

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1957

MÜNCHEN 1958

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Untersuchungen über den Darbouxschen Flächenkranz von Quasi-Rückungsflächen

Von Richard Baumann in München

Vorgelegt von Herrn Robert Sauer am 11. Januar 1957

Mit 9 Figuren

Übersicht

§ 1. Einleitung	65
§ 2. Liniengeometrische Darstellung der Quasi-Rückungsflächen . . .	67
§ 3. Liniengeometrische Darstellung des Darbouxschen Flächenkranzes	69
3.1. Geradensysteme der Flächentangenten	69
3.2. Beziehungen zwischen den Parameternetzen	71
3.3. Diagonaltransformationen der Parameternetze	72
3.4. Sechservektor-Beziehungen zwischen den Kranzflächen	73
3.5. Bestimmung der Kranzflächen	74
§ 4. Darbouxscher Flächenkranz von Quasi-Rückungsflächen	75
§ 5. Anwendung auf besondere Flächen	80
5.1. Rückungsflächen mit ebenen Lichtgrenzkurven	81
5.2. Zylindrokoniische Flächen mit ebenen Lichtgrenzkurven . . .	83
5.3. Drehflächen	87
§ 6. Beispiele	87
Literaturverzeichnis	91

§ 1. Einleitung

Unter der Bezeichnung „Les douze surfaces“ führte Darboux [2] ein Gebilde von 12 Flächen, die abwechselnd durch orthogonale Linienelemente bzw. parallele Tangentialebenen punktweise aufeinander bezogen sind, in die Theorie der infinitesimalen Flächenverbiegung ein. Er zeigte, daß zwischen den Parameternetzen der Flächen dieses Gebildes, das kurz Darbouxscher Flächenkranz genannt wird, einfache geometrische Beziehungen bestehen. Auch in der affinen und projektiven Geo-

metrie spielt der Darboux'sche Flächenkranz eine wesentliche Rolle. Salkowski [3] untersuchte die affinen Eigenschaften; Sauer [4] konnte zeigen, daß erst bei projektiver Betrachtung die Struktur der Kranzbeziehungen klar hervortritt.

Eine geschlossene Darstellung aller Kranzflächen durch Quadraturen ist nur möglich, wenn die zugrunde liegende infinitesimale Verbiegung in geschlossener Form dargestellt werden kann. Dies ist bei Flächen zweiter Ordnung [2], bei Flächen, deren Asymptotenlinien ein Quasi-Rückungsnetz bilden [1], und, nach einem bekannten Satz der Flächentheorie [5], bei allen dazu projektiven Flächen der Fall.

Die Flächen [1] werden nachfolgend als spezielle Quasi-Rückungsflächen, die dazu projektiven Flächen als allgemeine Quasi-Rückungsflächen bezeichnet. Schließlich lassen sich noch diejenigen Flächen bequem in die Betrachtungen mit einbeziehen, bei denen die Quertangenten längs einer Asymptotenlinie einem nichtsingulären linearen Geradenkomplex angehören. Sie sollen als Quertangenten-Gewindeflächen bezeichnet werden. Für die eben bezeichneten Flächenklassen gibt es eine gemeinsame liniengeometrische Kennzeichnung (§ 2).

Das Verhalten der einzelnen Flächen eines Darboux'schen Flächenkranzes bei projektiven Transformationen [6] gibt einen Hinweis für die zweckmäßige liniengeometrische Zusammenfassung der einzelnen Flächen. Bei entsprechender Festsetzung des Parameternetzes der Ausgangsfläche können alle Kranzbeziehungen durch 4 einfache lineare Vektorgleichungen ausgedrückt werden (§ 3).

Die liniengeometrischen Eigenschaften der Flächen eines Darboux'schen Flächenkranzes über einer Quertangenten-Gewindefläche können demnach in Abhängigkeit von zwei willkürlichen Funktionen, welche die dem Flächenkranz zugrunde liegende infinitesimale Verbiegung kennzeichnen, angegeben werden (§ 4).

Bei geeigneter Festsetzung der beiden willkürlichen Funktionen können geometrische Eigenschaften der Kranzflächen in Abhängigkeit von einer vorgegebenen Ausgangsfläche angegeben werden (§ 5).

§ 6 enthält verschiedene Beispiele.

§ 2. Liniengeometrische Darstellung der Quasi-Rückungsflächen

Flächen, bei denen die Asymptotenlinien im Grundriß ein Rückungsnetz bilden, haben die für Affinminimalflächen kennzeichnende Eigenschaft, daß längs jeder Asymptotenlinie die Tangenten an die andere Schar der Asymptotenlinien zu einer Ebene parallel sind [7].

Entsteht des Rückungsnetz bei senkrechter Projektion des Asymptotennetzes auf den Grundriß, dann können die Flächen nach Sauer [1] in folgender Weise dargestellt werden:

$$\begin{aligned} x &= U_1(u) + V_1(v) \\ y &= U_2(u) + V_2(v) \\ z &= k_1 \cdot \left\{ - \left| \frac{U_1}{U_2} \frac{V_1}{V_2} \right| - \int \left| \frac{U_1}{U_2} \frac{U'_1}{U'_2} \right| du + \int \left| \frac{V_1}{V_2} \frac{V'_1}{V'_2} \right| dv \right\} \\ &\quad + k_2(U_1 + V_1) + k_3(U_2 + V_2) + k_4. \end{aligned} \quad (1)$$

Setzt man in (1) die Integrationskonstanten durch

$$k_1 = -1; \quad k_2 = k_3 = k_4 = 0$$

fest, und führt man zur Abkürzung die Vektoren

$$\begin{aligned} \mathfrak{u} &\left(\begin{array}{c} U_2 \mid -U_1 \mid \frac{1}{2} \end{array} \right) \\ \mathfrak{v} &\left(\begin{array}{c} -V_2 \mid V_1 \mid \frac{1}{2} \end{array} \right) \end{aligned}$$

ein, so geht (1) in die bekannte Darstellung für Affinminimalflächen über:

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{v} \times \mathfrak{u} + \int \mathfrak{u} \times d\mathfrak{u} - \int \mathfrak{v} \times d\mathfrak{v}. \quad (2)$$

Für diese Flächenklasse gibt es eine einfache liniengeometrische Darstellung. Bezeichnet man die Flächentangenten durch die aus den inhomogenen kartesischen Punktkoordinaten gebildeten Sechservektoren [5]

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} \{ \mathfrak{r}_u \mid \mathfrak{r} \times \mathfrak{r}_u \} &= \mathfrak{P} \{ \mathfrak{r}_u \mid \bar{\mathfrak{r}}_u \} \\ \mathfrak{Q} \{ \mathfrak{r}_v \mid \mathfrak{r} \times \mathfrak{r}_v \} &= \mathfrak{Q} \{ \mathfrak{r}_v \mid \bar{\mathfrak{r}}_v \}, \end{aligned}$$

wählt man ferner die Haupttangentialkurven als Parameterlinien

$$u = \text{const} \qquad v = \text{const},$$

dann ist das Verschwinden der Skalarprodukte

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \circ \mathfrak{B} &= 0 \\ \mathfrak{B} \circ \mathfrak{Q} &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \{0 \circ 0 \circ \mid a_4(u) \ a_5(u) \ 0\} &= \mathfrak{A} \{0 \mid \bar{a}\} \\ \mathfrak{B} \{0 \circ 0 \circ \mid b_4(v) \ b_5(v) \ 0\} &= \mathfrak{B} \{0 \mid \bar{b}\} \end{aligned} \tag{4}$$

eine kennzeichnende Eigenschaft der Flächen (2).

Die Komponenten a_4, a_5, b_4, b_5 sind nach (2) und (3) aus

$$\begin{aligned} (v+u) \ u' \bar{a} &= 0 \\ (v+u) \ v' \bar{b} &= 0 \end{aligned}$$

bis auf einen willkürlichen Faktor zu bestimmen.

Die Beziehungen (3) besagen, daß alle Quertangenten längs einer Haupttangentialkurve eine uneigentliche, auf der Grundrißebene senkrecht stehende Gerade als gemeinsame Treffgerade haben. Die Geradenschar der Quertangenten längs einer jeden Haupttangentialkurve gehört demnach einem singulären linearen Komplex an. Das lineare Geradensystem der Quertangenten zu einer Schar von Haupttangentialkurven gehört einem singulären Komplexbüschel an. (Fig. 1).

