

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1953

München 1954

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Entwicklung, Stand und Möglichkeiten der trigonometrischen Höhenmessung

Von Richard Finsterwalder in München

Vorgelegt am 9. Januar 1953

Die trigonometrische Höhenmessung kann heute noch als Stiefkind der wissenschaftlichen Geodäsie bezeichnet werden. Sie gilt im Flachland wegen des Einflusses der terrestrischen *Refraktion* dem Nivellement mit Recht an Genauigkeit als unterlegen, aber auch im Gebirge, wo das Nivellement wegen der kurzen Zielweiten und des verschiedenen Bodenabstands von Vor- und Rückvisur systematischen Fehlern ausgesetzt ist und in steilerem Gelände versagt, durch *Lotabweichungen* so im Ergebnis beeinträchtigt, daß man sie auch dort nicht in konsequenter Weise anwendet. Wie gering ihre Bedeutung eingeschätzt wird, geht daraus hervor, daß in den Kommissionen der Internationalen Union für Geodäsie und Geophysik die Methode der trigonometrischen Höhenmessung bis heute weder nach der theoretischen noch nach der praktischen Seite behandelt wird. Dies ist der Grund, weshalb hier einige zusammenfassende Ausführungen über Entwicklung, Stand und Zukunftsaussichten der trigonometrischen Höhenmessung gemacht werden.

Bisheriger Stand. Helmert¹ hat zwar nachgewiesen, daß die trigonometrische Höhenmessung dann, wenn sich die Lotabweichungen proportional mit der Entfernung ändern, Meereshöhen ergibt.² Im Gebirge aber treten zu den sich gleichmäßig ändernden Lotabweichungen mit der Entfernung unregelmäßig wechselnde *Lotstörungen* hinzu, die durch die unregelmäßige Massenschichtung hervorgerufen sind; diese Lotstörungen beeinflussen die

¹ F. R. Helmert, Die mathematischen physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie. Leipzig 1884.

² Siehe auch W. Jordan, Handbuch der Vermessungskunde, Bd. III, II. Hlbbd. S. 482 f. Stuttgart 1941.

trigonometrische Höhenmessung in unübersichtlicher Weise mit Fehlern, die oft ein Vielfaches der Höhenwinkelmeßgenauigkeit betragen. – Um dem Einfluß der terrestrischen *Refraktion* einigermaßen zu begegnen, hält man gleichzeitige gegenseitige Visuren für notwendig, weil hierbei – eine kreisförmige oder zumindest zur Strahlenmitte symmetrische Lichtstrahlkurve vorausgesetzt – die Refraktion herausfällt. Praktisch ist dies zwar für einen Strahl oder ein Profil durchführbar, keineswegs aber für ein ausgedehntes Netz mit vielen Seiten; dabei würden ganz außerordentliche Schwierigkeiten eintreten und ein unvertretbar hoher Arbeits- und Instrumentenaufwand notwendig sein. Ein größeres Unternehmen dieser Art ist deshalb bisher offenbar nicht durchgeführt worden.

Da man keine Möglichkeit sah, den Einflüssen der Lotstörungen und der Refraktion wissenschaftlich und praktisch bei der trigonometrischen Höhenmessung Rechnung zu tragen, maß und berechnete man trigonometrische Höhennetze ohne Berücksichtigung dieser Einflüsse in dem berechtigt erscheinenden Bewußtsein, damit Ergebnisse höherer Genauigkeit nicht erzielen zu können.

Grundsätzliche Klärung. Es mußten also besondere Verhältnisse eintreten, um mit dem Problem der trigonometrischen Höhenmessung im Gebirge weiterzukommen und ihre Anwendung auf eine neue Grundlage stellen zu können. Solche besondere Verhältnisse lagen bei dem 1934 am Nanga Parbat beobachteten Höhennetz³ vor. Es lag in einer mittleren Meereshöhe von rd. 4000 m, seine Strahlen hatten einen großen Bodenabstand von rd. 1500–2000 m. Die Unregelmäßigkeiten der Refraktion durften deshalb mit Recht als gering angenommen werden. Andererseits waren die Lotabweichungen und -störungen mit Rücksicht auf die großen Höhenunterschiede und Massen der dortigen Berge als sehr groß anzunehmen und es konnte versucht werden, sie aufzudecken und auszuschalten. Dazu kam, daß damals mit dem

³ R. Finsterwalder, Die Bestimmung von Lotabweichungen aus der trigonometrischen Höhenmessung. Z. f. Vermessungswesen 1937 S. 370 f.

