

# Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften  
zu München

---

Jahrgang 1952

---

München 1955

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

# Spannungen und Formänderungen von Ringschalen mit elliptischen Meridianschnitten

Von Ludwig Föppl, München

Vorgelegt am 7. März 1952

Mit 3 Figuren

## Einleitung

Kürzlich ist in der amerikanischen Zeitschrift *Journal of Applied Mechanics* ein Aufsatz erschienen [1],<sup>1</sup> der denselben Haupttitel trägt wie der vorliegende und außerdem den Untertitel „Mit Anwendungen auf die Probleme der Biegung von gekrümmten Rohren und von Bourdon-Röhren“. Im Mittelpunkt dieser Arbeit steht die Berechnung einer dünnwandigen Ringschale von elliptischem Querschnitt bei überall gleicher Wandstärke  $h$ , die gegenüber den Halbachsen  $a$  und  $b$  der Ellipse sowie dem Abstände  $r_0$  des Mittelpunktes der Ellipse von der Rotationsachse der Ringschale als klein angesehen werden soll. Als Belastung wurde konstanter Innendruck  $p$  der Ringschale vorausgesetzt.

Die Autoren der genannten amerikanischen Arbeit lenken die Aufmerksamkeit des Lesers zunächst auf die früheren Forschungsergebnisse [2] hin, wonach die Ringschale durch den inneren Überdruck  $p$  nur auf Längsspannungen und nicht auf Biegung beansprucht wird. Dort wurden die dabei auftretenden Meridianspannungen  $\sigma_r$  und Ringspannungen  $\sigma_t$ , die aus Gründen der Symmetrie Hauptspannungen sein müssen, als Funktionen der Abmessungen der Schale angegeben. Sie sind selbstverständlich vom Innendruck  $p$  linear abhängig.

Es besteht kein Zweifel darüber, daß diese Spannungen  $\sigma_r$  und  $\sigma_t$  an jeder Stelle der Schale mit dem Innendruck  $p$  im Gleich-

---

<sup>1</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis im Anhang zu dieser Arbeit.

gewicht stehen. Trotzdem bestehen gegen diese Lösung Bedenken, da beim geraden elliptischen Rohr unter Innendruck Biegebeanspruchungen auftreten, die schon aus rein statischen Gleichgewichtsbedingungen notwendig sind. Dieser Umstand deutet auf eine grundsätzliche Unstimmigkeit in dem bisher bekannten Membranspannungszustand in der elliptischen Ringschale unter Innendruck. Um dem wirklichen Verhalten der Schale näher zu kommen, gehen die Verfasser der oben unter [1] erwähnten Arbeit in der Weise vor, daß sie dem reinen Längsspannungszustand einen zweiten Spannungszustand überlagern, der auch Biegespannungen enthält. In der vorliegenden Arbeit wird die Beseitigung der oben genannten Unstimmigkeit dadurch angestrebt, daß von vorneherein auch schon bei geringer Belastung der Ringschale von elliptischem Querschnitt durch inneren Überdruck  $p$  Biegemomente auftreten ebenso wie beim geraden Rohr von elliptischem Querschnitt. Die Berechtigung dieser Annahme dürfte aus der Anschauung über die zu erwartenden Formänderungen erfolgen. Ebenso wie beim geraden elliptischen Rohr der innere Überdruck den elliptischen Querschnitt so zu deformieren trachtet, daß die Exzentrizität der Ellipse verringert wird, d. h. daß sich der elliptische Querschnitt einem kreisförmigen zu nähern sucht, so gilt dasselbe für den elliptischen Querschnitt einer Ringschale unter innerem Überdruck. Mit dieser Deformation treten aber Krümmungsänderungen auf, die zwangsweise mit Biegemomenten verknüpft sind.

Der wesentliche Gedanke, der zum Ziel führt, ist die Zerlegung des inneren Überdruckes  $p$  in zwei Teile:

$$p = p_1 + p_2, \quad (1)$$

von denen der eine Anteil  $p_2$  zur Biegebeanspruchung der elliptischen Ringschale dient, während  $p_1$  nur Längsspannungen hervorrufen soll. Dabei ist die Zerlegung von  $p$  in die beiden Bestandteile  $p_1$  und  $p_2$  von charakteristischen Abmessungen der Schale abhängig, so daß für den Grenzfall des geraden Rohres von elliptischem Querschnitt, den wir zunächst in § 1 behandeln,  $p_1$  ganz wegfällt und nur  $p_2 = p$  in Betracht kommt.

### § 1. Gerader Zylinder mit elliptischem Querschnitt unter innerem Überdruck

Bild 1 zeigt den Querschnitt eines beliebig langen, unter Innendruck  $p$  stehenden geraden Rohres. Der elliptische Querschnitt, dessen Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2a)$$

lautet, kann bekanntlich auch durch

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \beta \\ y &= b \sin \beta \end{aligned} \right\} \quad (2b)$$

wiedergegeben werden.

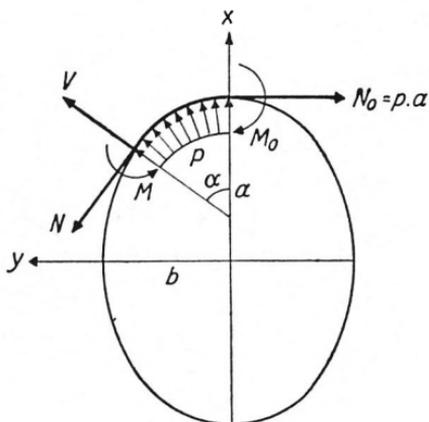


Fig. 1

Das Linienelement der Ellipse lautet damit

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = S \cdot d\beta \quad (3)$$

mit der Abkürzung

$$S = \sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta} \quad (4)$$

oder mit

$$k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}; \quad S = a \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \beta}.$$

