BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1958

MÜNCHEN 1958

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C.H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über einen Kettenbruch von *Ramanujan*

Von **Oskar Perron** in München

Vorgelegt am 9. Mai 1958

§ 1. Unter den vielen merkwürdigen Formeln, mit denen sich *Ramanujan* im Jahr 1913 in seinem berühmten Brief an *G. H. Hardy* bei diesem als Mathematiker eingeführt hat, finden sich auch einige über Kettenbrüche. Und die allermerkwürdigsten von diesen beziehen sich auf den Kettenbruch[1]

$$(1) \qquad 1 + \frac{q\,|}{|\,1} + \frac{q^2\,|}{|\,1} + \frac{q^3\,|}{|\,1} + \cdots.$$

Dabei fehlt jede Andeutung eines Beweises. Man erfährt nur, daß der Briefschreiber noch viel mehr weiß, als er verrät; er fährt nämlich fort, das sei nur ein Spezialfall eines Theorems über den Kettenbruch

$$(2) \qquad 1 + \frac{q x\,|}{|\,1} + \frac{q^2 x\,|}{|\,1} + \frac{q^3 x\,|}{|\,1} + \cdots,$$

welches seinerseits wieder ein Spezialfall eines allgemeinen Theorems über den Kettenbruch

$$(3) \qquad 1 + b + \frac{q x\,|}{|\,1 + q b} + \frac{q^2 x\,|}{|\,1 + q^2 b} + \frac{q^3 x\,|}{|\,1 + q^3 b} + \cdots$$

sei. Darin darf man immerhin einen Fingerzeig erblicken, daß es zur Erforschung des Geheimnisses der Ramanujanschen Formeln vielleicht geraten ist, statt mit dem speziellen Kettenbruch (1) sich lieber mit dem allgemeineren (2) oder (3) zu beschäftigen. In der Tat hat Herr Watson den Kettenbruch (2) als Funktion

[1] Collected Papers of Srinivasa Ramanujan, Cambridge 1927, Seite XXVII, XXVIII.

§ 3. Zum Beweis soll zunächst formal gerechnet werden, ohne Rücksicht auf Konvergenz oder Divergenz. Man bestätigt leicht die formale Identität

$$P(b;\, x) - P(qb;\, qx) = \frac{q\,x}{(1+b)(1+qb)} \cdot P(q^2 b;\, q^2 x), \tag{6}$$

und indem man b, x durch $q^\nu b$, $q^\nu x$ ersetzt,

$$\begin{aligned} &P(q^\nu b;\, q^\nu x) - P(q^{\nu+1} b;\, q^{\nu+1} x) \\ &= \frac{q^{\nu+1} x}{(1+q^\nu b)(1+q^{\nu+1} x)} \cdot P(q^{\nu+2} b;\, q^{\nu+2} x). \end{aligned} \tag{7}$$

Hieraus folgt, wenn man durch $P\,(q^{\nu+1}\, b;\, q^{\nu+1} x)$ dividiert und

$$\frac{P\,(q^\nu b;\, q^\nu x)}{P\,(q^{\nu+1} b;\, q^{\nu+1} x)} = \mathfrak{P}_\nu(x) \tag{8}$$

setzt, sofort die formale Identität

$$\mathfrak{P}_\nu(x) = 1 + \frac{\dfrac{q^{\nu+1} x}{(1+q^\nu b)\,(1+q^{\nu+1} b)}}{\mathfrak{P}_{\nu+1}(x)} \tag{9}$$

und daraus nach Satz 3.5 auf Seite 110 meines zitierten Buches die Korrespondenzformel: $\mathfrak{P}_0(x) =$

$$\begin{aligned} &\frac{P\,(b;\, x)}{P\,(qb;\, qx)} \sim 1 + \frac{\dfrac{q\,x}{(1+b)\,(1+qb)}\Big|}{|\,1} + \\ &+ \frac{\dfrac{q^2 x}{(1+qb)\,(1+q^2 b)}\Big|}{|\,1} + \frac{\dfrac{q^3 x}{(1+q^2 b)\,(1+q^3 b)}\Big|}{|\,1} + \cdots. \end{aligned} \tag{10}$$

§ 4. Nun kommen wir zur Konvergenz. Wenn $|q| < 1$ und wenn b nicht gerade einer der Zahlen $-q^{-\nu}$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) gleich ist, so erfüllt der Kettenbruch (10) die Voraussetzung von Satz 3.28 auf Seite 149 meines Buches; er stellt also eine meromorphe Funktion von x dar, wobei in den Polen unwesentliche