

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1956

MÜNCHEN 1956

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über eine Schlichtheitsschranke von James S. Thale

Von Oskar Perron in München

Vorgelegt am 5. Oktober 1956

In einer kürzlich erschienenen Arbeit¹ hat Herr Thale neben anderen ähnlichen Sätzen bewiesen, daß der Kettenbruch

$$(1) \quad F_0(z) = \frac{1}{1} + \frac{a_1 z}{1} + \frac{a_2 z}{1} + \dots \quad \left(|a_v| \leq \frac{1}{4} \text{ für alle } v \right),$$

der bekanntlich für $|z| \leq 1$ gleichmäßig konvergiert² und folglich für $|z| < 1$ analytisch ist, den Kreis $|z| < 12\sqrt{2} - 16 = 0,97\dots$ *schlicht* abbildet, das heißt, daß für $z_1 \neq z_2$ stets auch $F_0(z_1) \neq F_0(z_2)$ ist. Er vermutet, daß sogar der ganze Kreis $|z| < 1$ schlicht abgebildet wird. In der Tat wird zunächst wohl kaum jemand die Richtigkeit dieser naheliegenden Vermutung bezweifeln; dennoch ist sie *falsch*, und die Schranke $12\sqrt{2} - 16$ ist sogar die *bestmögliche*.

Zum Beweis folgen wir zunächst Herrn Thales Gedanken- gang und setzen

$$(2) \quad F_v(z) = \frac{1}{1} + \frac{a_{v+1}z}{1} + \frac{a_{v+2}z}{1} + \dots \quad (v = 0, 1, 2, \dots),$$

was für $v = 0$ mit (1) übereinstimmt. Offenbar ist für $|z| \leq \varrho < 1$

$$(3) \quad 0 < |F_v(z)| \leq \frac{1}{1} - \frac{\frac{1}{4}\varrho}{1} - \frac{\frac{1}{4}\varrho}{1} - \dots = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \varrho}}.$$

Ferner ist

$$\frac{1}{F_v(z)} = 1 + a_{v+1} z F_{v+1}(z),$$

¹ James S. Thale: Univalence of continued fractions and Stieltjes transforms. Proceedings of the Amer. Math. Soc., vol. 7, Seite 232–244 (1956).

² Siehe z. B. mein Buch: Die Lehre von den Kettenbrüchen, 1. oder 2. Aufl. Seite 262.

also

$$\begin{aligned} \frac{1}{F_\nu(z_2)} - \frac{1}{F_\nu(z_1)} &= a_{\nu+1} [z_2 F_{\nu+1}(z_2) - z_1 F_{\nu+1}(z_1)] \\ &= a_{\nu+1} F_{\nu+1}(z_1) F_{\nu+1}(z_2) \left[z_2 \cdot \frac{1}{F_{\nu+1}(z_1)} - z_1 \cdot \frac{1}{F_{\nu+1}(z_2)} \right] \\ &= a_{\nu+1} F_{\nu+1}(z_1) F_{\nu+1}(z_2) [z_2(1 + a_{\nu+2} z_1 F_{\nu+2}(z_1)) \\ &\quad - z_1(1 + a_{\nu+2} z_2 F_{\nu+2}(z_2))]. \end{aligned}$$

Multipliziert man mit $F_\nu(z_1) F_\nu(z_2)$ und setzt zur Abkürzung

$$(4) \quad F_\nu(z_1) F_\nu(z_2) F_{\nu+1}(z_1) F_{\nu+1}(z_2) = Q_\nu,$$

so kommt:

$$\begin{aligned} (5) \quad &F_\nu(z_1) - F_\nu(z_2) \\ &= a_{\nu+1} Q_\nu(z_2 - z_1) + a_{\nu+1} a_{\nu+2} Q_\nu z_1 z_2 [F_{\nu+2}(z_1) - F_{\nu+2}(z_2)]. \end{aligned}$$

Schreibt man diese Formel der Reihe nach für $\nu = 0, 2, 4, \dots, 2n$ auf, so ergibt sich durch sukzessives Einsetzen:

$$\begin{aligned} &F_0(z_1) - F_0(z_2) = a_1 Q_0(z_2 - z_1) \times \\ (6) \quad &\times \left[1 + \sum_{\nu=1}^n a_2 a_3 a_4 \dots a_{2\nu+1} Q_2 Q_4 \dots Q_{2\nu} z_1^\nu z_2^\nu \right] \\ &+ a_1 a_2 a_3 \dots a_{2n+2} Q_0 Q_2 \dots Q_{2n} z_1^{n+1} z_2^{n+1} [F_{2n+2}(z_1) - F_{2n+2}(z_2)]. \end{aligned}$$

Nun ist $|a_k| \leq \frac{1}{4}$ und für $|z_k| \leq \varrho < 1$ ($k = 1, 2$) ist nach (3)

$$0 < |F_\lambda(z_k)| \leq \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \varrho}}$$

und folglich

$$0 < |Q_\lambda| \leq \left(\frac{2}{1 + \sqrt{1 - \varrho}} \right)^4.$$

Daher ergibt sich aus (6) für $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} &F_0(z_1) - F_0(z_2) = a_1 Q_0(z_2 - z_1) \times \\ (7) \quad &\times \left[1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_2 a_3 a_4 \dots a_{2\nu+1} Q_2 Q_4 \dots Q_{2\nu} z_1^\nu z_2^\nu \right]. \end{aligned}$$