Die Kennzeichnung (3) gilt auch für alle zu den Flächen (2) projektiven Flächen. Die Sechservektoren der Komplexachsen haben dann die allgemeine Form

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \{a_1(u) \ a_2(u) \ \dots \dots \ a_6(u)\} \\ \mathfrak{B} \{b_1(v) \ b_2(v) \ \dots \dots \ b_6(v)\} \end{aligned}$$

mit der Nebenbedingung

$$\mathfrak{A} \circ \mathfrak{A} = \mathfrak{B} \circ \mathfrak{B} = 0.$$

Nachfolgend werden die Flächen (2) kurz als spezielle, die dazu projektiven Flächen als allgemeine Quasi-Rückungsflächen bezeichnet.

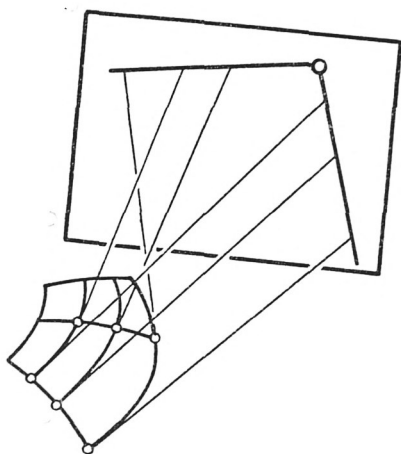


Fig. 1

Ist schließlich

$$\mathfrak{A} \circ \mathfrak{A} \neq 0 \qquad \mathfrak{B} \circ \mathfrak{B} \neq 0,$$

dann werden durch (3) Flächen gekennzeichnet, bei denen die Quertangenten längs jeder Haupttangentenkurve einem linearen nichtsingulären Komplex angehören. Sie sollen als Quertangenten-Gewindeflächen bezeichnet werden.

§ 3. Liniengeometrische Darstellung des Darbouxschen Flächenkranzes

3.1. Geradensysteme der Flächentangenten

Werden die Kranzflächen von 1 bis 12 fortlaufend numeriert, dann gelten mod. 12 folgende Beziehungen

$$\begin{aligned} d\gamma^{2n+1} &= \gamma^{2n-1} \times d\gamma^{2n} \\ d\gamma^{2n} &= \gamma^{2n+2} \times d\gamma^{2n+1}. \end{aligned} \tag{5}$$

Die Flächentangenten längs der Parameterlinien $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ werden durch die singulären Sechservektoren

$$\mathfrak{P} \{ \mathfrak{x}_u | \bar{\mathfrak{x}}_u \} \quad \mathfrak{Q} \{ \mathfrak{x}_v | \bar{\mathfrak{x}}_v \}$$

dargestellt.

Je 2 Flächen $2n$ und $2n+1$, zwischen denen die Beziehung

$$d\mathfrak{x}^{2n} \cdot d\mathfrak{x}^{2n+1} = 0$$

besteht, können zu einem nichtsingulären Schraubriß-Sechservektor

$$\mathfrak{S}^{2n, 2n+1} \{ \mathfrak{x}^{2n} | \mathfrak{x}^{2n+1} \}$$

zusammengefaßt werden [3].

Für die Skalarprodukte der Sechservektoren der Flächentangenten gilt folgende Multiplikationstabelle

	$\mathfrak{P}$	$\mathfrak{P}_u$	$\mathfrak{P}_v$	$\mathfrak{Q}$	$\mathfrak{Q}_u$	$\mathfrak{Q}_v$
$\mathfrak{P}$	0	0	0	0	0	0
$\mathfrak{P}_u$	0	0	$-L$	0	L	0
$\mathfrak{P}_v$	0	$-L$	$-2M$	0	0	$-N$
$\mathfrak{Q}$	0	0	0	0	0	0
$\mathfrak{Q}_u$	0	L	0	0	M	N
$\mathfrak{Q}_v$	0	0	$-N$	0	N	0

(6)

mit den Abkürzungen

$$L = \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \mathfrak{x}_{uu} \quad M = \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \mathfrak{x}_{uv} \quad N = \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \mathfrak{x}_{vv}.$$

Zur Vereinfachung der Darstellung soll nachfolgend bei der Ausgangsfläche 1 immer das Haupttangentialnetz als Parameternetz gewählt werden. Dann ist auch bei den Flächen 4, 7, 10

das Haupttangennetz zugleich Parameternetz. Bei den übrigen Flächen sind die Parameternetze konjugierte Netze.

Für den Rang der Matrizen

$$\begin{array}{lll} (\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_k) & (\mathfrak{Q}_i, \mathfrak{Q}_k) & \begin{array}{l} i = u, v \\ k = u, v \end{array} \end{array}$$

folgt aus (6) bei den Flächen 1, 4, 7, 10 wegen $L = N = 0$, $M \neq 0$

$$r = 1,$$

bei den übrigen Flächen wegen $L \neq 0$, $N \neq 0$, $M = 0$

$$r = 2.$$

Daraus ergibt sich ein bekannter Satz in liniengeometrischer Formulierung:

Wählt man bei der Ausgangsfläche 1 eines Darbouxschen Flächenkranzes das Haupttangennetz als Parameternetz, dann bilden die Flächentangenten $\mathfrak{P}(u, v)$ und $\mathfrak{Q}(u, v)$ bei den Flächen 1, 4, 7, 10 konfokale parabolische, bei den übrigen Flächen konfokale hyperbolische Geradensysteme.

3.2. Beziehungen zwischen den Parameternetzen

Bei den konjugierten Flächenpaaren sind die Tangentenvektoren $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$ wegen der Parallelität der Tangentialebenen linear abhängig [5]. Es kann gesetzt werden

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_u^* &= \mu \mathfrak{x}_u + \lambda \mathfrak{x}_v \\ \mathfrak{x}_v^* &= -\nu \mathfrak{x}_u - \mu \mathfrak{x}_v. \end{aligned}$$

Wegen der speziellen Wahl des Parameternetzes der Ausgangsfläche sind die Flächen entweder parallel-reziprok konjugiert

$$\mathfrak{x}_u^* = \lambda \mathfrak{x}_v \quad \mathfrak{x}_v^* = -\nu \mathfrak{x}_u \quad (7)$$

oder parallel konjugiert

$$\mathfrak{x}_u^* = \mu \mathfrak{x}_u \quad \mathfrak{x}_v^* = -\mu \mathfrak{x}_v. \quad (8)$$

Die Beziehung (7) gilt bei den Flächenpaaren 1-2, 3-4, 7-8, 9-10, die Beziehung (8) gilt bei den Flächenpaaren 5-6, 11-12. Durch (7) wird das Parameternetz von $\mathfrak{z}$ als schränkungsfestes, durch (8) als krümmungsfestes Netz gekennzeichnet [5].

Die Beziehungen (7) und (8) übertragen sich korrelativ auf die zu den konjugierten Flächenpaaren polaren radialen Flächenpaare. Das bedeutet:

Entsprechende Tangenten an die Parameterkurven radial bezogener Flächen liegen jeweils in einer Ebene durch den Ursprung [12].

3.3. Diagonaltransformationen der Parameternetze

Bei der speziellen Parameterwahl ist längs der Asymptotenlinien der Flächen 3, 6, 9, 12 (2, 5, 8, 11) die Gleichung

$$\lambda \, du^2 + v \, dv^2 = 0$$

erfüllt. Unterwirft man die willkürlichen Funktionen der Bedingung

$$\lambda(u, v) = -v(u, v),$$

dann fallen die durch die Kurven $\bar{u} = \text{const}$, $\bar{v} = \text{const}$ ($\bar{u} = \text{const}$, $\bar{v} = \text{const}$) bestimmten Diagonalnetze mit den Haupttangentialnetzen von 3, 6, 9, 12 (2, 5, 8, 11) zusammen. Dabei bedeutet

$$\begin{array}{ll} 2 \, \bar{u} = u + v & 2 \, \bar{u} = u + i v \\ 2 \, \bar{v} = u - v & 2 \, \bar{v} = u - i v. \end{array} \quad (9)$$

Wie man durch einfache Rechnung bestätigen kann, bleiben bei den Transformationen (9) die Beziehungen der radialen Flächenpaare unverändert. Die Änderung der Beziehungen (7) und (8) der konjugierten Flächenpaare geht aus der nachfolgenden Tabelle hervor:

	$du \cdot dv = 0$	$d\bar{u} \cdot d\bar{v} = 0$	$d\tilde{u} \cdot d\tilde{v} = 0$
1-2	pr	p	pr
3-4	pr	pr	p
5-6	p	pr	pr
7-8	pr	p	pr
9-10	pr	pr	p
11-12	p	pr	pr

p = parallel konjugiert.

pr = parallel-reziprok konjugiert.

