

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1951

München 1952

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Das Problem der mehrfachen Lösungen der Kometenbahnbestimmung

Von Alexander Wilkens in La Plata

Vorgelegt in der Sitzung am 4. Mai 1951

Im Jahre 1931 veröffentlichte A. Hnatek (Wien) in den *Astronomischen Nachrichten* Bd. 242 und 243 unter Anwendung der Olbersschen Methode der Kometenbahnbestimmung Kriterien bezüglich einer dreifachen Lösung des Problems, ausgehend von den beiden sphärischen Koordinaten der 1. wie 3. Position des Kometen sowie der Olbersschen Funktion M , die von den beiden sphärischen Koordinaten der 2. Position abhängig ist; die Bahnbestimmung wie auch die Kriterien einer Multiplizität hängen also tatsächlich von 6 Beobachtungsdaten statt von 5 ab, wie die exakte Bahnbestimmung im parabolischen Falle theoretisch fordert. Deshalb ist das Hnateksche Verfahren nicht streng, und ein auf den nur 5 erforderlichen Ausgangsparametern beruhendes Verfahren muß auf andere Kriterien führen, zumindest auf eine Einengung resp. Verschärfung der Bedingungen für die Existenz einer 3-fachen Lösung. Aus dem von A. Hnatek behandelten praktischen Beispiel einer 3-fachen Lösung, mit also 3 verschiedenen Elementensystemen, ergeben sich überraschend 3 verschiedene Örter für die mittlere Position des Kometen statt einer einzigen, dazu unter beträchtlichen Längendifferenzen von $17'.5$ im Maximum und von $24'.6$ in Breite, weiter 3 verschiedene Werte von M , wie aus der $1'.6$ betragenden Differenz der 3 Neigungen der größten Kreise durch den 2. Kometenort folgt, im Gegensatz zu einer einwandfreien Methode, bei der die Ausgangswerte durch alle 3 Lösungen streng und bedingungslos dargestellt werden müssen. Deshalb bietet eine Bahnbestimmungsmethode, die nur auf den 5 zur parabolischen Bewegung erforderlichen sphärischen Koordinaten des Kometen beruht, einen prinzipiellen Vorteil gegenüber anderen Methoden, besonders in bezug auf die Frage nach den Bedingungen für eine Multiplizität der Lösungen.

Die Lösung einer parabolischen Bahnbestimmung und die Frage nach ihrer Multiplizität basiert nach den Untersuchungen des Verfassers in den Sitzungsberichten der Bayer. Akademie der Wissenschaften 1928, S. 113 usw. und in der Publikation Nr. 16 der Veröffentlichungen des La Plata-Observatoriums, auf der Benutzung von 5 Parametern, nämlich den beiden sphärischen Koordinaten des 1. und des 3. Kometenortes, sowie der Länge des 2. Ortes, und analytisch auf einer algebraischen Gleichung 6. Grades im heliozentrischen Radiusvektor eines der Örter:

$K_0 r^6 + K_2 r^4 + K_3 r^3 + K_4 r^2 + K_5 r + K_6 = 0$, woraus unter Berücksichtigung der Vorzeichen der Koeffizienten, soweit sie bekannt sind, folgt, daß allgemein nur 2 Lösungen möglich sind, aber 4 unter der Bedingung, daß $K_4 > 0$ und zugleich $K_5 < 0$ ist, wobei in jedem der beiden Fälle eine Lösung stets der der Beobachtung diametralen Richtung entspricht, so daß in Wirklichkeit nur eine oder drei reelle Lösungen des Problems möglich sind, die benutzten Beobachtungen streng darstellend. Ist nur eine der genannten Bedingungen nicht erfüllt, auch wenn K_4 oder K_5 verschwinden, verbleibt nur eine reelle Lösung des Problems.

Um nun zur Ableitung der Bedingungen zu gelangen, die die Beobachtungen erfüllen müssen, um zu einer multiplen Lösung zu gelangen, sind die Koeffizienten K_4 und K_5 durch die Beobachtungsdaten darzustellen. Da die Beobachtungen von der Erde aus erfolgen, deren Position an der Sphäre durch die der Sonne festgelegt ist, so sind wegen der daraus folgenden Relativität der Beobachtungen zur Sonne die Koeffizienten K_4 und K_5 zunächst als Funktionen der Längendifferenzen von Sonne und Komet und ferner der ekliptikalischen Breiten des Kometen darzustellen. Da die rechtwinkligen, heliozentrischen Koordinaten des Kometen nach Potenzen der Zeit entwickelt werden, weil die für einen beliebigen Zeitpunkt gültigen Koordinaten nebst ihren Geschwindigkeiten die Unbekannte der Bahnbestimmung sind, so zieht das dadurch veranlaßte Auftreten der Zeitdifferenzen neben den Längendifferenzen das Auftreten der sphärischen Geschwindigkeit in den Kriterien der Lösungen nach sich, wie es A. Hnatek schon vermutete. Weiter erscheint es mit Rücksicht

