Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1951

München 1952

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Integrabilitätsbedingungen in der Theorie der Flächenabbildungen

Von Frank Löbell in München

Vorgelegt am 2. März 1951

In früheren Arbeiten bot sich gelegentlich schon Anlaß, auf die Integrabilitätsbedingungen hinzuweisen, welche die wesentlichen Funktionen der Theorie der Paare punktweise aufeinander bezogener Flächen erfüllen müssen.

Im folgenden möge nun ein Anfang mit der Aufstellung der Bedingungen gemacht werden, denen die die gegenseitige Lage entsprechender Elemente festlegenden Größen[1] genügen: die Rißmaßstäbe n, die Querrißmaßstäbe q und die Normalrißmaßstäbe γ; es wird sich zeigen, daß in sie auch die Krümmungsgrößen einer der beiden Flächen eingehen: die Normalkrümmungen N, die Normalwindungen T und gewisse geodätische Krümmungen G.

Wir wollen uns aber nicht damit begnügen, die Bedingungsgleichungen nur in der Form herzuleiten, die sich darbietet, wenn man von der in der natürlichen Differentialgeometrie üblichen, auf das Arbeiten mit Ableitungen nach Bogenlängen abgestimmten Integrabilitätsbedingung[2] ausgeht. Es sollen vielmehr auch vereinfachte Formen entwickelt werden, die hauptsächlich der durch das Vorherrschen von Linienelementfunktionen[3] nahegelegten Verwendung geodätischer Richtungsableitungen[3] zu verdanken sind; wesentlich ist hierbei, daß es durch diese möglich ist, die Integrabilitätsbedingung für

---

[1] Siehe SitzBer. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-nat. Kl., 1947, S. 16 u. S. 21; Jahresber. d. D. Math.-Ver. 54 (1951), 2. Abt. S. 32.

[2] E. Cesaro, Lezioni di geometria intrinseca, Napoli 1896, p. 155 (4) (G_1 wird hier mit anderem Vorzeichen gebraucht); Jahresber. d. DMV. 39 (1930) S. 177 (wo für orthogonale Netze $g_1 = G_2$, $g_2 = -G_1$ wird).

[3] Linienelementfunktionen und geodätische Ableitungen in der Flächentheorie. Math. Ann. 121 (1950) S. 427 ff.; die Beziehung zwischen gewöhnlichen und geodätischen Richtungsableitungen steht dort auf S. 432.

eine reine Ortsfunktion ebenso kurz zu fassen wie bei Zugrundelegung einer Parameterdarstellung der Fläche. Weitere Vereinfachungen kommen dadurch zustande, daß gewisse skalare Größen zu Vektoren und diese schließlich zu Dyaden vereinigt werden.

Skalare Bedingungsgleichungen

1. Wir knüpfen an die Grundbeziehung an, die zwischen entsprechenden Linienelementen der beiden einander zugeordneten Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ des euklidischen Raumes besteht[4]:

$$d\mathfrak{y} = n\,d\mathfrak{x} + q\,d\mathfrak{x}^* + \gamma\,\mathfrak{n}\,ds; \tag{1}$$

hier bedeutet $\mathfrak{n}$ den Einheitsvektor der positiven Normalen der orientierten Fläche $\mathfrak{x}$, ds die Länge von $d\mathfrak{x}$, ferner ist $d\mathfrak{x}^* = \mathfrak{n} \times d\mathfrak{x}$. Wie N und T sind n, q und γ Linienelementfunktionen[3] auf $\mathfrak{x}$.

Nehmen wir ein orthogonales System von Bezugslinien auf $\mathfrak{x}$ an – nur für ein solches sollen die Integrabilitätsbedingungen zunächst abgeleitet werden – und unterscheiden wir die auf die beiden Scharen von Netzlinien sich beziehenden Größen durch die Indizes 1 und 2 voneinander, setzen wir endlich zur Abkürzung $\frac{d\mathfrak{x}}{ds} = \mathfrak{t}$, speziell $\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial s_1} = \mathfrak{t}_1$ und $\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial s_2} = \mathfrak{t}_2$, so wird wegen $\mathfrak{t}_1^* = \mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_2^* = -\mathfrak{t}_1$

$$\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial s_1} = n_1\mathfrak{t}_1 + q_1\mathfrak{t}_2 + \gamma_1\mathfrak{n}, \qquad \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial s_2} = -q_2\mathfrak{t}_1 + n_2\mathfrak{t}_2 + \gamma_2\mathfrak{n}. \tag{1'}$$

Es ist zu bedenken, daß $\mathfrak{y}$ als Ortsfunktion auf $\mathfrak{x}$ angesehen werden kann; daher muß $\mathfrak{y}$ die Integrabilitätsbedingungen für Ortsfunktionen erfüllen, die folgendermaßen lautet[2]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_2} - G_1\right)\frac{\partial}{\partial s_1} - \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + G_2\right)\frac{\partial}{\partial s_2} = 0; \tag{2}$$

---

[4] SitzBer. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-nat. Kl., 1948, S. 228; dort wurde auf S. 232 die Integrabilitätsbedingung für den Sonderfall einander gleichmäßig entsprechender Flächen schon aufgestellt. Vergl. ebenda S. 337. Schon früher wurden von den Bearbeitern der „relativen Differentialgeometrie" Integrabilitätsbedingungen für den Fall der Zuordnung durch parallele Berührebenen betrachtet.

die G_i $(i = 1, 2)$ sind die geodätischen Krümmungen der Netzlinien auf $\mathfrak{x}$. Folglich wird

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_2} - G_1\right)(n_1 \mathfrak{t}_1 + q_1 \mathfrak{t}_2 + \gamma_1 \mathfrak{n}) - \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + G_2\right)(-q_2 \mathfrak{t}_1 + n_2 \mathfrak{t}_2 + \gamma_2 \mathfrak{n}) = 0. \tag{2'}$$

