BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1956

MÜNCHEN 1956

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über Abbildungen dreidimensionaler in zweidimensionale Mannigfaltigkeiten

Von **Josef Weier** in Fulda

Vorgelegt von Herrn Heinrich Tietze am 1. Juni 1956

Seien S, T Sphären in einem Euklidischen Raume. Wenn S, T gleichdimensional, f eine wesentliche Abbildung von S in T und f' eine unwesentliche Abbildung von S in T, so hat die Gleichung $f(p) = f'(p)$, p ein Punkt aus S, wenigstens eine Lösung. Das folgt leicht aus bekannten Sätzen über den Brouwerschen Abbildungsgrad. Ist $\dim S < \dim T$, so gibt es keine wesentliche Abbildung von S auf T.

Hierauf sei $\dim S = (\dim T) + 1$. Dann existieren für $\dim S > 2$ wesentliche Abbildungen von S auf T, wie Freudenthal[1] bewiesen hat; für $\dim S \leq 2$ existieren solche Abbildungen nicht.

Im besonderen gibt es also eine wesentliche Abbildung von S auf T im Falle, daß $\dim S = (\dim T) + 1 = 3$. Und es gilt, dies wird unter anderem im folgenden nachgewiesen: sind f eine wesentliche und f' eine unwesentliche Abbildung von S in T, so hat die Gleichung $f(p) = f'(p)$ wenigstens eine Lösung.

Den letzten Satz werden wir in der vorliegenden Arbeit wie folgt verschärfen: *Sind P, Q endliche Euklidische Mannigfaltigkeiten in einem Euklidischen Raume,*

$$\mathit{dim}\, P = (\mathit{dim}\, Q) + 1 = 3,$$

g eine wesentliche Abbildung von P auf Q und g' eine nullhomotope Abbildung von P in Q, so hat die Gleichung $g(p) = g'(p)$ wenigstens eine Lösung. Dabei heiße die Abbildung g^1 von P in Q wesentlich, wenn jede zu g^1 homotope Abbildung g^2 von P in Q die Beziehung $g^2(P) = Q$ erfüllt; und es heiße g^1 nullhomotop, wenn es einen Punkt a in Q gibt, so daß die durch $g^3(p) = a$, $p \in P$, bestimmte Abbildung g^3 von P in Q zu g^1 homotop ist.

---

[1] Compos. Math. 5 (1937).

Übrigens gilt der vorstehende Satz nicht für das Dimensionspaar (3,2) und nicht nur in endlichen Euklidischen Mannigfaltigkeiten. Hierüber wird aber in dieser Arbeit nicht mehr gesprochen.

1. Reduktion des Problems. Sind A, B Mengen und ist jedem Punkt p aus A genau ein Punkt $f(p)$ aus B zugeordnet, so werden wir im folgenden mit f die Menge der Punktpaare $(p, f(p))$, wobei p die Menge A durchlaufe, bezeichnen. Für zwei im gleichen Euklidischen Raum gelegene Punkte a und b bedeute $\varrho(a, b)$ den Euklidischen Abstand dieser Punkte. *Bis zum Schluß der Arbeit seien wie oben P und Q endliche Euklidische Mannigfaltigkeiten in einem Euklidischen Raume mit $\dim P = (\dim Q) + 1 = 3$.*

Auf Satz 3, der sich im vierten Abschnitt bewiesen findet, wollen wir folgendes schon eingangs ausgesprochene Theorem zurückführen. Sind f eine wesentliche Abbildung von P auf Q und f' eine nullhomotope Abbildung von P in Q, so hat die Gleichung $f(p) = f'(p)$ wenigstens eine Lösung.

Beweis. – Es gibt einen Punkt q in Q und von τ stetig abhängende stetige Abbildungen g^τ, $0 \leq \tau \leq 1$, von P in Q, so daß $g^0 = f'$ und $g^1(p) = q$ für alle Punkte p aus P.