Derselbe, Haupttriangulation am Nanga Parbat. Allg. Verm.-Nachrichten 1935 S. 37–49 und insbesondere S. 93–105.

neuen Theodolit Zeiss II eine wesentlich genauere Höhenwinkel-messung als bisher bei gleichzeitiger Überwindung großer Geländeschwierigkeiten und Höhenunterschiede möglich war und daß dank der lichtstarken Fernrohroptik dieses Instruments die Signalisierungsfrage einfach gelöst werden konnte. Für die Ermittlung der Höhen und Lotabweichungen ergab sich ein verhältnismäßig einfacher Weg aus der Erkenntnis, daß die Wirkung der Lotstörungen sich bei der normalen Berechnung des Höhennetzes in jedem Punkt aufhebt und die sich mit der Entfernung gleichmäßig ändernden Lotabweichungen, wie schon Helmert festgestellt hat, die richtige Gewinnung von Meereshöhen nicht beeinträchtigen. Aus den bei der normalen Höhenrechnung übrigbleibenden Höhenfehlern können in einfacher Weise die Lotstörungen für jeden Standpunkt näherungsweise berechnet werden. Nach ihrer Berücksichtigung durch Reduktion ist es leicht möglich, die durch die Meßungenauigkeiten allein bedingte wirkliche Unsicherheit der Höhen zu gewinnen. Die am Nanga Parbat erreichte Genauigkeit der Höhenwinkel betrug, berechnet aus den Feldbeobachtungen in jedem Punkt, $4''$ – $10''$, berechnet aus den wegen Lotstörungen reduzierten Endhöhen $7''$ – $9''$, die maximale Lotstörung betrug $51''$, die Höhengenaugigkeit der Netzkpunkte ergab sich vor der Reduktion wegen Lotstörungen zu $\pm 0,40$ m, nach der Reduktion zu $\pm 0,20$ m bei einer durchschnittlichen Strahlenlänge von rd. 15 km.

Anwendungen in den Alpen. Nachdem die Möglichkeiten der trigonometrischen Höhenmessung am Nanga Parbat unter extremen Verhältnissen im Himalaya im Rahmen einer Forschungs-expedition grundsätzlich geklärt waren, galt es die neue Methode unter normalen Voraussetzungen in den Alpen und ähnlichen Gebirgen zu erproben und zu vertiefen. Ein erster Schritt hierzu war das in den Chiemgauer Alpen gemessene Höhennetz,⁴ das in der Form wesentlich regelmäßiger und mit höherer Genauigkeit gemessen war. Eingehende Untersuchungen der möglichen vier Berechnungsmethoden führten zu dem Ergebnis, daß die beim

⁴ R. Finsterwalder, Die Bestimmung von Lotabweichungen aus der trigonometrischen Höhenmessung. Nachrichten aus dem Reichsvermessungsdienst 1941 Nr. 1.

Nanga-Parbat-Netz verwendete auch in diesem Fall die zweckmäßigste war. Bei einer Länge der Netzseiten von rd. 7,5 km ergab sich nach Reduktion wegen Lotstörungen ein mittlerer Fehler der Standpunktshöhen von ± 5 cm. Die Lotstörungen betrugen bis 11,5''. Die Genauigkeit der mit einem mittleren Hildebrand-Universal 4mal gemessenen Höhenwinkel betrug 1,1'', aus der Ausgleichung 2,4''. Wichtig war der Vergleich der gewonnenen Lotstörungen mit astronomisch bestimmten Breiten. Aus 10 Vergleichen ergab sich eine mittlere Abweichung von $\pm 2,9''$.

Refraktion. In den geringeren Meereshöhen von 1500–2500 m und bei den geringeren Bodenabständen der Strahlen in den Chiemgauer Alpen war die gefürchtete Fehlerquelle, welche die Vertikalrefraktion (vertikale Lichtstrahlkrümmung) darstellt, eingehend zu studieren, und zwar vor allem deren Veränderlichkeit im Laufe eines Tages und zwischen verschiedenen Tagen (interdiurne Refraktionsschwankungen), während die konstante Größe der Refraktion bei gegenseitigen Visuren als Fehlerquelle für die Höhenbestimmung weniger wichtig ist. Zu diesem Zweck erfolgte eine Zusammenarbeit mit der Meteorologie. K. Brocks⁵ hat in einer Reihe von Messungsserien in den Zentralalpen (Sonnblick) und in den Voralpen (Karkopf-Hochfeln) sowie in daraus sich ergebenden Untersuchungen festgestellt, daß die Unsicherheit der Refraktion in der normalen Gebirgsatmosphäre der Alpen bei einer 10 km langen Visur einen mittleren Höhenwinkelfehler von nur $\pm 1''$ zur Folge hat. Es war damit auch physikalisch nachgewiesen, daß die Refraktion – mittlere Strahlenlänge bis zu 10 km vorausgesetzt – kein entscheidendes Hindernis für die trigonometrische Höhenmessung ist. Wird höhere Genauigkeit für die Höhenmessung angestrebt, als sie sich aus der erwähnten Refraktionsunsicherheit von $\pm 1''$ ergibt, muß versucht werden, den