Zur Vereinfachung der weiteren Rechnung wenden wir den bekannten Satz der Kinematik an, der besagt, daß die absolute Änderungsgeschwindigkeit eines Vektors – hier $\mathfrak{q} = n\mathfrak{t} + q\mathfrak{t}^* + \gamma\mathfrak{n}$ –, der sich relativ zu einem starren Körper – hier dem begleitenden Dreibein $(\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \mathfrak{n})$ der Fläche $\mathfrak{x}$ – bewegt, der eine Führungsbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit[5]

$$\mathfrak{d} = T\mathfrak{t} + N\mathfrak{t}^* + G\mathfrak{n} \tag{3}$$

vollzieht, die geometrische Summe seiner Führungsgeschwindigkeit

$$\frac{d\mathfrak{q}}{ds} = \mathfrak{d} \times \mathfrak{q} \tag{3'}$$

und seiner Relativgeschwindigkeit ist, die allein von der Veränderlichkeit der Größen n, q, und γ herrührt; wir finden

$$\begin{aligned} &\mathfrak{t}_1\left(\left(\frac{\partial}{\partial s_2} - G_1\right) n_1 + \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + G_2\right) q_2\right) + \mathfrak{t}_2\left(\left(\frac{\partial}{\partial s_2} - G_1\right) q_1 - \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + G_2\right) n_2\right) + \\ &\quad + \mathfrak{n}\left(\left(\frac{\partial}{\partial s_2} - G_1\right)\gamma_1 - \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + G_2\right)\gamma_2\right) \\ &\quad + \mathfrak{d}_2 \times (n_1 \mathfrak{t}_1 + q_1 \mathfrak{t}_2 + \gamma_1 \mathfrak{n}) - \mathfrak{d}_1 \times (-q_2 \mathfrak{t}_1 + n_2 \mathfrak{t}_2 + \gamma_2 \mathfrak{n}) = 0. \end{aligned}$$

Wir können nun nach Einsetzen der aus (3) zu entnehmenden Werte von $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{d}_2$ auch die beiden Vektorprodukte in ihre Komponenten nach $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{n}$ zerlegen, wir können aber auch die Gleichung nacheinander skalar mit $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{n}$ multiplizieren; auf jeden Fall erhalten wir, bei Berücksichtigung der Bonnetschen Relation[6]

$$T_1 + T_2 = 0, \tag{4}$$

---

[5] Eine Zusammenfassung sämtlicher Ableitungsgleichungen der Kurven- und Flächentheorie in einer einzigen Beziehung, wie sie (3') darstellt, mit Hilfe eines „Krümmungsvektors" $\mathfrak{d}$, findet sich wohl zum erstenmal bei Cesaro l. c. p. 250; siehe Jahresber. d. DMV. 39 (1930) S. 173 u. S. 172.

[6] O. Bonnet, Mémoire sur la théorie des surfaces, Journal de l'École Polytechnique, t. XVIII, 1845, p. 4.

als Äquivalent der Vektorbedingung die drei skalaren Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_2} - G_1\right) n_1 + \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + G_2\right) q_2 + G_1 n_2 - G_2 q_1 - N_1 \gamma_2 - T_1 \gamma_1 = 0, \tag{I}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_2} - G_1\right) q_1 - \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + G_2\right) n_2 + G_1 q_2 + G_2 n_1 + T_1 \gamma_2 + N_2 \gamma_1 = 0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_2} - G_1\right) \gamma_1 - \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + G_2\right) \gamma_2 - N_1 q_2 - N_2 q_1 - T_1 (n_2 - n_1) = 0.$$

Dies sind die gesuchten Integrabilitätsbedingungen für das Flächenpaar $\mathfrak{x} \rightleftarrows \mathfrak{y}$. Ihr Erfülltsein ist notwendig und hinreichend dafür, daß sich zu der als gegeben anzusehenden Fläche $\mathfrak{x}$ eine Fläche $\mathfrak{y}$ finden läßt, die auf sie so abgebildet werden kann, daß die Funktionen n_i, q_i, γ_i die geforderten Bedeutungen haben; $\mathfrak{y}$ ist bis auf eine beliebige Translation im Raum bestimmt. Nimmt man aber zu den Gleichungen (I) noch die Gauß-Codazzi-Mainardischen Fundamentalgleichungen der Flächentheorie hinzu, denen die Größen N_i, T_i, G_i genügen müssen, so braucht man die Fläche $\mathfrak{x}$ nicht als gegeben anzusehen, da ihre Existenz der Gestalt und Größe nach dann nach dem Bour-Bonnetschen Satz gesichert ist.

Wir bemerken aber, daß die beiden Codazzi-Mainardischen Gleichungen aus den zwei ersten der Gleichungen (I) hervorgehen, wenn man

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{n} \tag{5}$$

annimmt und die Zuordnung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{n}$ so vornimmt, daß einander Punkte mit gleichen Normalvektoren zugewiesen werden; die dritte der Gleichungen (I) ist jedoch dann identisch erfüllt. In diesem Fall ist nämlich[7] außer $\gamma = 0$

$$n = N \quad \text{und} \quad q = -T. \tag{5'}$$

Einführung geodätischer Richtungsableitungen

2. Da wir es hier, wie oben schon betont, vorwiegend mit Linienelementfunktionen zu tun haben, liegt der Gedanke

[7] SitzBer. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-nat. Kl., 1947, S. 23. Dort ist N als Biegung, T als Drillung bezeichnet; hierzu vgl. Jahresber. d. DMV. 53 (1943) 2. Abt. S. 33.

nahe, es könnten die gefundenen Beziehungen dadurch einfacher werden, daß wir geodätische Richtungsableitungen $\frac{\delta}{ds}$ statt der gewöhnlichen geometrischen Ableitungen $\frac{d}{ds}$ verwenden[3]; diese beiden Operationen hängen untereinander vermöge der Beziehung

$$\frac{d}{ds} = \frac{\delta}{ds} + G\frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{6}$$

zusammen, wo $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ die partielle Ableitung nach dem Richtungswinkel des Linienelementes bedeutet, von dem die zu differenzierende Funktion außer vom Ort abhängt. Berücksichtigen wir außerdem, daß sich die bei der Umformung auftretenden Ableitungen der Größen n_i, q_i, γ_i nach φ durch diese selbst ausdrücken lassen, und zwar auf Grund der allgemeinen Beziehungen:[8]

$$n_\varphi = q - q^*, \qquad q_\varphi = n^* - n, \qquad \gamma_\varphi = \gamma^*, \tag{7}$$

wobei

$$n_1^* = n_2, \quad n_2^* = n_1, \quad q_1^* = q_2, \quad q_2^* = q_1, \quad \gamma_1^* = \gamma_2, \quad \gamma_2^* = -\gamma_1$$

zu setzen ist, so erhalten wir, ausgehend von (I), auf dem beschriebenen Wege durch einige Rechnung, die aber keinerlei Schwierigkeiten bietet, folgende einfachere Form der Integrabilitätsbedingungen:

$$\frac{\delta n_1}{\partial s_2} + \frac{\delta q_2}{\partial s_1} = \gamma_1 T_1 + \gamma_2 N_1, \tag{IIa}$$

$$\frac{\delta q_1}{\partial s_2} - \frac{\delta n_2}{\partial s_1} = -\gamma_1 N_2 - \gamma_2 T_1, \tag{IIb}$$

$$\frac{\delta \gamma_1}{\partial s_2} - \frac{\delta \gamma_2}{\partial s_1} = (n_2 - n_1) T_1 + q_1 N_2 + q_2 N_1. \tag{III}$$

---

[8] Wenn Φ eine Linienelementfunktion ist, deren Argumentelement im Punkt P die Richtung $\mathfrak{t}$ hat, so bedeute Φ^* den Wert von Φ in P für das um $+\frac{\pi}{2}$ in der Berührebene gedrehte Element der Richtung $\mathfrak{t}^*$.