3.4. Sechservektor-Beziehungen zwischen den Kranzflächen

Unter Verwendung der Sechservektoren der Flächentangenten und der Schraubrisse lassen sich die Kranzbeziehungen folgendermaßen zusammenfassen (Fig. 2):

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{S}_u^{98} &= \lambda' \cdot \mathfrak{Q}^{10} & \mathfrak{S}_u^{23} &= \lambda \cdot \mathfrak{Q}^1 \\
 \mathfrak{S}_v^{98} &= -\nu' \cdot \mathfrak{P}^{10} & \mathfrak{S}_v^{23} &= -\nu \cdot \mathfrak{P}^1 \\
 \mathfrak{S}_u^{89} &= \lambda' \cdot \tau' \cdot \mathfrak{Q}^7 & \mathfrak{S}_u^{32} &= \lambda \cdot \tau \cdot \mathfrak{Q}^4 \\
 \mathfrak{S}_v^{89} &= -\nu' \cdot \sigma' \cdot \mathfrak{P}^7 & \mathfrak{S}_v^{32} &= -\nu \cdot \sigma \cdot \mathfrak{P}^4.
 \end{aligned} \tag{10}$$

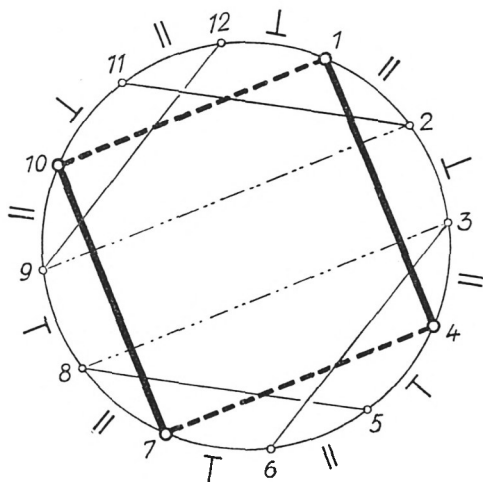


Fig. 2

$\lambda(u, v)$, $v(u, v)$, $\lambda'(u, v)$, $v'(u, v)$ sind die aus der Theorie der infinitesimalen Flächenverbiegung bekannten willkürlichen Funktionen. $\sigma(u, v)$, $\tau(u, v)$, $\sigma'(u, v)$, $\tau'(u, v)$ sind Normierungsfunktionen, die durch die Polarbeziehung bestimmt sind. Durch einen Schraubriß-Sechservektor sind jeweils 4 Kranzflächen bestimmt [4].

Die Beziehungen (10) bleiben bei den Parametertransformationen (9) unverändert, wenn man zur Darstellung jeweils die Flächentangenten derjenigen Flächen verwendet, bei denen das Parameternetz gleichzeitig Haupttangennetz ist.

3.5. Bestimmung der Kranzflächen

Die Bestimmung aller Kranzflächen ist mit einer Integration möglich. Der Weg wird durch die Beziehungen (10) gewiesen.

Wir nehmen an, die Ausgangsfläche 1 sei durch Parameterdarstellung in inhomogenen kartesischen Punktkoordinaten gegeben. Dadurch sind die Sechservektoren der Flächentangenten

$$\mathfrak{P}^1 \{ \mathfrak{x}_u^1 | \bar{\mathfrak{x}}_u^1 \} \quad \mathfrak{Q}^1 \{ \mathfrak{x}_v^1 | \bar{\mathfrak{x}}_v^1 \}$$

eindeutig bestimmt.

Die *Polarfläche 4* ist dann gegeben durch

$$\sigma \cdot \mathfrak{P}^4 \{ \bar{\mathfrak{x}}_u^1 | \mathfrak{x}_u^1 \} \quad \tau \cdot \mathfrak{Q}^4 \{ \bar{\mathfrak{x}}_v^1 | \mathfrak{x}_v^1 \}.$$

Die Normierungsfaktoren $\sigma(u, v)$ und $\tau(u, v)$ sind durch die Polarbeziehung $\mathfrak{x}^1 \mathfrak{x}^4 + 1 = 0$ festgelegt.

Wenn die Integrierbarkeitsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial u} (v \mathfrak{P}^1) + \frac{\partial}{\partial v} (\lambda \mathfrak{Q}^1) = 0$$

erfüllt ist, können die *Schraubrißflächen 2 und 3* durch

$$\mathfrak{E}^{23} = \int \lambda \mathfrak{Q}^1 du - \int v \mathfrak{P}^1 dv + C$$

bestimmt werden. Die *polaren Flächen 11 und 6* sind dadurch bereits mitbestimmt.

Die *radialen Schraubrißflächen* 8 und 9 sind durch

$$\mathfrak{C}^{98} = \frac{-2 \cdot \mathfrak{C}^{23}}{\mathfrak{C}^{23} \circ \mathfrak{C}^{23}}$$

bestimmt. Dadurch sind die *polaren Flächen* 12 und 5 mitbestimmt. Die noch fehlenden *Flächen* 7 und 10 sind zu 12 und 5 radial bezogen. (Fig. 3).

Die willkürlichen Funktionen $\lambda(u, v)$ und $\nu(u, v)$ sind bestimmend für alle Kranzflächen außer 1 und 4.

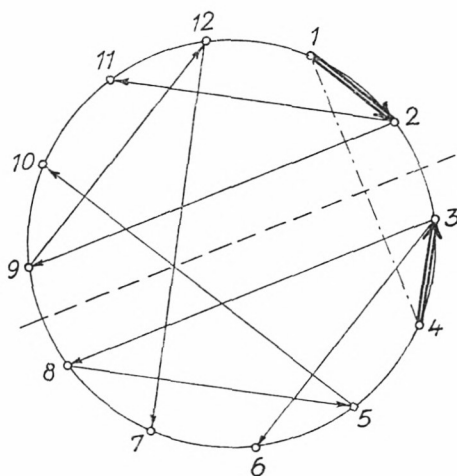


Fig. 3

§ 4. Darboux'scher Flächenkranz von Quasi-Rückungsflächen

1. Ausgangsfläche ist eine allgemeine Quasi-Rückungsfläche. Sie soll in Haupttangentenparametern angegeben sein. Nach (3) ist

$$\mathfrak{U} \circ \mathfrak{V}^1 = 0 \quad \mathfrak{B} \circ \mathfrak{Q}^1 = 0. \quad (11)$$

Die *Polarfläche* 4 ist dann eine ebenfalls in Haupttangentenparametern gegebene allgemeine Quasi-Rückungsfläche.

$$\tilde{\mathfrak{U}} \circ \mathfrak{V}^4 = 0 \quad \tilde{\mathfrak{B}} \circ \mathfrak{Q}^4 = 0 \quad (12)$$

Die Sechservektoren $\tilde{\mathfrak{A}}$ und $\tilde{\mathfrak{B}}$ gehen durch Polartransformation aus den Sechservektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ hervor.

Für die *Schraubrißflächen 2 und 3* ergibt sich nach (10)

$$\mathfrak{A} \circ \mathfrak{E}_v^{23} = 0 \qquad \mathfrak{B} \circ \mathfrak{E}_u^{23} = 0.$$

Wegen

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(u) \qquad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}(v)$$

folgt daraus

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \circ \mathfrak{E}^{23} &= \Phi(u) \\ \mathfrak{B} \circ \mathfrak{E}^{23} &= \Psi(v). \end{aligned} \tag{13}$$

Längs der Parameterkurven bilden die Schraubrißvektoren mit dem singulären Vektor einer festen Geraden konstante Skalarprodukte.

