BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1958

MÜNCHEN 1958

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über einen Kettenbruch von *Ramanujan*

Von **Oskar Perron** in München

Vorgelegt am 9. Mai 1958

§ 1. Unter den vielen merkwürdigen Formeln, mit denen sich *Ramanujan* im Jahr 1913 in seinem berühmten Brief an *G. H. Hardy* bei diesem als Mathematiker eingeführt hat, finden sich auch einige über Kettenbrüche. Und die allermerkwürdigsten von diesen beziehen sich auf den Kettenbruch[1]

$$1 + \frac{q|}{|1} + \frac{q^2|}{|1} + \frac{q^3|}{|1} + \cdots. \tag{1}$$

Dabei fehlt jede Andeutung eines Beweises. Man erfährt nur, daß der Briefschreiber noch viel mehr weiß, als er verrät; er fährt nämlich fort, das sei nur ein Spezialfall eines Theorems über den Kettenbruch

$$1 + \frac{qx|}{|1} + \frac{q^2x|}{|1} + \frac{q^3x|}{|1} + \cdots, \tag{2}$$

welches seinerseits wieder ein Spezialfall eines allgemeinen Theorems über den Kettenbruch

$$1 + b + \frac{qx|}{|1+qb} + \frac{q^2x|}{|1+q^2b} + \frac{q^3x|}{|1+q^3b} + \cdots \tag{3}$$

sei. Darin darf man immerhin einen Fingerzeig erblicken, daß es zur Erforschung des Geheimnisses der Ramanujanschen Formeln vielleicht geraten ist, statt mit dem speziellen Kettenbruch (1) sich lieber mit dem allgemeineren (2) oder (3) zu beschäftigen. In der Tat hat Herr WATSON den Kettenbruch (2) als Funktion

[1] Collected Papers of Srinivasa Ramanujan, Cambridge 1927, Seite XXVII, XXVIII.

von x untersucht, und es gelang ihm, ihn als Quotienten von zwei ganzen transzendenten Funktionen (Mockthetafunktionen) darzustellen:[1]

$$(4)\qquad \begin{cases} 1+\dfrac{qx\,|}{|\,1}+\dfrac{q^2x\,|}{|\,1}+\dfrac{q^3x\,|}{|\,1}+\cdots=\dfrac{G(x)}{G(qx)}, \\ G(x)=1+\sum\limits_{\lambda=1}^{\infty}\dfrac{q^{\lambda^2}}{(1-q)\,(1-q^2)\ldots(1-q^\lambda)}\,x^\lambda. \end{cases}$$

Diese Formel war für Herrn Watson der Schlüssel, mit dem er bis zu den Ramanujanschen Formeln vordringen konnte, wobei der ganze weitere Weg nichts mehr mit Kettenbrüchen zu tun hatte, sondern aus einem kunstvollen Rechnen mit den Reihen bestand. Daher läßt sich vermuten, daß auch Ramanujan im Besitz der Schlüsselformel (4) war, zumal man weiß, daß er gerade mit Mockthetafunktionen gut umzugehen verstand.

§ 2. Mit dem allgemeineren Kettenbruch (3) scheint sich noch niemand beschäftigt zu haben. Nach dem Vorstehenden dürfte eine Darstellung desselben als Funktion zweier Potenzreihen nach x nicht ohne Interesse sein. In der Tat ist mir eine solche Darstellung gelungen, und ich möchte vermuten, daß auch Ramanujan sie gekannt hat, obwohl ich keine Ahnung habe, welche weiteren merkwürdigen Formeln er wohl daraus noch hergeleitet haben mag. Meine Formel lautet:

$$(5)\qquad \begin{cases} 1+b+\dfrac{qx\,|}{|\,1+qb}+\dfrac{q^2x\,|}{|\,1+q^2b}+\dfrac{q^3x\,|}{|\,1+q^3b}+\cdots=(1+b)\dfrac{P(b;x)}{P(qb;qx)}, \\ P(b;x)=1+\sum\limits_{\lambda=1}^{\infty}\dfrac{q^{\lambda^2}}{(1-q)\,(1-q^2)\ldots(1-q^\lambda)}\cdot\dfrac{x^\lambda}{(1+b)\,(1+qb)\ldots(1+q^{\lambda-1}b)}. \end{cases}$$

---

[1] *G. N. Watson:* Theorems stated by Ramanujan (VII): Theorems on continued fractions. Journal of the London Math. Soc. **4** (1929). – Über Eigenschaften des Ramanujanschen Kettenbruches. Monatshefte für Math. u. Phys. **48** (1939). – Die Formel ist auch in meinem Buch bewiesen: Die Lehre von Kettenbrüchen. Dritte Aufl. Band II (Stuttgart 1957), Seite 127, 156.

