

# Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

---

Jahrgang 1954

---

München 1955

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

## Verbiegbarkeit konvexer Kalotten mit zylindrischen und konischen Randstreifen

Von Eduard Rembs in Berlin

Vorgelegt von Herrn Robert Sauer am 5. November 1954

In mehreren Arbeiten haben sich Herr Grottemeyer und ich mit der Verbiegbarkeit konvexer Kalotten befaßt, deren Rand Eigenschaftengrenze bei Parallelbeleuchtung oder Zentralbeleuchtung ist. Ich will in dieser Arbeit statt dessen sagen, der Randstreifen sei zylindrisch oder konisch. Wenn die Forderung gestellt wird, daß der Randstreifen seine Eigenschaft behalten soll, so kann in beiden Fällen Starrheit, d. i. infinitesimale Unverbiegbarkeit, bewiesen werden. Und andererseits sind isometrische Flächen, die beide die eine oder die andere genannte Randeigenschaft besitzen, kongruent oder symmetrisch.

Es handelt sich demnach um vier Probleme, je nachdem man bei zylindrischen oder konischen Rändern Starrheit oder eindeutige Bestimmtheit durch das Linienelement beweisen will.

Ich werde nun zunächst zeigen, daß die bisherigen Arbeiten die Randbedingungen nicht voll ausnutzten. Aus diesen läßt sich nämlich folgern, was bisher nicht beachtet wurde, daß die Zylinder der Randstreifen gleichen Umfang, die Kegel, wenn man sie abwickelt, denselben Sektorwinkel haben. Es gilt sogar folgendes. Wenn man die durch die Randkurve begrenzten Abschnitte der Zylinder oder der Kegel längs entsprechender Erzeugenden aufschneidet und abwickelt, so lassen sich die Abwicklungen zur Deckung bringen. Man kann das auch so ausdrücken: Wenn man die Zylinder oder Kegel längs des Randes mit den Flächen verklebt, so müßte die Flächenverbiegung zugleich den Zylinder oder Kegel mitverbiegen.

*Unter Benutzung dieser Eigenschaften werden hier die eindeutige Bestimmtheit im konischen Fall, die bisher noch nicht behandelt wurde, bewiesen und die Beweise in den drei anderen Fällen wesentlich vereinfacht.*

Im zylindrischen Fall wird für den Beweis der Starrheit die Formel von Blaschke angewandt, für den Beweis der eindeutigen Bestimmtheit die „symmetrisierte“ Formel von Grottemeyer. Darunter verstehe ich eine Formel, die man erhält, wenn man im vektoriellen Integralsatz von Grottemeyer die Flächen vertauscht und beide Formeln addiert.

Im konischen Fall hatte ich zum Beweis der Starrheit den Verschiebungsriß (Ortsvektor  $\mathbf{r}$ ) benutzt. Ich hatte geschlossen, daß am Rande  $\mathbf{r} = \lambda \mathbf{x}$  sei; doch die Begründung war falsch, da zwar  $(\mathbf{x} \xi) = 0$ ,  $(\mathbf{x} \xi') = 0$  und  $(\mathbf{r} \xi) = 0$  ist, aber etwa eine Gleichung  $(\mathbf{r} \xi') = 0$  fehlte. Trotzdem behalten die daran anschließenden Beweise ihre Gültigkeit; man muß nur  $\lambda = 0$  nehmen. Ich werde nämlich zeigen, daß am Rande  $\mathbf{r} = 0$  gilt. Dann kann man auch hier die Formel von Blaschke anwenden. Für den Beweis der eindeutigen Bestimmtheit verwende ich die symmetrisierte Herglotzsche Formel. Im konischen Fall wird die eindeutige Bestimmtheit hier zum erstenmal bewiesen.

1. *Zylindrische Randstreifen.* Die Randstreifen sind isometrisch aufeinander bezogen. Wir rechnen die Bogenlängen der Randkurven von zwei beliebig gewählten entsprechenden Anfangspunkten aus. Wegen der Isometrie sind in allen entsprechenden Punkten die geodätischen Krümmungen gleich. Sie gehen in die gewöhnlichen Krümmungen der ebenen Kurven über, die man beim Aufschneiden längs der Anfangserzeugenden und Abwickeln der Zylinder erhält. Da nun eine ebene Kurve durch Angabe der Krümmung als Funktion der Bogenlänge eindeutig bestimmt ist, sind die zwei Kurven der Abwicklung kongruent. Die geradlinigen Verbindungen des Anfangs- und Endpunktes müssen außerdem, da diese Punkte demselben Punkt der Zylindererzeugenden entsprechen, zur Richtung der Erzeugenden senkrecht und wegen der Kongruenz der Kurven in beiden Abwicklungen gleich lang sein. Die Abwicklungen mit den darauf eingetragenen Kurven sind also kongruent, alle entsprechenden Erzeugenden bilden mit den Kurven gleiche Winkel.