Die *Flächen 8 und 9* des radialen Schraubrisses sind gekennzeichnet durch

$$\frac{-2 \cdot \mathfrak{A} \circ \mathfrak{E}^{98}}{\mathfrak{E}^{98} \circ \mathfrak{E}^{98}} = \Phi(u) \qquad \frac{-2 \cdot \mathfrak{B} \circ \mathfrak{E}^{98}}{\mathfrak{E}^{98} \circ \mathfrak{E}^{98}} = \Psi(v).$$

Durch einfache Rechnung ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \circ \mathfrak{E}_v^{98} &= 4 \cdot \Phi(u) \cdot \frac{\mathfrak{E}^{23} \circ \mathfrak{E}_v^{23}}{(\mathfrak{E}^{23} \circ \mathfrak{E}^{23})^2} \\ \mathfrak{B} \circ \mathfrak{E}_u^{98} &= 4 \cdot \Psi(v) \cdot \frac{\mathfrak{E}^{23} \circ \mathfrak{E}_u^{23}}{(\mathfrak{E}^{23} \circ \mathfrak{E}^{23})^2} \end{aligned}$$

und wegen (10)

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \circ \mathfrak{P}^{10} &= \frac{-4 \cdot \Phi(u)}{v'(u, v)} \cdot \frac{\mathfrak{E}^{23} \circ \mathfrak{E}_v^{21}}{(\mathfrak{E}^{23} \circ \mathfrak{E}^{23})^2} \\ \mathfrak{B} \circ \mathfrak{Q}^{10} &= \frac{4 \cdot \Psi(v)}{\lambda'(u, v)} \cdot \frac{\mathfrak{E}^{23} \circ \mathfrak{E}_u^{23}}{(\mathfrak{E}^{23} \circ \mathfrak{E}^{23})^2}. \end{aligned}$$

Beim Flächenkranz über einer allgemeinen Quasi-Rückungsfläche bestehen also zwischen den Sechservektoren der Kranzflächen und den die Ausgangsfläche kennzeichnenden Sechservektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einfache Vektorbeziehungen.

2. Ausgangsfläche ist eine spezielle Quasi-Rückungsfläche.

Wegen der Entartung der Sechservektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gemäß (4) zerfallen die liniengeometrischen Beziehungen (§ 4 Abschn. 1) beim Flächenkranz über einer speziellen Quasi-Rückungsfläche weitgehend in punktgeometrische Beziehungen im dreistufigen Raum. Wir werden daher zweckmäßig die punktgeometrische Schreibweise verwenden, u. a. auch Ebenenvektoren

$$\mathfrak{w} (r \mid s \mid t),$$

die durch die inhomogene Polarbeziehung

$$\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{w} + 1 = 0$$

definiert sind. Aus dieser Definition folgt sofort

$$\mathfrak{w} = \frac{\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v}{\mathfrak{x} \mathfrak{x}_v \mathfrak{x}_u}. \quad (14)$$

Ausgangsfläche 1: Wegen (4) vereinfacht sich (11) zu

$$\begin{aligned} a_4 x_u^1 + a_5 y_u^1 &= 0 \\ b_4 x_v^1 + b_5 y_v^1 &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Die Quertangenten längs jeder Haupttangentenkurve sind im Grundriß parallel.

Polarfläche 4: Wegen (4) vereinfacht sich (12) zu

$$\bar{a} \mathfrak{x}^4 \mathfrak{x}_u^4 = 0 \quad \bar{b} \mathfrak{x}^4 \mathfrak{x}_v^4 = 0.$$

Geometrische Bedeutung: Längs einer jeden Asymptotenlinie bilden die Vektoren $\mathfrak{x}^4$ und $\mathfrak{x}_u^4$ bzw. $\mathfrak{x}^4$ und $\mathfrak{x}_v^4$ ein Ebenenbüschel mit der Achse $\bar{a}$ bzw. $\bar{b}$.

Die Achsen der Ebenenbüschel, d. h. die Treffgeraden der Quertangenten längs einer jeden Asymptotenlinie bilden ein Geradenbüschel in der Grundrißebene mit dem Ursprung als Trägerpunkt. (Fig. 4).

Diese Kennzeichnung der Polarfläche 4 ist dual zur Kennzeichnung der Ausgangsfläche 1.

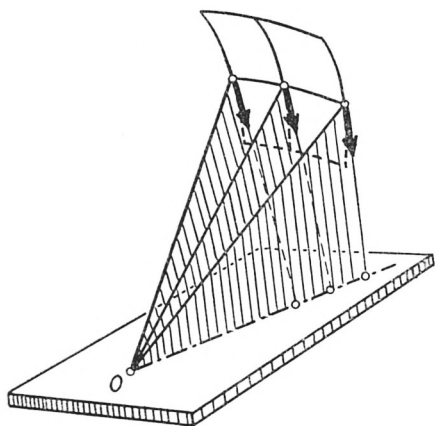


Fig. 4

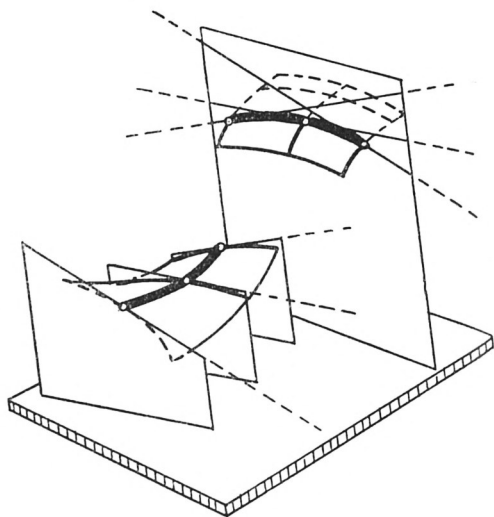


Fig. 5

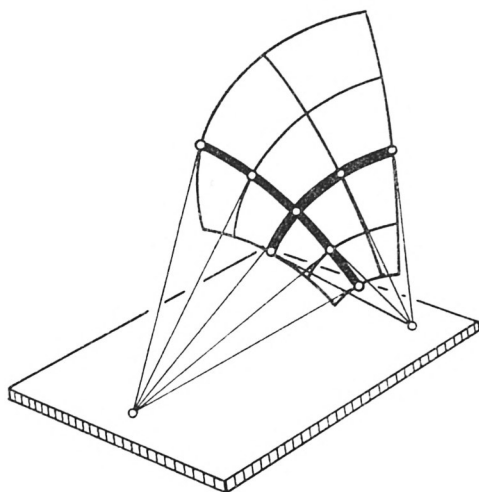


Fig. 6

Drehrißfläche 2: Wegen (4) vereinfacht sich (13) zu

$$\begin{aligned} a_4 x^2 + a_5 y^2 &= \Phi(u) \\ b_4 x^2 + b_5 y^2 &= \Psi(v). \end{aligned} \quad (16)$$

Geometrische Bedeutung: Die Parameterlinien sind ebene Kurven. Die Ebene einer Parameterlinie von 2 und die durch die Quertangenten der entsprechenden Asymptotenlinie von 1 bestimmten Ebenen sind parallel [1] (Fig. 5).

Die Ebenen der Parameterlinien haben vom Ursprung den Abstand

$$d = \frac{\Phi(u)}{\sqrt{a_4^2 + a_5^2}} \quad \text{bzw.} \quad d = \frac{\Psi(v)}{\sqrt{b_4^2 + b_5^2}}.$$

Drehriß-Polarfläche 11:

Die Beziehung (16) kann auch geschrieben werden

$$\begin{aligned} a_4 r^{11} + a_5 s^{11} &= \Phi(u) \\ b_4 r^{11} + b_5 s^{11} &= \Psi(v). \end{aligned}$$

Geometrische Bedeutung: Die Tangentialebenen längs einer Parameterlinie haben den Punkt $a_0 \left(\frac{-a_4}{\Phi(u)} \mid \frac{-a_5}{\Phi(u)} \mid 0 \right)$ bzw. $b_0 \left(\frac{-b_4}{\Psi(v)} \mid \frac{-b_5}{\Psi(v)} \mid 0 \right)$ gemeinsam.

Die Fläche ist doppelkonisch. Die Punkte a_0 bzw. b_0 liegen auf derjenigen Kurve, die vom Grundriß der entsprechenden Schar von Parameterlinien von 2 umhüllt wird. Sie liegen außerdem auf den Achsen $\bar{a}$ bzw. $\bar{b}$ der Ebenenbüschel von 4 (Fig. 6).

Dadurch ist die radiale Beziehung der Flächen 4 und 11 (siehe Seite 72) bestätigt.

