

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1951

München 1952

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Gruppen infinitesimaler Kollineationen

Von Robert Sauer in München

Vorgelegt am 16. November 1951

In der Kinematik und Statik hat man es mit „infinitesimalen“ Bewegungen (Drehungen, Parallelverschiebungen und Schraubungen) und der Zusammensetzung solcher Bewegungen zu tun. Bezeichnet man mit A und B die Koeffizientenmatrizen zweier infinitesimaler Bewegungen, so stellen λA und μB Bewegungen mit denselben Fixelementen, aber mit dem λ - bzw. μ -fachen Drehwinkel und gegebenenfalls dem λ - bzw. μ -fachen Verschiebungsvektor dar. Die Zusammensetzung der infinitesimalen Bewegungen λA und μB liefert die infinitesimale Bewegung $\lambda A + \mu B$. Insbesondere liefert $\lambda = -1$ die zu A inverse Bewegung $-A$ und $\lambda = 0$ die Identität. Die aus A und B hergeleiteten Bewegungen $\lambda A + \mu B$ bilden also eine Gruppe infinitesimaler Bewegungen, und zwar offenbar eine Abelsche Gruppe. In derselben Weise erzeugen drei Bewegungen A, B, C die Gruppe $\lambda A + \mu B + \nu C$.

Wenn A, B Drehungen mit parallelen Drehachsen a, b sind, besteht die Gruppe $\lambda A + \mu B$ aus Drehungen, deren Drehachsen in der Ebene $\{a, b\}$ liegen und zu a und b parallel sind, sowie aus Parallelverschiebungen senkrecht zur Ebene $\{a, b\}$. Die Fixgeraden (Drehachsen) erzeugen also eine Ebene. Wenn A, B Drehungen mit windschiefen Drehachsen sind, besteht die Gruppe $\lambda A + \mu B$ für $\lambda \neq 0$ und $\mu \neq 0$ aus Schraubungen und die Fixgeraden (Schraubenachsen) erzeugen eine Regelfläche 3. Ordnung, ein sogenanntes Zylindroid.

Im folgenden werden diese wohlbekannten Tatsachen verallgemeinert, derart daß an Stelle infinitesimaler Bewegungen irgendwelche infinitesimale Kollineationen A, B, C treten. Dabei ergeben sich bemerkenswerte Sätze über die geometrischen Örter der Fixpunkte, Fixgeraden und Fixebenen. Bei gewissen Spezialisierungen der Kollineationen führt das Problem auf bekannte Beziehungen der Theorie der linearen Netze von Kur-

ven und Flächen zweiten Grades und die geometrischen Örter der Fixelemente werden identisch mit den Kernkurven und Kernflächen (z. B. Hessesche und Cayleysche Kurve, Jacobische Fläche) dieser Netze.

Andere Spezialisierungen der erzeugenden Kollineationen (z. B. Gruppen von Affinitäten oder von Drehstreckungen) führen zu mannigfaltigen speziellen Konfigurationen.

§ 1. Gruppen ebener Kollineationen

Aus zwei ebenen „infinitesimalen Kollineationen“ A, B

$$(1) \quad \rho x'_i = x''_i + \sum_k a_{ik} x''_k, \quad \rho x''_i = x_i + \sum_k b_{ik} x_k \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

erzeugen wir die Gruppe infinitesimaler Kollineationen $K(\lambda, \mu)$:

$$(2) \quad \rho x'_i = x_i + \sum_k c_{ik} x_k, \quad c_{ik}(\lambda, \mu) = \lambda a_{ik} + \mu b_{ik}.$$

Dabei hat man zunächst die Koeffizienten a_{ik}, b_{ik} als dem Betrage nach klein gegen 1 vorauszusetzen und bei der Zusammensetzung die in den a_{ik}, b_{ik} quadratischen Glieder zu vernachlässigen. Auf diese Weise entartet die Multiplikation der Koeffizientenmatrizen in die Addition der Matrizen, die Zusammensetzung erfolgt also additiv nach Gl. (2). Alle weiteren Untersuchungen beziehen sich lediglich auf Gl. (2) mit irgendwelchen Koeffizienten a_{ik}, b_{ik} , weshalb wir auf die Voraussetzung, daß die $|a_{ik}|$ und $|b_{ik}|$ klein gegen 1 sein sollen, fortan verzichten können.

