Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1949

München 1950

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Beziehungen zwischen geodätischen Ableitungen von Krümmungsgrößen

Von **Frank Löbell** in München.

Mit einer Figur.

Vorgelegt am 11. November 1949.

In einer demnächst in den Mathematischen Annalen erscheinenden Arbeit[1] werden im Anschluß an Entwicklungen von Laguerre, Darboux und Cesaro „*Linienelementfunktionen*“ auf einer Fläche betrachtet, die neben den reinen Ortsfunktionen eine wichtige Rolle in der Flächentheorie spielen. Die Ableitung einer solchen Funktion nach der Bogenlänge s in einer gegebenen Tangentenrichtung wird zu einer wohlbestimmten Operation gemacht durch die Vereinbarung, daß das Linienelement, von dem die Funktion außer vom Ort P abhängt, beim Fortschreiten in der Differentiationsrichtung infinitesimal parallel verschoben werden soll; die so erklärte „*geodätische Ableitung*“ wird durch das Symbol $\frac{\delta}{ds}$ bezeichnet.

1. Diese Operation wird in der erwähnten Arbeit speziell auf die vektorielle Linienelementfunktion $\mathfrak{g}$ angewandt, die als gemeinsame Tangentialkomponente aller dem tangentialen Einheitsvektor $\mathfrak{t}$ zugehörigen Darboux-Cesaroschen Krümmungsvektoren definiert ist und als Krümmungsvektor der $\mathfrak{t}$ berührenden geodätischen Linie der *geodätische Krümmungsvektor*[2] der Richtung $\mathfrak{t}$ genannt wird. Dadurch entsteht eine neue vektorielle Linienelementfunktion

$$\mathfrak{G} = \frac{\delta \mathfrak{g}}{ds}.$$

Es wird aber auch der Vektor $\mathfrak{g}^*$, der zu der auf $\mathfrak{t}$ senkrechten Tangentenrichtung $\mathfrak{t}^* = \mathfrak{n} \times \mathfrak{t}$ gehört – $\mathfrak{n}$ ist der Einheitsvektor

[1] Linienelementfunktionen und geodätische Ableitungen in der Flächentheorie. Mathematische Annalen Bd. 121 (1950) S. 427 ff.

[2] Siehe Jahresbericht der Dt. Math.-Verein. 39 [1930] S. 181, Fußnote 1 von S. 180.

der Flächennormalen –, der geodätischen Differentation in der Richtung $\mathfrak{t}$ unterworfen; dadurch wird eine weitere Vektorfunktion gewonnen:

$$\overline{\mathfrak{G}} = \frac{\delta \mathfrak{g}^*}{d s}.$$

Außerdem werden noch die analog gebildeten Vektoren

$$\mathfrak{G}^* = \frac{\delta \mathfrak{g}^*}{d s^*} \text{ und } \overline{\mathfrak{G}}^* = - \frac{\delta \mathfrak{g}}{d s^*}$$

eingeführt; hier ist zu beachten, daß ebenso wie $\mathfrak{t}^{**} = -\mathfrak{t}$ auch $\mathfrak{g}^{**} = -\mathfrak{g}$ ist.

Mit Hilfe der Codazzi-Mainardischen Gleichung wird in der anfangs genannten Arbeit bewiesen, daß stets gilt:

$$(1) \qquad \mathfrak{G} + \mathfrak{G}^* = 2\,\mathfrak{D} H \text{ und } \overline{\mathfrak{G}} + \overline{\mathfrak{G}}^* = 2\,K \mathfrak{n},$$

wo H die *mittlere Krümmung*, K das *Krümmungsmaß* und $\mathfrak{D}$ den *Operator* $\mathfrak{t}^* \frac{\partial}{\partial s} - \mathfrak{t} \frac{\partial}{\partial s^*}$ bedeutet.

2. Als Ausgangsbasis für die Aufstellung neuer Beziehungen zwischen den vier Vektorfunktionen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$, $\overline{\mathfrak{G}}$, $\overline{\mathfrak{G}}^*$ benützen wir nun die bekannten Ausdrücke für $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}^*$ durch die *Normalkrümmungen* N und N^* und die *Normalwindungen* T und T^* der Richtungen $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{t}^*$:

$$\mathfrak{g} = T\mathfrak{t} + N\mathfrak{t}^*, \quad \mathfrak{g}^* = T^*\mathfrak{t}^* - N^*\mathfrak{t}.$$

Beachten wir, daß die geodätische Ableitung sowohl von $\mathfrak{g}$ wie auch von $\mathfrak{g}^*$ in der Richtung $\mathfrak{t}$ dadurch zustande kommt, daß diese Vektoren die infinitesimale Parallelverschiebung des Begleitkörpers ($\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}^*$, $\mathfrak{n}$) als Führungsbewegung, deren Drehvektor $\mathfrak{g}$ ist, mitmachen und sich zugleich relativ zum Begleitkörper dadurch ändern, daß die Linienelementfunktionen T, N, T^*, N^* der geodätischen Ableitung in der Richtung $\mathfrak{t}$ unterzogen werden, so finden wir

$$\frac{\delta \mathfrak{g}}{\partial s} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} + \frac{\delta T}{\partial s}\mathfrak{t} + \frac{\delta N}{\partial s}\mathfrak{t}^*, \quad \frac{\delta \mathfrak{g}^*}{\partial s} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* + \frac{\delta T^*}{\partial s}\mathfrak{t}^* - \frac{\delta N^*}{\partial s}\mathfrak{t};$$

analog berechnen wir

$$\frac{\delta \mathfrak{g}^*}{\partial s^*} = \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* + \frac{\delta T^*}{\partial s^*}\mathfrak{t}^* - \frac{\delta N^*}{\delta s^*}\mathfrak{t}, \quad \frac{\delta \mathfrak{g}}{\partial s^*} = \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} + \frac{\delta T}{\partial s^*}\mathfrak{t} + \frac{\delta N}{\partial s^*}\mathfrak{t}^*.$$