Biegungsfläche 12: Aus (5) und (16) folgt

$$\begin{aligned} z_u^{12} &= x^2 \left(y_u^1 + \frac{a_4}{a_5} x_u^1 \right) - \frac{x_u^1}{a_5} \cdot \Phi(u) \\ z_v^{12} &= x^2 \left(y_v^1 + \frac{b_4}{b_5} x_v^1 \right) - \frac{x_v^1}{b_5} \cdot \Psi(v) \end{aligned}$$

und daraus wegen (15)

$$z_u^{12} = -\frac{x_u^1}{a_5} \cdot \Phi(u) \qquad z_v^{12} = -\frac{x_v^1}{b_5} \cdot \Psi(v).$$

Wenn man die Vektoren $\bar{a}$ und $\bar{b}$ so normiert, daß

$$a_5 = -x_u^1 \qquad b_5 = -x_v^1$$

– wegen (15) ist das immer möglich –, dann erhält man

$$z^{12} = \int \Phi(u) \cdot du + \int \Psi(v) \cdot dv + C.$$

Geometrische Bedeutung: Werden die Punkte einer Parameterkurve zu den Punkten einer benachbarten Kurve derselben Schar durch die Kurven der anderen Schar zugeordnet, so haben einander entsprechende Punkte auf den benachbarten Kurven jeweils konstanten Höhenunterschied.

Aus den Beziehungen ist deutlich die enge Verwandtschaft der Flächen 1, 2, 4, 11 zu erkennen. Die parallel-reziproke Beziehung bei 1–2 führt wegen der Parallelität der Quertangentengrundrisse, die radiale Beziehung bei 4–11 wegen der besonderen Bedeutung des Ursprunges bei 4 zu besonders einfachen geometrischen Beziehungen.

Ähnliche einfache geometrische Eigenschaften der anderen Kranzflächen sind erst zu erwarten, wenn man für die Ausgangsfläche und die willkürlichen Funktionen $\Phi(u)$ und $\Psi(v)$ einschränkende Bedingungen festlegt.

Zum Schluß sei noch darauf hingewiesen, daß die Beziehungen (11) bis (13) auch für

$$\mathfrak{U} \circ \mathfrak{U} \neq 0 \qquad \mathfrak{V} \circ \mathfrak{V} \neq 0 \quad \text{gelten.}$$

Sie gelten also allgemein für Quertangenten-Gewindeflächen.

§ 5. Anwendung auf besondere Flächen

Die Kranzbeziehungen werden besonders übersichtlich, wenn

1. die Ausgangsfläche selbstprojektiv gekennzeichnet werden kann, d. h. wenn bestimmte Eigenschaften bei Korrelationen erhalten bleiben,

2. die willkürlichen Funktionen $\lambda(u, v)$, $\mu(u, v)$, $\nu(u, v)$ aus (7) und (8) so festgesetzt werden können, daß die Eigenschaften der Ausgangsfläche 1 auch für die Drehrißfläche 2 gelten. Die Flächen 1, 2, 4, 11 haben dann dieselben kennzeichnenden Eigenschaften.

Im folgenden wird der Darboux'sche Flächenkranz mit den aufgeführten Einschränkungen für 3 besondere Flächenklassen untersucht:

1. Rückungsflächen mit ebenen Lichtgrenzkurven,
2. Zylindrokonische Flächen mit ebenen Lichtgrenzkurven,
3. Drehflächen.

5.1. Rückungsflächen mit ebenen Lichtgrenzkurven

Wir betrachten den Flächenkranz über einer speziellen Quasi-Rückungsfläche, bei der das Diagonalnetz des Haupttangenten-netzes ein Rückungsnetz bildet. Die Netzkurven sind ebene Kurven und liegen in parallelen Vertikal- bzw. Horizontalebene. Diese Eigenschaften werden durch folgende Bedingungen erreicht:

$$1) \quad z = z(\bar{v}) \qquad 2) \quad y = y(\bar{u}) \qquad 3) \quad x_{\bar{u}\bar{v}} = 0.$$

Die Bedingungen sind erfüllt, wenn die Ausgangsfläche in der Form

$$x(\bar{U}_1(\bar{u}) + \bar{V}_1(\bar{v}) \mid \bar{U}_2(\bar{u}) \mid \bar{V}_2(\bar{v}))$$

angegeben werden kann. Bei vektorieller Zusammenfassung durch

$$\bar{u}(\bar{U}_1 \mid \bar{U}_2 \mid 0) \qquad \bar{v}(\bar{V}_1 \mid 0 \mid \bar{V}_2)$$

bekommt man die Darstellung

$$x^1 = \bar{u} + \bar{v}. \qquad (17)$$

Die *Drehrißfläche* 2 ist nach (§ 3.3) durch die parallele Beziehung

$$x_u^2 = \bar{\mu} x_u^1 \qquad x_v^2 = -\bar{\mu} x_v^1$$

mit der Ausgangsfläche verknüpft. Sie ist eine Rückungsfläche, wenn man festsetzt:

$$\bar{\mu}(\bar{u}, \bar{v}) = \text{const} = C. \quad (18)$$

Für die Drehrißfläche ergibt sich die Darstellung

$$\mathfrak{z}^2 = C(\bar{u} - \bar{v}). \quad (19)$$

Nach einfacher Rechnung gemäß (14) bekommt man für die *polaren Flächen 4 und 11*

$$\mathfrak{z}^4 = \frac{\bar{u}^4 + \bar{v}^4}{\bar{U}_4 + \bar{V}_4} \quad \mathfrak{z}^{11} = \frac{\bar{u}^{11} + \bar{v}^{11}}{\bar{U}_{11} + \bar{V}_{11}}$$

mit den Vektoren

$$\begin{aligned} \bar{u}^4 &= \left(\frac{1}{2} \mid - \frac{\bar{U}'_1}{\bar{U}'_2} \mid 0 \right) & \bar{v}^4 &= \left(\frac{1}{2} \mid 0 \mid - \frac{\bar{V}'_1}{\bar{V}'_2} \right) \\ \bar{u}^{11} &= \bar{u}^4 & \bar{v}^{11} &= \bar{v}^4 \end{aligned}$$

und den Funktionen

$$\begin{aligned} \bar{U}_4(\bar{u}) &= \frac{\bar{U}_1 \bar{U}'_2 - \bar{U}_2 \bar{U}'_1}{\bar{U}'_2} & \bar{V}_4(\bar{v}) &= \frac{\bar{V}_1 \bar{V}'_2 - \bar{V}_2 \bar{V}'_1}{\bar{V}'_2} \\ \bar{U}_{11}(\bar{u}) &= C \cdot \bar{U}_4 & \bar{V}_{11}(\bar{v}) &= -C \cdot \bar{V}_4. \end{aligned}$$

Die Flächen 4 und 11 sind demnach doppelkonische Flächen.

Aus (5), (17) und (19) bekommt man für die *Flächen 12 und 3* nach einfacher Rechnung und elementarer Integration

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}^{12} &= C [\bar{u} \times \bar{v} + \int \bar{u} \times \bar{u}' d\bar{u} - \int \bar{v} \times \bar{v}' d\bar{v}] \\ \mathfrak{z}^3 &= C [\bar{v} \times \bar{u} + \int \bar{u} \times \bar{u}' d\bar{u} - \int \bar{v} \times \bar{v}' d\bar{v}]. \end{aligned}$$

Die Flächen 12 und 3 sind also Affinminimalflächen bzw. Quasi-Rückungsflächen. Sie können unter Verwendung der Sechservektoren

$$\mathfrak{A} \{0 \ 0 \ 0 \mid a_4 \ a_5 \ 0\} \quad \mathfrak{B} \{0 \ 0 \ 0 \mid b_4 \ 0 \ b_6\}$$

Kegeln ist. Die Erzeugenden der Berührzylinder sind horizontale Gerade, die Kegelspitzen liegen auf der z -Achse. Die Netzkurven liegen in Meridianebenen bzw. in horizontalen Ebenen.

Diese Eigenschaften werden durch folgende Bedingungen erreicht:

$$\begin{aligned} 1) \quad z &= z(\bar{v}) & 3) \quad x_u(x_u(\bar{u}) | y_u(\bar{u}) | 0) \\ 2) \quad \frac{y}{x} &= f(\bar{u}) & 4) \quad z + z_v \cdot \frac{x^2 + y^2}{x_v^2 + y_v^2} = g(\bar{v}). \end{aligned} \quad (20)$$

Die Bedingungen sind erfüllt, wenn die Ausgangsfläche in der Form

$$x^1(\bar{U}_1 \cdot \bar{V}_1 | \bar{U}_2 \cdot \bar{V}_1 | \bar{V}_2) \quad (21)$$

angegeben werden kann.