Nach Satz 3 gibt es eine positive Zahl α mit der Eigenschaft: sind h, h' stetige Abbildungen von P in Q und ist $h(p) \neq h'(p)$ für alle Punkte p aus P, so existiert eine zu h' homotope Abbildung h'' von P in Q derart, daß $\varrho(h(p), h''(p)) > \alpha$ für $p \in P$.

Hierauf bezeichne β eine positive Zahl derart, daß in allen (p, τ_1, τ_2) mit $p \in P$ und $|\tau_1 - \tau_2| < \beta$ die Ungleichung

$$\varrho(g^{\tau_1}(p), g^{\tau_2}(p)) < \alpha$$

gilt. Seien ferner $0 = \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_m = 1$ Zahlen mit $|\beta_i - \beta_{i+1}| < \beta$ für alle i.

Wir machen die Annahme, es sei $f(p) \neq f'(p)$ in allen Punkten p aus P.

Dann folgt aus der Eklärung von α die Existenz einer zu f homotopen Abbildung f^1, so daß

$$\varrho(f^1(p), f'(p)) > \alpha$$

für $p \in P$. Wegen $|\beta_1 - \beta_2| < \beta$ ist $f^1(p) \neq g^{\beta_2}(p)$ in allen Punkten p aus P.

Eine erneute Anwendung von Satz 3 liefert eine zu f homotope Abbildung f^2, so daß

$$\varrho(f^2(p), g^{\beta_2}(p)) > a$$

für $p \in P$. Wegen $|\beta_2 - \beta_3| < \beta$ ist $f^2(p) \neq g^{\beta_3}(p)$ in den Punkten $p \in P$.

So fortfahrend ergibt sich nach $m - 1$ Schritten eine zu f homotope Abbildung f^{m-1} derart, daß in allen Punkten $p \in P$ die Ungleichung

$$f^{m-1}(p) \neq g^{\beta_m}(p)$$

gilt. Wegen $\beta_m = 1$ und $g^1(p) = q$, $p \in P$, ist $f^{m-1}(p) \neq q$ in allen Punkten p aus P. Die Abbildung f^{m-1} ist also unwesentlich. Da f^{m-1} und f zueinander homotop, ist f^{m-1} wesentlich; ein Widerspruch.

Mithin besitzt die Gleichung $f(p) = f'(p)$ wenigstens eine Lösung.

2. Kompakte Sternmetrik. Sind Q_1 eine simpliziale Zerlegung von Q, q ein Eckpunkt von Q_1 und Y die Menge aller Punkte p aus Q, deren Trägersimplex den Punkt q zum Eckpunkt hat, so heiße Y ein „Eckpunktstern" von Q_1. Sei Z eine offene zweidimensionale Vollkugel im zweidimensionalen Euklidischen Raum. Dann ist Y eine in Q offene Menge, und es gibt eine topologische Abbildung t von $\bar{Y}$ auf $\bar{Z}$ mit $t(\bar{Y} - Y) = \bar{Z} - Z$.

Seien $Y_1, \ldots, Y_m$ die Eckpunktsterne von Q_1 und t_i für $i = 1, \ldots, m$ eine topologische Abbildung von $\bar{Y}_i$ auf $\bar{Z}$ mit $t_i(\bar{Y}_i - Y_i) = \bar{Z} - Z$. Sind i eine der Zahlen $1, \ldots, m$ und p_1, p_2 Punkte aus $\bar{Y}_i$, so bezeichnen wir die Zahl

$$\varrho(t(p_1), t(p_2))$$

auch mit $\varrho_i(p_1, p_2)$.

Die so bestimmte Bedeutung von Q_1, Y_i, Z, t_i, ϱ_i und m bleibe bis zum Schluß der Arbeit.

Satz 1. – Sei a eine positive Zahl. Dann gibt es eine positive Zahl β mit der Eigenschaft: für jedes (p_1, p_2, i), wobei i eine der Zahlen $1, \ldots, m$ bezeichnet und p_1, p_2 Punkte aus Y_i sind, folgt aus $\varrho(p_1, p_2) > a$ die Ungleichung $\varrho_i(p_1, p_2) > \beta$.

