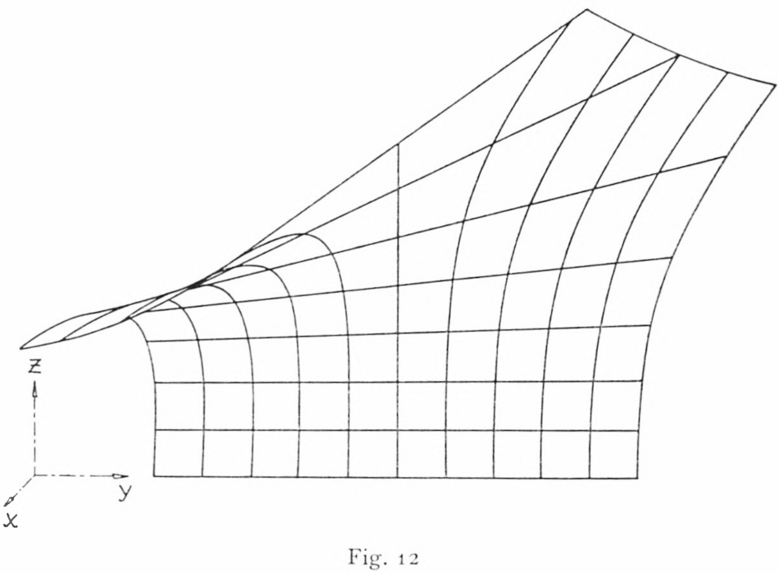

Fig. 12