Wir betrachten das in Bild 1 hervorgehobene Stück des Umfangs des elliptischen Querschnittes von  $\beta = 0$  bis  $\beta$  und denken uns die an diesem Stück angreifenden Kräfte und Momente angebracht, die im Gleichgewicht stehen müssen. Im Querschnitt  $\beta = 0$  tritt die Normalkraft  $N_0 = pa$  und das statisch unbestimmte Biegemoment  $M_0$  auf. Aus Symmetriegründen wird in diesem Querschnitt keine Querkraft übertragen. Dagegen wird im beliebigen Querschnitt, der durch irgendeinen Wert von  $\beta$  bestimmt ist, außer der Normalkraft  $N$  und dem Biegemoment  $M$  im allgemeinen auch noch eine Querkraft  $V$  übertragen, deren als positiv angenommene Richtung aus Bild 1 zu entnehmen ist. Die in Bild 1 eingetragenen Kräfte und Momente sollen an den beiden Endquerschnitten des aus dem Ellipsenumfang herausgeschnitten gedachten Stückes angreifen. Sie stellen Spannungsergebnanten dar, und zwar wird  $N$  als Resultierende aus den über dem Querschnitt von der Höhe  $h$  gleichmäßig verteilten Normalspannungen gewonnen, während  $V$  einer parabolischen Schubspannungsverteilung über die Querschnittshöhe  $h$  entspricht. Das Biegemoment  $M$  resultiert aus den von der Mittelfläche der Zylinderschale beiderseits linear ansteigenden Biegespannungen. Zu diesen in den Endquerschnitten des Bogens angreifenden Kräften und Momenten treten noch die vom inneren Überdruck herrührenden, an der Leibung des Bogens gleichmäßig wirkenden Druckkräfte  $p$  hinzu. Es sei angenommen, daß alle am Bogen angreifenden Kräfte und Momente sich auf die Längeneinheit in Richtung parallel zur Achse des Zylinders beziehen.

Unter Einführung des aus Bild 1 zu entnehmenden Winkels  $\alpha$ , den die Normale zur Ellipse im betrachteten Punkt mit der  $x$ -Achse einschließt, erhält man die folgenden Gleichgewichtsbedingungen für die am Bogen angreifenden Kräfte:

$$N \cdot \cos \alpha + V \cdot \sin \alpha = pa - p(a - x) = px; \quad (5a)$$

$$N \cdot \sin \alpha - V \cdot \cos \alpha = p \cdot y; \quad (5b)$$

$$M = M_0 + \frac{p}{2} \cdot (a^2 - x^2 - y^2). \quad (5c)$$

Die ersten beiden Gleichungen (5a) und (5b) drücken das Gleichgewicht sämtlicher am Bogen angreifenden Kräfte in Richtung der  $y$ - bzw.  $x$ -Achse aus, während Gleichung (5c) das Momenten-

gleichgewicht bestimmt. Aus den vorstehenden 3 Gleichungen folgt ohne weiteres, daß ohne Biegemomente  $M$  kein Gleichgewicht möglich ist. Aus den beiden ersten Gleichungen erhält man:

$$N = p \cdot (x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha),$$

$$V = p \cdot (x \cdot \sin \alpha - y \cdot \cos \alpha).$$

Aus geometrischen Beziehungen läßt sich leicht der folgende Zusammenhang zwischen den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  ablesen:

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{a \sin \beta}{S} ; \\ \cos \alpha &= \frac{b \cos \beta}{S} . \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Damit erhält man:

$$\left. \begin{aligned} N &= \frac{p a b}{S} \\ V &= \frac{p \cdot (a^2 - b^2) \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta}{S} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Die Momentengleichung (5c) läßt sich entsprechend umschreiben:

$$M = M_0 + \frac{p}{2} \cdot (a^2 - b^2) \cdot \sin^2 \beta. \quad (8)$$

Während die Normal- und Querkräfte  $N$  und  $V$  aus den Gleichungen (7) für jeden Ellipsenquerschnitt  $\beta$  eindeutig berechnet werden können, gilt dies nicht für das Biegemoment  $M$ , da es von dem statisch unbestimmten Moment  $M_0$  abhängt.

Um die statisch Unbestimmte  $M_0$  zu ermitteln, kann man entweder nach Castigliano die Formänderungsarbeit nach  $M_0$  differenzieren und diesen Differentialquotienten null setzen oder man bringt zum Ausdruck, daß die Summe der Verbiegungen der einzelnen Elemente des elliptischen Ringes wegen der Symmetrie für jeden Quadranten der Ellipse null sein muß. Wenden wir dieses letztere Verfahren an und beachten, daß jedes Linienelement  $ds$  der Ellipse, dessen Endquerschnitte vor der Belastung unter dem Winkel  $d\alpha$  geneigt waren, durch die mit der Belastung

verbundene Krümmungsänderung eine Zunahme der Größe der gegenseitigen Verdrehung der Endquerschnitte vom Betrag

$$\Delta d\alpha = \frac{M}{EJ} ds \quad (9)$$

erfährt, so läßt sich die oben erwähnte Formänderungsbedingung für die halbe Ellipse durch

$$\int_{\beta = -\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Delta d\alpha = \int_{\beta = -\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{M}{EJ} ds = 0 \quad (10)$$

ausdrücken. Da in unserem Fall der Schale von überall gleicher Dicke  $J$  konstant ist, so läßt sich Gl. (10) weiter vereinfachen:

$$\int_{\beta = -\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} M ds = 0. \quad (11)$$

Setzt man hierin für  $M$  den Wert von Gl. (8) ein, so erhält man unter Verwendung von Gl. (5c)

$$M_0 \cdot \int_{\beta = -\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ds = -\frac{p a^2}{2} \cdot \int_{\beta = -\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ds + \frac{p}{2} \cdot \int_{\beta = -\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + y^2) ds. \quad (12)$$