Beweis. – Wir wollen die Annahme machen, zu jeder positiven Zahl γ würden eine Zahl i und in Y_i zwei Punkte p_1, p_2 existieren, so daß gleichzeitig

$$\varrho(p_1, p_2) > \alpha \text{ und } \varrho_i(p_1, p_2) < \gamma.$$

Dann existieren Punkte p_i^k, $i = 1, 2$, $k = 1, 2, \ldots$, aus P mit den Eigenschaften: zu jeder natürlichen Zahl k gibt es unter den Zahlen $1, \ldots, m$ eine Zahl $\zeta(k)$ derart, daß erstens p_1^k, p_2^k in $Y_{\zeta(k)}$ liegen und zweitens gleichzeitig

$$\varrho(p_1^k, p_2^k) > \alpha \text{ und } \varrho_{\zeta(k)}(p_1^k, p_2^k) < 1/k$$

gilt.

Unter den Zahlen $1, \ldots, m$ ist wenigstens eine, sie heiße j, derart, daß $\zeta(k) = j$ für unendlich viele k. Es gibt also Punkte q_i^k, $i = 1, 2$, $k = 1, 2, \ldots$, in Y_j, so daß für alle Zahlen k gleichzeitig

$$\varrho(q_1^k, q_2^k) > \alpha \quad \text{und} \quad \varrho_j(q_1^k, q_2^k) < 1/k.$$

Die Menge $\bar{Y}_j$ ist kompakt, mithin:

Es gibt Punkte r, r_i^k, $i = 1, 2$, $k = 1, 2, \ldots$, in Y_j mit den Eigenschaften: für alle Zahlen k ist gleichzeitig $\varrho(r_1^k, r_2^k) > \alpha$ und $\varrho_j(r_1^k, r_2^k) < 1/k$; die Punkte r_1^k, $k = 1, 2, \ldots$, konvergieren gegen r.

Die Beziehungen $\lim r_1^k = \lim r_2^k = r$ widersprechen der für alle k geltenden Beziehung $\varrho(r_1^k, r_2^k) > \alpha$.

Ebenso wie Satz 1 beweist man:

Satz 2. – Sei α eine positive Zahl. Dann gibt es eine positive Zahl β mit der Eigenschaft: für jedes (p_1, p_2, i), wobei i eine der Zahlen $1, \ldots, m$ und p_1, p_2 Punkte aus Y_j, folgt aus $(\varrho_i(p_1, p_2) > \alpha$, daß $\varrho(p_1, p_2) > \beta$.

3. Hilfssätze. Die Überlegungen dieses Abschnittes, denen keine selbständige Bedeutung zukommt, beschäftigen sich mit folgender Frage. Es seien f', f stetige Abbildungen von P in Q und $f(p) \neq f'(p)$ in allen Punkten p aus P, ferner α die untere Grenze aller Zahlen $\varrho(f(p), f'(p))$, p ein Punkt aus P. Ist es möglich, die Zahl α, die wegen der Kompaktheit von P positiv, durch Deformation der Abbildung f' zu vergrößern?

Hilfssatz 1. – *Seien P_1 eine simpliziale Zerlegung von P, A ein Simplex aus P_1, U eine in P offene Menge $\supset A$, ε eine positive Zahl und j eine der Zahlen* 1, . . ., m. *Seien f, f' stetige Abbildungen von P in Q, $f(p) \neq f'(p)$ für alle p, weiter*

$$f(\bar{A}) \subset Y_j,$$

ferner in jedem Punkt p aus $\bar{A} - A$ entweder $f'(p) \notin Y_j$ oder

$$f'(p) \in Y_j \quad \text{und} \quad \varrho_j(f(p), f'(p)) > \varepsilon.$$

Dann läßt sich f' unter Festhaltung auf $P - U$ in eine Abbildung f'' deformieren, die die Eigenschaften hat: in jedem Punkt p aus $\bar{A}$ ist entweder $f''(p) \notin Y_j$ oder

$$f''(p) \in Y \quad \text{und} \quad \varrho_j(f(p), f''(p)) > \varepsilon,$$

in allen Punkten p aus P ist $f(p) \neq f''(p)$.