auf die Relativität der Kometen- und Sonnenpositionen zweckmäßig, statt der Längendifferenzen die sphärischen Abstände Δ des Kometen von der Sonne, neben den ekliptikal Breiten β , zur Fixierung des Kometenortes einzuführen, um dadurch die Gebiete der mehrfachen Lösungen, insbesondere durch den Sonnenabstand charakterisieren zu können, und weiter durch die Breite und die sphärischen Geschwindigkeiten in Länge und Breite resp. durch die Größen x und y , die linear von den genannten Geschwindigkeiten abhängen. Die kritischen Koeffizienten K_4 und K_5 ergeben sich dann als algebraische Funktionen von x und y , und zwar K_4 vom 4. Grade in x und dem 8. Grade in y , ferner K_5 vom 2. Grade in x und dem 4. Grade in y , außerdem vom Sonnenabstande Δ und der Breite β abhängig. Deshalb ist die analytische Auflösung allgemein kompliziert, nur die Grenzkurve $K_5 = 0$ erscheint am einfachsten analysierbar. Allgemein ergibt sich, daß das Gebiet einer 3-fachen Lösung, d. h. $K_5 < 0$, außerhalb, die einer einfachen Lösung innerhalb und auf der Grenzkurve $K_5 = 0$ gelegen ist, falls noch die Bedingung $K_4 > 0$ erfüllt ist. Ist ferner die absolute Breite des Kometen klein, oder liegt der Komet bei beliebiger Breite in der Nähe des der Konjunktion oder Opposition zur Sonne entsprechenden Längengrades, so daß die Differenz $\Delta - |\beta|$ eine kleine Größe ist, so reduziert sich K_4 wie schon K_5 , auf den 2. Grad des Parameters x , woraus sich dann $K_4 > 0$ ableitet. Die Reduktion von K_4 reicht im Falle absolut kleiner β in bezug auf Δ bis $\Delta = 30^\circ$, darüber hinaus ist eine strenge Untersuchung von K_4 vorzunehmen. Allgemein läßt sich ferner zeigen, daß, wenn $\Delta < 45^\circ$, stets $K_4 > 0$ und zugleich $K_5 < 0$, also 3-fache Lösungen möglich sind, wenn die Bedingungen $x \cdot \operatorname{tg} \beta > 0$ und zugleich $y < 0$ erfüllt sind.

Zur Illustrierung der Untersuchung durch die Ableitung einiger Grenzkurven wurden einige typische Grenzfälle herausgegriffen, zuerst der Fall $\Delta = 18^\circ$, da diese Distanz von der Sonne nach T. Banachiewicz und A. Hnatek bei Zugrundelegung der Olbersschen Methode der Bahnbestimmung die Grenze für das Bestehen von 3 Lösungen darstellt. Die Grenzkurve $K_5 = 0$ besteht dann, wenn noch $|\beta| = \Delta = 18^\circ$, der Komet also auf dem Konjunktions- resp. Oppositionskreise gelegen ist, aus

einem kleinen geschlossenen Oval in der oberen Halbebene des x - y -Systems, symmetrisch zur y -Achse, so daß außerhalb des Ovals, also im größten Teil der Ebene 3-fache Lösungen stattfinden, wie bei T. Banachiewicz und Hnatek, aber mit dem Unterschiede, daß in dem durch das Oval $K_5 = 0$ und seine Grenzkurve beschränkten Gebiet, also unter Ausschluß bestimmter x und y , d. h. sphärischer Geschwindigkeiten bezüglich β und λ nur eine Lösung möglich ist. Weiter wurde auf demselben Kreise $\Delta = 18^\circ$ um die Sonne der Unterfall $|\beta| = \frac{1}{2} \Delta = 9^\circ$ behandelt. Alsdann besteht die Grenzkurve $K_5 = 0$ aus 2 Ovalen, von denen das eine nahezu an derselben Stelle wie das soeben erwähnte Oval gelegen ist, und auch von denselben Dimensionen, während das 2. Oval ein sehr kleines Gebiet um die x -Achse, aber sehr weit entfernt vom Nullpunkt des Systems darstellt, so daß dieser Fall wegen der enormen sphärischen Geschwindigkeit in der Praxis der Kometenbahnbestimmung nicht realisiert ist, also ausscheidet. Innerhalb der Ovale gelten wieder nur eine, außerhalb, also im größten Teil der Ebene der x, y , 3 Lösungen, da $K_4 > 0$, weil $\Delta < 30^\circ$.