Zum Beweis der Starrheit sei nun  $\mathbf{e}$  der Einheitsvektor in Richtung der Erzeugenden,  $\mathbf{x}$  der Ortsvektor der Fläche. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann ich annehmen, daß bei der

Verbiegung  $\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{x} + t\mathfrak{z}$  die Erzeugendenrichtung sich nicht ändert und nach den vorhergehenden Bemerkungen alle Randpunkte senkrecht dazu verschoben werden; dann folgt für den Rand

$$(\mathfrak{z}e) = 0.$$

Ferner sind am Rand sowohl alle Flächennormalen  $\xi$  als die Normalen  $\xi + t(\mathfrak{y} \times \xi)$  nach der Verbiegung zu  $e$  senkrecht:

$$(\xi e) = 0, (\mathfrak{y} \xi e) = 0.$$

Dabei bezeichnet  $\mathfrak{y}$  wie üblich den Drehvektor der Verbiegung. Aus letzterer Gleichung in Verbindung mit

$$(\mathfrak{z}'e) = (\mathfrak{y} \mathfrak{z}'e) = 0$$

folgt nun

$$\mathfrak{y} \times e = \lambda (\xi \times \mathfrak{z}')$$

und durch vektorielle Multiplikation mit  $\xi$  wegen  $(\xi e) = 0$  und  $(\mathfrak{z}'\xi) = 0$ ,  $\xi^2 = 1$

$$(\mathfrak{y} \xi)e = \lambda \mathfrak{z}'.$$

Da  $\mathfrak{z}'$  und  $e$  als konjugierte Richtungen nirgends kollinear sein können, muß am ganzen Rand  $\lambda = 0$  gelten. Das bedeutet aber

$$\mathfrak{y} = \mu e,$$

wo  $\mu$  eine Funktion der Bogenlänge ist. Daraus folgt

$$d\mathfrak{y} = d\mu e$$

und bei Verwendung der Formel von Blaschke, daß der Integrand des Randintegrals, nämlich  $(\mathfrak{y} \mathfrak{y} d\mathfrak{y})$ , verschwindet, woraus sich die Starrheit in bekannter Weise ergibt.

Zum Beweis der Kongruenz oder Symmetrie der Flächen  $\mathfrak{x}$  und  $\bar{\mathfrak{x}}$  wird, wie gesagt, die symmetrisierte Formel von Grotmeyer benutzt. Bei konvexen Flächen besteht Kongruenz oder Symmetrie, wenn man zeigen kann, daß das Randintegral der skalaren Formel verschwindet. Wir wollen das vektorielle Integral in zwei verschiedenen Formen schreiben, erstens

$$\oint \{ \xi \times d\xi - \widehat{\xi \times d\xi} + \bar{\xi} \times d\bar{\xi} - \widehat{\bar{\xi} \times d\bar{\xi}} \},$$

wobei der Bogen andeutet, daß der dem darunter stehenden Vektor (in der Isometrie) entsprechende auf der anderen Fläche gelegene Vektor gemeint ist. Unter Benutzung der Streifengrößen  $a, \bar{a}, b, \bar{b}$ , d.i. der geodätischen Torsionen bzw. Normalkrümmungen und der Streifenormalen  $\eta, \bar{\eta}$  der Randkurven, läßt sie sich leicht in die zweite Form

$$\oint \{ (a - \bar{a}) (\xi' - \bar{\xi}') + (b - \bar{b}) (\eta - \bar{\eta}) \} ds$$

überführen. Für unseren Fall kommt die Komponente nach  $e$  in Betracht, das die Richtung der Erzeugenden beider Zylinder sei. Diese Komponente verschwindet aber, denn es ist:

$$(\xi' e) = (\bar{\xi}' e) \text{ und } (\eta e) = (\bar{\eta} e),$$

weil entsprechende Erzeugenden mit den Kurven gleiche Winkel bilden.

2. *Konische Randstreifen.* Die Spitzen der Randkegel mögen im Nullpunkt liegen. Die Randkegel werden längs entsprechender Erzeugenden aufgeschnitten und abgewickelt. Wie im zylindrischen Fall müssen die ebenen Kurven kongruent sein. Die Verbindungslinien der Anfangs- und Endpunkte bilden mit den Anfangs- und Enderzeugenden gleichschenklige Dreiecke. Sei nun für eine der Kurven  $\Theta$  ihr Winkel in einem Kurvenpunkt mit der zugehörigen Erzeugenden,  $\omega$  der Winkel der Erzeugenden mit der Anfangserzeugenden, so ist  $\Theta + \omega$  der Winkel der Kurve mit dieser festen Richtung, daher ihre Krümmung (die geodätische Krümmung der Ausgangskurve) gleich  $\Theta' + \omega'$ . Das Integral der geodätischen Krümmung muß also gleich dem von der Anfangs- und Enderzeugenden gebildeten Sektorwinkel sein, da für  $\Theta$  die Anfangs- und Endwerte einander gleich sind. Daraus folgt, daß die Sektorwinkel bei zwei isometrischen Kalotten übereinstimmen, entsprechende Erzeugendenstücke zwischen Spitze und Kurve bei beiden Flächen gleich lang sind und entsprechende Erzeugenden mit den Kurven gleiche Winkel bilden.