Beweis. – Seien V die Menge aller Punkte p aus U mit $f'(p) \in Y_j$ und B die Menge aller Punkte p aus A, für die gleichzeitig

$$f'(p) \in Y_j \quad \text{und} \quad \varrho(f(p), f'(p)) \leq \varepsilon.$$

Wenn eine der beiden Mengen V und B leer, so ist nichts weiter zu beweisen. Nun seien $V \neq 0$ und $B \neq 0$.

Die Menge V ist in P offen. Ist nämlich p ein Punkt aus U mit $f'(p) \in Y_j$, so gibt es eine Umgebung von p derart, daß $f'(p') \in Y_j$ sogar für alle Punkte p' aus dieser Umgebung.

Zum Beweis, daß in allen Punkten p der abgeschlossenen Menge $\bar{B} \,.\, (\bar{V} - V)$ die Beziehung

$$f'(p) \in \bar{Y}_j - Y_j \tag{1}$$

gilt, bezeichne q einen bestimmten Punkt aus der letzteren Menge. Da $\varrho_j(f(p), f'(p)) \leq \varepsilon$ in allen Punkten p aus B und f wie f' stetig sind, ist $\varrho_j(f(p), f'(p)) \leq \varepsilon$ sogar für $p \in \bar{B}$, im besonderen

$$\varrho_j(f(q), f'(q)) \leq \varepsilon.$$

Wenn *erstens* $q \in \bar{A} - A$, so ergeben die Voraussetzungen und die letzte Ungleichung, daß $f'(q) \notin Y_j$. Andererseits liegen in jeder beliebigen Nähe von q Punkte p aus P mit $f'(p) \in Y_j$. Also ist $f'(q) \in \bar{Y}_j - Y_j$. *Zweitens* sei $q \in A$. Hier ist die Beziehung $f'(q) \in Y_j$ nicht möglich, weil $A \subset U$ und mithin $q \in V$ aus $f'(q) \in Y_j$ folgte; obschon doch $q \mathrel{\bar{\in}} V$. Also ist $f'(q) \mathrel{\bar{\in}} Y_j$, woraus sich wie im ersten Falle $f'(q) \in \bar{Y}_j - Y_j$ ergibt. Wegen $B \subset A$ erschöpfen die beiden besprochenen Fälle alle Möglichkeiten.

Sei nun $\lambda(p) = \varrho(p, \bar{V} - V) / (\varrho(p, \bar{V} - V) + \varrho(p, \bar{B}))$ in allen Punkten p der Menge $\bar{V} - \bar{B} \cdot (\bar{V} - V)$. Dann bildet λ die letztere Menge derart stetig in das abgeschlossene Intervall zwischen 0 und 1 ab, daß $\lambda(p) = 0$ für $p \in (\bar{V} - V) - \bar{B}$ und $\lambda(p) = 1$ für $p \in \bar{B} - (\bar{V} - V)$.

Die Bedeutung von Z und t_j ist schon zu Anfang des zweiten Abschnittes erklärt worden. Wir wollen, wenn $a \neq b$ irgend Punkte aus $\bar{Y}_j$ und ζ eine Zahl ≥ 0 bezeichnen, den Punkt $g(a, b, \zeta)$ wie folgt bestimmen. Es bedeute c die Projektion von $t_j(b)$ auf $\bar{Z} - Z$ aus $t_j(a)$. Wenn $\zeta \geq \varrho(t_j(b), c)$, so sei

$$g(a, b, \zeta) = (t_j)^{-1}(c).$$

Sonst bedeute d denjenigen Punkt auf der Strecke zwischen $t_j(b)$ und c, der von $t\ (b)$ den Abstand ζ hat; und es sei

$$g(a, b, \zeta) = (t\ )^{-1}(d).$$

Dann ist $\varrho_j(b, g(a, b, \zeta)) = \zeta$, falls $\zeta \leq \varrho(t_j(b), c)$.