Für die *Drehrißfläche* 2 sind die Bedingungen (20) erfüllt, wenn man analog zu (18) festsetzt:

$$\bar{\mu} = \bar{\mu}(\bar{v}). \quad (22)$$

Man erhält die Darstellung:

$$x^2(\bar{\mu} \cdot \bar{U}_1 \cdot \bar{V}_1 | \bar{\mu} \cdot \bar{U}_2 \cdot \bar{V}_1 | - \int \bar{\mu} \cdot \bar{V}_2' d\bar{v}).$$

Neben der Bedingung (22) besteht für $\bar{\mu}$ noch die Integrierbarkeitsbedingung in bezug auf 2:

$$2 \cdot \bar{\mu} \cdot \bar{V}_1' + \bar{\mu}' \cdot \bar{V}_1 = 0. \quad (23)$$

Für die *Polarfläche* 4 erhält man nach einfacher Rechnung gemäß (14)

$$\begin{aligned} x^4 &= \frac{\bar{U}_2'}{\bar{U}_1 \bar{U}_2' - \bar{U}_2 \bar{U}_1'} \cdot \frac{\bar{V}_2'}{\bar{V}_1 \bar{V}_2' - \bar{V}_2 \bar{V}_1'} \\ y^4 &= \frac{-\bar{U}_1'}{\bar{U}_1 \bar{U}_2' - \bar{U}_2 \bar{U}_1'} \cdot \frac{\bar{V}_2'}{\bar{V}_1 \bar{V}_2' - \bar{V}_2 \bar{V}_1'} \\ z^4 &= \frac{-\bar{V}_1'}{\bar{V}_1 \bar{V}_2' - \bar{V}_2 \bar{V}_1'}. \end{aligned}$$

Genau entsprechend ergibt sich die Darstellung der *Drehrißpolarfläche* 11. Daraus folgt:

Wird $\bar{\mu}$ so gewählt, daß die Bedingungen (22) und (23) erfüllt sind, dann haben die Diagonalnetze der Flächen 2, 4, 11 dieselben Eigenschaften wie das Diagonalnetz von 1.

Für die *Flächen* 12 und 3 erhält man nach Anwendung von (5) und (23) und Einführung der neuen Funktionen

$$\bar{\bar{V}}_1 = \mu \cdot \bar{V}_1 \bar{V}_2$$

$$\bar{\bar{V}}_2 = \bar{V}_1 \cdot \int \bar{\mu} \cdot \bar{V}_2 d\bar{v} \quad \bar{\bar{U}}_3 = \bar{\mu} \cdot \bar{V}_1^2 \int (\bar{U}_1 \bar{U}'_2 - \bar{U}_2 \bar{U}'_1) d\bar{u}$$

die Darstellung

$$\mathfrak{r}^3 (-\bar{U}_2 \cdot \bar{\bar{V}}_1 | \bar{U}_1 \cdot \bar{\bar{V}}_1 | \bar{\bar{U}}_3)$$

$$\mathfrak{r}^{12} (\bar{U}_2 \cdot \bar{\bar{V}}_2 | -\bar{U}_1 \cdot \bar{\bar{V}}_2 | \bar{\bar{U}}_3).$$

Auch diese Darstellung ist selbstdual.

Für die *polaren Flächen* 6 und 9 erhält man nach einfacher Rechnung gemäß (14)

$$x^6 = \frac{-\bar{U}_1}{\int (\bar{U}_1 \bar{U}'_2 - \bar{U}_2 \bar{U}'_1) d\bar{u}} \cdot \frac{1}{\bar{\bar{V}}_1} \quad x^9 = \frac{\bar{U}_1}{\int (\bar{U}_1 \bar{U}'_2 - \bar{U}_2 \bar{U}'_1) d\bar{u}} \cdot \frac{1}{\bar{\bar{V}}_2}$$

$$y^6 = \frac{-\bar{U}_2}{\int (\bar{U}_1 \bar{U}'_2 - \bar{U}_2 \bar{U}'_1) d\bar{u}} \cdot \frac{1}{\bar{\bar{V}}_1} \quad y^9 = \frac{\bar{U}_2}{\int (\bar{U}_1 \bar{U}'_2 - \bar{U}_2 \bar{U}'_1) d\bar{u}} \cdot \frac{1}{\bar{\bar{V}}_2}$$

$$z^6 = \frac{-1}{\bar{\bar{U}}_3} \quad z^9 = \frac{-1}{\bar{\bar{U}}_3}.$$

Geometrische Bedeutung: Die Flächen 3, 6, 9, 12 sind Regelflächen. Die Kurven $\bar{u} = \text{const}$ sind die horizontalen Erzeugenden. Sie schneiden die z -Achse. Die Kurven $\bar{v} = \text{const}$ durchschneiden die Erzeugenden so, daß die Quertangenten längs jeder Erzeugenden im Grundriß parallel sind.

Für die Skalarprodukte der Schraubrißflächen 12-1 bzw. 2-3 ergibt sich

$$\mathfrak{r}^{12} \cdot \mathfrak{r}^1 = \bar{\bar{U}}_3 \cdot \bar{\bar{V}}_2 \quad \mathfrak{r}^2 \cdot \mathfrak{r}^3 = -\bar{\bar{U}}_3 \int \bar{\mu} \cdot \bar{V}'_2 d\bar{v}.$$

Nach den Radialbeziehungen

$$\mathfrak{r}^8 = \frac{-\mathfrak{r}^3}{\mathfrak{r}^2 \cdot \mathfrak{r}^3} \quad \mathfrak{r}^7 = \frac{-\mathfrak{r}^{12}}{\mathfrak{r}^1 \mathfrak{r}^{12}}$$

erhält man die Darstellung

$$\mathfrak{r}^8 \left(\frac{-\bar{U}_2}{\bar{U}_3} \cdot \frac{\bar{\bar{V}}_1}{\int \bar{\mu} \cdot \bar{V}'_2 d\bar{v}} \mid \frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_3} \cdot \frac{\bar{\bar{V}}_1}{\int \bar{\mu} \cdot \bar{V}'_2 d\bar{v}} \mid \frac{1}{\int \bar{\mu} \cdot \bar{V}'_2 d\bar{v}} \right)$$

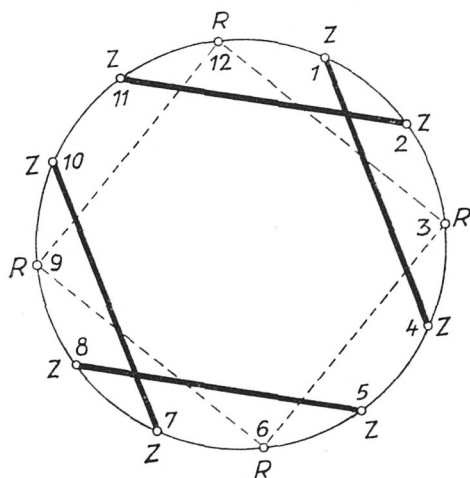
und

$$\mathfrak{r}^7 \left(\frac{-\bar{U}_2}{\bar{U}_3} \cdot \frac{\bar{\bar{V}}_2}{\bar{V}_2} \mid \frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_3} \cdot \frac{\bar{\bar{V}}_2}{\bar{V}_2} \mid \frac{-1}{\bar{V}_2} \right).$$

Die Flächen 7 und 8 sind also in der Form (21) darstellbar. Nachdem (21) eine selbstduale Kennzeichnung bedeutet, gilt dies auch für die Flächen 10 und 5. Die Flächen 5, 7, 8, 10 sind demnach zylindrokonische Flächen mit den durch die Bedingungen (20) festgelegten geometrischen Eigenschaften.

Zusammenfassung:

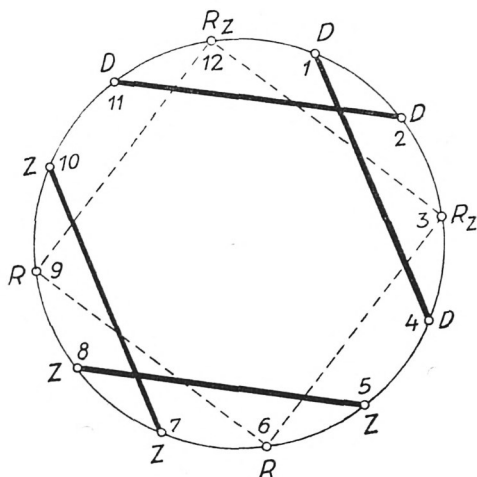
Ist die Ausgangsfläche eines Darbouxschen Flächenkranzes eine spezielle Quasi-Rückungsfläche mit einem ebenen zylindrokonischen



Z = zylindrokonische Fläche, R = Regelfläche

Fig. 8

schen Netz als Diagonalnetz des Haupttangentialnetzes, dann können die willkürlichen Funktionen so gewählt werden, daß die Drehrißfläche 2 dieselbe Eigenschaft hat wie die Fläche 1. Die Flächen 3, 6, 9, 12 sind dann Regelflächen, die übrigen Flächen sind doppelkonisch (Fig. 8).



