Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1950

München 1951

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Zur Orthogonalinvarianz des Inhalts

Von Robert Schmidt in München

Vorgelegt von Herrn H. Tietze am 7. Juli 1950.

Zur Definition des Inhalts oder des R-Maßes in einem Modell des E_k, gekennzeichnet durch ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem, pflegt man die „Meßwürfel n-ter Ordnung" ($n = 0, 1, \ldots$) zugrunde zu legen. Es sind dies – wenn ich hier und im folgenden, und zwar lediglich aus Gründen der bequemeren Ausdrucks- und Schreibweise, $k = 2$ annehme – die halboffenen Quadrate

$$\mathfrak{W}_n = \mathfrak{W}_n^{\mu\nu} = \left\{x, y: \frac{\mu}{2^n} \leqq x < \frac{\mu+1}{2^n}, \frac{\nu}{2^n} \leqq y < \frac{\nu+1}{2^n}\right\}.$$

Es sei $\mathfrak{A}$ eine beschränkte Punktmenge (des E_2). Jedes $\mathfrak{W}_n$, das ganz in $\mathfrak{A}$ enthalten ist, $\mathfrak{W}_n \subset \mathfrak{A}$, werde als ein $\mathfrak{p}_n$ bezeichnet. Die Vereinigungsmenge $\mathfrak{P}_n = \Sigma\, \mathfrak{p}_n$ aller $\mathfrak{p}_n$ (bei festem n) enthält alle solchen $\mathfrak{W}_{n+1}$, die ein $\mathfrak{p}_{n+1}$ sind, und es ist daher $\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}_1 \subset \ldots$. Jedes $\mathfrak{W}_n$ ist die Summe von $4\,(= 2^k)$ paarweise fremden $\mathfrak{W}_{n+1}$, insbesondere jedes $\mathfrak{p}_n$ die Summe von 4 paarweise fremden $\mathfrak{p}_{n+1}$. Für jedes n ist die Anzahl der $\mathfrak{p}_n$ endlich. Diese Anzahl, durch 4^n $(= 2^{kn})$ dividiert, werde mit p_n bezeichnet. (Der Wert p_n ist gerade das, was man als den elementargeometrischen Inhalt von $\mathfrak{P}_n$ zu bezeichnen pflegt.) Der Menge $\mathfrak{A}$ ist also eindeutig eine Zahlenfolge $p_0, p_1, \ldots$ zugeordnet, die sich zunächst als wachsend erweist: $p_0 \leqq p_1 \leqq \ldots$, und die außerdem beschränkt ist. Sie strebt daher gegen einen wohlbestimmten Grenzwert,

$$p_0, p_1, \ldots \to \underset{\sim}{\mathfrak{A}},$$

den man als den inneren Inhalt oder das innere R-Maß bezeichnet.

Analog soll jedes $\mathfrak{W}_n$, das wenigstens einen Punkt von $\mathfrak{A}$ enthält, als ein $\mathfrak{q}_n$ bezeichnet werden. Für die Vereinigungsmengen $\mathfrak{Q}_n = \Sigma\, \mathfrak{q}_n$ hat man: $\mathfrak{Q}_0 \supset \mathfrak{Q}_1 \supset \ldots$. Bedeutet q_n die durch 4^n dividierte Anzahl aller $\mathfrak{q}_n$, so wird $q_0 \geqq q_1 \geqq \ldots$, daher

$$q_0, q_1, \ldots \to \widetilde{\mathfrak{A}},$$

der äußere Inhalt oder das äußere R-Maß von $\mathfrak{A}$. Es ist $p_n \leqq q_n$, daher $\underset{\sim}{\mathfrak{A}} \leqq \widetilde{\mathfrak{A}}$. Falls $\underset{\sim}{\mathfrak{A}} = \widetilde{\mathfrak{A}}$, so wird $\mathfrak{A}$ als R-meßbar bezeichnet, und den gemeinsamen Wert $\{\mathfrak{A}\}$ von $\underset{\sim}{\mathfrak{A}}$ und $\widetilde{\mathfrak{A}}$ nennt man dann den Inhalt oder das R-Maß von $\mathfrak{A}$.