Für $p \in \bar{V}$ sind die Punkte $f(p) \neq f'(p)$ in $\bar{Y}_j$ gelegen. Daher wird jedem Punkt p aus $\bar{V}$ eindeutig eine Zahl $\mu(p)$ zugeordnet durch die Festsetzung:

$$g(f(p), f'(p), \mu(p)) \in \bar{Y}_j - Y_j, \tag{2}$$

für jede Zahl τ mit $0 \leq \tau < \mu(p)$ liegt der Punkt $g(f(p), f'(p), \tau)$ in Y_j. Die Abbildung μ ist stetig.

Wir wollen eine eindeutige Abbildung h von $\bar{V}$ in $\bar{Y}_j$ definieren. Zu diesem Zweck setzen wir

$$h(p) = g(f(p), f'(p), \lambda(p)\mu(p)) \quad \text{für } p \in \bar{V} - \bar{B} \cdot (\bar{V} - V)$$

und $h(p) = f'(p)$ für alle übrigen Punkte p aus $\bar{V}$.

Für einen Nachweis der Stetigkeit von h genügt es, die Stetigkeit von h in den Punkten der Menge $\bar{B} \cdot (\bar{V} - V)$ zu prüfen: Bezeichnet p einen Punkt aus der letzteren Menge, so ist $f'(p) \in \bar{Y}_j - Y_j$ nach (1), daher

$$g(f(p), f'(p), \tau) = f'(p) \text{ für alle Zahlen } \tau \geq 0.$$

Und hieraus folgt bereits die Behauptung.

Zum Beweis, daß in allen Punkten p der Menge $\bar{V} - V$ die Abbildungen h und f' die Gleichung

$$h(p) = f'(p) \tag{3}$$

erfüllen, sei zunächst $p \in (\bar{V} - V) - \bar{B}$. Dann ist $\lambda(p) = 0$ und also die Behauptung richtig. Wenn p nicht in $(\bar{V} - V) - \bar{B}$ liegt, so ist $h(p) = f'(p)$ nach der Erklärung von h.

In allen $(p, \tau,)$ für die p ein Punkt aus $\bar{V}$ und τ eine Zahl ≥ 0, gilt die Ungleichung

$$\varrho_j[f(p), g(f(p), f'(p), \tau)] \geq \varrho_j(f(p), f'(p)).$$

Somit ist

$$\varrho_j(f(p), h(p)) \geq \varrho_j(f(p), f'(p)) \tag{4}$$

in allen $p \in \bar{V}$.

Die durch $f''(p) = f'(p)$, $p \in P - V$, und $f''(p) = h(p)$, $p \in \bar{V}$, festgelegte Abbildung f'' von P in Q besitzt die im Hilfssatz verlangten Eigenschaften:

Wegen (3) ist f'' stetig. Wegen $f(p) \neq f'(p)$, $p \in \bar{U}$, und (4) ist $f(p) \neq f''(p)$ für $p \in \bar{U}$. Vermöge

$$g(f(p), f'(p), \tau), \quad 0 \leq \tau \leq \lambda(p)\,\mu(p),$$

läßt sich f' unter Festhaltung auf $P - U$ in f'' deformieren. Zum Nachweis, daß in allen Punkten p aus $\bar{A}$ entweder $f''(p) \overline{\in} Y_j$ oder $f''(p) \in Y_j$ und $\varrho_j(f(p), f''(p)) > \varepsilon$, sei der Punkt $q \in \bar{A}$ *erstens* in $\bar{A} - B$ gelegen. Dann ist der Erklärung von B zufolge nicht gleichzeitig $f'(q) \in Y_j$ und $\varrho_j(f(q), f'(q)) \leq \varepsilon$. Wenn $f'(q) \overline{\in} Y_j$, so ist $q \overline{\in} V$, daher $f''(q) = f'(q)$. Wenn $f'(q) \in Y_j$, so ist $\varrho_j(f(q), f'(q)) > \varepsilon$, nach (4) daher erst recht $\varrho_j(f(q), f''(q)) > \varepsilon$. *Zweitens* sei $q \in B$. Dann ist $\lambda(q) = 1$, daher $f''(q) = h(q) = g(f(q), f'(q), \mu(q))$, wegen (2) also $f''(q) \in \bar{Y}_j - Y_j$.