Die Relationen (7) folgen aus den Gleichungen (10) auf S. 20 und (17) auf S. 22 der in der vorigen Fußnote genannten Arbeit, ferner aus der Gleichung $\gamma = -\mathfrak{J} d\mathfrak{x}$, die auf S. 230 der in Fußnote 4 angegebenen Arbeit bewiesen ist (statt deren wir hier zu schreiben haben: $\gamma = -\mathfrak{J}\mathfrak{t}$); $\mathfrak{J}$ ist nämlich eine reine Ortsfunktion, und es gilt, wie ohne weiteres zu erkennen ist: $\mathfrak{t}_\varphi = \mathfrak{t}^*$.

Es ist zu beachten, daß die hier vorkommenden Argumentelemente der verschiedenen Linienelementfunktionen verschieden gerichtet sind; ihre Richtungen $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ wechseln nach Maßgabe der Indizes 1 oder 2 der zu differenzierenden Größe.

Die Gestalt, die die Codazzi-Mainardischen Gleichungen hiernach in dem oben hervorgehobenen Sonderfall der Gaußschen Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{n}$ annehmen, ergab sich schon bei einer früheren Gelegenheit.[9] Es wird auffallen, daß sich Gauß' theorema egregium dabei nicht auch einstellt; das rührt davon her, daß zwischen den Größen G einerseits und γ andererseits im Rahmen der hier durchgeführten Betrachtungsweise keine Verwandtschaft von der Art besteht wie zwischen den Größen N und T einerseits und n und q andererseits. Die geodätischen Krümmungen sind ja nicht einmal Linienelementfunktionen wie die Normalrißmaßstäbe, wenn man sie nicht, soweit als sie in den Entwicklungen in Erscheinung treten, durch besondere Vorkehrungen dazu macht; diesen Gedanken wollen wir aber hier nicht weiter verfolgen. Will man erreichen, daß (III) als Verallgemeinerung des theorema egregium erscheint, so muß man Abbildungen von $\mathfrak{x}$ auf andere Flächen $\mathfrak{y}$ heranziehen; aber auch das möge einer anderen Gelegenheit vorbehalten bleiben.

Es sei noch erwähnt, daß allgemein bei Flächenabbildungen, bei denen die Normalenrichtungen erhalten bleiben, die durch das identische Verschwinden aller γ gekennzeichnet sind, nach (III) gilt:

$$q_1 N_2 + q_2 N_1 + n_1 T_2 + n_2 T_1 = 0 . \tag{8}$$

Vektorielle Zusammenfassungen

3. Die am Schluß von Abschnitt 1 gemachten Bemerkungen, nach denen in unseren Integrabilitätsbedingungen die Codazzi-Mainardischen Gleichungen als Sonderfall enthalten sind, drängen, da diese zu einer vektoriellen Beziehung vereinigt werden können,[10] zu der Vermutung, daß man die beiden ersten der

[9] SitzBer. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-nat. Kl., 1949, S. 39.

[10] Der erste, der die drei Fundamentalgleichungen der Flächentheorie mit Hilfe Graßmannscher Ausdehnungsgrößen, die in diesem Falle Vektoren sind,

Gleichungen (I) oder die beiden Gleichungen (IIa) und (IIb) vielleicht auch in eine Gleichung zusammenziehen kann, in der die Vektoren

$$\mathfrak{h}_i = \mathfrak{n} \times \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s_i} = -q_i \mathfrak{t}_i + n_i \mathfrak{t}_i^* \tag{9}$$

eine Rolle spielen, die der der geodätischen Krümmungsvektoren

$$\mathfrak{g}_i = \mathfrak{n} \times \frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial s_i} = T_i \mathfrak{t}_i + N_i \mathfrak{t}_i^* \tag{10}$$

in jener Zusammenfassung analog sein müßte; die $\mathfrak{h}_i$ sind wie die $\mathfrak{g}_i$ Linienelementfunktionen. In der Tat ist das möglich:

Wir brauchen nur die erste der Gleichungen (IIa) und (IIb) mit $\mathfrak{t}_2$, die zweite mit $-\mathfrak{t}_1$ zu multiplizieren und sie dann zu addieren; dabei haben wir zu bedenken, daß gilt

$$\mathfrak{t}_2 \frac{\delta n_1}{\partial s_2} = \frac{\delta (n_1 \mathfrak{t}_2)}{\partial s_2} - n_1 \frac{\delta \mathfrak{t}_2}{\partial s_2} \quad \text{usw.}$$

und daß die geodätische Ableitung eines beliebigen, mit einem begleitenden Dreikant der Fläche $\mathfrak{x}$ starr verbundenen Vektors $\mathfrak{q}$, wie etwa $\mathfrak{t}_2$, sich mit Hilfe des geodätischen Krümmungsvektors $\mathfrak{g} = T\mathfrak{t} + N\mathfrak{t}^*$ zu[11]

$$\frac{\delta \mathfrak{q}}{ds} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{q} \tag{10'}$$

ergibt. Dann finden wir

$$\frac{\delta (n_1 \mathfrak{t}_2)}{\partial s_2} - n_1 \mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{t}_2 + \frac{\delta (q_2 \mathfrak{t}_2)}{\partial s_1} - q_2 \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{t}_2 - \frac{\delta (q_1 \mathfrak{t}_1)}{\partial s_2} + q_1 \mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{t}_1 +$$
$$+ \frac{\delta (n_2 \mathfrak{t}_1)}{\partial s_1} - n_2 \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{t}_1 = (\gamma_1 T_1 + \gamma_2 N_1) \mathfrak{t}_2 + (\gamma_1 N_2 + \gamma_2 T_1) \mathfrak{t}_1$$

oder

$$\frac{\delta \mathfrak{h}_1}{\partial s_2} - \frac{\delta \mathfrak{h}_2}{\partial s_1} + (n_1 N_2 + n_2 N_1 + (q_1 - q_2) T_1) \mathfrak{n} + \gamma_1 \mathfrak{g}_2 - \gamma_2 \mathfrak{g}_1 = 0. \tag{II}$$

---

in einer Gleichung vereinigte, war wohl Cesaro l. c. p. 253. Siehe SitzBer. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-nat. Abt., 1929, S. 165–173; Jahresber. d. DMV. 39 (1930) S. 180 Fußnote 1 und S. 178.