Wir betrachten wieder zuerst den Fall der infinitesimalen Verbiegung. Für Randpunkte ist  $(\xi \xi) = 0$ , und die entsprechende

Gleichung  $(\mathfrak{x} + t\mathfrak{z})(\xi + t(\mathfrak{y} \times \xi)) = 0$  gilt nach der Verbiegung. Mit Benutzung des Verschiebungsvektors  $\mathfrak{r} = \mathfrak{z} + \mathfrak{x} \times \mathfrak{y}$  führt das zu der Gleichung

$$(\mathfrak{r}\xi) = 0.$$

Jetzt benutzen wir den Umstand, daß sich  $\mathfrak{x}^2$  am Rande nicht ändern soll. Das ergibt

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{z}) = 0,$$

also nach der Definition von  $\mathfrak{r}$  auch

$$(\mathfrak{r}\mathfrak{x}) = 0.$$

Differenziert man andererseits die Gleichung  $(\mathfrak{x}\mathfrak{z}) = 0$ , so erhält man

$$(\mathfrak{z}\mathfrak{x}') + (\mathfrak{x}\mathfrak{z}') = (\mathfrak{z}\mathfrak{x}') + (\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{x}') = 0,$$

also

$$(\mathfrak{r}\mathfrak{x}') = 0.$$

Aber die Vektoren  $\xi$ ,  $\mathfrak{x}$ ,  $\mathfrak{x}'$  sind am ganzen Rand linear unabhängig (insbesondere entsprechen  $\mathfrak{x}$  und  $\mathfrak{x}'$  konjugierten Richtungen); daher folgt aus  $(\mathfrak{r}\xi) = (\mathfrak{r}\mathfrak{x}) = (\mathfrak{r}\mathfrak{x}') = 0$ , daß am Rande

$$\mathfrak{r} = 0^1$$

ist. Jetzt wenden wir die Formel von Blaschke an. Das Randintegral kann stets in der Form

$$\oint \mathfrak{r} d\mathfrak{y}$$

geschrieben werden; es verschwindet also hier, woraus die Starrheit folgt.

Für den Beweis der eindeutigen Bestimmtheit durch das Linienelement wird die symmetrisierte Herglotzsche Formel benutzt. Das Randintegral lautet hier in der ersten Form

$$\oint \{ \mathfrak{x}(\xi \times d\xi - \widehat{\xi \times d\xi}) + \bar{\mathfrak{x}}(\bar{\xi} \times d\bar{\xi} - \widehat{\bar{\xi} \times d\bar{\xi}}) \},$$

und umgewandelt

$$\oint \{ (a - \bar{a}) (\mathfrak{x}\mathfrak{x}' - \bar{\mathfrak{x}}\bar{\mathfrak{x}}') + (b - \bar{b}) (\mathfrak{x}\eta - \bar{\mathfrak{x}}\bar{\eta}) \} ds.$$

---

<sup>1</sup>  $\mathfrak{r}$  verschwindet bei nichttrivialer infinitesimaler Verbiegung auf der *ganzen* Fläche dann und nur dann, wenn es sich um einen Kegel mit Spitze im Nullpunkt handelt und die Kegelspitze fest bleiben soll.

Es ist aber  $\bar{x}\bar{x}' = \bar{x}\bar{x}'$  und  $\bar{x}\bar{\eta} = \bar{x}\bar{\eta}$ , weil die Abschnitte entsprechender Erzeugenden gleich lang sind und diese mit den Randkurven gleiche Winkel bilden. Somit verschwindet das Randintegral, und daraus folgt, wie üblich, die Kongruenz oder Symmetrie der Flächen.

Über den Zusammenhang der angewandten Formeln sei noch bemerkt: Die Formel von Grottemeyer folgt aus der von Herglotz, wenn man berücksichtigt, daß diese außer für  $\bar{x}$  und  $\bar{\eta}$  auch für  $\bar{x} + \alpha$  und  $\bar{\eta} + \alpha$  gilt, wo  $\alpha$  ein fester, aber beliebiger Vektor ist. Auch die Formel von Blaschke ergibt sich aus der von Herglotz, wie ich schon früher bewiesen habe.

### Literatur

[1] Rembs, E.: Zur Verbiegung von Flächen im Großen. Math. Zeitschr. 56, 271–279 (1952).

[2] Rembs, E.: Verbiegbarkeit konvexer Kalotten. Math. Ann. 127, 251–254 (1954).

[3] Rembs, E.: Zur Verbiegbarkeit konvexer Kalotten. Arch. d. Math. 6, 366–368 (1953).

[4] Grottemeyer, K. P.: Über die Verbiegung konvexer Flächen mit einer Randkurve, die Eigenschaftengrenze ist. Math. Zeitschr. 58, 272–280 (1953).

[5] Sauer, R.: Projektive Liniengeometrie, Berlin u. Leipzig 1937, S. 59 u. 146.

[6] Gohier, S.: Sur la rigidité des calottes convexes à bord. Comptes rendus 238, 1859–61 (1954).