Der obige Hilfssatz ist damit bewiesen. Eine wiederholte Anwendung dieses Hilfssatzes ergibt:

Hilfssatz 2. – *Seien P_1 eine simpliziale Zerlegung von P, ζ eine der Zahlen* 1, 2, 3 *und $A_1, \ldots, A_\alpha$ die ζ-Simplexe von P_1, ferner ε eine positive Zahl. Für $i = 1, \ldots, \alpha$ bezeichne $j(i)$ eine natürliche Zahl zwischen* 1 *und m. Weiter seien f, f' stetige Abbildungen von P in Q, $f(p) \neq f'(p)$ in allen Punkten p aus P und*

$$f(\bar{A}_i) \subset Y_{j(i)}$$

für alle i. In allen (p, i) mit $p \in \bar{A}_i - A_i$ und $i = 1, \ldots, \alpha$ sei entweder $f'(p) \notin Y_{j(i)}$ oder

$$f'(p) \in Y_{j(i)} \quad \text{und} \quad \varrho_{j(i)}(f(p), f'(p)) > \varepsilon.$$

Dann gibt es eine zu f' homotope Abbildung f'' von P in Q, die die Eigenschaften hat: in allen (p, i) mit $p \in \bar{A}_i$ und $i = 1, \ldots, \alpha$ ist entweder $f''(p) \notin Y_{j(i)}$ oder

$$f''(p) \in Y_{j(i)} \quad \text{und} \quad \varrho_{j(i)}(f(p), f''(p)) > \varepsilon;$$

in allen Punkten p aus P ist $f(p) \neq f''(p)$.

4. Das reduzierte Theorem. Im ersten Abschnitt haben wir von einem Satz Gebrauch gemacht, dessen Gültigkeit wesentlich auf der Kompaktheit von P und Q beruht:

Satz 3. – *Es gibt eine positive Zahl a mit der Eigenschaft: sind f, f' stetige Abbildungen von P in Q und ist $f(p) \neq f'(p)$ für alle Punkte p aus P, so existiert eine zu f' homotope Abbildung f'' von P in Q derart, daß $\varrho(f(p), f''(p)) > a$ für $p \in P$.*

Beweis. – Die Eckpunktsterne von Q haben wir $Y_1, \ldots, Y_m$ genannt. Sei ω eine positive Zahl, so daß jeder Punkt p aus Q die beiden Beziehungen

$$p \in Y_i \quad \text{und} \quad \varrho(p, \bar{Y}_i - Y_i) > 2\omega \tag{1}$$

für wenigstens eine Zahl i erfüllt.

Bezeichne a^0 den halben Durchmesser von Q. Nach Satz 1 gibt es eine positive Zahl a^1 mit der Eigenschaft: sind p_1, p_2

Punkte aus Q und i eine der Zahlen $1, \ldots, m$ derart, daß $p_1 \in Y_i$ und $p_2 \in Y_i$ sowie $\varrho(p_1, p_2) > \alpha^0$, so ist

$$\varrho_i(p_1, p_2) > \alpha^1. \tag{2}$$

Weiter gibt es Satz 2 zufolge eine positive Zahl $\alpha^2 < \omega$, über die gilt: sind p_1, p_2 Punkte aus Q und i eine der Zahlen $1, \ldots, m$, ferner $p_1 \in Y_i$, $p_2 \in Y_i$ und $\varrho_i(p_1, p_2) > \alpha_1$, so ist

$$\varrho(p_1, p_2) > \alpha^2. \tag{3}$$

Wie α^1, α^2 bestimmen wir die Zahlen α^3 und α^4.