Die Fixpunkte einer Kollineation $K(\lambda, \mu)$ ergeben sich aus den drei linearen Gleichungen

$$(3) \quad \sigma x_i + \lambda \sum_k a_{ik} x_k + \mu \sum_k b_{ik} x_k = 0, \quad (i = 1, 2, 3)$$

in denen die Parameter λ, μ nicht gleichzeitig verschwinden sollen. Bei vorgegebenem Verhältnis λ : μ ergibt sich für σ die Gleichung dritten Grades

$$(4) \quad \begin{vmatrix} \lambda a_{11} + \mu b_{11} + \sigma & \lambda a_{12} + \mu b_{12} & \lambda a_{13} + \mu b_{13} \\ \lambda a_{21} + \mu b_{21} & \lambda a_{22} + \mu b_{22} + \sigma & \lambda a_{23} + \mu b_{23} \\ \lambda a_{31} + \mu b_{31} & \lambda a_{32} + \mu b_{32} & \lambda a_{33} + \mu b_{33} + \sigma \end{vmatrix} = 0$$

und für jede Wurzel σ dieser Gleichung erhält man aus Gl. (3) einen Fixpunkt x . Im „allgemeinen Fall“ besitzt die Kollineation $K(\lambda, \mu)$ drei Fixpunkte. Wir werden demgemäß fortan von den Fixpunkt-Tripeln der Kollineationen $K(\lambda, \mu)$ sprechen, bleiben uns aber dabei bewußt, daß auch die bekannten Entartungen mit weniger als drei oder mit unendlich vielen Fixpunkten [1] auftreten können. Mit Realitätsunterscheidungen werden wir uns nicht beschäftigen.

Da in den Gln. (3) nicht alle drei Parameter λ, μ, σ gleichzeitig verschwinden, ergibt sich für die Koordinaten der Fixpunkte die Gleichung dritten Grades

$$(5) \quad \begin{vmatrix} \sum a_{1k} x_k & \sum b_{1k} x_k & x_1 \\ \sum a_{2k} x_k & \sum b_{2k} x_k & x_2 \\ \sum a_{3k} x_k & \sum b_{3k} x_k & x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Sie stellt eine Kurve dritter Ordnung C_3 dar und wir haben

Satz 1: Die Fixpunkte der Kollineationen $K(\lambda, \mu)$ liegen auf einer Kurve dritter Ordnung C_3 .

Wir nennen C_3 die Fixpunktkurve der Kollineationen $K(\lambda, \mu)$. Da jede Kurve dritter Ordnung (– sogar auf unendlich viele Arten –) durch eine Gleichung der Form (5) dargestellt werden kann, gilt

Satz 2: Jede Kurve dritter Ordnung (– nicht rational, rational oder zerfallend –) kann Fixpunktkurve einer Gruppe von Kollineationen $K(\lambda, \mu)$ sein.

Die Kollineationen $K(\lambda, \mu)$, die durch die Gln. (2) in Punktkoordinaten gegeben sind, werden in Linienkoordinaten durch die Gleichungen

$$(6) \quad \rho u_i = u'_i + \sum_h c_{hi} u'_h \quad \text{mit} \quad c_{hi} = \lambda a_{hi} + \mu b_{hi}$$

dargestellt. Hieraus erhält man für die Fixgeraden die Gleichung dritten Grades

$$(7) \quad \begin{vmatrix} \sum a_{k1} u_k & \sum b_{k1} u_k & u_1 \\ \sum a_{k2} u_k & \sum b_{k2} u_k & u_2 \\ \sum a_{k3} u_k & \sum b_{k3} u_k & u_3 \end{vmatrix} = 0$$

und hat somit

Satz 3: Die Fixgeradentripel, welche die Punktepaare der Fixpunkttripel verbinden, sind Tangenten einer Kurve dritter Klasse Γ_3 (Fixgeradenkurve). Umgekehrt kann jede Kurve dritter Klasse (– nicht rational, rational oder zerfallend –) Fixgeradenkurve einer Gruppe von Kollineationen $K(\lambda, \mu)$ sein.