[11] Vgl. die in Fußnote 3 angeführte Arbeit S. 433.

Diese Beziehung geht in dem mehrfach erwähnten Sonderfall (5) in die vektorielle Codazzi-Mainardische Gleichung[10] über, weil $\mathfrak{h}$ dann vermöge (5′) zu $\mathfrak{g}$ wird und der Faktor von $\mathfrak{n}$ den doppelten Wert des Gaußschen Krümmungsmaßes

$$K = N_1 N_2 - T_1^2$$

annimmt.[12]

Vereinfachte Integrabilitätsbedingung für Ortsfunktionen.

4. Die Einfachheit der Verbindung, in der in den erhaltenen Resultaten immer wieder die beiden geodätischen Ableitungen $\frac{\delta}{\partial s_1}$ und $\frac{\delta}{\partial s_2}$ auftreten, läßt vermuten, daß dieser gesetzmäßig anmutenden Erscheinung ein allgemeingültiger Sachverhalt zugrunde liegt. In diesem Zusammenhang ist zunächst der Gedanke an die in einer früheren Arbeit aufgestellte Integrabilitätsbedingung für Linienelementfunktionen Φ naheliegend:[13]

$$\left(\frac{\delta}{\partial s_2} - G_1\right)\frac{\delta\Phi}{\partial s_1} - \left(\frac{\delta}{\partial s_1} + G_2\right)\frac{\delta\Phi}{\partial s_2} + K\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = 0, \qquad (11)$$

in der sämtliche geodätischen Ableitungen unter der Annahme zu vollziehen sind, daß das Linienelement, von dem Φ abhängt, in der Differentiationsrichtung infinitesimal parallel verschoben wird. Wenn aber die Bedingung (11) auf eine reine Ortsfunktion als eine spezielle Linienelementfunktion angewandt wird, so geht sie, worauf schon in der soeben erwähnten Arbeit hingewiesen wurde, in die Integrabilitätsbedingung (2) für Ortfunktionen über, weil dann selbstverständlich wegen des Wegfalls der den Wert der Funktion mitbestimmenden Richtung des Argument-

---

[12] Cesaro l. c. p. 167. In der Tat ist seiner ursprünglichen Bedeutung nach das Gaußsche Krümmungsmaß $K = \mathfrak{n}\frac{\partial\mathfrak{n}}{\partial s_1}\frac{\partial\mathfrak{n}}{\partial s_2} = \mathfrak{n}\left((\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{n}) \times (\mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{n})\right) = \mathfrak{n}\,\mathfrak{g}_1\,\mathfrak{g}_2 = N_1 N_2 + T_1 T_2$; ähnlich erkennt man, daß gilt: $K\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$. Ausdrücke von der Form $\frac{\delta\Phi_1}{\partial s_2} - \frac{\delta\Phi_2}{\partial s_1}$ deuten auf Rotoren hin oder, allgemeiner, auf äußere Ableitungen Pfaffscher Formen im Sinne H. Graßmanns und E. Cartans.

[13] Vgl. Math. Ann. 122 (1950) S. 156 (15).

elementes überall an die Stelle geodätischer Ableitungen gewöhnliche Richtungsableitungen treten müssen und die partielle Ableitung nach dem Richtungswinkel verschwindet. Im besonderen erhalten wir für $\Phi = \mathfrak{y}$ die schon anfangs benutzte Beziehung (2):

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_2} - G_1\right)\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s_1} - \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + G_2\right)\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s_1} = 0.$$

Beachten wir nun aber die Tatsache, daß $\frac{d\mathfrak{y}}{ds}$ eine Linienelementfunktion ist; die Richtungsableitung einer Ortsfunktion hängt ja von dem in die Differentiationsrichtung weisenden Linienelement ab. Es hat deshalb einen vernünftigen Sinn, nachträglich die in den Klammern stehenden gewöhnlichen Richtungsableitungen $\frac{\partial}{\partial s_1}$ und $\frac{\partial}{\partial s_2}$ durch die geodätischen Ableitungen $\frac{\delta}{\partial s_1}$ bzw. $\frac{\delta}{\partial s_2}$ auszudrücken, die sich jetzt aber – wie übrigens schon in (IIa), (IIb) und (III) – auf die beiden verschiedenen Linienelemente mit den Richtungen $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ beziehen sollen, von denen $\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s_1}$ bzw. $\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s_2}$ abhängen; wir erhalten nach (6):

$$\left(\frac{\delta}{\partial s_2} + G_2\frac{\partial}{\partial \varphi} - G_1\right)\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s_1} - \left(\frac{\delta}{\partial s_1} + G_1\frac{\partial}{\partial \varphi} + G_2\right)\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s_2} = 0.$$

Bekanntlich gilt nun, wenn die Differentiationsrichtung von $\frac{d}{ds}$ diejenige des Einheitsvektors $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 \cos\varphi + \mathfrak{t}_2 \sin\varphi$ ist,

$$\frac{d\mathfrak{y}}{ds} = \cos\varphi\,\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s_1} + \sin\varphi\,\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s_2}. \tag{12}$$

Daher wird, weil die Abhängigkeit der Ableitung $\frac{d\mathfrak{y}}{ds}$ von φ nur von den Faktoren $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ herrührt, nicht aber von den Größen $\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s_1}$ und $\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s_2}$, die in der Relation (12) als reine Ortsfunktionen fungieren,

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{d\mathfrak{y}}{ds} = -\sin\varphi\,\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s_1} + \cos\varphi\,\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s_2},$$

d. h.

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{d\mathfrak{y}}{ds} = \frac{d\mathfrak{y}}{ds^*}; \tag{13}$$

insbesondere ergibt sich für $\varphi = 0$ und für $\varphi = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s_1} = \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s_2}, \qquad \frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s_2} = -\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s_1},$$

insofern hier, im Gegensatz zu oben, $\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s_1}$ und $\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s_2}$ als Linienelementfunktionen der speziellen Elemente mit den Richtungen $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ anzusehen sind.

Hiernach können wir die Integrabilitätsbedingung für eine reine Ortsfunktion in vereinfachter Form so schreiben:

$$\frac{\delta}{\partial s_2}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s_1} - \frac{\delta}{\partial s_1}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s_2} = 0; \tag{14}$$

es sei wiederholt, daß hier jede der geodätischen Ableitungen sich auf die Differentiationsrichtung der jeweils hinter ihr stehenden gewöhnlichen Richtungsableitung als Richtung des Argumentelementes bezieht, d. h. unter der Annahme ausgeführt zu denken ist, daß $\mathfrak{t}_1$ bzw. $\mathfrak{t}_2$ infinitesimal parallel verschoben wird.