⁵ K. Brocks, Vertikaler Temperaturgradient und terrestrische Refraktion insbesondere im Hochgebirge. Veröff. d. Meteor. Inst. der Universität Berlin, III. Bd. Heft 4, 1939. – Derselbe, Lokale Unterschiede und zeitliche Änderungen der Dichteschichtung in der Gebirgsatmosphäre. Meteorol. Zeitschrift Heft 2, 1940. – Derselbe, Meteorologische Hilfsmittel für die geodätische Höhenmessung. Z. f. Vermessungswesen 1950 S. 71–76 u. S. 110–116.

Aufbau des meteorologischen Felds im Beobachtungsgebiet zu ermitteln und daraus Korrekturen für die Refraktion bei jedem Strahl abzuleiten.

Art der Höhen. Weiterhin war noch zu klären, welche Art von Höhen die trigonometrische Höhenmessung ergibt. Eine Untersuchung⁶ dieser Frage zeigte, daß man bei der angewendeten Rechenmethode zwei verschiedene Fälle unterscheiden muß, und zwar

1. Flächenhafte Höhennetze, die annähernd in einem Niveau liegen, z. B. im Gipfelniveau eines Gebirges. Hierbei ergeben sich mit sehr großer Annäherung Meereshöhenunterschiede, bezogen auf die durch die Lotabweichungen auf den Gipfeln bestimmte, die Geoidsenkungen in den Tälern nicht berücksichtigende Geoidfläche.
2. Räumliche lokale Höhennetze, welche auf kurze Erstreckung große Höhenunterschiede vom Tal bis zum Gipfelniveau überwinden. In diesem Fall ergeben sich
 - a) ellipsoidische Höhenunterschiede, wenn nur Visuren vom Tal zu den Gipfeln verwendet werden,
 - b) Meereshöhenunterschiede, wenn nur hangnahe Strahlen vom Tal zu den Gipfeln verwendet werden, wobei jeweils zwei Zwischenpunkte am Hang zwischen Tal und Gipfel eingeschaltet werden.

Diese Verhältnisse wurden durch die erwähnte Untersuchung zunächst theoretisch geklärt. Sie waren nun durch eine praktische Untersuchung auf Grund tatsächlicher Messungen genauer zu prüfen und unter Beweis zu stellen. Dies geschieht im folgenden in der Arbeit von Walther Hofmann über „Höhentriangulation im Isartal. Vorläufiger Bericht“, in der auch instrumentelle Fragen behandelt werden.

Die neuen gegenseitigen Zenitdistanzmessungen der Schweiz. Eine sehr interessante, zwar nicht unmittelbar in das Aufgabenfeld der trigonometrischen Höhenmessung fallende, aber für diese doch recht bedeutungsvolle Aufgabe ist vor kurzem in der

⁶ R. Finsterwalder, Über Art und Genauigkeit von trigonometrisch bestimmten Höhen. Z. f. Vermessungswesen 1951 S. 129–137.