Gegenstand dieser Note ist der für die Theorie des Inhalts grundlegende

Satz. „R-Meßbarkeit und R-Maß, allgemeiner: inneres und äußeres R-Maß sind invariant gegenüber orthogonalen Transformationen."

Für diesen Satz hat Herr Erhard Schmidt[1] einen äußerst interessanten, allerdings auch nicht mühelosen Beweis gegeben. Herr E. Schmidt beweist diesen Satz in der folgenden Form, deren Gleichwertigkeit mit der Orthogonalinvarianz der inneren und äußeren R-Maße leicht zu erkennen ist:

„Jedes Rechteck ist R-meßbar, und sein Inhalt ist gleich dem Produkt seiner Kantenlängen."

Es ist ebenso leicht einzusehen, daß es genügt, folgendes zu beweisen ($k = 2$):

„Wenn $\mathfrak{W}^*$ aus dem halboffenen Einheitsquadrat $\mathfrak{W} = \mathfrak{W}_0^{00}$ durch eine beliebige orthogonale Transformation hervorgeht, so ist $\mathfrak{W}^*$ ebenfalls R-meßbar, und es ist $\{\mathfrak{W}^*\} = 1$."

Im folgenden will ich den Invarianzbeweis mit dieser Form der Behauptung auf einem anderen als auf dem von Herrn E. Schmidt eingeschlagenen Wege führen. Dazu stelle ich zunächst einige geläufige Tatsachen über das R-Maß zusammen, um dann den Beweis darauf hinauszuspielen, daß man jedes orthogonale Bild $\mathfrak{K}^*$ eines Kreises $\mathfrak{K}$ bereits durch eine Translation von $\mathfrak{K}$ gewinnen kann.

1. Wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beschränkte Mengen mit positivem Abstand sind, dann ist $\widetilde{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}} = \widetilde{\mathfrak{A}} + \widetilde{\mathfrak{B}}$.

2. Wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beschränkt und R-meßbar sind, und $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = 0$, dann ist $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ beschränkt und R-meßbar, und es ist $\{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\} = \{\mathfrak{A}\} + \{\mathfrak{B}\}$.

---

[1] Über die Darstellung der Lehre vom Inhalt in der Integralrechnung, Mathem. Zeitschrift Bd. 12 (1922) S. 298–316.

3. Wenn $\mathfrak{A}$ beschränkt ist, und $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{A}$ durch eine Translation hervorgeht, dann ist $\underset{\sim}{\mathfrak{A}} = \underset{\sim}{\mathfrak{B}}$ und $\widetilde{\mathfrak{A}} = \widetilde{\mathfrak{B}}$.

4. Wenn $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}_1 \subset \ldots$ eine aufsteigende Folge von R-meßbaren Mengen ist, und wenn $\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 + \ldots$ beschränkt und R-meßbar ist, dann ist $\lim \wr \mathfrak{A}_n \wr = \wr \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 + \ldots \wr$.

(Den Beweis von 4. führt man vorteilhaft über die für jede beschränkte aufsteigende Folge $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}_1 \subset \ldots$ gültige Ungleichung

$$\lim \underset{\sim}{\mathfrak{A}_n} \leqq \underset{\sim}{\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 + \ldots} \leqq \lim \widetilde{\mathfrak{A}_n} \leqq \widetilde{\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 + \ldots}).$$

Zunächst folgt aus 1. und 3. (indirekter Beweis), daß jede Strecke und jeder Halbkreisbogen das (2-dimensionale) R-Maß 0 hat. Das gleiche gilt somit auch für den Rand jedes Quadrats und jedes Kreises. Daher ist jedes Quadrat und jeder Kreis R-meßbar.

