BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1957

MÜNCHEN 1958

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über zwei Kettenbrüche von *H. S. Wall*

Von **Oskar Perron** in München

Vorgelegt am 10. Mai 1957

§ 1. Das Ziel

Herr H. S. Wall hat kürzlich den folgenden bemerkenswerten Satz bewiesen:[1] Wenn für die Teilzähler des Kettenbruches

$$(1.0)\qquad \frac{1|}{|1} + \frac{a_1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} + \cdots$$

der lim inf $|a_\nu|$ endlich ist und wenn der gerade Teil

$$(1.1)\qquad \frac{1|}{|1+a_1} - \frac{a_1 a_2|}{|1+a_2+a_3} - \frac{a_3 a_4|}{|1+a_4+a_5} - \cdots$$

und ebenso der ungerade Teil

$$(1.2)\qquad 1 - \frac{a_1|}{|1+a_1+a_2} - \frac{a_2 a_3|}{|1+a_3+a_4} - \frac{a_4 a_5|}{|1+a_5+a_6} - \cdots$$

konvergent sind, dann haben beide den gleichen Wert, so daß auch der Kettenbruch (1.0) konvergiert. Sein Beweis ist, obwohl der Satz keineswegs auf der Hand liegt, überraschend einfach und kann mühelos vom Blatt gelesen werden.

Herr Wall benutzt seinen Satz, um die Konvergenz des Kettenbruches (1.0) unter der Voraussetzung zu beweisen, daß es eine positive Zahl $r \leqq 1$ gibt derart, daß

$$(1.3)\qquad |a_{2\nu}| \leqq r^2, \quad |a_{2\nu-1}| \geqq (r+1)^2 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist, oder vielmehr, er muß die zweite Forderung leicht verschärfen durch Hinzufügen eines beliebig kleinen positiven ε auf der rechten Seite. Für $r < 1$ und ebenfalls mit diesem ε war der Satz

[1] H. S. Wall: Partially bounded continued fractions. Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 7, S. 1090–1093 (1956).

schon 1943 mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln von Herrn Thron bewiesen worden.[2] Den vollen Satz für $r \leqq 1$ und ohne ε hat, wie Herr Wall angibt, im Jahr 1950 Herr George Copp in seiner Dissertation (University of Texas) bewiesen, die mir nicht vorliegt, aber wohl ebensowenig wie die Arbeit von Thron so vorgehen kann, daß zuerst die Konvergenz von (1.1) und (1.2) bewiesen wird, weil ja der obige Satz von Wall, der dann die Konvergenz von (1.0) verbürgt, noch nicht bekannt war. Der Konvergenzbeweis für den Kettenbruch (1.1) ist nun allerdings bei Herrn Wall nichts weniger als einfach. Er stützt ihn auf seine Theorie der positiv definiten Kettenbrüche, setzt also Vertrautheit mit einem ziemlich komplizierten Apparat voraus und faßt sich dabei so kurz, daß mir manches dunkel blieb; ich kann nicht einmal die doch gewiß vorhandene Stelle erkennen, wo der Beweis ohne das kleine ε versagen würde. Vom Kettenbruch (1.2) heißt es dann nur, daß der Konvergenzbeweis ebenso verläuft.

Nach all dem schien es mir lohnend, einmal die Frage zu prüfen, ob man den Kettenbrüchen (1.1) und (1.2) unter der Bedingung (1.3) nicht mit wesentlich einfacheren Mitteln beikommen und vielleicht noch mehr über sie aussagen kann, ganz unabhängig von ihrem Zusammenhang mit (1.0). Das ist nun in der Tat der Fall; im folgenden werden nur die primitivsten Kettenbruchformeln gebraucht, und es wird sich dabei für (1.1) und (1.2) ein recht unterschiedliches Verhalten herausstellen. Es werden die folgenden zwei Sätze bewiesen:

Satz 1. *Der Kettenbruch*

$$\text{(I)} \qquad \frac{1|}{|1+\beta_1} - \frac{\alpha_2|}{|1+\beta_2+\alpha_2} - \frac{\alpha_3|}{|1+\beta_3+\alpha_3} - \cdots$$

ist unter der Bedingung

$$\text{(I*)} \qquad |\alpha_{\nu+1}| \leqq \varrho^2, \quad |\beta_\nu| \leqq (1-\varrho)^2 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

wo ϱ eine positive Zahl kleiner als 1 *bedeutet, konvergent.*

---

[2] W. J. Thron: Two families of twin convergence regions for continued fractions. Duke Mathematical Journal, vol. 10, S. 677–685 (1943).