Auf Grund ihrer Definitionen bestehen zwischen den Punkten der C_3 und den Tangenten der Γ_3 merkwürdige Konfigurationen; es gilt

Satz 4: Die von den Fixpunkt- und Fixgeraden-Tripeln erzeugten Dreiecke sind Schnendreiecke der Kurve C_3 und gleichzeitig Tangendendreiseite der Kurve Γ_3 .

§ 2. Gruppen räumlicher Kollineationen

Im Raum kann man ebenso wie in der Ebene aus zwei infinitesimalen Kollineationen A, B eine Gruppe $K(\lambda, \mu)$:

$$(8) \quad \rho x'_i = \sum_k c_{ik} x_k, \quad c_{ik}(\lambda, \mu) = \lambda a_{ik} + \mu b_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

erzeugen. Man kann aber auch aus drei Kollineationen A, B, C eine Gruppe $K(\lambda, \mu, \nu)$:

$$(9) \quad \rho x'_i = \sum_k d_{ik} x_k, \quad d_{ik}(\lambda, \mu, \nu) = \lambda a_{ik} + \mu b_{ik} + \nu c_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

bilden.

Wir wenden uns zunächst zu den durch die Gln. (9) gegebenen Gruppen $K(\lambda, \mu, \nu)$. Wie wir bei den ebenen Kollineationen Tripel von Fixpunkten und Fixgeraden (Dreiecke) hatten, haben wir bei den räumlichen Kollineationen im allgemeinen Quadrupel von Fixpunkten und Fixebenen (Tetraeder). Die Koordinaten der Fixpunkte und der Fixebenen erfüllen die Gleichungen des vierten Grades

$$(10) \quad \begin{vmatrix} \sum a_{1h} x_h & \sum b_{1h} x_h & \sum c_{1h} x_h & x_1 \\ \sum a_{2h} x_h & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & x_2 \\ \sum a_{3h} x_h & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & x_3 \\ \sum a_{4h} x_h & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & x_4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \sum a_{h1} u_h & \sum b_{h1} u_h & \sum c_{h1} u_h & u_1 \\ \sum a_{h2} u_h & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & u_2 \\ \sum a_{h3} u_h & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & u_3 \\ \sum a_{h4} u_h & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & u_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Man erhält den zu den Sätzen 1, 3 und 4 analogen

Satz 5: Die Fixpunkte der Kollineationen $K(\lambda, \mu, \nu)$ liegen auf einer Fläche vierter Ordnung F_4 , die Fixebenen sind Tangentialebenen einer Fläche vierter Klasse Φ_4 . Die von den Fixpunkt- und Fixebenen-Quadrupeln erzeugten Tetraeder sind Sehnentetraeder der Fläche F_4 und gleichzeitig Tangentialtetraeder der Fläche Φ_4 .

Etwas verwickelter sind die Beziehungen bei den durch die Gln. (8) gegebenen Kollineationen $K(\lambda, \mu)$. Hier müssen die Fixpunkte den vier Gleichungen

$$(11) \quad \sigma x_i + \lambda \sum_h a_{ih} x_h + \mu \sum_h b_{ih} x_h = 0 \quad (i, h = 1, 2, 3, 4)$$

mit den nur drei Parametern σ, λ, μ genügen. Da diese Parameter nicht gleichzeitig verschwinden, ist der Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & x_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & x_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & x_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & x_4 \end{pmatrix}$$