Durch eine orthogonale Transformation T wird jedes Meßquadrat $\mathfrak{W}_n$ in ein halboffenes Quadrat $\mathfrak{W}_n^*$, also eine R-meßbare Menge abgebildet. Die $\mathfrak{W}_n^*$ sind (bei festem n) Translationen voneinander, haben also nach 3. untereinander gleiches R-Maß $\wr \mathfrak{W}_n^* \wr$. Jedes $\mathfrak{W}_0^*$ ist Summe von 4^n $(= 2^{kn})$ paarweise fremden $\mathfrak{W}_n^*$; nach 2. ist daher

$$\wr \mathfrak{W}_n^* \wr = \frac{1}{4^n} \wr \mathfrak{W}_0^* \wr = \frac{1}{4^n} \wr \mathfrak{W}^* \wr.$$

Es bezeichne jetzt $\mathfrak{K}$ einen offenen Kreis, etwa den Einheitskreis $\mathfrak{K} = \{x, y\colon x^2 + y^2 < 1\}$, und es sei $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \ldots$ die Folge der Vereinigungsmengen der Meßquadrate 0-ter, 1-ter, ... Ordnung, die Teilmengen von $\mathfrak{K}$ sind: $\mathfrak{P}_0 = \Sigma\, \mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{P}_1 = \Sigma\, \mathfrak{p}_1, \ldots$. Es ist $\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}_1 \subset \ldots$ und $\mathfrak{P}_0 + \mathfrak{P}_1 + \ldots = \mathfrak{K}$. Durch T möge $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{K}^*$, $\mathfrak{p}_n$ in $\mathfrak{p}_n^*$, $\mathfrak{P}_n$ in $\mathfrak{P}_n^*$ übergehen. Für jedes $\mathfrak{p}_n^*$ ist

$$\wr \mathfrak{p}_n^* \wr = \frac{1}{4^n} \wr \mathfrak{W}^* \wr.$$

Jedes $\mathfrak{P}_n^*$ ist als Summe von endlich vielen (paarweise fremden) Quadraten $\mathfrak{p}_n^*$ R-meßbar, daher nach 2., wenn P_n^* die Anzahl der $\mathfrak{p}_n^*$ bedeutet:

$$\wr \mathfrak{P}_n^* \wr = P_n^* \cdot \wr \mathfrak{p}_n^* \wr = P_n^* \frac{1}{4^n} \wr \mathfrak{W}^* \wr.$$

Bei jedem n ist die Anzahl $4^n \cdot p_n$ der $\mathfrak{p}_n$ gleich der Anzahl P_n^*, somit

$$\S\, \mathfrak{P}_n^* \,\S = p_n \cdot \S\, \mathfrak{W}^* \,\S .$$

Weiter ist $\mathfrak{P}_0^* \subset \mathfrak{P}_1^* \subset \ldots$ und $\mathfrak{P}_0^* + \mathfrak{P}_1^* + \ldots = \mathfrak{K}^*$, nach 4. wird daher $\lim \S\, \mathfrak{P}_n^* \,\S = \S\, \mathfrak{K}^* \,\S$, und wegen $p_n \to \S\, \mathfrak{K} \,\S$:

$$\S\, \mathfrak{K}^* \,\S = \S\, \mathfrak{K} \,\S \cdot \S\, \mathfrak{W}^* \,\S .$$

Nun kann man die Punktmenge $\mathfrak{K}^*$ bereits durch eine Translation aus $\mathfrak{K}$ gewinnen, und 3. liefert $\S\, \mathfrak{K}^* \,\S = \S\, \mathfrak{K} \,\S$, so daß wegen $\S\, \mathfrak{K} \,\S > 0$ nunmehr folgt:

$$\S\, \mathfrak{W}^* \,\S = 1,$$

was zu beweisen war.