Nun ist nach [3] mit  $k$ , der Exzentrizität der Ellipse,

$$k^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}, \quad (13)$$

wobei  $b < a$  vorausgesetzt ist:

$$\int_{\beta = -\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ds = \pi a \left[ 1 - \frac{k^2}{4} - \frac{3}{64} \cdot k^4 - \frac{5}{256} k^6 - \dots \right]; \quad (14a)$$

$$\int_{\beta = -\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 ds = \frac{\pi}{2} a^3 \left[ 1 - \frac{3k^2}{8} - \frac{5k^4}{64} - \frac{35 \cdot k^6}{1024} - \dots \right]; \quad (14b)$$

$$\int_{\beta = -\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y^2 ds = \frac{\pi}{2} a b^2 \left[ 1 - \frac{k^2}{8} - \frac{k^4}{64} - \frac{5 \cdot k^6}{1024} - \dots \right]. \quad (14c)$$

Indem man diese Werte in Gl. (12) einsetzt, läßt sich  $M_0$  berechnen und man erhält damit aus Gl. (8), die Momentenverteilung der Biegebeanspruchung für die ganze Ellipse. Da die Normalkraft  $N$  und die Querkraft  $V$  sich aus der Gl. (7) berechnen lassen, ist damit die Beanspruchung des elliptischen Rohres in allen Einzelheiten als bekannt anzusehen. Auf Zahlenrechnungen soll hier nicht näher eingegangen werden.

Die vorstehende Ableitung des Spannungszustandes im geraden elliptischen Rohr unter innerem Überdruck  $p$  soll durch einen zweiten Weg wenigstens andeutungsweise ergänzt werden, da er uns für den folgenden Paragraphen bei der Untersuchung des Spannungszustandes im elliptischen Ring als Vorbild dienen wird.

Zu diesem Zweck denken wir uns aus Bild 1 ein Umfangselement der Ellipse von der Länge  $ds = S \cdot d\beta$  durch zwei benachbarte, unter dem Winkel  $d\alpha$  geneigte Querschnitte herausgeschnitten und die dort übertragenen resultierenden Kräfte und Momente eingetragen (s. Bild 2). Das Gleichgewicht der an dem Element  $ds$  angreifenden Kräfte in Richtung senkrecht bzw. tangential zur Schale sowie das

Momentengleichgewicht drücken sich durch die folgenden 3 Gleichungen aus:

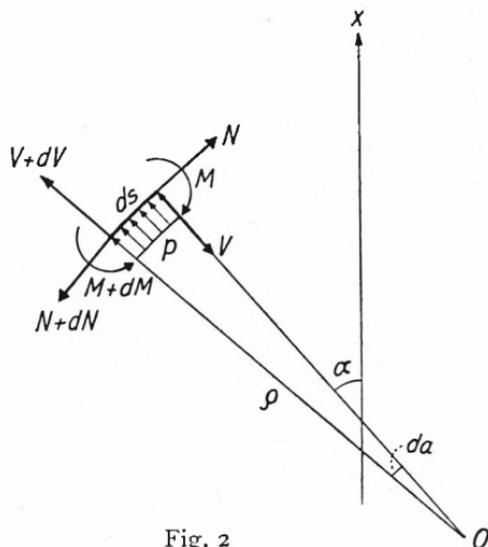


Fig. 2

$$\frac{N}{\rho} - \frac{dV}{ds} = p; \quad (16a)$$

$$\frac{dN}{ds} + \frac{V}{\rho} = 0; \quad (16b)$$

$$\frac{dM}{ds} - V = 0; \quad (16c)$$

Darin bedeutet  $\rho$  den Krümmungsradius der Ellipse an der betreffenden Stelle, dessen Größe bekanntlich

$$\rho = \frac{S^3}{ab} \quad (17)$$

ist. Die eindeutigen Lösungen der drei Gl. (16) sind die oben auf anderem Weg abgeleiteten Gl. (7) und (8), wovon man sich durch Einsetzen der Lösungen in die Differentialgleichungen (16) überzeugen kann.

## § 2. Die Ringschale von elliptischem Querschnitt unter innerem Überdruck

Bei der Untersuchung des elastischen Spannungszustandes in der Ringschale bei innerem Überdruck  $p$  wollen wir uns an die entsprechenden Überlegungen von § 1 für das elliptische Rohr halten und uns dabei an die am Schluß von § 1 gegebene Darstellung anlehnen. Hierzu denken wir uns aus dem elliptischen Ring durch zwei benachbarte, um den Winkel  $d\varphi$  gegeneinander geneigte Meridianebenen und durch zwei benachbarte Schnitte senkrecht zur Querschnittsellipse im Abstand  $ds$  ein Schalen-element herausgeschnitten und die an den Schnitten angreifenden

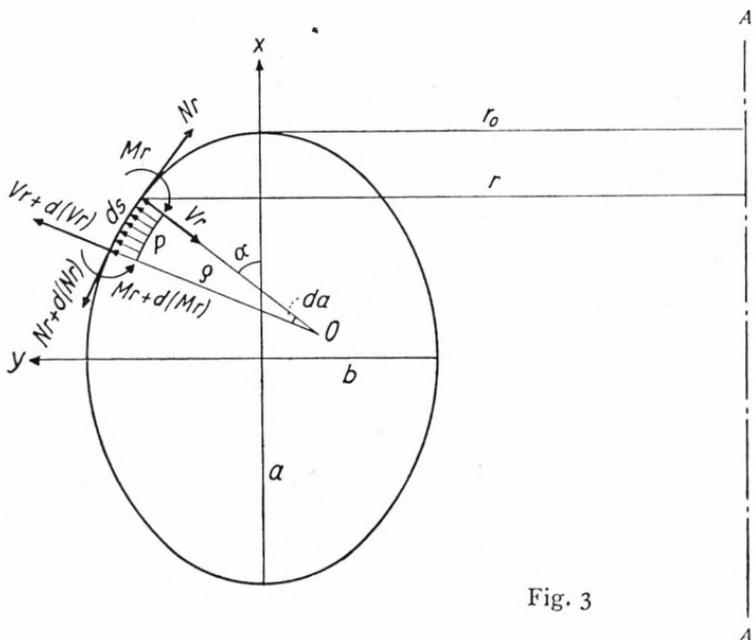


Fig. 3

den Kräfte und Momente angebracht (s. Bild 3). Wir wollen diese Kräfte und Momente auf den Meridianwinkel  $d\varphi = 1$  beziehen, so daß sie alle mit  $r$  multipliziert sind. Dabei ist