§ 3. Zum Beweis soll zunächst formal gerechnet werden, ohne Rücksicht auf Konvergenz oder Divergenz. Man bestätigt leicht die formale Identität

$$P(b;\,x) - P(qb;\,qx) = \frac{qx}{(1+b)(1+qb)} \cdot P(q^2b;\,q^2x), \tag{6}$$

und indem man b, x durch $q^\nu b$, $q^\nu x$ ersetzt,

$$\begin{aligned} &P(q^\nu b;\,q^\nu x) - P(q^{\nu+1}b;\,q^{\nu+1}x) \\ &= \frac{q^{\nu+1}x}{(1+q^\nu b)(1+q^{\nu+1}x)} \cdot P(q^{\nu+2}b;\,q^{\nu+2}x). \end{aligned} \tag{7}$$

Hieraus folgt, wenn man durch $P(q^{\nu+1}b;\,q^{\nu+1}x)$ dividiert und

$$\frac{P(q^\nu b;\,q^\nu x)}{P(q^{\nu+1}b;\,q^{\nu+1}x)} = \mathfrak{P}_\nu(x) \tag{8}$$

setzt, sofort die formale Identität

$$\mathfrak{P}_\nu(x) = 1 + \cfrac{\cfrac{q^{\nu+1}x}{(1+q^\nu b)(1+q^{\nu+1}b)}}{\mathfrak{P}_{\nu+1}(x)} \tag{9}$$

und daraus nach Satz 3.5 auf Seite 110 meines zitierten Buches die Korrespondenzformel: $\mathfrak{P}_0(x) =$

$$\begin{aligned} \frac{P(b;\,x)}{P(qb;\,qx)} \sim 1 + \cfrac{\cfrac{qx}{(1+b)(1+qb)}}{1} + \\ + \cfrac{\cfrac{q^2x}{(1+qb)(1+q^2b)}}{1} + \cfrac{\cfrac{q^3x}{(1+q^2b)(1+q^3b)}}{1} + \cdots. \end{aligned} \tag{10}$$

§ 4. Nun kommen wir zur Konvergenz. Wenn $|q| < 1$ und wenn b nicht gerade einer der Zahlen $-q^{-\nu}$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) gleich ist, so erfüllt der Kettenbruch (10) die Voraussetzung von Satz 3.28 auf Seite 149 meines Buches; er stellt also eine meromorphe Funktion von x dar, wobei in den Polen unwesentliche

Divergenz stattfindet, und in der Umgebung des Nullpunkts ist er gleich der korrespondierenden Reihe. Diese ist aber $\mathfrak{P}_0(x)$, also gleich der linken Seite der Formel (10), da ja Zähler und Nenner augenscheinlich ganze Funktionen von x sind. Somit kann man in (10) das Korrespondenzzeichen $\sim$ durch ein Gleichheitszeichen ersetzen. Wenn man die so entstehende Formel mit $1 + b$ multipliziert und dann zur Vermeidung der Brüche zu einem äquivalenten Kettenbruch übergeht, entsteht gerade die behauptete Formel (5), die damit für $|q| < 1$ und $b \neq -q^{-\nu}$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) bewiesen ist.

Wenn $b = -q^{-k}$ ist, so hat die Reihe $P(b; x)$ keinen Sinn, weil ihre Glieder verschwindende Nenner haben. Ebenso hat der Kettenbruch (10) keinen Sinn, weil zwei seiner Teilzähler verschwindende Nenner haben. Auf Grund unserer Herleitung gilt aber sehr wohl noch die Formel, die aus (5) entsteht, wenn man b, x durch $q^{k+1}b$, $q^{k+1}x$ ersetzt:

$$1 + q^{k+1}b + \frac{q^{k+2}x\,|}{|\,1 + q^{k+2}b} + \frac{q^{k+3}x\,|}{|\,1 + q^{k+3}b} + \cdots$$

$$= (1 + q^{k+1}b) \cdot \frac{P(q^{k+1}b;\, q^{k+1}x)}{P(q^{k+2}b;\, q^{k+2}x)}. \tag{11}$$

Denn hier wären wegen verschwindender Nenner nur die Werte $b = -q^{-\nu}$ für $\nu = k + 1, k + 2, k + 3, \ldots$ verboten, aber nicht mehr $b = -q^{-k}$. Wenn nun der uns interessierende Kettenbruch (3) mit K_0 bezeichnet wird und der Kettenbruch (11) mit K_{k+1}, so ist aber offenbar

$$K_0 = 1 + b + \frac{qx\,|}{|\,1 + qb} + \cdots + \frac{q^k x\,|}{|\,1 + q^k b} + \frac{q^{k+1}x\,|}{|\,K_{k+1}},$$

und da man den Kettenbruch K_{k+1} aus (11) kennt, hat man damit auch den Kettenbruch K_0.

§ 5. Für $|q| > 1$ ist der Kettenbruch (2) für alle $x \neq 0$ divergent, wie sich sofort aus Satz 2.5 meines Buches, Seite 42, ergibt, wenn man ihn durch einen äquivalenten mit lauter Teilzählern 1 ersetzt. Auch die Reihe $G(x)$ ist für alle $x \neq 0$ divergent.

Im Gegensatz dazu erfüllt aber für $b \neq 0$ der Kettenbruch (10), wenn b keiner der Zahlen $-q^{-\nu}$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) gleich ist, wieder die Voraussetzung von Satz 3.28 meines Buches, er stellt also eine meromorphe Funktion von x dar. Ferner sieht man sofort, daß die Reihe $P(b; x)$ den Konvergenzradius $|b|$ hat. Daher gilt auch diesmal wieder die Korrespondenzformel (10) und für $|x| < |b|$ auch die Gleichung (5). Darüber hinaus lehrt dann die Formel (5), daß der Quotient $\frac{P(b; x)}{P(qb; qx)}$, bei dem Zähler und Nenner nur im Kreis $|x| < |b|$ konvergieren, sich über diesen Kreis hinaus in die ganze x-Ebene als meromorphe Funktion von x analytisch fortsetzt.

Wenn $b = -q^{-k}$ ist, kann man genau wie in § 4 verfahren, indem man zunächst den Kettenbruch K_{k+1} betrachtet.