

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN  
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

---

# SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1958

MÜNCHEN 1958

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

## Über einen Kettenbruch von *Ramanujan*

Von Oskar Perron in München

Vorgelegt am 9. Mai 1958

§ 1. Unter den vielen merkwürdigen Formeln, mit denen sich *Ramanujan* im Jahr 1913 in seinem berühmten Brief an *G. H. Hardy* bei diesem als Mathematiker eingeführt hat, finden sich auch einige über Kettenbrüche. Und die allermerkwürdigsten von diesen beziehen sich auf den Kettenbruch<sup>1</sup>

$$(1) \quad 1 + \frac{q}{1} + \frac{q^2}{1} + \frac{q^3}{1} + \dots$$

Dabei fehlt jede Andeutung eines Beweises. Man erfährt nur, daß der Briefschreiber noch viel mehr weiß, als er verrät; er fährt nämlich fort, das sei nur ein Spezialfall eines Theorems über den Kettenbruch

$$(2) \quad 1 + \frac{qx}{1} + \frac{q^2x}{1} + \frac{q^3x}{1} + \dots,$$

welches seinerseits wieder ein Spezialfall eines allgemeinen Theorems über den Kettenbruch

$$(3) \quad 1 + b + \frac{qx}{1+qb} + \frac{q^2x}{1+q^2b} + \frac{q^3x}{1+q^3b} + \dots$$

sei. Darin darf man immerhin einen Fingerzeig erblicken, daß es zur Erforschung des Geheimnisses der Ramanujanschen Formeln vielleicht geraten ist, statt mit dem speziellen Kettenbruch (1) sich lieber mit dem allgemeineren (2) oder (3) zu beschäftigen. In der Tat hat Herr WATSON den Kettenbruch (2) als Funktion

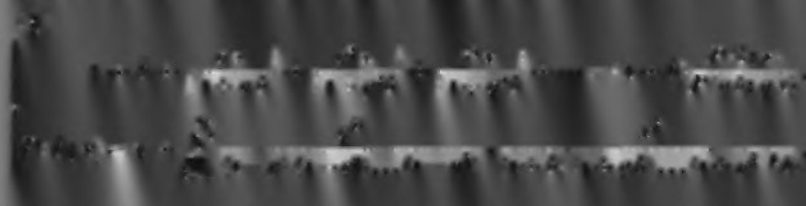
<sup>1</sup> Collected Papers of Srinivasa Ramanujan, Cambridge 1927, Seite XXVII, XXVIII.

the  $\alpha$ -component, and is independent of the direction of the  $\alpha$ -component. The following theorem is proved.



It is shown that the Green's function of the  $\alpha$ -component is independent of the direction of the  $\alpha$ -component. It is also shown that the  $\alpha$ -component is independent of the direction of the  $\alpha$ -component. It is also shown that the  $\alpha$ -component is independent of the direction of the  $\alpha$ -component. It is also shown that the  $\alpha$ -component is independent of the direction of the  $\alpha$ -component.

It is shown that the Green's function of the  $\alpha$ -component is independent of the direction of the  $\alpha$ -component. It is also shown that the  $\alpha$ -component is independent of the direction of the  $\alpha$ -component. It is also shown that the  $\alpha$ -component is independent of the direction of the  $\alpha$ -component. It is also shown that the  $\alpha$ -component is independent of the direction of the  $\alpha$ -component.



It is shown that the Green's function of the  $\alpha$ -component is independent of the direction of the  $\alpha$ -component. It is also shown that the  $\alpha$ -component is independent of the direction of the  $\alpha$ -component. It is also shown that the  $\alpha$ -component is independent of the direction of the  $\alpha$ -component. It is also shown that the  $\alpha$ -component is independent of the direction of the  $\alpha$ -component.

§ 3. Zum Beweis soll zunächst formal gerechnet werden, ohne Rücksicht auf Konvergenz oder Divergenz. Man bestätigt leicht die formale Identität

$$(6) \quad P(b; x) - P(qb; qx) = \frac{qx}{(1+b)(1+qb)} \cdot P(q^2b; q^2x),$$

und indem man  $b, x$  durch  $q^v b, q^v x$  ersetzt,

$$(7) \quad \begin{aligned} & P(q^v b; q^v x) - P(q^{v+1} b; q^{v+1} x) \\ &= \frac{q^{v+1} x}{(1+q^v b)(1+q^{v+1} x)} \cdot P(q^{v+2} b; q^{v+2} x). \end{aligned}$$