Nach Satz 1 gibt es eine positive Zahl α^3 mit der Eigenschaft: sind p_1, p_2 Punkte aus Q, i eine der Zahlen $1, \ldots, m$, ferner $p_1 \in Y_i$, $p_2 \in Y_i$ und $\varrho(p_1, p_2) > \alpha^2$, so ist

$$\varrho_i(p_1, p_2) > \alpha^3. \tag{4}$$

Eine Anwendung von Satz 2 liefert eine positive Zahl $\alpha^4 < \omega$, über die gilt: für alle (p_1, p_2, i), wobei wieder i eine ganze Zahl mit $1 \leq i \leq m$ und p_1, p_2 Punkte aus Y_i, folgt aus $\varrho_i(p_1, p_2) > \alpha^3$ die Ungleichung

$$\varrho(p_1, p_2) > \alpha^4. \tag{5}$$

Wir wollen noch ein drittes Mal die Sätze 1 und 2 anwenden.

Nach Satz 1 gibt es eine positive Zahl α^5, so daß gilt: aus $p_1 \in Y_i$, $p_2 \in Y_i$ und (5) folgt

$$\varrho_i(p_1, p_2) > \alpha^5. \tag{6}$$

Es existiert Satz 2 zufolge eine positive Zahl $\alpha^6 < \omega$ mit der Eigenschaft: aus $p_1 \in Y_i$, $p_2 \in Y_i$ und (6) folgt

$$\varrho(p_1, p_2) > \alpha^6. \tag{7}$$

Sei α^6 die oben in Rede stehende Zahl α.

Hierauf bezeichne P_1 eine simpliziale Zerlegung von P, so daß für jedes Simplex A aus P_1 die Menge $f(A)$ einen Durchmesser $< \omega$ hat. Dann erfüllt jedes Simplex A aus P_1 die Beziehungen

$$f(\bar{A}) \subset Y_i \text{ und } \varrho(f(\bar{A}), \bar{Y}_i - Y_i) > \omega \tag{8}$$

für wenigstens eine Zahl i.

Wie man leicht bestätigt, kann man annehmen, die Abbildungen f und f' erfüllten die Ungleichung

$$\varrho(f(p), f'(p)) > \alpha^0 \tag{9}$$

in jedem Eckpunkt p von P_1.

Sind $B_1, \ldots, B_\beta$ die 1-Simplexe von P_1, so gibt es zu jeder der Zahlen $i = 1, \ldots, \beta$ eine Zahl $\varepsilon(i)$ derart, daß

$$f(\bar{B}_i) \subset Y_{\varepsilon(i)} \text{ und } \varrho(f(\bar{B}_i), \bar{Y}_{\varepsilon(i)} - Y_{\varepsilon(i)}) > \omega. \tag{10}$$

Wegen (2) und (9) ist für jeden Punkt p aus $\bar{B}_i - B_i$ entweder $f'(p) \notin Y_{\varepsilon(i)}$ oder

$$f'(p) \in Y_{\varepsilon(i)} \text{ und } \varrho_{\varepsilon(i)}(f(p), f'(p)) > \alpha^1.$$

Nach Hilfssatz 2 gibt es daher eine zu f' homotope Abbildung f^1 von P in Q mit den Eigenschaften: in allen (p, i) mit $p \in \bar{B}_i$ und $i = 1, \ldots, \beta$ ist entweder $f^1(p) \notin Y_{\varepsilon(i)}$ oder

$$f^1(p) \in Y_{\varepsilon(i)} \text{ und } \varrho_{\varepsilon(i)}(f(p), f^1(p)) > \alpha^1; \tag{11}$$

in allen Punkten p aus P ist $f(p) \neq f^1(p)$.