Natürlich kann in (14) $\mathfrak{y}$ durch eine beliebige skalare oder tensorielle Ortsfunktion ersetzt werden, die die nötigen Differenzierbarkeits- und Stetigkeitseigenschaften besitzt.[14]

Wir verstehen jetzt, beim Anblick von (14), warum in den Gleichungen (IIa), (IIb), (III) und (II) sowie in den äquivalenten späteren Beziehungen die Größen G_1 und G_2 nicht mehr, wie in (I), auftreten.

Folgerungen

5. Auf Grund des Ergebnisses des vorigen Abschnitts hätten wir zu unseren früheren Integrabilitätsbedingungen von vornherein mit geringerem Rechenaufwand gelangen können; wir

[14] Daß die beiden Differentiationen auf der linken Seite von (13) wegen $\mathfrak{y}_\varphi = 0$ nicht vertauschbar sind, rührt davon her, daß $\mathfrak{y}$ erst durch die geometrische Ableitung eine Linienelementfunktion wird; es besteht also hier kein Widerspruch zu der Tatsache, daß $\frac{\delta}{\partial s}\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\delta}{\partial s}$ ist, wenn $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ sich nicht auf den Azimut der Differentiationsrichtung bezieht, wie nach dem Hinweis, der in der in der vorigen Fußnote genannten Arbeit auf S. 155 gegeben wurde, bewiesen werden kann.

Es sei darauf hingewiesen, daß die Beziehung (14) auch bei Zugrundelegung eines nicht-orthogonalen Bezugsnetzes gilt; dies wird in einer Arbeit bewiesen, die demnächst in den Math. Ann. erscheinen soll.

hätten nur auszugehen brauchen von der gemäß (1′) geltenden Gleichung:

$$\frac{\delta}{\partial s_2}(n_1\mathfrak{t}_1 + q_1\mathfrak{t}_2 + \gamma_1\mathfrak{n}) - \frac{\delta}{\partial s_1}(-q_2\mathfrak{t}_1 + n_2\mathfrak{t}_2 + \gamma_2\mathfrak{n}) = 0. \quad (15)$$

Bei ihrer weiteren Umformung, deren Ziel die Zerlegung in Komponenten nach den Richtungen $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{n}$ sein soll, greifen wir wieder auf die Beziehung (10′) zurück; es ergibt sich

$$\mathfrak{t}_1\left(\frac{\delta n_1}{\partial s_2} + \frac{\delta q_2}{\partial s_1}\right) + \mathfrak{t}_2\left(\frac{\delta q_1}{\partial s_2} - \frac{\delta n_2}{\partial s_1}\right) + \mathfrak{n}\left(\frac{\delta \gamma_1}{\partial s_2} - \frac{\delta \gamma_2}{\partial s_1}\right) +$$
$$+ \mathfrak{g}_2 \times (n_1\mathfrak{t}_1 + q_1\mathfrak{t}_2 + \gamma_1\mathfrak{n}) - \mathfrak{g}_1 \times (-q_2\mathfrak{t}_1 + n_2\mathfrak{t}_2 + \gamma_2\mathfrak{n}) = 0.$$

Auf diesem Wege kommen wir schneller als in Abschnitt 2 zu den Gleichungen (IIa), (IIb) und (III).

Möchte man aber von Anfang an auf die vektorielle Zusammenfassung (II) der Beziehungen (IIa) und (IIb) lossteuern, so kann man die Gleichung (15) vektoriell mit $\mathfrak{n}$ multiplizieren; man findet wegen $\mathfrak{n} \times (n_i\mathfrak{t}_i + q_i\mathfrak{t}_i^*) = \mathfrak{h}_i$

$$\frac{\delta \mathfrak{h}_1}{\partial s_2} - \frac{\delta \mathfrak{n}}{\partial s_2} \times (n_1\mathfrak{t}_1 + q_1\mathfrak{t}_2 + \gamma_1\mathfrak{n}) - \frac{\delta \mathfrak{h}_2}{\partial s_1} + \frac{\delta \mathfrak{n}}{\partial s_1} \times (-q_2\mathfrak{t}_1 + n_2\mathfrak{t}_2 + \gamma_2\mathfrak{n}) = 0.$$

Da nach (10′) $\frac{\delta \mathfrak{n}}{\partial s_i} = \mathfrak{g}_i \times \mathfrak{n}$ ist, wird

$$\frac{\delta \mathfrak{h}_1}{\partial s_2} - (\mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{n}) \times (n_1\mathfrak{t}_1 + q_1\mathfrak{t}_2 + \gamma_1\mathfrak{n})$$
$$- \frac{\delta \mathfrak{h}_2}{\partial s_1} + (\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{n}) \times (-q_2\mathfrak{t}_1 + n_2\mathfrak{t}_2 + \gamma_2\mathfrak{n}) = 0,$$

und hieraus folgt, da für Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, die zu $\mathfrak{n}$ senkrecht sind, $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{n}) \times \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \times (\mathfrak{n} \times \mathfrak{b})$ ist, die oben schon gefundene Beziehung (II) in der Form

$$\frac{\delta \mathfrak{h}_1}{\partial s_2} - \frac{\delta \mathfrak{h}_2}{\partial s_1} - \mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{h}_2 + \gamma_1\mathfrak{g}_2 - \gamma_2\mathfrak{g}_1 = 0. \quad (\mathrm{II}')$$

Um schließlich die dritte der Integrabilitätsbedingungen, nämlich (III), auf diesem neuen Wege zu gewinnen, multiplizieren wir die Gleichung (15) skalar mit $\mathfrak{n}$; wir erhalten

$$\frac{\delta \gamma_1}{\partial s_2} - \frac{\delta \mathfrak{n}}{\partial s_2}(n_1\mathfrak{t}_1 + q_1\mathfrak{t}_2 + \gamma_1\mathfrak{n}) - \frac{\delta \gamma_2}{\partial s_1} + \frac{\delta \mathfrak{n}}{\partial s_1}(-q_2\mathfrak{t}_1 + n_2\mathfrak{t}_2 + \gamma_2\mathfrak{n}) = 0,$$

mithin

$$\frac{\delta \gamma_1}{\partial s_2} - \mathfrak{g}_2 \mathfrak{n}(n_1 \mathfrak{t}_1 + q_1 \mathfrak{t}_2) - \frac{\delta \gamma_2}{\partial s_1} + \mathfrak{g}_1 \mathfrak{n}(-q_2 \mathfrak{t}_1 + n_2 \mathfrak{t}_2) = 0$$

und daraus gemäß (9) unmittelbar die gesuchte Beziehung in der Form:

$$\frac{\delta \gamma_1}{\partial s_2} - \frac{\delta \gamma_2}{\partial s_1} + \mathfrak{g}_1 \mathfrak{h}_2 - \mathfrak{g}_2 \mathfrak{h}_1 = 0. \tag{III'}$$

Wir hätten auch $\mathfrak{n}_i \mathfrak{t}_i + q_i \mathfrak{t}_i^* = \mathfrak{h}_i \times \mathfrak{n}$ in (15) einsetzen können; die dabei sich ergebende Relation läßt sich mit Hilfe eines Kunstgriffes, der im nächsten Abschnitt beschrieben werden soll, rasch in die Gleichungen (II') und (III') zerfällen.