Satz 2. *Der Kettenbruch*

$$\text{(II)}\qquad \frac{1}{|\,1+\beta_1+\alpha_1} - \frac{\alpha_1\,|}{|\,1+\beta_2+\alpha_2} - \frac{\alpha_2\,|}{|\,1+\beta_3+\alpha_3} - \cdots$$

ist unter der Bedingung

$$\text{(II*)}\qquad |\alpha_\nu| \leqq \varrho^2, \quad |\beta_\nu| \leqq (1-\varrho)^2 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

konvergent, wenn $0 < \varrho \leqq \frac{1}{2}$ *ist. Dagegen gibt es Zahlen* ϱ, *die nur um beliebig wenig größer als* $\frac{1}{2}$ *und so beschaffen sind, daß nicht jeder Kettenbruch* (II), *der der Bedingung* (II*) *genügt, konvergiert.*

Ob für *jede* Zahl ϱ im Intervall $\frac{1}{2} < \varrho < 1$ dasselbe gilt, kann ich bis jetzt nicht entscheiden.

Nun wird der Kettenbruch (1.1), wenn man ihn mit a_1 multipliziert, äquivalent mit

$$\frac{1\,|}{|\,1+\frac{1}{a_1}} - \frac{\frac{a_2}{a_3}\,|}{|\,1+\frac{1}{a_3}+\frac{a_2}{a_3}} - \frac{\frac{a_4}{a_5}\,|}{|\,1+\frac{1}{a_5}+\frac{a_4}{a_5}} - \cdots.$$

Das ist ein Kettenbruch der Form (I), und zwar ist

$$\alpha_{\nu+1} = \frac{a_{2\nu}}{a_{2\nu+1}}, \quad \beta_\nu = \frac{1}{a_{2\nu-1}} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

so daß wegen (1.3) die Bedingung (I*) mit $\varrho = \frac{r}{r+1}$ erfüllt ist. Aus Satz 1 ergibt sich also die Konvergenz für $0 < \varrho < 1$, das heißt für jedes positive r (nicht nur für $r \leqq 1$).

Der Kettenbruch (1.2) wird, wenn man das Anfangsglied 1 wegläßt und ihn dann mit -1 multipliziert, äquivalent mit

$$\frac{1\,|}{|\,1+\frac{1}{a_1}+\frac{a_2}{a_1}} - \frac{\frac{a_2}{a_1}\,|}{|\,1+\frac{1}{a_3}+\frac{a_4}{a_3}} - \frac{\frac{a_4}{a_3}\,|}{|\,1+\frac{1}{a_5}+\frac{a_6}{a_5}} - \cdots.$$

Das ist ein Kettenbruch der Form (II), und zwar ist

$$\alpha_\nu = \frac{a_{2\nu}}{a_{2\nu-1}}, \quad \beta_\nu = \frac{1}{a_{2\nu-1}} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

so daß wegen (1.3) die Bedingung (II*) mit $\varrho = \frac{r}{r+1}$ erfüllt ist. Aus Satz 2 ergibt sich also die Konvergenz nur für $0 < \varrho \leqq \frac{1}{2}$, das heißt für $0 < r \leqq 1$. Dagegen gibt es Zahlen r, die nur um beliebig wenig größer als 1 und so beschaffen sind, daß nicht jeder Kettenbruch (1.2), der die Bedingung (1.3) erfüllt, konvergiert.

§ 2. Zwei Hilfssätze

Hilfssatz 1. *Wenn T_1 eine positive Zahl $\leqq 1$ ist, so sind die durch die Rekursionsformel*

$$T_{\nu+1} = \frac{1}{2 - T_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

definierten Zahlen T_ν ebenfalls sämtlich positiv und $\leqq 1$, und zwar ist

$$T_\nu = \frac{\nu - 1 - (\nu - 2)\, T_1}{\nu - (\nu - 1)\, T_1} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Der Beweis für beide Behauptungen ergibt sich sofort durch den Schluß ν auf $\nu + 1$.