Zum Beweis, daß die Abbildungen f und f^1 in allen Punkten p der Menge $\Sigma \bar{B}_i$ die Ungleichung

$$\varrho(f(p), f^1(p)) > \alpha^2 \tag{12}$$

erfüllen, bezeichne j eine der Zahlen $1, \ldots, m$ und $q \in \bar{B}_j$ *erstens* einen Punkt mit $f^1(q) \notin Y_{\varepsilon(j)}$. Dann ist, da (10) zufolge $f(q)$ in $Y_{\varepsilon(j)}$ liegt und von $\bar{Y}_{\varepsilon(j)} - Y_{\varepsilon(j)}$ einen Abstand $> \omega$ hat, die Entfernung $\varrho(f(q), f^1(q)) > \omega$, wegen $\omega > \alpha^2$ also $\varrho(f(q), f^1(q)) > \alpha^2$. Wenn *zweitens* $f^1(q) \in Y_{\varepsilon(j)}$, so folgt $\varrho(f(q), f^1(q)) > \alpha^2$ aus (3) und (11).

Sind $C_1, \ldots, C_\gamma$ die 2-Simplexe von P_1, so gibt es zu jeder der Zahlen $i = 1, \ldots, \gamma$ eine Zahl $\zeta(i)$ derart, daß

$$f(\bar{C}_i) \subset Y_{\zeta(i)} \text{ und } \varrho(f(\bar{C}_i), \bar{Y}_{\zeta(i)} - Y_{\zeta(i)}) > \omega.$$

Wegen (4) und (12) ist für jeden Punkt p aus $\bar{C}_i - C_i$ entweder $f^1(p) \notin Y_{\zeta(i)}$ oder

$$f^1(p) \in Y_{\zeta(i)} \text{ und } \varrho_{\zeta(i)}(f(p), f^1(p)) > \alpha^3.$$

Nach Hilfssatz 2 gibt es daher eine zu f' homotope Abbildung f^2 von P in Q mit den Eigenschaften: in allen (p, i) mit $p \in \bar{C}_i$ und $i = 1, \ldots, \gamma$ ist entweder $f^2(p) \overline{\in} Y_{\zeta(i)}$ oder

$$f^2(p) \in Y_{\zeta(i)} \text{ und } \varrho_{\zeta(i)}(f(p), f^2(p)) > \alpha^3;$$

in allen Punkten p aus P ist $f(p) \neq f^2(p)$. Somit folgt

$$\varrho(f(p), f^2(p)) > \alpha^4, \; p \in \Sigma \bar{C}_i, \tag{13}$$

aus $\alpha^4 < \omega$ und (5).

Sind $D_1, \ldots, D_\delta$ die 3-Simplexe von P_1, so gibt es zu jeder der Zahlen $i = 1, \ldots, \delta$ eine Zahl $\eta(i)$ derart, daß

$$f(\bar{D}_i) \subset Y_{\eta(i)} \text{ und } \varrho(f(\bar{D}_i), \bar{Y}_{\eta(i)} - Y_{\eta(i)}) > \omega .$$

Wegen (6) und (13) ist für jeden Punkt p aus $\bar{D}_i - D_i$ entweder $f^2(p) \overline{\in} Y_{\eta(i)}$ oder

$$f^2(p) \in Y_{\eta(i)} \text{ und } \varrho_{\eta(i)}(f(p), f^2(p)) > \alpha^5 .$$

Nach Hilfssatz 2 gibt es daher eine zu f' homotope Abbildung $f^3 = f''$ von P in Q mit den Eigenschaften: in allen (p, i) mit $p \in \bar{D}_i$ und $i = 1, \ldots, \delta$ ist entweder $f^3(p) \overline{\in} Y_{\eta(i)}$ oder

$$f^3(p) \in Y_{\eta(i)} \text{ und } \varrho_{\eta(i)}(f(p), f^3(p)) > \alpha^5;$$

in allen Punkten p aus P ist $f(p) \neq f^3(p)$.

Wegen $\alpha^6 < \omega$ und (7) ist also $\varrho(f(p), f^3(p)) > \alpha^6$ für $p \in \Sigma \bar{D}_i$. Da $\alpha = \alpha^6$ und $P = \Sigma \bar{D}_i$ ist damit Satz 3 bewiesen.