$$r = r_0 + y = r_0 + b \sin \beta \quad (18)$$

Darin bedeutet  $r_0$  den Abstand des Mittelpunktes des Ellipsenquerschnittes von der Ringachse  $AA$  (s. Bild 3). Außer den in Bild 3 eingetragenen am Schalelement angreifenden Kräften und Momenten kommen noch die senkrecht zum Meridianschnitt stehenden Ringkräfte  $T$  in Betracht, die in einer Ebene senkrecht zur Ringachse  $AA$  gelegen sind. Da sie den Winkel  $d\varphi$  einschließen, ist ihre Resultierende  $T \cdot d\varphi$  oder mit  $d\varphi = 1$  gleich  $T$  und nach der Achse  $AA$  gerichtet.

Die drei Gleichgewichtsbedingungen für die am Schalelement angreifenden Kräfte und Momente in Richtung senkrecht und tangential zur Schale sowie für das Momentgleichgewicht lauten:

$$\frac{N \cdot r}{\rho} - \frac{d(Vr)}{ds} = p \cdot r - T \sin \alpha; \quad (19a)$$

$$\frac{d(N \cdot r)}{ds} + \frac{V \cdot r}{\rho} = \quad + T \cos \alpha; \quad (19b)$$

$$\frac{d(M \cdot r)}{ds} - V \cdot r = 0. \quad (19c)$$

Man sieht sofort, daß diese Gleichungen in die Gl. (16) übergehen, wenn man den Grenzübergang  $\lim r \rightarrow \infty$  macht. Am zweckmäßigsten bewerkstelligt man diesen Grenzübergang in der Weise, daß man die Gl. (19) zunächst durch  $r_0$  dividiert und mit wachsendem  $r$  und  $r_0$  zu  $\lim \frac{r}{r_0} \rightarrow 1$  übergeht, wobei  $\frac{T}{r_0}$  in den Gl. (19a) und (19b) zum Verschwinden kommt und damit die Gl. (16) gewonnen werden.

Die Lösung der Gl. (19) erfolgt in der schon in der Einleitung angedeuteten Weise durch Aufspalten des Innendruckes  $p$  nach Gl. (1) in zwei Anteile

$$p = p_1 + p_2.$$

Dementsprechend lassen sich auch die Gl. (19) aufspalten.

Dabei soll der Anteil  $p_1$  den reinen Membran-Spannungszustand hervorrufen, während  $p_2$  für den Biegespannungszustand verantwortlich sein soll, bei dem aber auch Längsspannungen aus Gleichgewichtsbedingungen hinzutreten.

Das Verhältnis  $\frac{p_1}{p_2}$  wird später aus Formänderungsbedingungen bestimmt. Indem wir  $N$  und  $T$  aufspalten:

$$N = N_1 + N_2 \quad (20a)$$

$$T = T_1 + T_2 \quad (20b)$$

gehen die Gl. (19) in die beiden folgenden Gleichungssätze über:

$$\frac{N_2 \cdot r}{\rho} - \frac{d(V \cdot r)}{ds} = p_2 \cdot r - T_2 \cdot \sin \alpha; \quad (21a)$$

$$\frac{d(N_2 \cdot r)}{ds} + \frac{V \cdot r}{\rho} = \quad + T_2 \cdot \cos \alpha; \quad (21b)$$

$$\frac{d(M \cdot r)}{ds} - V \cdot r = 0. \quad (21c)$$

und

$$\frac{N_1 \cdot r}{\rho} = p_1 \cdot r - T_1 \cdot \sin \alpha; \quad (22a)$$

$$\frac{d(N_1 \cdot r)}{ds} = \quad + T_1 \cdot \cos \alpha. \quad (22b)$$

In den Gl. (22) kommt weder  $V$  noch  $M$  vor, da sie sich auf den reinen Membranspannungszustand beziehen. Die Lösungen der Gl. (22) stellen den bisher schon bekannten Membranspannungszustand dar (siehe [2]):

$$N_1 = p_1 \cdot \frac{b \cdot S}{2a} \left( 1 + \frac{r_0}{r} \right); \quad (23a)$$

$$T_1 = p_1 \cdot \frac{a^2 - b^2}{2aS} (r_0 + r) \sin \beta + p_1 \frac{b \cdot S}{2a}. \quad (23b)$$

Der Unterschied dieser Lösung von der bisher bekannten besteht nur darin, daß in ihr  $p_1$  und nicht der Gesamtdruck  $p$  als Faktor auftritt.