Hilfssatz 2. *Sei n eine ganze Zahl $\geqq 2$. Wenn dann in dem System von $n + 1$ Gleichungen*

$$\begin{aligned} &x_0 = 1, \\ (2.1) \qquad &x_1 = (1 + q_1 + p_1)\, x_0, \\ &x_\nu = (1 + q_\nu + p_\nu)\, x_{\nu-1} - p_\nu x_{\nu-2} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n) \end{aligned}$$

für die Koeffizienten p_ν, q_ν die Ungleichungen

$$(2.2) \qquad |p_\nu| \leqq \varrho^2, \quad |q_\nu| \leqq (1 - \varrho)^2 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

gelten, wo ϱ eine feste Zahl im Intervall $0 < \varrho < 1$ ist, und wenn außerdem

$$\varrho \left(1 + \left|\frac{q_1 + p_1}{1 + q_1 + p_1}\right|\right) \leqq 1$$

ist, so gelten die beiden Ungleichungen

$$|x_\nu - x_{\nu-1}| \leqq \left(\frac{T_\nu}{\varrho} - 1\right) |x_\nu| \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

$$|x_\nu| \geqq \frac{\varrho}{T_\nu} |x_{\nu-1}| \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei $T_1 = \varrho\left(1 + \left|\frac{q_1+p_1}{1+q_1+p_1}\right|\right)$, $T_{\nu+1} = \frac{1}{2-T_\nu}$ *ist, so daß nach Hilfssatz* 1 *alle* T_ν *positiv und* $\leqq 1$ *sind.*

Beweis. Es genügt, die erste Behauptung zu beweisen. Denn aus dieser folgt dann

$$|x_{\nu-1}| - |x_\nu| \leqq \left(\frac{T_\nu}{\varrho} - 1\right) |x_\nu|, \quad \text{also } |x_{\nu-1}| \leqq \frac{T_\nu}{\varrho} |x_\nu|,$$

und das ist schon die zweite.

Für $\nu = 1$ besagt die erste Behauptung

$$|q_1 + p_1| \leqq \left(\frac{T_1}{\varrho} - 1\right) |1 + q_1 + p_1|,$$

und das ist nach der Definition von T_1 richtig, und zwar mit dem Gleichheitszeichen. Daher machen wir jetzt die Induktionsannahme, die Behauptung gelte bereits mit $\nu - 1$ an Stelle von ν. Dann folgt aus dem gegebenen Gleichungssystem:

$$x_\nu - x_{\nu-1} = q_\nu x_{\nu-1} + p_\nu (x_{\nu-1} - x_{\nu-2}),$$

also nach unseren Voraussetzungen über p_ν und q_ν und nach der Induktionsannahme

$$\begin{aligned} |x_\nu - x_{\nu-1}| &\leqq (1-\varrho)^2 |x_{\nu-1}| + \varrho^2 |x_{\nu-1} - x_{\nu-2}| \\ &\leqq (1-\varrho)^2 |x_{\nu-1}| + \varrho^2 \left(\frac{T_{\nu-1}}{\varrho} - 1\right) |x_{\nu-1}| \\ &= (1 - 2\varrho + \varrho T_{\nu-1}) |x_{\nu-1}| = \left(1 - \frac{\varrho}{T_\nu}\right) |x_{\nu-1}|. \end{aligned}$$

Daher ist auch

$$|x_{\nu-1}| - |x_\nu| \leqq \left(1 - \frac{\varrho}{T_\nu}\right) |x_{\nu-1}| \quad \text{oder also } |x_{\nu-1}| \leqq \frac{T_\nu}{\varrho} |x_\nu|,$$

und wenn man das in die vorausgehende Ungleichung einsetzt:

$$|x_\nu - x_{\nu-1}| \leqq \left(1 - \frac{\varrho}{T_\nu}\right) \frac{T_\nu}{\varrho} |x_\nu| = \left(\frac{T_\nu}{\varrho} - 1\right) |x_\nu|. \quad \text{W. z. b. w.}$$