Schweiz erfolgreich in Angriff genommen worden, die Bestimmung von Lotabweichungen aus gegenseitigen Zenitdistanzmessungen höchster Genauigkeit in einem Meridianprofil⁷ unter Kontrolle des astronomischen Zenits am Ausgangs- und Endpunkt des Profils. Diese Methode war auch bei der in Fußnote 4 zitierten Arbeit Abb. 3 S. 15 als vierte Möglichkeit zur Berechnung der trigonometrischen Höhenmessung angegeben worden. Denn wenn in einem solchen Profil die Lotabweichungen und Zenitwinkel berechnet und außerdem die Entfernungen bekannt sind, können die ellipsoidischen Höhenunterschiede ohne weiteres berechnet werden. Vom Standpunkt der trigonometrischen Höhenbestimmung hat die Methode allerdings den grundlegenden Nachteil, daß sie kaum mehr als eine Überbestimmung enthält, also eine Ausgleichung und Genauigkeitsbestimmung aus der Methode selbst nicht zuläßt, auf ein Profil beschränkt und deshalb nicht flächenhaft anwendbar ist, daß sie bei Vorliegen ungünstiger Geländeverhältnisse (hangnahe, steile oder weite Visuren) ein Ausweichen aus dem Profil nicht zuläßt und deshalb nicht überall die in bezug auf Refraktion günstigsten Strahlen benützen kann. Dagegen hat die Methode den Vorteil, bei der Bestimmung von Lotabweichungen theoretisch exakt zu sein, während Berechnung der Lotabweichungen und Lotstörungen bei der trigonometrischen Höhenmessung nur bei streng symmetrischen Netzen großer Ausdehnung theoretisch exakt ist. Der große Wert der Schweizer Messungen für das Problem der trigonometrischen Höhenmessung liegt darin, daß mit Universalen I. O. die genügende Konstanz der Refraktion bei günstigen Visuren mit großem Bodenabstand nachgewiesen wurde, insbesondere auch die kleinen im Mittel nur 2'' betragenden Strahlenschwankungen innerhalb eines Tages.

Die Zielsetzung der trigonometrischen Höhenmessung. Der hohe Wert der erwähnten schweizerischen Messungen liegt darin, daß sie das Geoid im Gebirge bestimmen helfen. Ziel und Aufgabe der trigonometrischen Höhenmessung sind aber weiter gesteckt. Sie soll nicht nur der Bestimmung des Geoids dienen, sondern

⁷ F. Kobold, Die Bestimmung der Lotabweichungskomponenten im Meridian des St. Gotthard aus Höhenwinkelmessungen. Neuchâtel 1951.

ebenso wie das Nivellement im Flachland die tatsächlichen Meereshöhen im Gebirge ergeben und dort die Oberfläche der Erdkruste mit solcher Genauigkeit festlegen, daß dies für alle technischen und wissenschaftlichen Zwecke ausreicht. Dies ist u. a. für die technischen Aufgaben des Wasserbaus von Bedeutung. Vom Standpunkt der Wissenschaft interessiert die Höhenüberbrückung der großen Gebirge, die mittels Nivellement allein nicht mit befriedigender Sicherheit möglich ist, durch die zusätzliche Anwendung der trigonometrischen Höhenmessung aber wesentlich aussichts- und einsichtsreicher bearbeitet werden kann. Endlich erscheint dies als geeignete Methode, um auf längere Sicht Veränderungen der Erdkruste meßbar zu machen. Im Gebirge sind Erdkrustenbewegungen vertikaler Art viel wahrscheinlicher als im Flachland. Allein schon die Verwitterung und Abtragung führen laufend Veränderungen der Erdkruste herbei, sie vermindern die Gipfelhöhen um Beträge von wohl rd. 1 mm im Mittel pro Jahr, selbst wenn keinerlei sonstige Vertikalbewegungen vorhanden wären. Solche sind aber mindestens in dieser Größenordnung vielfach anzunehmen, an bestimmten Stellen zweifellos in wesentlich höheren Beträgen. Da die trigonometrische Höhenmessung, wie der folgende Bericht von Hofmann über seine „Höhentriangulation im Isartal“, zeigt, bereits jetzt Höhen bei erheblicher vertikaler und horizontaler Ausdehnung des Beobachtungsgebiets auf Zentimeter genau festlegen läßt, ist mit Sicherheit anzunehmen, daß bei weiterer Verfeinerung der Methoden das Ziel, Erdkrustenbewegungen in Gebirgen durch Messung nachzuweisen und zu verfolgen, auf diesem Weg erreichbar ist.

Die Anwendungsmöglichkeit der trigonometrischen Höhenmessung ist auch bei Hochzieltriangulationen grundsätzlich gegeben, eine praktische Anwendung liegt allerdings noch nicht vor; im übrigen ist die trigonometrische Höhenmessung auf die Gebirge beschränkt. Dort aber liegt ein sehr fruchtbares Anwendungsfeld für sie bereit. Denn abgesehen von sehr bedeutsamen Arbeiten in der Schweiz sind die Gebirge, in denen die Gestalt der Erde besonders interessant und voller Probleme für uns ist, von der Geodäsie noch wenig erschlossen. Der Weg, diese Probleme zu lösen, scheint nun im wesentlichen offen zu liegen.