D = Drehfläche, Z = zylindrokonische Fläche, R = Regelfläche, R_s = Regelflächen, bei denen die zweite Haupttangentiallinienschar aus Zylinderschraubenlinien besteht

Fig. 9

5.3. Drehflächen

Wir betrachten den Flächenkranz über einer speziellen Quasi-Rückungsfläche, die gleichzeitig Drehfläche ist. Das DiagonaleNetz des Haupttangentialnetzes ist das Netz der Krümmungslinien.

Diese Eigenschaft wird durch die Bedingungen (20) und durch die zusätzliche Bedingung

$$x^2 + y^2 = f(\bar{v}) \quad (24)$$

erreicht.

Die Bedingungen (20) und (24) sind erfüllt, wenn die Ausgangsfläche 1 in der Form (21) angegeben werden kann und die

Funktionen $\bar{U}_1$ und $\bar{U}_2$ der Bedingung

$$\bar{U}_1^2 + \bar{U}_2^2 = \text{const}$$

genügen.

Die *Drehrißfläche* 2 ist ebenfalls eine Drehfläche, wenn die Bedingungen (22) und (23) erfüllt sind. Die *polaren Flächen* 4 und 11 werden Drehflächen, wenn die Funktionen $\bar{U}_1$ und $\bar{U}_2$ der weiteren Bedingung

$$\bar{U}_1 \cdot \bar{U}'_2 - \bar{U}_2 \cdot \bar{U}'_1 = \text{const}$$

genügen.

Die Flächen 3, 6, 9, 12 sind dann Regelflächen, die Flächen 5, 7, 8, 10 doppelkonische Flächen (Fig. 9).

§ 6. Beispiele

Die Ausgangsflächen sind den Beispielen der in der Vorbemerkung zitierten Arbeit von R. Sauer [1] entnommen. Wendet man die Ergebnisse des § 5 auf die Ausgangsflächen an, dann kann man durch einfache Rechnungen [12] alle Kranzflächen bestimmen. Der Einfachheit halber sind bei den Beispielen 1 und 2 einige Flächen in Ebenenkoordinaten angegeben. Durch (14) ist damit auch die Darstellung in Punktkoordinaten eindeutig festgelegt.

Beispiel 1

$$\text{Ausgangsfläche: } \mathfrak{r}^1 \left(u^2 + v^2 \mid u + v \mid \frac{1}{3} (u - v)^3 \right).$$

$$\text{Mit } \Phi(u) = u^2 \quad \Psi(v) = v^2 \quad \text{erhält man} \quad \bar{\mu} = -\frac{1}{2}.$$

Nach Diagonaltransformation (9) ergibt sich

$$\mathfrak{r}^1 = \left(2 (\bar{u}^2 + \bar{v}^2) \mid 2 \bar{u} \mid \frac{8}{3} \bar{v}^3 \right)$$

$$\mathfrak{r}^2 = \left(-\bar{u}^2 + \bar{v}^2 \mid -\bar{u} \mid + \frac{4}{3} \bar{v}^3 \right)$$

$$\mathfrak{r}^3 = \left(\frac{8}{3} \bar{u} \bar{v}^3 \mid -\frac{8}{3} \bar{u}^2 \bar{v}^3 - \frac{8}{15} \bar{v}^5 \mid 2 \bar{u} \bar{v}^2 + \frac{2}{3} \bar{u}^3 \right)$$

$$\mathfrak{L}^4 = \left(\frac{3}{2(\bar{v}^2 - 3\bar{u}^2)} \mid \frac{-\bar{u}}{\bar{v}^2 - 3\bar{u}^2} \mid \frac{-1}{4\bar{v}^2(\bar{v}^2 - 3\bar{u}^2)} \right)$$

$$\mathfrak{W}^5 = \mathfrak{L}^8$$

$$\mathfrak{W}^6 = \mathfrak{L}^3$$

$$\mathfrak{L}^7 = \left(\frac{-15}{9\bar{v}^2 - 50\bar{u}^2} \mid \frac{15\bar{u}^2 + 3\bar{v}^2}{\bar{u}(9\bar{v}^2 - 50\bar{u}^2)} \mid \frac{-15(3\bar{v}^2 - \bar{u}^2)}{4\bar{v}^3(9\bar{v}^2 - 50\bar{u}^2)} \right)$$

$$\mathfrak{L}^8 = \left(\frac{-15}{3\bar{v}^2 - 5\bar{u}^2} \mid \frac{3\bar{v}^2 - 15\bar{u}^2}{\bar{u}(3\bar{v}^2 - 5\bar{u}^2)} \mid \frac{15(3\bar{v}^2 - \bar{u}^2)}{4\bar{v}^3(3\bar{v}^2 - 4\bar{u}^2)} \right)$$

$$\mathfrak{W}^9 = \mathfrak{L}^{12}$$

$$\mathfrak{W}^{10} = \mathfrak{L}^7$$

$$\mathfrak{L}^{11} = \left(\frac{-3}{\bar{v}^2 - 3\bar{u}^2} \mid \frac{2\bar{u}}{\bar{v}^2 - 3\bar{u}^2} \mid \frac{1}{2\bar{v}^2(\bar{v}^2 - 3\bar{u}^2)} \right)$$

$$\mathfrak{L}^{12} = \left(-\frac{8}{3}\bar{u}\bar{v}^3 \mid -\frac{8}{3}\bar{u}^2\bar{v}^3 - \frac{8}{15}\bar{v}^5 \mid 2\bar{u}\bar{v}^2 + \frac{2}{3}\bar{u}^3 \right).$$

Beispiel 2

Ausgangsfläche:

$$\mathfrak{L}^1 (\text{Cos } u + \text{Cos } v \mid \text{Sin } u + \text{Sin } v \mid \text{Sin } (u - v) - (u - v))$$

Mit $\Phi(u) = \Psi(v) = 1$ erhält man $\bar{\mu} = \frac{-1}{2\text{Cos}^2 \bar{v}}$.

Nach Diagonaltransformation (9) ergibt sich

$$\mathfrak{L}^1 = (\text{Cos } \bar{u} \cdot 2 \text{Cos } \bar{v} \mid \text{Sin } \bar{u} \cdot 2 \text{Cos } \bar{v} \mid 2(\text{Sin } \bar{v} \cdot \text{Cos } \bar{v} - \bar{v}))$$

$$\mathfrak{L}^2 = \left(\text{Cos } \bar{u} \cdot \frac{-1}{\text{Cos } \bar{v}} \mid \text{Sin } \bar{u} \cdot \frac{-1}{\text{Cos } \bar{v}} \mid -2(\text{Tan } \bar{v} - \bar{v}) \right)$$

$$\mathfrak{L}^3 = \left(\text{Sin } \bar{u} \cdot \frac{2(\text{Sin } \bar{v} \cdot \text{Cos } \bar{v} - \bar{v})}{\text{Cos } \bar{v}} \mid -\text{Cos } \bar{u} \cdot \frac{2(\text{Sin } \bar{v} \cdot \text{Cos } \bar{v} - \bar{v})}{\text{Cos } \bar{v}} \mid -2\bar{u} \right)$$

$$\mathfrak{W}^4 = \mathfrak{L}^1$$

$$\mathfrak{W}^5 = \mathfrak{L}^8$$

$$\mathfrak{W}^6 = \mathfrak{L}^3$$

$$\mathfrak{L}^7 = \left(\frac{-\text{Sin } \bar{u}}{\bar{u}} \cdot \frac{\bar{v} \text{Cos } \bar{v} - \text{Sin } \bar{v}}{\text{Sin } \bar{v} \cdot \text{Cos } \bar{v} - \bar{v}} \mid \frac{\text{Cos } \bar{u}}{\bar{u}} \cdot \frac{\bar{v} \text{Cos } \bar{v} - \text{Sin } \bar{v}}{\text{Sin } \bar{v} \cdot \text{Cos } \bar{v} - \bar{v}} \mid \frac{-1}{\text{Sin } \bar{v} \cdot \text{Cos } \bar{v} - \bar{v}} \right)$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{z}^8 &= \left(\frac{\sin \bar{u}}{2 \bar{u}} \cdot \frac{\sin \bar{v} \cdot \cos \bar{v} - \bar{v}}{\bar{v} \cos \bar{v} - \sin \bar{v}} \mid \frac{-\cos \bar{u}}{2 \bar{u}} \cdot \frac{\sin \bar{v} \cdot \cos \bar{v} - \bar{v}}{\bar{v} \cos \bar{v} - \sin \bar{v}} \mid \frac{-1}{2(\bar{v} - \tan \bar{v})} \right) \\
\mathfrak{w}^9 &= \mathfrak{z}^{12} \\
\mathfrak{w}^{10} &= \mathfrak{z}^7 \\
\mathfrak{w}^{11} &= \mathfrak{z}^2 \\
\mathfrak{z}^{12} &= (-\sin \bar{u} \cdot 4(\bar{v} \cos \bar{v} - \sin \bar{v}) \mid \cos \bar{u} \cdot 4(\bar{v} \cos \bar{v} - \sin \bar{v}) \mid -2 \bar{u})
\end{aligned}$$