Nun hat man aber die Abschätzung

$$(8) \quad \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} a_2 a_3 \dots a_{2\nu+1} Q_2 Q_4 \dots Q_{2\nu} z_1^{\nu} z_2^{\nu} \right| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{4^{2\nu}} \left(\frac{2}{1 + \sqrt{1-\varrho}} \right)^{4\nu} \varrho^{2\nu} \\ = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho^2}{(1 + \sqrt{1-\varrho})^4} \right)^{\nu} = \frac{\varrho^2}{(1 + \sqrt{1-\varrho})^4} \Big/ \left(1 - \frac{\varrho^2}{(1 + \sqrt{1-\varrho})^4} \right).$$

Speziell für $\varrho < 12\sqrt{2} - 16$ ist

$$(9) \quad \frac{\varrho}{(1 + \sqrt{1-\varrho})^2} < \frac{12\sqrt{2} - 16}{(1 + \sqrt{17 - 12\sqrt{2}})^2} = \frac{12\sqrt{2} - 16}{(1 + 3 - 2\sqrt{2})^2} \\ = \frac{12\sqrt{2} - 16}{24 - 16\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

also ist $\frac{\varrho^2}{(1 + \sqrt{1-\varrho})^4} < \frac{1}{2}$, und folglich die Reihe in (8) und (7)

absolut $< \frac{1}{2} \Big/ \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 1$, also $\neq -1$. Daher ist die eckige Klammer in (7) von 0 verschieden, also für $z_2 \neq z_1$ auch $F_0(z_2) \neq F_0(z_1)$. Das ist das Resultat von Thale.

Nunmehr betrachten wir den speziellen Kettenbruch (1), bei dem $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_{\nu} = -\frac{1}{4}$ für $\nu \geq 3$ ist, während a_1 beliebig sein darf. Bei diesem ist

$$F_{\nu}(z) = \frac{1}{1} - \frac{\frac{1}{4}z}{1} - \frac{\frac{1}{4}z}{1} - \dots = \frac{2}{1 + \sqrt{1-z}} \quad \text{für } \nu \geq 2,$$

wobei die Quadratwurzel mit positivem Realteil zu nehmen ist. Nach (4) ist dann auch

$$Q_{\nu} = \left(\frac{2}{1 + \sqrt{1-z_1}} \cdot \frac{2}{1 + \sqrt{1-z_2}} \right)^2 \quad \text{für } \nu \geq 2,$$

und die Formel (7) nimmt folgende Gestalt an:

$$F_0(z_1) - F_0(z_2) \\ = a_1 Q_0(z_2 - z_1) \left[1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^{2\nu} \left(\frac{2}{1 + \sqrt{1-z_1}} \cdot \frac{2}{1 + \sqrt{1-z_2}} \right)^{2\nu} z_1^{\nu} z_2^{\nu} \right] \\ = a_1 Q_0(z_2 - z_1) \left[1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{z_1}{(1 + \sqrt{1-z_1})^2} \cdot \frac{z_2}{(1 + \sqrt{1-z_2})^2} \right)^{\nu} \right].$$

Es wird also $F_0(z_1) = F_0(z_2)$ sein, wenn die eckige Klammer verschwindet, wenn also

$$\frac{z_1}{(1 + \sqrt{1 - z_1})^2} \cdot \frac{z_2}{(1 + \sqrt{1 - z_2})^2} = \frac{1}{2}$$

ist. Das trifft zunächst zu, wenn die beiden Brüche auf der linken Seite gleich $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sind, was $z_1 = z_2 = 12\sqrt{2} - 16$ liefert. Es trifft aber auch zu, wenn

$$(10) \quad \frac{z_1}{(1 + \sqrt{1 - z_1})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\alpha}, \quad \frac{z_2}{(1 + \sqrt{1 - z_2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\alpha}$$

ist. Das ergibt für z_1 und z_2 zwei *verschiedene* Werte, die für hinreichend kleines $|\alpha|$ beliebig nahe bei dem vorhin gefundenen Wert $12\sqrt{2} - 16$ liegen. Somit kann die Thalesche Schranke $12\sqrt{2} - 16$ durch keine größere ersetzt werden.

Das Beispiel lehrt auch noch, daß der von Herrn Thale beim Beweis herangezogene, angeblich aus einem (wohl mißverstandenen) Satz von Montel folgende Umstand, daß notwendig $|z_1| = |z_2|$ sein muß, nicht zutrifft. Denn die Gleichungen (10) liefern zwar bei rein imaginärem α für z_1 und z_2 zwei konjugiert-komplexe Werte, also $|z_1| = |z_2|$, bei reellem α aber zwei verschiedene positive Werte, also $|z_1| \neq |z_2|$.