Wir wenden uns den Gl. (21) zu, wobei uns der ähnliche Aufbau dieser Gleichungen mit den Gl. (16) zustatten kommt, deren Lösung uns durch die Gl. (7) und (8) gegeben ist. Wir spalten die

Gl. (21) nochmals auf, wobei die rechten Seiten der Gl. (21 a) und (21 b) einmal nur das Glied  $p_2 r$  und das anderemal nur die Glieder  $T_2 \sin \alpha$  bzw.  $T_2 \cos \alpha$  enthalten. Dementsprechend denken wir uns  $N_2$  in zwei Anteile aufgespalten, die wir mit  $(N_2)_{p_2}$  und  $(N_2)_{T_2}$  bezeichnen wollen:

$$N_2 = (N_2)_{p_2} + (N_2)_{T_2} \quad (24 a)$$

Ebenso spalten wir  $V$  und  $M$  in zwei Anteile, von denen die ersten zu  $p_2$  und die zweiten zu  $T_2$  gehören:

$$V = (V)_{p_2} + (V)_{T_2} \quad (24 b)$$

$$M = (M)_{p_2} + (M)_{T_2} \quad (24 c)$$

An Stelle der Gl. (21) treten die folgenden Gleichungssätze:

$$(N_2)_{p_2} \frac{r}{\rho} - \frac{d}{ds} [(V)_{p_2} \cdot r] = p_2 \cdot r \quad (25 a)$$

$$\frac{d}{ds} [(N_2)_{p_2} \cdot r] + (V)_{p_2} \cdot \frac{r}{\rho} = 0 \quad (25 b)$$

$$\frac{d}{ds} [(M)_{p_2} \cdot r] - (V)_{p_2} \cdot r = 0 \quad (25 c)$$

und

$$(N_2)_{T_2} \cdot \frac{r}{\rho} - \frac{d}{ds} [(V)_{T_2} \cdot r] = -T_2 \sin \alpha \quad (26 a)$$

$$\frac{d}{ds} [(N_2)_{T_2} \cdot r] + (V)_{T_2} \cdot \frac{r}{\rho} = T_2 \cos \alpha \quad (26 b)$$

$$\frac{d}{ds} [(M)_{T_2} \cdot r] - (V)_{T_2} \cdot r = 0. \quad (26 c)$$

Die Gleichungen (26) gehören zu einem Eigenspannungszustand, da in ihnen weder  $p_1$  noch  $p_2$  als äußere Belastung vorkommt. Wegen des zweifachen Zusammenhanges der Ringschale sind Eigenspannungen möglich.

Mit den Abkürzungen

$$U = 4 \cdot \int_{\beta=0}^{\frac{\pi}{2}} ds$$

und

$$U = \int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} ds,$$

wobei  $U$  den Umfang der Ellipse bedeutet, läßt sich die Lösung der Gl. (26) mit den Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  folgendermaßen angeben:

$$(N_2)_{T_2} \cdot r = -C_1 \bar{u} \cos \alpha + C_2 \frac{a}{b r \sin \alpha} \quad (27a)$$

$$T_2 = C_1 - C_2 \frac{a^2}{S^3 \sin^2 \alpha} = C_1 - \frac{C_2}{S \cdot \sin^2 \beta} \quad (27b)$$

$$(V)_{T_2} \cdot r = -C_1 \bar{u} \sin \alpha \quad (27c)$$

$$(M)_{T_2} \cdot r = C_1 a \left[ \cos \beta \cdot \bar{u} - \frac{1}{4} U + \int_{\beta'=0}^{\beta'=\beta} \cos \beta' ds' \right] \quad (27d)$$

Für die Lösung unserer Aufgabe brauchen wir von diesem Eigenspannungszustand nur die mit der Konstante  $C_1$  behafteten Glieder. Setzt man dementsprechend  $C_2 = 0$ , so folgt aus Gl. (27b)

$$C_1 = T_2$$

und für diesen konstanten Wert von  $T_2$  ist aus Gleichgewichtsbedingungen zu setzen:

$$T_2 = p_2 \frac{\pi a b}{U}$$

und damit erhalten wir aus den Gl. (27)

$$(N_2)_{T_2} \cdot r = -T_2 \bar{u} \cos \alpha \quad (28a)$$

$$(V)_{T_2} \cdot r = -T_2 \bar{u} \sin \alpha \quad (28b)$$

$$(M)_{T_2} \cdot r = T_2 a \left[ \cos \beta \cdot \bar{u} - \frac{1}{4} U + \int_{\beta'=0}^{\beta'=\beta} \cos \beta' ds' \right]. \quad (28c)$$

Es fehlen noch die Lösungen der Gl. (25), die man aus den Gleichgewichtsbedingungen für den endlichen Abschnitt  $\beta = 0$  bis  $\beta$  des zum Winkel  $d\varphi$  gehörigen Sektors ableiten kann, ähnlich wie wir es in § 1 für den entsprechenden Abschnitt des elliptischen Rohres gemacht haben, wobei wir auf die Gleichgewichtsgleichungen (7) und (8) geführt worden sind. Dabei wollen wir gleich auf die Differentialgleichungen (21) zurückgreifen, nachdem wir inzwischen  $T_2 = p_2 \pi \frac{ab}{U}$  ermittelt haben. Diesen kon-

stanten Wert von  $T_2$  denken wir uns in die Differentialgleichungen (21) eingesetzt. Die Lösungen der Gl. (21) lauten:

$$N_2 r = p_2 r_0 \frac{a b}{S} + p_2 \frac{a b^2}{2 S} \sin^3 \beta \quad (29a)$$

$$- p_2 \frac{a b^2}{4 S} (2 \beta - \sin 2 \beta) \cos \beta + T_2 s \frac{b}{S} \cos \beta.$$

$$V r = p_2 r_0 \frac{a^2 - b^2}{S} \sin \beta \cos \beta - p_2 \frac{b^3}{2 S} \cos \beta \sin^2 \beta \quad (29b)$$

$$- p_2 \frac{a^2 b}{4 S} (2 \beta - \sin 2 \beta) \sin \beta + T_2 s \frac{a}{S} \sin \beta$$

$$M r = M_0 r_0 + p_2 \frac{r_0}{2} (a^2 - b^2) \sin^2 \beta - p_2 \frac{b^3}{6} \sin^3 \beta \quad (29c)$$

$$- p_2 \frac{a b}{4} (2 \beta - \sin 2 \beta) \xi_1 + T_2 \cdot s \cdot \xi_2.$$