kleiner als 3; zur Abkürzung ist hierbei gesetzt

$$\alpha_i = \sum_h a_{ih} x_h, \quad \beta_i = \sum_h b_{ih} x_h.$$

Es gelten also die vier Gleichungen dritten Grades

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & x_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & x_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & x_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & x_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & x_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & x_2 \\ \alpha_4 & \beta_4 & x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & x_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & x_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Je zwei der hierdurch bestimmten Flächen dritten Grades haben eine Raumkurve dritter Ordnung gemeinsam, z. B. die beiden ersten Flächen die den Gleichungen

$$\begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_3 & x_3 \\ \alpha_4 & x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_3 & x_3 \\ \beta_4 & x_4 \end{vmatrix} = 0$$

genügende Raumkurve dritter Ordnung, die von den projektiven Ebenenbüscheln $\rho\alpha_3 + \sigma\alpha_4 = 0$, $\rho\beta_3 + \sigma\beta_4 = 0$, $\rho x_3 + \sigma x_4 = 0$ erzeugt wird. Hieraus und aus den dualen Betrachtungen für die Fixebenen ergibt sich

Satz 6: Die Fixpunkte der Kollineationen $K(\lambda, \mu)$ liegen auf einer Raumkurve sechster Ordnung C_6 . Die Fixebenen sind Schmiegebenen einer Raumkurve sechster Klasse Γ_6 . Die von den Fixpunkt- und Fixebenen-Quadrupeln erzeugten Tetraeder sind Sehnentetraeder der C_6 und gleichzeitig Schmiegebenentetraeder der Γ_6 .

§ 3. Beziehungen zur Theorie der linearen Netze von Kegelschnitten bzw. Flächen zweiten Grades

Wir wenden uns jetzt zu einem Spezialfall der in den §§ 1, 2 behandelten Kollineationen, indem wir voraussetzen, daß die Koeffizienten die Symmetriebedingungen

$$(12) \quad a_{ih} = a_{hi}, \quad b_{ih} = b_{hi}, \quad c_{ih} = c_{hi}$$

erfüllen. Dann sind die linearen Formen auf den rechten Seiten der Gln. (3), (8) und (9) partielle Ableitungen je einer quadratischen Form $\frac{\varphi}{2}$ bzw. $\frac{\psi}{2}$ bzw. $\frac{\chi}{2}$, nämlich in Gl. (3)

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^3 a_{ih} x_h &= \sum_{h=1}^3 a_{hi} x_h = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x_1, x_2, x_3), & \varphi &= \sum_{i,h=1}^3 a_{ih} x_i x_h, \\ \sum_{h=1}^3 b_{ih} x_h &= \sum_{h=1}^3 b_{hi} x_h = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \psi(x_1, x_2, x_3), & \psi &= \sum_{i,h=1}^3 b_{ih} x_i x_h, \end{aligned}$$

und in Gl. (8) und (9)

$$\sum_{h=1}^4 a_{ih} x_h = \sum_{h=1}^4 a_{hi} x_h = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad \varphi = \sum_{i,h=1}^4 a_{ih} x_i x_h,$$

usw.

Die in § 1 behandelten Gruppen ebener Kollineationen $K(\lambda, \mu)$, Gl. (3), stehen nunmehr in enger Beziehung zu dem linearen zweistufigen Kegelschnittnetz (vgl. [2])

$$(13) \quad \sigma \sum_{h=1}^3 x_h^2 + \lambda_i \sum_{i,h=1}^3 a_{ih} x_i x_h + \mu \sum_{i,h=1}^3 b_{ih} x_i x_h = 0.$$

Gl. (5) stellt nämlich die Hessesche Kurve und Gl. (7) die Cayleysche Kurve des Netzes dar, d. h. es gilt