Beispiel 3

Ausgangsfläche:

$$\mathfrak{z}^1 (\cos u + \cos v \mid \sin u + \sin v \mid \sin(u-v) - (u-v)).$$

Mit $\Phi(u) = \Psi(v) = 1$ erhält man $\bar{\mu} = \frac{1}{2 \cos^2 \bar{v}}$.

Nach Diagonaltransformation (9) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{z}^1 &= (2 \cos \bar{u} \cdot \cos \bar{v} \mid 2 \sin \bar{u} \cdot \cos \bar{v} \mid 2(\sin \bar{v} \cdot \cos \bar{v} - \bar{v})) \\
\mathfrak{z}^2 &= \left(\cos \bar{u} \cdot \frac{1}{\cos \bar{v}} \mid \sin \bar{u} \cdot \frac{1}{\cos \bar{v}} \mid 2(\tan \bar{v} - \bar{v}) \right) \\
\mathfrak{z}^3 &= \left(2 \sin \bar{u} \cdot \frac{\cos \bar{v}}{\bar{v} - \sin \bar{v} \cdot \cos \bar{v}} \mid -2 \cos \bar{u} \cdot \frac{\cos \bar{v}}{\bar{v} - \sin \bar{v} \cdot \cos \bar{v}} \mid 2 \bar{u} \right) \\
\mathfrak{z}^4 &= \left(-\cos \bar{u} \cdot \frac{\sin \bar{v}}{\bar{v} + \sin \bar{v} \cdot \cos \bar{v}} \mid -\sin \bar{u} \cdot \frac{\sin \bar{v}}{\bar{v} + \sin \bar{v} \cdot \cos \bar{v}} \mid \frac{1}{2(\bar{v} + \sin \bar{v} \cdot \cos \bar{v})} \right) \\
\mathfrak{z}^5 &= \left((\cos \bar{u} + \bar{u} \sin \bar{u}) \cdot \frac{2 \sin \bar{v}}{\bar{v} + \sin \bar{v} \cdot \cos \bar{v}} \mid \right. \\
&\quad \left. (\sin \bar{u} - \bar{u} \cos \bar{u}) \cdot \frac{2 \sin \bar{v}}{\bar{v} + \sin \bar{v} \cdot \cos \bar{v}} \mid \frac{4 \sin^2 \bar{v}}{\bar{v} + \sin \bar{v} \cdot \cos \bar{v}} - 2 \bar{v} \right) \\
\mathfrak{z}^6 &= \left(\frac{\cos \bar{u}}{\bar{u}} \cdot \frac{\cos \bar{v}}{2(\bar{v} - \sin \bar{v} \cdot \cos \bar{v})} \mid \frac{\sin \bar{u}}{\bar{u}} \cdot \frac{\cos \bar{v}}{2(\bar{v} - \sin \bar{v} \cdot \cos \bar{v})} \mid \frac{-1}{2 \bar{u}} \right) \\
\mathfrak{z}^7 &= \left(\frac{\sin \bar{u}}{\bar{u}} \cdot \frac{\bar{v} \cos \bar{v} - \sin \bar{v}}{\bar{v} - \sin \bar{v} \cdot \cos \bar{v}} \mid \frac{-\cos \bar{u}}{\bar{u}} \cdot \frac{\bar{v} \cos \bar{v} - \sin \bar{v}}{\bar{v} - \sin \bar{v} \cdot \cos \bar{v}} \mid \frac{1}{2(\bar{v} - \sin \bar{v} \cdot \cos \bar{v})} \right) \\
\mathfrak{z}^8 &= \left(\frac{\sin \bar{u}}{2 \bar{u}} \cdot \frac{\bar{v} - \sin \bar{v} \cdot \cos \bar{v}}{\bar{v} \cos \bar{v} - \sin \bar{v}} \mid \frac{-\cos \bar{u}}{2 \bar{u}} \cdot \frac{\bar{v} - \sin \bar{v} \cdot \cos \bar{v}}{\bar{v} \cos \bar{v} - \sin \bar{v}} \mid \frac{1}{2(\bar{v} - \tan \bar{v})} \right) \\
\mathfrak{z}^9 &= \left(\frac{\cos \bar{u}}{2 \bar{u}} \cdot \frac{1}{\bar{v} \cos \bar{v} - 2 \sin \bar{v}} \mid \frac{\sin \bar{u}}{2 \bar{u}} \cdot \frac{1}{\bar{v} \cos \bar{v} - 2 \sin \bar{v}} \mid \frac{-1}{2 \bar{u}} \right)
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{r}^{10} = \left((\cos \bar{u} + \bar{u} \sin \bar{u}) \cdot \frac{2 \sin \bar{v}}{\bar{v}} \mid (\sin \bar{u} - \bar{u} \cos \bar{u}) \cdot \frac{2 \sin \bar{v}}{\bar{v}} \mid \frac{4 \sin^2 \bar{v}}{\bar{v}} - 2 (\bar{v} + \sin \bar{v} \cdot \cos \bar{v}) \right)$$

$$\mathfrak{r}^{11} = \left(-\cos \bar{u} \cdot \frac{\sin \bar{v}}{\bar{v}} \mid -\sin \bar{u} \cdot \frac{\sin \bar{v}}{\bar{v}} \mid \frac{1}{2 \bar{v}} \right)$$

$$\mathfrak{r}^{12} = (4 \sin \bar{u} (\bar{v} \cos \bar{v} - \sin \bar{v}) \mid -4 \cos \bar{u} (\bar{v} \cos \bar{v} - \sin \bar{v}) \mid 2 \bar{u})$$

Literaturverzeichnis

- [1] R. Sauer, Infinitesimale Verbiegung der Flächen, deren Asymptotenlinien ein Quasi-Rückungsnetz bilden. Ak. Sitz. Ber. Mchn. 1949.
- [2] G. Darboux, Théorie des surfaces. IV. S. 48–86. Paris 1896.
- [3] E. Salkowski, Affine Differentialgeometrie. § 54. Göschens Lehrbücherei Band 22, Berlin 1934.
- [4] R. Sauer, Projektive Transformationen des Darbouxschen Flächenkranzes. Archiv der Math. Bd. 1, 1948, Heft 2.
- [5] R. Sauer, Projektive Liniengeometrie. Abschn. V, S. 145–161. Göschens Lehrbücherei Band 23, Berlin 1937.
- [6] E. Meiners, Der Darbouxsche Flächenkranz im Bereich der allgemeinen projektiven Abbildungen. Dissertation Aachen 1941, Würzburg, Trilsch.
- [7] W. Blaschke, Affine Differential-Geometrie § 69. S. 180. Springer-Berlin 1923.
- [8] R. Sauer, Über Flächenklassen, bei denen sämtliche infinitesimale Verbiegungen durch Quadraturen darstellbar sind. – Unveröffentlicht –.
- [9] Fubini-Čech, Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces. Paris 1931.
- [10] G. Bol, Projektive Differentialgeometrie. Göttingen 1950.
- [11] K. Strubecker, Über die Flächen, deren Asymptotenlinien ein Quasi-Rückungsnetz bilden. Ak. Sitz. Ber. Mchn. 1952.
- [12] R. Baumann, Untersuchungen über den Darbouxschen Flächenkranz von Quasi-Rückungsflächen. Dissertation Technische Hochschule München 1956.