Zum Verständnis dieser Gleichungen ist noch folgendes zu sagen. Der Ausdruck

$$\frac{a b}{4} (2 \beta - \sin 2 \beta) \quad (30)$$

ist der Anteil der Ellipsenfläche, der einerseits vom Ellipsenbogen  $\beta = 0$  bis  $\beta$  und andererseits von der  $x$ -Achse bzw. der durch den Aufpunkt  $\beta$  gehenden Parallelen zur  $y$ -Achse begrenzt wird. Für  $\beta = \frac{\pi}{2}$  geht dieser Ausdruck über in  $\pi \frac{a b}{4}$ , d. h. den vierten Teil der gesamten Ellipsenfläche. Mit  $s$  ist in den Gl. (29) der Ellipsenbogen von  $\beta = 0$  bis zum Aufpunkt  $\beta$  zu verstehen. Mit  $\xi_1$  sei der Abstand des Schwerpunktes des durch Gl. (30) bestimmten Ellipsenausschnitts von der Parallelen zur  $y$ -Achse durch den Aufpunkt  $\beta$  bezeichnet und mit  $\xi_2$  der Abstand des Schwerpunktes des Ellipsenbogens  $s$  von derselben Parallelen zur  $y$ -Achse.

Zur Kontrolle der Gl. (29) ist es zweckmäßig, den Sonderfall des Kreisringes mit  $b = a$  zu überprüfen. Dafür wird

$$\xi_1 = \frac{4 a}{3} \frac{\sin^3 \beta}{2 \beta - \sin^2 \beta} - a \cos \beta$$

$$\xi_2 = a \cdot \frac{\sin \beta}{\beta} - a \cos \beta,$$

wobei  $\beta$  der zum Bogen  $s = a \beta$  gehörige Zentriwinkel ist. Be-

achtet man ferner die Beziehung

$$\frac{s}{U} = \frac{\beta}{2\pi}$$

so findet man leicht, daß die rechte Seite von Gl. (29b) identisch verschwindet und ebenso die rechte Seite der Gl. (29c), wenn man von dem statisch unbestimmtem Moment  $M_0$  absieht, das selbstverständlich beim Kreisring auch null ist. Demnach fällt beim Kreisring unter innerem Überdruck der Biegespannungszustand ganz weg, so daß  $p_2 = 0$  und  $p_1 = p$  zu setzen ist und die Gl. (23) für den Membranspannungszustand mit  $p_1 = p$  und  $a = b$  allein die Beanspruchung des Kreisringes erschöpfend wiedergeben.

In Gl. (29c) bleibt noch das statisch unbestimmte Moment  $M_0 \cdot r_0$ , das im Querschnitt  $\beta = 0$  des zu  $d\varphi = 1$  gehörigen Ringsektors auftritt, zu bestimmen. Wir können dabei entsprechend vorgehen wie in § 1 bei Ermittlung des statisch unbestimmten Momentes  $M_0$  von Gl. (8), indem man entweder das Minimum der Formänderungsarbeit nach Castigliano zum Ausdruck bringt oder die Formänderungsbedingung anschreibt, daß die Summe der Verbiegungen der einzelnen Linienelemente  $ds$  der einen Hälfte des Ringsektors aus Symmetriegründen null sein muß. In beiden Fälle erhält man als Bedingung die Gleichung

$$\int_{\beta = -\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} M ds = 0. \quad (31)$$

Durch Einsetzen des Wertes von  $M$  aus Gl. (29c) erhält man mit den Abkürzungen

$$J_1 = \int_{\beta = -\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{ds}{r}; \quad J_2 = \int_{\beta = -\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \beta}{r} ds; \quad J_3 = \int_{\beta = -\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 \beta}{r} ds; \quad (32)$$

$$J_4 = \frac{1}{a} \int_{\beta = -\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (2\beta - \sin 2\beta) \frac{\xi_1}{r} ds; \quad J_5 = \frac{1}{a^2} \int_{\beta = -\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{s}{r} \cdot \xi_2 ds;$$

$$M_0 r_0 = \frac{p_2}{J_1} \left[ -\frac{r_0}{2} (a^2 - b^2) J_2 + \frac{b^3}{6} J_3 + \frac{a^2 b}{4} J_4 - \pi \frac{a^2 b^2}{U} J_5 \right]. \quad (33)$$

Die in Gl. (32) aufgeführten bestimmten Integrale sind elliptischer Art und lassen sich auswerten. Sie sind nur von den Abmessungen  $a$ ,  $b$  und  $r_0$  des Ringes abhängig.

Damit ist die strenge Lösung unserer Aufgabe auf die Bestimmung des Verhältnisses  $\frac{\dot{p}_1}{\dot{p}_2}$  zurückgeführt. Dieser Wert stellt neben dem soeben ermittelten Wert von  $M_0 r_0$  die zweite statisch unbestimmte Größe des Problems dar. Wir ermitteln sie auch aus einer Formänderungsbedingung. Vom Standpunkt der Statik aus betrachtet ist der durch die Gleichgewichtsgleichungen (23) zu  $\dot{p}_1$  gehörige Membranspannungszustand ebenso berechtigt wie der mit Biegung verbundene zu  $\dot{p}_2$  gehörige Zustand, der durch die Gleichgewichtsgleichungen (29) wiedergegeben wird, so daß von diesem Standpunkt aus gesehen das Verhältnis  $\frac{\dot{p}_1}{\dot{p}_2}$  jeden beliebigen Wert zwischen Null und unendlich annehmen kann. Der tatsächlich eintretende Wert dieses Verhältnisses folgt aus der Forderung, daß die zu beiden Gleichgewichtszuständen gehörigen Formänderungen der Ringschale übereinstimmen müssen. Zu diesem Zweck drücken wir die Längenänderung des in die Symmetrieebene der Ringschale fallenden Ellipsendurchmessers von der ursprünglichen Länge  $2b$  einmal durch den zu  $\dot{p}_1$  gehörigen Membranspannungszustand und das zweitemal durch den zu  $\dot{p}_2$  gehörigen Biegespannungszustand aus und setzen beide Formänderungsgrößen einander gleich. Bezeichnen wir diese Formänderungsgrößen mit  $\delta_1$  und  $\delta_2$ , so folgt für  $\delta_1$ :