§ 3. Beweis von Satz 1

Sind A_ν und B_ν die Näherungszähler und -nenner des Kettenbruches

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots,$$

so ist

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} A_0 = b_0, \; A_1 = b_0 b_1 + a_1, \; A_\nu = b_\nu A_{\nu-1} + a_\nu A_{\nu-2} \text{ für } \nu \geqq 2, \\ B_0 = 1, \; B_1 = b_1, \qquad\qquad B_\nu = b_\nu B_{\nu-1} + a_\nu B_{\nu-2} \text{ für } \nu \geqq 2, \end{cases}$$

$$\text{(b)} \qquad A_\nu B_{\nu-1} - A_{\nu-1} B_\nu = (-1)^{\nu-1} a_1 a_2 \ldots a_\nu \qquad \text{für } \nu \geqq 1.$$

Mit diesen primitiven Formeln, die gewiß jedermann geläufig sind, aber notfalls auch aus meinem Lehrbuch[3] Seite 7, Formel (12) und Seite 14, Formel (1) entnommen werden können, kommen wir aus. Wenden wir die zweite Zeile von (a) auf den Kettenbruch (I) an, so ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} B_0 &= 1, \\ B_1 &= (1 + \beta_1) B_0, \\ B_\nu &= (1 + \beta_\nu + \alpha_\nu) B_{\nu-1} - \alpha_\nu B_{\nu-2} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n), \end{aligned}$$

wo n jede ganze Zahl $\geqq 2$ sein darf. Das ist nun genau ein System, wie es in Hilfssatz 2 vorliegt; dabei ist

$$x_\nu = B_\nu, \quad p_\nu = \alpha_\nu, \quad q_\nu = \beta_\nu \text{ und speziell } p_1 = 0.$$

Die Bedingungen (2.2) sind erfüllt, und außerdem ist

$$(3.1) \quad T_1 = \varrho\left(1 + \left|\frac{\beta_1}{1+\beta_1}\right|\right) \leqq \varrho\left(1 + \frac{(1-\varrho)^2}{1-(1-\varrho)^2}\right) = \varrho\,\frac{1}{1-(1-\varrho)^2} = \frac{1}{2-\varrho},$$

[3] O. Perron: Die Lehre von den Kettenbrüchen, Band I, dritte Auflage, Stuttgart 1954.

also $T_1 < 1$. Nach Hilfssatz 2 ist daher

$$|B_\nu| \geqq \frac{\varrho}{T_\nu} |B_{\nu-1}|,$$

und wenn man für T_ν den Wert aus Hilfssatz 1 einsetzt,

$$|B_\nu| \geqq \varrho \frac{\nu-(\nu-1)\,T_1}{\nu-1-(\nu-2)\,T_1} \cdot |B_{\nu-1}|.$$

Schreibt man das der Reihe nach für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ auf, so folgt durch sukzessives Einsetzen und mit Berücksichtigung von (3.1):

$$|B_n| \geqq \varrho^n \frac{n-(n-1)\,T_1}{T_1} \geqq \varrho^n [n(2-\varrho)-(n-1)] > \varrho^n n(1-\varrho).$$

Daher ist auf Grund der Formel (b) für $n \geqq 2$

$$\left|\frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}\right| = \left|\frac{\alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n}{B_n B_{n-1}}\right|$$

$$< \frac{(\varrho^2)^{n-1}}{\varrho^{2n-1}\, n(n-1)\,(1-\varrho)^2} = \frac{1}{\varrho(1-\varrho)^2} \cdot \frac{1}{n(n-1)}.$$

Somit konvergiert die Reihe $\sum \left(\frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}\right)$; das heißt aber, der Kettenbruch ist konvergent.

§ 4. Beweis des ersten Teiles von Satz 2

Wir brauchen jetzt zwei weitere Kettenbruchformeln, die fast ebenso geläufig sind wie oben die Formeln (a) und (b) und notfalls aus meinem zitierten Lehrbuch Seite 11, Formel (7) und Seite 14, Formel (3) entnommen werden können:

Wenn die Näherungszähler und -nenner der beiden Kettenbrüche

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots \quad \text{und} \quad b_\lambda + \frac{a_{\lambda+1}|}{|b_{\lambda+1}} + \frac{a_{\lambda+2}|}{|b_{\lambda+2}} + \cdots$$

mit A_ν, B_ν und $A_{\nu,\lambda}$, $B_{\nu,\lambda}$ bezeichnet werden, so daß speziell $A_{\nu,0} = A_\nu$, $B_{\nu,0} = B_\nu$ ist, so ist

$$\text{(c)} \qquad B_{\nu+1,\lambda-1} = b_\lambda B_{\nu,\lambda} + a_{\lambda+1} B_{\nu-1,\lambda+1},$$

$$\text{(d)} \qquad A_{\nu+\lambda-1} B_{\lambda-1} - A_{\lambda-1} B_{\nu+\lambda-1} = (-1)^{\lambda-1} a_1 a_2 \ldots a_\lambda B_{\nu-1,\lambda}.$$

Nach (c) hat man also für irgendein $n \geqq 2$

$$\begin{aligned} B_{0,n} &= 1, \\ B_{1,n-1} &= b_n B_{0,n}, \\ B_{\nu,n-\nu} &= b_{n-\nu+1} B_{\nu-1,n-\nu+1} + a_{n-\nu+2} B_{\nu-2,n-\nu+2} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n), \end{aligned}$$

und bei Anwendung auf den Kettenbruch (II):

$$(4.1) \qquad \begin{cases} B_{0,n} = 1, \\ B_{1,n-1} = (1 + \beta_n + \alpha_n) B_{0,n}, \\ B_{\nu,n-\nu} = (1 + \beta_{n-\nu+1} + \alpha_{n-\nu+1}) B_{\nu-1,n-\nu+1} - \alpha_{n-\nu+1} B_{\nu-2,n-\nu+2} \\ \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n). \end{cases}$$

Das ist nun wieder ein System wie in Hilfssatz 2, und zwar ist diesmal

$$x_\nu = B_{\nu,n-\nu}, \quad p_\nu = \alpha_{n-\nu+1}, \quad q_\nu = \beta_{n-\nu+1}.$$

Die Bedingungen (2.2) sind erfüllt, und außerdem ist

$$(4.2) \qquad T_1 = \varrho \left(1 + \left|\frac{\beta_n + \alpha_n}{1+\beta_n+\alpha_n}\right|\right) \leqq \varrho \left(1 + \frac{(1-\varrho)^2 + \varrho^2}{1-(1-\varrho)^2-\varrho^2}\right)$$

$$= \varrho \frac{1}{1-(1-\varrho)^2-\varrho^2} = \frac{1}{2-2\varrho},$$

für $\varrho \leqq \frac{1}{2}$ also $T_1 \leqq 1$. Nach Hilfssatz 2 und 1 ist daher

$$(4.3) \qquad |B_{\nu,n-\nu}| \geqq \frac{\varrho}{T_\nu} |B_{\nu-1,n-\nu+1}|$$

$$= \varrho \frac{\nu-(\nu-1) T_1}{\nu-1-(\nu-2) T_1} |B_{\nu-1,n-\nu+1}|.$$

Schreibt man das für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ auf, so folgt durch sukzessives Einsetzen und mit Berücksichtigung von (4.2)

$$(4.4)\qquad |B_n| \geqq \varrho^n \frac{n-(n-1)\,T_1}{T_1}$$
$$\geqq \varrho^n[n(2-2\varrho)-(n-1)] = \varrho^n[n(1-2\varrho)+1)].$$

Speziell für $\varrho < \frac{1}{2}$ kommt $|B_n| > \varrho^n n(1-2\varrho)$ und dann analog wie vorhin

$$\left|\frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}\right| \leqq \frac{(\varrho^2)^{n-1}}{\varrho^{2n-1}\, n\,(n-1)\;(1-2\varrho)^2} = \frac{1}{\varrho(1-2\varrho)^2}\cdot\frac{1}{n\,(n-1)},$$

woraus die Konvergenz des Kettenbruches folgt.