6. Statt der Vektoren $\mathfrak{h}_i$, die wir in Abschnitt 3 wegen der Analogie ihres Baues zu dem der geodätischen Krümmungsvektoren $\mathfrak{g}_i$ eingeführt haben, die infolge ihrer kinematischen Bedeutung als Drehgeschwindigkeiten der Berührebene der Fläche $\mathfrak{x}$ bei infinitesimaler Parallelverschiebung für die Flächentheorie wichtig sind, können wir auch die Tangentialkomponenten von $\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s_i}$, nämlich

$$\mathfrak{f}_i = \mathfrak{n} \times \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s_1} \times \mathfrak{n} = \mathfrak{h}_i \times \mathfrak{n} \tag{16}$$

heranziehen. Man kann sogar die Ansicht vertreten, daß der Vektor $\mathfrak{f}$ für die Flächenpaare eine wichtigere Rolle spielt als $\mathfrak{h}$. In der Flächentheorie würde ihm der Vektor $\frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial s} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{n}$ entsprechen.

Die Bedingungsgleichung, der $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ genügen müssen, ergibt sich am einfachsten aus der allgemeinen Beziehung (15): Wegen

$$\frac{d\mathfrak{y}}{ds} = \mathfrak{f} + \gamma \mathfrak{n} \tag{16'}$$

ist

$$\frac{\delta \mathfrak{f}_1}{\partial s_2} - \frac{\delta \mathfrak{f}_2}{\partial s_1} + \frac{\delta(\gamma_1 \mathfrak{n})}{\partial s_2} - \frac{\delta(\gamma_2 \mathfrak{n})}{\partial s_1} = 0$$

oder

$$\frac{\delta \mathfrak{f}_1}{\partial s_2} - \frac{\delta \mathfrak{f}_2}{\partial s_1} = -\left(\frac{\delta \gamma_1}{\partial s_2} \mathfrak{n} - \frac{\delta \gamma_2}{\partial s_1} \mathfrak{n}\right) - (\gamma_1 \mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{n} - \gamma_2 \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{n}).$$

Nun sehen wir, daß der erste der beiden eingeklammerten, rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Vektoren ein normaler,

der zweite ein tangentialer Vektor bezüglich der Fläche $\mathfrak{x}$ ist. Den Vektor auf der linken Seite können wir aber ebenfalls in seinen normalen und seinen tangentialen Bestandteil zerlegen, und zwar auf Grund folgender Überlegung: Wenn $\mathfrak{e}$ eine beliebige vektorielle Linienelementfunktion in der Fläche $\mathfrak{x}$, d. h. ein diese stets berührender, außer vom Ort noch von einer Tangentenrichtung $\mathfrak{t}$ abhängiger Vektor ist, so wird beim Fortschreiten über die Fläche $\mathfrak{x}$ seine Änderungsgeschwindigkeit relativ zur mitbewegten, speziell etwa infinitesimal parallel verschobenen Berührebene stets ein in dieser liegender, d. h. tangentialer Vektor sein[15]. Nun können wir aber die einer Fortbewegung mit dem Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{t}$ vom Betrag 1 entsprechende Relativgeschwindigkeit als Differenz der absoluten Änderungsgeschwindigkeit $\frac{\delta \mathfrak{e}}{ds}$ und der von der infinitesimal parallel verschobenen Berührebene verliehenen Führungsgeschwindigkeit darstellen, die nach (10′) dem Vektor $\mathfrak{g} \times \mathfrak{e}$ gleich ist. Folglich muß[15]

$$\frac{\delta \mathfrak{e}}{ds} - \mathfrak{g} \times \mathfrak{e}$$

ein Tangentenvektor sein, während $\mathfrak{g} \times \mathfrak{e}$ die Normalkomponente von $\frac{\delta \mathfrak{e}}{ds}$ ist. Schreiben wir also unsere auf (16′) folgende Gleichung in der Form

$$\frac{\partial \mathfrak{f}_1}{\partial s_2} - \mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{f}_1 - \frac{\delta \mathfrak{f}_2}{\partial s_1} + \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{f}_2 + (\gamma_1 \mathfrak{g}_2 - \gamma_2 \mathfrak{g}_1) \times \mathfrak{n} =$$
$$= \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{f}_2 - \mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{f}_1 - \mathfrak{n} \left(\frac{\delta \gamma_1}{\partial s_2} - \frac{\delta \gamma_2}{\partial s_1} \right),$$

so muß auf der linken Seite des Gleichheitszeichens ein tangentialer Vektor stehen; der Ausdruck rechts davon aber ist unmittelbar als Normalvektor der Fläche zu erkennen. Das ist nur möglich, wenn beide Seiten der Gleichung verschwinden; mit einem Minimum an Rechnung führen wir so die Zerfällung der Ausgangsbeziehung in die beiden folgenden Gleichungen herbei:

---

[15] Die Überlegungen des Textes sind ähnlich den in Math. Ann. 121 (1950) S. 436f. Fußnote 15 durchgeführten, die die Beziehung zwischen dem absoluten Differential des Tensorkalküls Cartanscher Prägung und dem geodätischen Differential klären sollten; dort mußte jedoch im Gegensatz zu den hier vorliegenden Notwendigkeiten $\mathfrak{e}$ als Ortsfunktion angenommen werden.

$$\frac{\delta \mathfrak{f}_1}{\partial s_2} - \frac{\delta \mathfrak{f}_2}{\partial s_1} + \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{f}_2 - \mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{f}_1 - \mathfrak{n} \times (\gamma_1 \mathfrak{g}_2 - \gamma_2 \mathfrak{g}_1) = 0, \quad \text{(IV)}$$

$$\frac{\delta \gamma_1}{\partial s_2} - \frac{\delta \gamma_2}{\partial s_1} - \mathfrak{n}(\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{f}_2 - \mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{f}_1) = 0. \quad \text{(V)}$$

Wegen (16) ist (IV) mit der im Abschnitt 5 aufgestellten Gleichung (II′) identisch.