$$\delta_1 = (\varepsilon_1)_{\frac{\pi}{2}} \cdot (r_0 + b) - (\varepsilon_1)_{-\frac{\pi}{2}} \cdot (r_0 - b) = \quad (34)$$

$$r_0 = \left[ (\varepsilon_1)_{\frac{\pi}{2}} - (\varepsilon_1)_{-\frac{\pi}{2}} \right] + b \left[ (\varepsilon_1)_{\frac{\pi}{2}} + (\varepsilon_1)_{-\frac{\pi}{2}} \right].$$

Darin sind die Umfangsdehnungen  $(\varepsilon_1)_{\beta=\frac{\pi}{2}}$  bzw.  $(\varepsilon_1)_{\beta=-\frac{\pi}{2}}$  aus den Gl. (23) zu entnehmen:

$$(\varepsilon_1)_{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{E h} \left( T_1 - \frac{1}{m} N_1 \right)_{\beta=\frac{\pi}{2}} = \quad (35 a)$$

$$= \frac{\dot{p}_1}{E h} \left[ \frac{a^2 - b^2}{2 a^2} (2 r_0 + b) + \frac{b}{2} \frac{m-1}{m} - \frac{1}{m} \frac{b}{2} \frac{r_0}{r_0 + b} \right]$$

$$(\varepsilon_1)_{-\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{E h} \left( T_1 - \frac{1}{m} N_1 \right)_{\beta=-\frac{\pi}{2}} = \quad (35 b)$$

$$= \frac{\dot{p}_1}{E h} \left[ -\frac{a^2 - b^2}{2 a^2} (2 r_0 - b) + \frac{b}{2} \frac{m-1}{m} - \frac{1}{m} \frac{b}{2} \frac{r_0}{r_0 - b} \right].$$

Durch Einsetzen dieser Werte in Gl. (34) erhält man nach einfacher Umrechnung:

$$\delta_1 = \frac{p_1 b^2}{E h} \left[ \frac{a^2 - b^2}{a^2} \left( 2 \frac{r_0^2}{b^2} + 1 \right) + \frac{m-1}{m} \right]. \quad (36)$$

Um  $\delta_2$  zu berechnen, ist zu beachten, daß die zugehörigen Gleichgewichtsgleichungen (29) sowohl Längsspannungen  $T_2$  und  $N_2$  als auch Biegemomente  $M$  enthalten, die  $\delta_2$  beeinflussen. Den Einfluß von  $V$  auf  $\delta_2$  kann man dagegen vernachlässigen. Der von den Biegemomenten herrührende Anteil von  $\delta_2$  wird durch

$$(\delta_2)_B = \int_{\beta = -\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{M r}{E J} x ds = \frac{12}{E \cdot h^3} \int_{\beta = -\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} M x ds \quad (37)$$

dargestellt. Durch Einsetzen des Wertes von  $M$  aus Gl. (29c) unter Berücksichtigung von Gl. (33) für  $M_0 r_0$  erhält man mit den Abkürzungen

$$J_6 = \int_{\beta = -\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \beta}{r} ds; \quad J_7 = \int_{\beta = -\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \beta \sin^2 \beta}{r} ds; \quad J_8 = \int_{\beta = -\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \beta \sin^3 \beta}{r} ds; \quad (38)$$

$$J_9 = \frac{1}{a} \int_{\beta = -\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (2\beta - \sin 2\beta) \cos \beta \frac{\xi_1}{r} ds; \quad J_{10} = \frac{1}{a^2} \int_{\beta = -\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{s}{r} \xi_2 \cos \beta ds;$$

$$(\delta_2)_B = \frac{12 a}{E h^3} p_2 \left\{ \frac{J_6}{J_1} \left[ -\frac{r_0}{2} (a^2 - b^2) J_2 + \frac{b^3}{6} J_3 + \frac{a^2 b}{4} J_4 - \pi \frac{a^2 b^2}{U} J_5 \right] + \right. \\ \left. + \frac{r_0}{2} (a^2 - b^2) J_7 - \frac{b^3}{6} J_8 - \frac{a^2 b}{4} J_9 + \pi \frac{a^2 b^2}{U} \cdot J_{10} \right\}. \quad (39)$$

Dazu tritt der zu  $p_2$  gehörige Längsspannungszustand, dessen Einfluß auf  $\delta_2$  ebenso berechnet wird wie bei  $\delta_1$ . Er beträgt:

$$(\delta_2)_L = (\varepsilon_2)_{\frac{\pi}{2}} (r_0 + b) - (\varepsilon_2)_{-\frac{\pi}{2}} (r_0 - b) = \\ = r_0 \left[ (\varepsilon_2)_{\frac{\pi}{2}} - (\varepsilon_2)_{-\frac{\pi}{2}} \right] + b \left[ (\varepsilon_2)_{\frac{\pi}{2}} + (\varepsilon_2)_{-\frac{\pi}{2}} \right] \quad (40)$$

mit

$$\begin{aligned} (\varepsilon_2)_{\frac{\pi}{2}} &= \frac{1}{Eh} \left( T_2 - \frac{1}{m} N_2 \right)_{\frac{\pi}{2}} = & (41 \text{ a}) \\ &= \frac{p_2}{Eh} \left[ \pi \frac{ab}{U} - \frac{b}{m} \left( \frac{r_0}{r_0+b} + \frac{1}{2} \frac{b}{r_0+b} \right) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\varepsilon_2)_{-\frac{\pi}{2}} &= \frac{1}{Eh} \left( T_2 - \frac{1}{m} N_2 \right)_{-\frac{\pi}{2}} = & (41 \text{ b}) \\ &= \frac{p_2}{Eh} \left[ \pi \frac{ab}{U} - \frac{b}{m} \left( \frac{r_0}{r_0-b} - \frac{1}{2} \frac{b}{r_0-b} \right) \right]; \end{aligned}$$