Für $\varrho = \frac{1}{2}$ ergibt sich aus (4.4) nur $|B_n| \geqq \varrho^n \cdot 1$, so daß wenigstens kein B_n verschwindet. Um aber auf Konvergenz schließen zu können, bedarf es noch weiterer Überlegung. Betrachten wir zu dem Zweck den *endlichen* Kettenbruch

$$(4.5)\qquad \frac{1}{|1+\beta_1+\alpha_1} - \frac{\alpha_1|}{|1+\beta_2+\alpha_2} - \cdots - \frac{\alpha_{n-2}|}{|1+\beta_{n-1}+\alpha_{n-1}} - \frac{\alpha_{n-1}|}{|1+\beta_n},$$

bei dem also im letzten Teilnenner das α_n fehlt, und bezeichnen wir die auf diesen Kettenbruch bezüglichen $B_{\nu,n-\nu}$ mit $B'_{\nu,n-\nu}$, so gilt analog zu (4.1) ein Gleichungssystem, das sich von (4.1) nur dadurch unterscheidet, daß α_n durch 0 und die $B_{\nu,n-\nu}$ durch $B'_{\nu,n-\nu}$ für $\nu = 0, 1, \ldots, n$ ersetzt sind. Die auf dieses veränderte System bezüglichen T_ν bezeichnen wir mit T'_ν. Dann ist analog zu (4.2)

$$T'_1 = \varrho\left(1+\left|\frac{\beta_n}{1+\beta_n}\right|\right) \leqq \varrho\left(1+\frac{(1-\varrho)^2}{1-(1-\varrho)^2}\right) = \varrho\,\frac{1}{1-(1-\varrho)^2} = \frac{1}{2-\varrho},$$

und analog zu (4.4) ist

$$|B'_n| \geqq \varrho^n \frac{n-(n-1)\,T_1}{T'_1} \geqq \varrho^n\,[n(2-\varrho)-(n-1)] = \varrho^n\,[n\,(1-\varrho)+1].$$

Nun folgt aber aus der zweiten Zeile der Formeln (a) bei Anwendung auf den Kettenbruch (4.5)

$$B'_n = (1+\beta_n)\,B_{n-1} - \alpha_{n-1}\,B_{n-2},$$

wo B_{n-1} und B_{n-2} die frühere Bedeutung haben. Somit ist

$$|(1+\beta_n)\,B_{n-1}-\alpha_{n-1}\,B_{n-2}|>\varrho^n\,n(1-\varrho)$$

und daher erst recht

$$2\,|B_{n-1}|+2\,|B_{n-2}|>\varrho^n\,n\,(1-\varrho).$$

Daher ist für je zwei aufeinanderfolgende Indizes λ wenigstens einmal $|B_\lambda|>c\,\varrho^\lambda\,\lambda$, wo man, da $\varrho=\frac{1}{2}$ ist, für c etwa die Zahl $\frac{1}{24}$ wählen kann.

Nach (4.3) ist $|B_{\nu,\,n-\nu}|\geqq\frac{\varrho}{T_\nu}\,|B_{\nu-1,\,n-\nu+1}|$ und, da $T_\nu\leqq 1$ ist, erst recht $|B_{\nu,\,n-\nu}|\geqq\varrho\,|B_{\nu-1,\,n-\nu+1}|$. Oder mit geänderten Indizes sukzessive:

$$|B_{\nu+\lambda}|\geqq\varrho\,|B_{\nu+\lambda-1,\,1}|\geqq\varrho^2\,|B_{\nu+\lambda-2,\,2}|\geqq\cdots\geqq\varrho^{\lambda+1}\,|B_{\nu-1,\,\lambda+1}|.$$

Daraus folgt mit Benutzung der Formel (d), wenn darin λ durch $\lambda+1$ ersetzt wird,

$$\left|\frac{A_{\nu+\lambda}}{B_{\nu+\lambda}}-\frac{A_\lambda}{B_\lambda}\right|=\left|\frac{\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_\lambda}{B_\lambda}\;\frac{B_{\nu-1,\,\lambda+1}}{B_{\nu+\lambda}}\right|\leqq\frac{\varrho^{2\lambda}}{|B_\lambda|}\;\frac{1}{\varrho^{\lambda+1}}=\frac{\varrho^{\lambda-1}}{|B_\lambda|}.$$