Satz 7: Im Spezialfall $a_{ih} = a_{hi}$, $b_{ih} = b_{hi}$ ist die Fixpunkt-kurve C_3 der Kollineationsgruppe $K(\lambda, \mu)$ identisch mit dem geometrischen Ort der Doppelpunkte der in dem zweistufigen Kegelschnittnetz (13) enthaltenen Geradenpaare (Hessesche Kurve). Jedes Fixpunkttripler einer Kollineation $K(\lambda, \mu)$ bildet ein allen Kegelschnitten des Netzes gemeinsames Poldreieck. Infolgedessen ist die Fixgeradenkurve Γ_3 der Kollineationsgruppe identisch mit der von den Seitengeraden dieser Poldreiecke umhüllten Kurve (Cayleysche Kurve).

Natürlich lassen sich diese Beziehungen dual übertragen, indem man die Darstellung der Kollineationsgruppe $K(\lambda, \mu)$ in Linienkoordinaten, Gl. (6), benützt und das lineare zweistufige Gewebe der Kurven zweiter Klasse

$$(14) \quad \sigma \sum_{h=1}^3 u_h^2 + \lambda \sum_{i,h=1}^3 a_{ih} u_i u_h + \mu \sum_{i,h=1}^3 b_{ih} u_i u_h = 0$$

betrachtet. Dann ist die Fixgeradenkurve Γ_3 der Kollineationsgruppe $K(\lambda, \mu)$ identisch mit dem geometrischen Ort der Verbindungsgeraden (Doppeltangenten) der in dem Kegelschnittgewebe (14) enthaltenen Punktpaare.

Ähnliche Beziehungen ergeben sich für die in § 2 behandelten Gruppen räumlicher Kollineationen. Für die Kollineationsgruppen $K(\lambda, \mu)$, Gl. (8), und die linearen zweistufigen Netze von Flächen

zweiter Ordnung (vgl. [3])

$$(15) \quad \sigma \sum_{h=1}^4 x_h^2 + \lambda \sum_{i,h=1}^4 a_{ih} x_i x_h + \mu \sum_{i,h=1}^4 b_{ih} x_i x_h = 0$$

gilt der zu Satz 7 analoge

Satz 8: Im Spezialfall $a_{ih} = a_{hi}$, $b_{ih} = b_{hi}$ ist die Fixpunkt-kurve C_6 der Kollineationsgruppe $K(\lambda, \mu)$ identisch mit dem geometrischen Ort der Spitzen der in dem zweistufigen Flächennetz (15) enthaltenen Kegel (Kernkurve des Netzes). Jedes Fixpunktquadrupel einer Kollineation $K(\lambda, \mu)$ bildet ein allen Flächen des Netzes gemeinsames Poltetraeder.

Dual ergibt sich, daß die Fixebenen der Kollineationsgruppe $K(\lambda, \mu)$ identisch sind mit den Ebenen der in dem linearen zweistufigen Gewebe der Flächen zweiter Klasse

$$(16) \quad \sigma \sum_{h=1}^4 u_h^2 + \lambda \sum_{i,h=1}^4 a_{ih} u_i u_h + \mu \sum_{i,h=1}^4 b_{ih} u_i u_h = 0$$

enthaltenen Kurven zweiter Klasse.

Für die Kollineationsgruppen $K(\lambda, \mu, \nu)$, Gl. (9), und die linearen dreistufigen Netze von Flächen zweiter Ordnung (vgl. [3])

$$(17) \quad \left\{ \sigma \sum_{h=1}^4 x_h^2 + \lambda \sum_{i,h=1}^4 a_{ih} x_i x_h + \mu \sum_{i,h=1}^4 b_{ih} x_i x_h + \nu \sum_{i,h=1}^4 c_{ih} x_i x_h = 0 \right.$$

erhält man

Satz 9: Im Spezialfall $a_{ih} = a_{hi}$, $b_{ih} = b_{hi}$, $c_{ih} = c_{hi}$ ist die Fixpunktfläche F_4 der Kollineationsgruppe $K(\lambda, \mu, \nu)$ identisch mit dem geometrischen Ort der Spitzen der in dem dreistufigen Flächennetz (17) enthaltenen Kegel (Kernfläche oder Jacobi-sche Fläche des Netzes). Jedes Fixpunktquadrupel einer Kollineation $K(\lambda, \mu, \nu)$ bildet ein allen Flächen des Netzes gemeinsames Poltetraeder.