Diese Werte in Gl. (40) eingesetzt erhält man

$$(\delta_2)_L = \frac{p_2 b^2}{Eh} \left[ 2\pi \frac{a}{U} - \frac{1}{m} \frac{3r_0^2 - b^2}{r_0^2 - b^2} \right] \quad (42)$$

Es wird demnach

$$\delta_2 = (\delta_2)_L + (\delta_2)_B$$

durch Addition der Gl. (39) und (42) erhalten.

Führt man noch die Abkürzungen

$$\varkappa = \frac{b}{a}; \quad \lambda = \frac{r_0}{b}; \quad \mu = \frac{b}{U}; \quad \nu = \frac{a}{h} \quad (43 \text{ a})$$

$$J_I = J_1 \cdot J_7 - J_2 \cdot J_6; \quad J_{II} = J_1 \cdot J_8 - J_3 \cdot J_6; \quad (43 \text{ b})$$

sowie

$$J_{III} = J_1 \cdot J_9 - J_4 \cdot J_6; \quad J_{IV} = J_1 \cdot J_{10} - J_5 \cdot J_6$$

ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \frac{p_2 b^2}{Eh} \left[ 2\pi \frac{\mu}{\varkappa} - \frac{1}{m} \frac{3\lambda^2 - 1}{\lambda^2 - 1} \right] + & (44) \\ &+ p_2 \frac{12 a^3 b}{E h^3 J_1} \cdot \left[ \frac{\lambda}{2} (1 - \varkappa^2) \cdot J_I - \frac{\varkappa^2}{6} J_{II} - \frac{1}{4} \cdot J_{III} + \pi \mu J_{IV} \right]. \end{aligned}$$

In dem man  $\delta_1$  nach Gl. (36) dem Wert von  $\delta_2$  nach Gl. (44) gleichsetzt, erhält man die gesuchte Beziehung zwischen  $p_1$  und  $p_2$

$$\begin{aligned} p_1 \left[ (1 - \varkappa^2) (1 + 2\lambda^2) + \frac{m-1}{m} \right] &= p_2 \left[ 2\pi \frac{\mu}{\varkappa} - \frac{1}{m} \frac{3\lambda^2 - 1}{\lambda^2 - 1} \right] + & (45) \\ &+ p_2 \frac{12 r^2}{\varkappa \cdot J_1} \left[ \frac{\lambda}{2} (1 - \varkappa^2) J_I - \frac{\varkappa^2}{6} J_{II} - \frac{1}{4} J_{III} + \pi \mu J_{IV} \right]. \end{aligned}$$

Auf die numerische Auswertung der Lösung soll an anderer Stelle eingegangen werden. Es sei noch darauf hingewiesen, daß sich die Auswertung wesentlich vereinfacht, wenn man in den bestimmten Integralen  $J_1$  bis  $J_{10}$   $r$  durch den Mittelwert  $r_0$  ersetzt, was keinen größeren Fehler ausmachen dürfte. Man kann im Zweifel sein, ob das durch Gl. (45) bestimmte Verhältnis  $p_1/p_2$  als strenge Lösung anzusprechen ist, da sie nur durch Gleichsetzen der Längenänderung des einen Ellipsendurchmessers gewonnen worden ist. Um hierüber volle Klarheit zu gewinnen, ist beabsichtigt, auf Grund des Satzes von Castigliano einen zweiten Weg einzuschlagen, wobei man die gesamte Formänderungsarbeit  $A$  bildet, die sowohl von  $p_1$  wie  $p_2$  abhängt, und die partiellen Differentialquotienten nach  $p_1$  und  $p_2$  einander gleichsetzt:

$$\frac{\partial A}{\partial p_1} = \frac{\partial A}{\partial p_2}.$$

Zum Schluß sei noch darauf hingewiesen, daß sich das hier verwendete Verfahren auch für andere Aufgaben der Elastizitätstheorie eignet, z. B. zur Untersuchung des Spannungszustandes einer belasteten mittelstarken Platte, in der Biegung und Membranspannungen auftreten. Wenn man die Lösung für die beiden Grenzfälle der Kirchhoffschen Platte einerseits und der sehr dünnen Platte andererseits kennt und die Belastung der mittelstarken Platte, sei es durch gleichmäßig verteilte Last oder durch Einzellast, in zwei Anteile zerlegt, die für die beiden Spannungszustände der Biegebeanspruchung bzw. der Membranbeanspruchung der Platte verantwortlich sind, so muß das Verhältnis dieser beiden Anteile aus der Bedingung für die Gleichheit der Formänderung beider Belastungszustände gewonnen werden.

#### Literaturverzeichnis

1. „Stresses and deformations of toroidal shells of elliptic cross section. – „With applications of the problems of bending of curved tubes and of the BOURDON gage“ by R. A. Clark, T. J. Gilroy and E. Reissner, Journal of applied mechanics, Paper Nr. 51 – A– 11 (1951).
2. „Theorie der Röhrenfedermanometer“ von H. Lorenz, Zeitschr. d. Vereins deutscher Ing. Bd. 54 (1910) S. 1865; s. auch „Drang und Zwang“: A. u. L. Föppl, Bd. II, 3. Aufl. S. 7 Oldenbourg, München.
3. „Hütte“, des Ingenieurs Taschenbuch Bd. I, 27. Auflage (1941) S. 139 und 352.