Hiernach gibt es, da für zwei aufeinanderfolgende Indizes λ mindestens einmal $|B_\lambda|>c\,\varrho^\lambda\,\lambda$ ist, eine unendliche Folge von Indices λ derart, daß für alle $\nu\geqq 1$

$$\left|\frac{A_{\nu+\lambda}}{B_{\nu+\lambda}}-\frac{A_\lambda}{B_\lambda}\right|<\frac{\varrho^{\lambda-1}}{c\,\varrho^\lambda\,\lambda}=\frac{1}{c\,\varrho\,\lambda}$$

ist. Hieraus folgt sofort die Konvergenz. Denn ist etwa $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\ldots$ eine Folge wachsender Indizes, für welche vorstehendes gilt, so ist insbesondere für $n>m$

$$\left|\frac{A_{\lambda_n}}{B_{\lambda_n}}-\frac{A_{\lambda_m}}{B_{\lambda_m}}\right|<\frac{1}{c\,\varrho\,\lambda_m}<\varepsilon,$$

wo ε beliebig klein sein darf, wenn nur m genügend groß ist. Nach dem Cauchyschen Konvergenzprinzip haben also die $\frac{A_{\lambda_n}}{B_{\lambda_n}}$ einen Grenzwert K, und es ist dann

$$\left| K - \frac{A_{\lambda_m}}{B_{\lambda_m}} \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{A_\nu}{B_\nu} - \frac{A_{\lambda_m}}{B_{\lambda_m}} \right| < \varepsilon \quad \text{für } \nu > \lambda_m .$$

Daher auch

$$\left| \frac{A_\nu}{B_\nu} - K \right| < 2\,\varepsilon,$$

womit die Konvergenz bewiesen ist.

§ 5. Beweis des zweiten Teiles von Satz 2

Sei k eine ganze Zahl $\geqq 3$. Wir setzen $\varrho = \frac{1}{2}\,\frac{k}{k-1}$, so daß ϱ nur um beliebig wenig größer als $\frac{1}{2}$ ist, wenn k groß genug gewählt wird. Dann bilden wir den Kettenbruch (II) mit

$$\beta_\nu = -(1-\varrho)^2, \quad \alpha_\nu = \begin{cases} -\,\varrho^2 & \text{für } \nu \equiv 0 \pmod{k}, \\ +\,\varrho^2 & \text{für } \nu \not\equiv 0 \pmod{k}. \end{cases}$$

So entsteht der k-gliedrig periodische Kettenbruch

$$\underbrace{\frac{1\,|}{|\,2\varrho} - \frac{\varrho^2\,|}{|\,2\varrho} - \cdots - \frac{\varrho^2\,|}{|\,2\varrho} - \frac{\varrho^2\,|}{|\,2\varrho - 2\varrho^2}}_{k}$$

$$+ \underbrace{\frac{\varrho^2\,|}{|\,2\varrho} - \frac{\varrho^2\,|}{|\,2\varrho} - \cdots - \frac{\varrho^2\,|}{|\,2\varrho} - \frac{\varrho^2\,|}{|\,2\varrho - 2\varrho^2}}_{k} + \cdots,$$

von dem wir zeigen wollen, daß er divergiert. Nach Multiplikation mit ϱ wird er äquivalent mit

$$(5.1) \quad \underbrace{\frac{1\,|}{|\,2} - \frac{1\,|}{|\,2} - \cdots - \frac{1\,|}{|\,2} - \frac{1\,|}{|\,\vartheta}}_{k} + \underbrace{\frac{1\,|}{|\,2} - \frac{1\,|}{|\,2} - \cdots - \frac{1\,|}{|\,2} - \frac{1\,|}{|\,\vartheta}}_{k} + \cdots,$$

wobei

$$(5.2) \qquad \vartheta = 2 - 2\varrho = 2 - \frac{k}{k-1} = \frac{k-2}{k-1},$$

also $0 < \vartheta < 1$ ist. Bezeichnen wir mit A_ν, B_ν die Näherungszähler und -nenner des Kettenbruches (5.1), dann gelten nach den Formeln (a) die Rekursionsformeln

$$A_{rk+\lambda} = 2A_{rk+\lambda-1} - A_{rk+\lambda-2} \quad (\lambda = 2, 3, \ldots, k-1), \tag{5.3}$$

$$A_{(r+1)k} = \vartheta A_{rk+k-1} - A_{rk+k-2}, \tag{5.4}$$

$$A_{(r+1)k+1} = 2A_{(r+1)k} + A_{rk+k-1}, \tag{5.5}$$

und entsprechend mit B an Stelle von A. Wir wollen jetzt zeigen, daß

$$\begin{cases} A_{rk+\lambda} = (k-1)^r \lambda, \\ B_{rk+\lambda} = (k-1)^r (1-g)\lambda + (\vartheta-1)^r (g\lambda+1) \end{cases} \tag{5.6}$$