Dual gilt wie oben, daß die Fixebenen der Kollineationsgruppe $K(\lambda, \mu, \nu)$ identisch sind mit den Ebenen der in dem linearen dreistufigen Gewebe der Flächen zweiter Klasse

$$(18) \quad \sigma \sum_{h=1}^4 u_h^2 + \lambda \sum_{i,h=1}^4 a_{ih} u_i u_h + \mu \sum_{i,h=1}^4 b_{ih} u_i u_h + \nu \sum_{i,h=1}^4 c_{ih} u_i u_h = 0$$

enthaltenen Kurven zweiter Klasse.

§ 4. Gruppen von Affinitäten

Auf die Klassifikation der Kollineationsgruppen $K(\lambda, \mu, \nu)$ bzw. $K(\lambda, \mu, \nu)$, die sich aus der Klassifikation [1] der erzeugenden Kollineationen A, B, C und der gegenseitigen Lage ihrer Fixelemente ergeben, wird Herr Nießner in seiner Dissertation eingehen. Wir beschränken uns hier auf die Besprechung eines bemerkenswerten Sonderfalles, nämlich auf die ebenen Kollineationsgruppen mit einer gemeinsamen Fixgeraden und die räumlichen Kollineationsgruppen mit einer gemeinsamen Fixebene. Indem man diese Fixgerade bzw. Fixebene in die uneigentliche Gerade bzw. Ebene legt, ergeben sich Gruppen infinitesimaler Affinitäten. Man hat dann in den Gln. (3) $a_{31} = a_{32} = 0$, $b_{31} = b_{32} = 0$ und in den Gln. (8) und (9) $a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0$, $b_{41} = b_{42} = b_{43} = 0$, $c_{41} = c_{42} = c_{43} = 0$ zu setzen.

Die allgemeinen Sätze des § 1 spezialisieren sich hiermit für die Gruppe $K(\lambda, \mu)$ der sich aus Gl. (3) ergebenden ebenen Affinitäten zu

Satz 10: Die Fixpunktkurve C_3 der ebenen Affinitäten $K(\lambda, \mu)$ entartet in die uneigentliche Gerade und eine Kurve zweiter Ordnung C_2 . Die Fixgeraden erzeugen eine rationale Kurve dritter Klasse Γ_3 mit der uneigentlichen Geraden als Doppeltangente.

Für die Gruppe $K(\lambda, \mu)$ der sich aus Gl. (8) ergebenden räumlichen Affinitäten folgt

Satz 11: Die Fixpunktkurve C_6 der räumlichen Affinitäten $K(\lambda, \mu)$ entartet in eine Raumkurve dritter Ordnung C_3 und eine in der uneigentlichen Ebene liegende ebene Kurve dritter Ordnung C_3 .

Für die Gruppe $K(\lambda, \mu, \nu)$ der sich aus Gl. (9) ergebenden räumlichen Affinitäten erhält man schließlich

Satz 12: Die Fixpunktläche F_4 der räumlichen Affinitäten $K(\lambda, \mu, \nu)$ entartet in eine Fläche dritter Ordnung F_3 und die uneigentliche Ebene.

Literatur

- [1] R. Baldus, Zur Klassifikation der ebenen und räumlichen Kollineationen. Münchner Sitzungsber. 1928, S. 375—395.
- [2] F. Dingeldey, Kegelschnitte und Kegelschnittssysteme. Enc. der math. Wiss., Band III, 2, 1, S. 135—140.
- [3] O. Staudé, Flächen 2. Ordnung und ihre Systeme. Enc. der math. Wiss. Band III., 2, 1, S. 246—254.