In weiterem Abstände von der Sonne, zuerst $|\beta| = \Delta = 30^\circ$, ergibt sich analog zum erstbehandelten Falle derselben Konjunktions- resp. Oppositionslage zur Sonne, wieder nur ein Grenz-oval $K_5 = 0$, in dessen Innerem nur eine Lösung, außerhalb wieder 3 Lösungen gelten, da auch jetzt noch $K_4 > 0$. Betrachten wir weiter auf demselben Kreise um die Sonne wieder einen Unterfall, d. h. $|\beta| = \frac{1}{2} \Delta = 15^\circ$, so ergeben sich wie immer außerhalb der Konjunktions- resp. Oppositionslinie wieder 2 Ovale, wobei das erste in Nullpunktsnähe gelegene Oval bescheidene Dimensionen aufweist, während das 2. Oval analog zu früheren Fällen um die x -Achse herum, aber in weitem Abstände vom Nullpunkt gelegen ist, so daß dieses Gebiet wegen der sehr großen Geschwindigkeit x für die Praxis nicht in Frage kommt. Im Außengebiet beider Ovale, also im größten Teil der Ebene x, y finden 3 Lösungen statt, also für nichtkleine x und y , wobei auch jetzt immer noch $K_4 > 0$.

Gehen wir jetzt zu einem Falle über, bei dem $\Delta > 45^\circ$, indem wir zuerst $\Delta = 60^\circ$ wählen, wobei $|\beta| = \Delta = 60^\circ$, so tritt so-

gleich eine wesentliche Änderung in der Verteilung der einfachen resp. 3-fachen Lösungen ein, insofern sich ergibt, daß beim Übergange auf $\Delta > 45^\circ$ jetzt innerhalb 3 Lösungen und nur eine Lösung außerhalb der Grenzkurve $K_5 = 0$ stattfinden. Diese Kurve zeigt jetzt eine nach oben glockenförmige Form oberhalb der x -Achse, wobei die Flügel nach beiden Seiten der x -Achse symmetrisch ins Unendliche verlaufen. Da allgemein $K_4 > 0$, wenn $|\beta| = \Delta$, so folgt, weil $K_5 < 0$ innerhalb der Grenzkurve, die Existenz 3-facher Lösungen innerhalb, einfacher außerhalb der Kurve, also im größeren Bereich der x - y -Ebene.

Im Anschluß an den soeben behandelten Fall interessiert uns wieder der entsprechende Unterfall, wo $|\beta| = \frac{1}{2} \Delta = 30^\circ$. Wieder ergibt sich eine dem Hauptfall ähnliche Grenzkurve $K_5 = 0$, aber es ist jetzt eine genaue Untersuchung von $K_4 = 0$ nötig, um die Möglichkeit einer Überdeckung der den beiden Kurven entsprechenden Gebiete feststellen zu können, wodurch eine Verkleinerung des Gebietes der 3-fachen Lösungen eintreten könnte. Aus der Definition von K_4 folgt nun, daß $K_4 > 0$ bei $\beta > 0$, wenn $x > 0$ und zugleich $y < 0$, d. h. im 4. Quadranten, andererseits auch bei $\beta < 0$ wenn $x < 0$ und zugleich $y < 0$, d. h. im 3. Quadranten. In bezug auf K_4 ergibt sich, daß die Kurve $K_4 = 0$ nur aus einer sehr schmalen Zunge mit Spitze besteht, die in das Innere von $K_5 = 0$ hineinragt und entlang dem Kurvenzweige von $K_5 = 0$ im 2. Quadranten verläuft, so daß also nur eine unbedeutende Verminderung des Gebietes der 3-fachen Lösungen eintritt.

Zum Schluß verbleibt der Grenzfall $\Delta = 90^\circ$, wenn der Komet sich also auf einem Äquator mit der Sonne als Pol befindet. Alsdann erscheint K_4 als die Summe von 2 Quadraten in bezug auf die beiden Parameter x und y , so daß stets $K_4 > 0$. Aus der Form des Auftretens von x in K_5 folgt, daß außerhalb der Kurve $K_5 = 0$ nur eine, innerhalb 3 Lösungen stattfinden. Im Sonderfalle des Verschwindens der beiden quadratischen Teile von $K_4 = 0$ muß entweder die Breite β des Kometen oder die Geschwindigkeit von β null sein, wobei dann die Geschwindigkeiten in Länge entsprechend beschränkt sind.