für $r = 0, 1, 2, \ldots$ und $\lambda = 0, 1, \ldots, k-1$ ist, wobei

$$g = \frac{-\vartheta}{k-\vartheta} \tag{5.7}$$

ist. Offenbar sind die Formeln richtig für $r = 0$ mit $\lambda = 0$ und 1. Wir machen daher die Induktionsannahme, daß sie für ein gewisses r mit $\lambda = 0$ und 1 gelten, und zeigen, daß sie dann für dieses r auch mit $\lambda = 2, 3, \ldots, k-1$ und außerdem für $r+1$ an Stelle von r mit $\lambda = 0$ und 1 gelten. Alsdann werden sie allgemein bewiesen sein.

Daß nun die Gültigkeit von (5.6) für $\lambda = 0$ und 1 auch die für $\lambda = 2, 3, \ldots, k-1$ nach sich zieht, ergibt sich sofort sukzessive aus (5.3) und der entsprechenden Formel mit B an Stelle von A. Sodann folgt aus (5.4)

$$A_{(r+1)k} = \vartheta(k-1)^r(k-1) - (k-1)^r(k-2),$$

und da nach (5.2)

$$\vartheta(k-1) - (k-2) = 0 \tag{5.8}$$

ist, ergibt sich $A_{(r+1)k} = 0 = (k-1)^{r+1} \cdot 0$, und sodann nach (5.5)

$A_{(r+1)k+1} = 2 \cdot 0 + (k-1)^r(k-1) = (k-1)^{r+1} \cdot 1$. Damit sind die A_ν bereits erledigt.

Für die B_ν liefert die Formel (5.4) mit B an Stelle von A:

$$B_{(r+1)k} = \vartheta \left\{(k-1)^r \ (1-g)\ (k-1)\ + (\vartheta-1)^r\ [g(k-1)+1]\right\}$$
$$-\left\{(k-1)^r\ (1-g)\ (k-2)\ + (\vartheta-1)^r\ [g(k-2)+1]\right\},$$

was sich wegen (5.8) reduziert auf

$$B_{(r+1)k} = (\vartheta-1)^r\ (\vartheta-1) = (\vartheta-1)^{r+1},$$

so daß die zweite Formel (5.6) auch für $r+1$ an Stelle von r mit $\lambda = 0$ gilt. Weiter folgt dann aus (5.5) mit B an Stelle von A

$$B_{(r+1)k+1}$$
$$= 2(\vartheta-1)^{r+1} + (k-1)^r\ (1-g)\ (k-1) + (\vartheta-1)^r [g(k-1)+1]$$
$$= (k-1)^{r+1}\ (1-g)\ + (\vartheta-1)^{r+1} \left(2 + \frac{g(k-1)+1}{\vartheta-1}\right).$$

Wenn wir nun zeigen können, daß

$$2 + \frac{g(k-1)+1}{\vartheta-1} = g+1 \tag{5.9}$$

ist, so besagt das

$$B_{(r+1)k+1} = (k-1)^{r+1}\ (1-g)\cdot 1\ + (\vartheta-1)^{r+1}\ (g\cdot 1+1),$$

womit auch die zweite Formel (5.6) allgemein bewiesen ist. Nun trifft aber die Formel (5.9) tatsächlich zu; denn sie besagt soviel wie

$$\vartheta-1+g(k-1)+1 = g(\vartheta-1),$$

oder also $\vartheta = g(\vartheta-k)$, was nach der Definition von g in (5.7) richtig ist.

Aus den Formeln (5.6) folgt nun, da $k-1 > 1 > |\vartheta-1|$ ist, sofort

$$\lim_{r\to\infty} \frac{A_{rk}}{B_{rk}} = 0,$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{A_{rk+\lambda}}{B_{rk+\lambda}} = \frac{1}{1-g} = \frac{k-\vartheta}{k} \qquad \text{für } \lambda = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Der Kettenbruch (5.1) ist also divergent. W. z. b. w.