Sie zeigt, daß die Bedingung (8), die bei Paaren von Flächen, die sich mit parallelen Berührebenen entsprechen, infolge des Verschwindens von γ erfüllt ist, gleichbedeutend mit einer der folgenden Beziehungen ist [vgl. (16)]:

$$\mathfrak{g}_1 \mathfrak{h}_2 - \mathfrak{g}_2 \mathfrak{h}_1 = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{f}_2 - \mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{f}_1 = 0, \quad (8')$$

da dieser Vektor, wegen $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{n} \times \frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial s_i}$ gleich $\mathfrak{n}\left(\mathfrak{f}_1 \frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial s_2} - \mathfrak{f}_2 \frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial s_1}\right)$, ein normaler ist. In diesem Falle ($\gamma \equiv 0$) muß also, wie (IV) zeigt, auch gelten

$$\frac{\delta \mathfrak{f}_1}{\partial s_2} - \frac{\delta \mathfrak{f}_2}{\partial s_1} = 0, \quad (8'')$$

was aber nach (16′) wegen (14) schon daraus folgt, daß hier $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ die partiellen Ableitungen von $\mathfrak{y}$ nach den Bogenlängen der Bezugslinien sind, woraus sich umgekehrt (8′) ergibt.

Invariante Darstellungen.

7. Daß die Vereinigung der beiden Gleichungen (IIa) und (IIb) zu der vektoriellen Gleichung (II) oder (II′) als eine natürliche anzusehen ist, wird dadurch bekräftigt, daß man sie auch in eine vom gewählten Bezugsnetz unabhängige, kurz invariante Form bringen kann.

Wir führen die im allgemeinen unsymmetrische Dyade

$$\mathsf{H} = \mathfrak{t}_1 \cdot \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{t}_2 \cdot \mathfrak{h}_2 \quad (17)$$

ein, mit deren Hilfe $\mathfrak{h}$ folgendermaßen durch $\mathfrak{t}$ ausgedrückt werden kann:

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{t}\mathsf{H}; \quad (17')$$

H nimmt in der Theorie der Flächenabbildungen eine ähnliche Stellung ein, wie sie in der Flächentheorie der schon vor längerer Zeit aufgetretenen symmetrischen Dyade oder dem Tensor[16]

$$\Gamma = \mathfrak{g}_1 \cdot \mathfrak{t}_2 - \mathfrak{g}_2 \cdot \mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_2 \cdot \mathfrak{g}_1 - \mathfrak{t}_1 \cdot \mathfrak{g}_2 \tag{18}$$

zukommt, mit dem $\mathfrak{g}$ in der Beziehung steht:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t}^* \Gamma = \Gamma \mathfrak{t}^*. \tag{18'}$$

Es gilt:

$$\mathfrak{D}\mathsf{H} - \Gamma \cdot\times \mathsf{H} - \Gamma \mathfrak{J} = 0; \tag{II''}$$

hier bedeutet $\mathfrak{D}$ den schon bei anderen Gelegenheiten verwendeten Differentialoperator[17]

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{t}_2 \frac{\partial}{\partial s_1} - \mathfrak{t}_1 \frac{\partial}{\partial s_2} \tag{19}$$

und $\mathfrak{J}$ die absolute Differentialinvariante des Flächenpaares $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$[18]

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{t}_1 \times \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s_2} - \mathfrak{t}_2 \times \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s_1}, \tag{20}$$

das Zeichen $\cdot\times$ aber bedeute die Aufeinanderfolge der skalaren Multiplikation der Dyaden Γ und H und der vektoriellen Multiplikation der dadurch entstandenen Vektoren. Die Richtigkeit der Beziehung (II'') läßt sich ebenso leicht verifizieren – etwa durch Einsetzen von $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{t}_i \mathsf{H}$ und von[9]

$$\gamma_i = -\mathfrak{J} \mathfrak{t}_i \tag{21}$$

---

[16] Jahresber. d. DMV. 39 (1930) S. 179; dort wird die Bezeichnung $\mathfrak{f}$ für $\mathfrak{t}^*$ gebraucht. Einen ähnlichen Tensor führte A. Lotze in seiner Vektor- und Affinoranalysis, München 1950, auf S. 80 ein, den er Krümmungsaffinor nennt und der gleich $-\mathfrak{n} \times \Gamma \times \mathfrak{n}$ ist.

Es sei bemerkt, daß $\mathfrak{D}\Gamma = 2\,\mathfrak{H}$ ist, wo $\mathfrak{H}$ ein für die Krümmungsverhältnisse einer Fläche charakteristischer Vektor ist, der in der in Fußnote 3 zitierten Arbeit auf S. 441 ff. untersucht wurde; der Vergleich mit der dortigen Gleichung (10) zeigt, daß $\mathfrak{D}\Gamma = 2\,\mathfrak{D}H$ ist, wo H die mittlere Krümmung der Fläche bedeutet.

[17] Jahresber. d. DMV. 39 (1930) 2. Abt. S. 71; SitzBer. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-nat. Abt., 1944, S. 132; 1947, S. 179; 1948, S. 71 f.; Arch. d. Math. (1949) S. 17 ff.; $\mathfrak{D}$ in verallgemeinerter Bedeutung: Math. Ann. 121 (1950) S. 443 f.

[18] SitzBer. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-nat. Abt., 1943, S. 218 und 220.

in (II′) und (III′) – wie die der folgenden:

$$\mathfrak{D}\mathfrak{J} + \Gamma \cdot\cdot \mathsf{H} = 0, \tag{III''}$$

die die invariante Form der Gleichung (III) oder (III′) darstellt; in ihr bedeutet das Zeichen $\cdot\cdot$ die zweimalige Wiederholung der skalaren Multiplikation[19] von Γ und H.

In dem mehrmals erwähnten Sonderfall $\mathfrak{x} \to \mathfrak{n}$ wird

$$\mathsf{H} = -\mathfrak{n} \times \Gamma = -\Gamma^* = \mathfrak{t}_1 \cdot \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{t}_2 \cdot \mathfrak{g}_2.$$