Hieraus folgt, wenn man durch  $P(q^{v+1} b; q^{v+1} x)$  dividiert und

$$(8) \quad \frac{P(q^v b; q^v x)}{P(q^{v+1} b; q^{v+1} x)} = \mathfrak{P}_v(x)$$

setzt, sofort die formale Identität

$$(9) \quad \mathfrak{P}_v(x) = 1 + \frac{\frac{q^{v+1} x}{(1+q^v b)(1+q^{v+1} b)}}{\mathfrak{P}_{v+1}(x)}$$

und daraus nach Satz 3.5 auf Seite 110 meines zitierten Buches die Korrespondenzformel:  $\mathfrak{P}_0(x) =$

$$(10) \quad \begin{aligned} & \frac{P(b; x)}{P(qb; qx)} \sim 1 + \left| \frac{\frac{qx}{(1+b)(1+qb)}}{1} \right| + \\ & + \left| \frac{\frac{q^2 x}{(1+qb)(1+q^2 b)}}{1} \right| + \left| \frac{\frac{q^3 x}{(1+q^2 b)(1+q^3 b)}}{1} \right| + \dots \end{aligned}$$

§ 4. Nun kommen wir zur Konvergenz. Wenn  $|q| < 1$  und wenn  $b$  nicht gerade einer der Zahlen  $-q^{-v}$  ( $v = 0, 1, 2, \dots$ ) gleich ist, so erfüllt der Kettenbruch (10) die Voraussetzung von Satz 3.28 auf Seite 149 meines Buches; er stellt also eine meromorphe Funktion von  $x$  dar, wobei in den Polen unwesentliche

Übergang stattfindet, und in der Forderung des Nullausdrucks ist zugleich die Voraussetzung enthalten, nämlich, dass  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  die Gleichung  $\beta^3 - 3\beta - 2 = 0$  befriedigen. Die in  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  und  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  angegebenen Werte sind die einzigen, welche die Forderung  $\beta^3 - 3\beta - 2 = 0$  befriedigen. Wenn man also  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  durch  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  und  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  durch  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  in der Forderung des Nullausdrucks in dem gegebenen Binomialsystem  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  ersetzt, so wird grade der Nullausdruck  $\beta^3 - 3\beta - 2$ , der durch die  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  und  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$   $\beta = \beta_1, \beta_2, \beta_3$  befriedigt ist.

Wenn  $\beta = \beta_1, \beta_2, \beta_3$  ist, so ist die Stelle  $\beta$  in  $\beta$  durch  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  gegeben, und die Stelle  $\alpha$  in  $\alpha$  durch  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  gegeben. Wenn man also  $\beta$  durch  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  und  $\alpha$  durch  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  in dem gegebenen Binomialsystem  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  ersetzt, so wird grade der Nullausdruck  $\beta^3 - 3\beta - 2$ , der durch die  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  und  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  befriedigt ist, durch die  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  und  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  befriedigt.

$$\begin{aligned} \beta^3 - 3\beta - 2 &= \frac{\beta^3 - 3\beta - 2}{\beta^3 - 3\beta - 2} = \frac{\beta^3 - 3\beta - 2}{\beta^3 - 3\beta - 2} \\ &= \frac{\beta^3 - 3\beta - 2}{\beta^3 - 3\beta - 2} = \frac{\beta^3 - 3\beta - 2}{\beta^3 - 3\beta - 2} \end{aligned}$$

Wenn man also  $\beta$  durch  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  und  $\alpha$  durch  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  in dem gegebenen Binomialsystem  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  ersetzt, so wird grade der Nullausdruck  $\beta^3 - 3\beta - 2$ , der durch die  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  und  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  befriedigt ist, durch die  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  und  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  befriedigt.

$$\beta^3 - 3\beta - 2 = \frac{\beta^3 - 3\beta - 2}{\beta^3 - 3\beta - 2} = \frac{\beta^3 - 3\beta - 2}{\beta^3 - 3\beta - 2}$$

und die  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  durch  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  und  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  durch  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  ersetzt, so wird grade der Nullausdruck  $\beta^3 - 3\beta - 2$ , der durch die  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  und  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  befriedigt ist, durch die  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  und  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  befriedigt.

Es ist also  $\beta = \beta_1, \beta_2, \beta_3$  in der Forderung  $\beta^3 - 3\beta - 2 = 0$  enthalten, und die Stelle  $\alpha$  in  $\alpha$  durch  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  gegeben. Wenn man also  $\beta$  durch  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  und  $\alpha$  durch  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  in dem gegebenen Binomialsystem  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  ersetzt, so wird grade der Nullausdruck  $\beta^3 - 3\beta - 2$ , der durch die  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  und  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  befriedigt ist, durch die  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  und  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  befriedigt.

Im Dreieck  $ABC$  sei  $a$  die Länge der Seite  $BC$ ,  $b$  die Länge der Seite  $AC$ ,  $c$  die Länge der Seite  $AB$ . Die Höhe  $h$  ist die Länge der Strecke  $AD$ , die senkrecht auf  $BC$  steht. Die Fläche  $F$  des Dreiecks ist dann  $F = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$ . Die Höhe  $h$  kann durch den Sinus des Winkels  $\alpha$  bei  $A$  ausgedrückt werden:  $h = b \cdot \sin \alpha$ . Damit ergibt sich die Formel  $F = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$ . Analoges gilt für die anderen Winkel.

Wenn  $\alpha = 90^\circ$  ist, dann vereinfacht sich die Formel zu  $F = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ , was die bekannte Formel für die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks ergibt.