Da in diesem Falle

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{t}_1 \times \frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial s_2} - \mathfrak{t}_2 \times \frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial s_1} = \mathfrak{t}_1 \times (\mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{n}) - \mathfrak{t}_2 \times (\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{n}) =$$
$$= -\mathfrak{n}(\mathfrak{t}_1\mathfrak{g}_2 - \mathfrak{t}_2\mathfrak{g}_1) = \mathfrak{n}(N_1 + N_2),$$

also

$$\Gamma\mathfrak{J} = 0$$

und

$$\Gamma \cdot \times \mathsf{H} = -\Gamma \cdot \times \Gamma^* = (\mathfrak{g}_1 \cdot \mathfrak{t}_2 - \mathfrak{g}_2 \cdot \mathfrak{t}_1) \cdot \times (\mathfrak{t}_1 \cdot \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{t}_2 \cdot \mathfrak{g}_2) =$$
$$= \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 - \mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{g}_1 = 2\,\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 = 2\,K\mathfrak{n}$$

ist[13], so können wir schließen, daß der Codazzi-Mainardischen Gleichung die Form gegeben werden kann

$$\mathfrak{D}\Gamma^* + 2\,K\mathfrak{n} = 0, \tag{22}$$

während wegen

$$\mathfrak{D}\mathfrak{J} = \mathfrak{D}\left((N_1 + N_2)\,\mathfrak{n}\right) = 0$$

und

$$\Gamma \cdot\cdot \mathsf{H} = (\mathfrak{g}_1 \cdot \mathfrak{t}_2 - \mathfrak{g}_2 \cdot \mathfrak{t}_1) \cdot\cdot (\mathfrak{t}_1 \cdot \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{t}_2 \cdot \mathfrak{g}_2) = \mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2 - \mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_1 = 0$$

die Gleichung (III″) in diesem Sonderfall identisch erfüllt ist.

8. Ganz ähnlich gebaute Beziehungen erhält man, wenn man den Affinor $\mathsf{F} = \mathsf{H} \times \mathfrak{n}$ benützt, mittels dessen $\mathfrak{f}$ durch $\mathfrak{t}$ auszudrücken ist:

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{t}\mathsf{H} \times \mathfrak{n} = \mathfrak{t}\mathsf{F}, \tag{23}$$

---

[19] Siehe M. Lagally, Vorl. ü. Vektorrechnung, Leipzig 1945, S. 54, 220 und 304.

Es sei darauf aufmerksam gemacht, daß allgemein gilt:

$$\frac{\delta \gamma_1}{\partial s_2} - \frac{\delta \gamma_2}{\partial s_1} = \mathfrak{D}\mathfrak{J}.$$

und besonders beachtet, daß gilt:

$$\Gamma \cdot \times \mathsf{F} = \mathfrak{D}\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{n}, \tag{III'''}$$

als Ersatz für die Gleichungen (II'') und (III'') oder (IV) und (V).

Wendet man sie auf den wiederholt betrachteten Sonderfall $\mathfrak{x} \to \mathfrak{n}$ an, so findet man, da dann $\mathsf{H} \times \mathfrak{n} = -\mathfrak{n} \times \Gamma \times \mathfrak{n}$ wird, wieder, daß (III'') identisch erfüllt ist, während aus (II'') wird:

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{n} \times \Gamma \times \mathfrak{n}) = 0, \tag{22'}$$

was mit $\mathfrak{n} \times \left(\frac{\delta \mathfrak{g}_1}{\partial s_2} - \frac{\delta \mathfrak{g}_2}{\partial s_1}\right) = 0$ gleichbedeutend ist, einer Relation, deren Äquivalenz mit der Codazzi-Mainardischen Gleichung man aber erst durch Anwendung der Schlußweise erkennen kann, die im Abschnitt 6 zur Zerfällung der auf (16') folgenden Beziehung in die zwei Gleichungen (IV) und (V) führte.

9. So viele verschiedene Gestalten man den Integrabilitätsbedingungen aber auch zu geben vermag – in manchen Fällen wird es gut sein, sich daran zu erinnern, daß die einzige und dabei besonders einfache Beziehung (15) alle in diesen Zusammenhang gehörenden Bedingungsgleichungen umfaßt. In sehr gedrängter Form kann man sie schreiben, wenn man den schon in früheren Arbeiten erwähnten Affinor A heranzieht, durch den die lineare Abhängigkeit des Linienelementes $d\mathfrak{y}$ von $d\mathfrak{x}$ ihren einfachsten Ausdruck findet:[20]

$$d\mathfrak{y} = \mathsf{A}\, d\mathfrak{x} = d\mathfrak{x}\, \overline{\mathsf{A}}; \tag{24}$$

(15) wird dann gleichbedeutend mit

$$\mathfrak{D}\overline{\mathsf{A}} = 0. \tag{VI}$$

Es entspränge einem Mißverständnis, wollte man eine solche Symbolik für leer halten; ihre Vorzüge liegen vielmehr in folgendem: Man kann die Darstellungsform eines Affinors zwanglos den verschiedensten Zwecken, die man im Auge haben mag, anpassen, indem man für ihn jeweils die zweckentsprechendste

[20] SitzBer. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-nat. Abt., 1943, S. 237; 1944, S. 114; 1946, S. 183.

Dyadenform wählt. So läßt sich zunächst (VI) durch Einsetzen von

$$\overline{\mathsf{A}} = \mathfrak{t}_1 \cdot \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s_1} + \mathfrak{t}_2 \cdot \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s_2}$$

aufs leichteste verifizieren, besonders, wenn man zunächst den Operator $\mathfrak{D}$ in seiner verallgemeinerten Bedeutung[17]

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{t}_2 \frac{\delta}{\partial s_1} - \mathfrak{t}_1 \frac{\delta}{\partial s_2}$$

anwendet, wodurch man auf (14) geführt wird. Je nachdem man dann

$$\overline{\mathsf{A}} = n_1 \mathfrak{t}_1 \cdot \mathfrak{t}_1 + n_2 \mathfrak{t}_2 \cdot \mathfrak{t}_2 + q_1 \mathfrak{t}_1 \cdot \mathfrak{t}_2 - q_2 \mathfrak{t}_2 \cdot \mathfrak{t}_1 + (\gamma_1 \mathfrak{t}_1 + \gamma_2 \mathfrak{t}_2) \cdot \mathfrak{n}$$

oder

$$\overline{\mathsf{A}} = \mathfrak{t}_1 \cdot \mathfrak{f}_1 + \mathfrak{t}_2 \cdot \mathfrak{f}_2 + (\gamma_1 \mathfrak{t}_1 + \gamma_2 \mathfrak{t}_2) \cdot \mathfrak{n}$$

oder gemäß (16′), (21) und (23)

$$\overline{\mathsf{A}} = \mathfrak{F} - \mathfrak{J} \cdot \mathfrak{n}$$

setzt, kann man ohne Mühe die Gleichungen (IIa), (IIb) und (III) oder (IV) und (V) ableiten. Ein besonderer Vorzug der Darstellung (VI) liegt aber darin, daß man aus ihr ohne überflüssige Rechnungen unmittelbar die Integrabilitätsbedingungen für den Fall finden kann, daß man ein beliebiges Netz von Parameterlinien, d. h. ein allgemeines Koordinatensystem auf der Fläche $\mathfrak{x}$ und dementsprechend auch auf $\mathfrak{y}$ zugrunde legt und mit den partiellen Ableitungen nach den Parametern arbeiten möchte.