Nun folgt aus der ursprünglichen Gaußschen Definition des Krümmungsmaßes unmittelbar, daß $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* = K\mathfrak{n}$ ist. Daher wird

$$\mathfrak{G} = \frac{\delta T}{\partial s}\,\mathfrak{t} + \frac{\delta N}{\partial s}\,\mathfrak{t}^*, \qquad \overline{\mathfrak{G}} = -\frac{\delta N^*}{\partial s}\,\mathfrak{t} + \frac{\delta T^*}{\partial s}\,\mathfrak{t}^* + K\mathfrak{n},$$

$$\mathfrak{G}^* = -\frac{\delta N^*}{\partial s^*}\,\mathfrak{t} + \frac{\delta T^*}{\partial s^*}\,\mathfrak{t}^*, \qquad \overline{\mathfrak{G}}^* = -\frac{\delta T}{\partial s^*}\,\mathfrak{t} - \frac{\delta N}{\partial s^*}\,\mathfrak{t}^* + K\mathfrak{n}.$$

Aus der zweiten der Gleichungen (1) fließt aber, da nach einem Satz von Bonnet $T + T^* = 0$ ist:

$$(1') \qquad \frac{\delta N^*}{\partial s} + \frac{\delta T}{\partial s^*} = 0, \qquad \frac{\delta T}{\partial s} + \frac{\delta N}{\partial s^*} = 0.$$

Demnach erhalten wir neben

$$\mathfrak{G} = \frac{\delta T}{\partial s}\,\mathfrak{t} + \frac{\delta N}{\partial s}\,\mathfrak{t}^* \quad \text{und} \quad \mathfrak{G}^* = -\frac{\delta N^*}{\partial s^*}\,\mathfrak{t} - \frac{\delta T}{\partial s^*}\,\mathfrak{t}^*$$

$$\overline{\mathfrak{G}} = \frac{\delta T}{\partial s^*}\,\mathfrak{t} - \frac{\delta T}{\partial s}\,\mathfrak{t}^* + K\mathfrak{n} \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{G}}^* = -\frac{\delta T}{\partial s^*}\,\mathfrak{t} + \frac{\delta T}{\partial s}\,\mathfrak{t}^* + K\mathfrak{n}.$$

Hieraus erkennen wir, daß die Vektoren $\overline{\mathfrak{G}}$ und $\overline{\mathfrak{G}}^*$ nur solche Komponenten nach den Richtungen $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{t}^*$ besitzen, die, zum Teil bis aufs Vorzeichen, schon bei $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^*$ vorkommen; genauer gilt

$$(2) \qquad \mathfrak{G}\mathfrak{t} = -\overline{\mathfrak{G}}\mathfrak{t}^* = \overline{\mathfrak{G}}^*\mathfrak{t}^*, \quad \mathfrak{G}^*\mathfrak{t}^* = -\overline{\mathfrak{G}}\mathfrak{t} = \overline{\mathfrak{G}}^*\mathfrak{t}.$$

Die Figur bringt die geometrische Bedeutung dieser Beziehungen zur Anschauung.

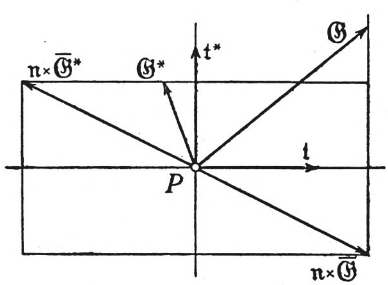

Fig. 1

3. Wir ziehen noch eine Folgerung aus den beiden Gleichungen (1), deren erste mit den skalaren Relationen

$$\frac{\delta N}{\partial s} - \frac{\delta T}{\partial s^*} = 2\frac{\partial H}{\partial s}, \quad \frac{\delta N^*}{\partial s^*} - \frac{\delta T}{\partial s} = 2\frac{\partial H}{\partial s^*} \tag{1''}$$

gleichbedeutend ist, in denen H als bekannte Ortsfunktion anzusehen ist:

Die acht Komponenten der Vektorfunktionen $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^*, \overline{\mathfrak{G}}, \overline{\mathfrak{G}}^*$ *nach* $\mathfrak{t}$ *und* $\mathfrak{t}^*$ *sind durch zwei unabhängige unter ihnen bestimmt.*

Als solche mag man etwa $\frac{\delta T}{\partial s}$ und $\frac{\delta T}{\partial s^*}$ wählen. Damit hätte man sich für Größen entschieden, die man zu dem Vektor $\mathfrak{D}T$ zusammenfassen kann, sofern der Operator $\mathfrak{D}$ in seiner verallgemeinerten Bedeutung

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{t}^* \frac{\delta}{\partial s} - \mathfrak{t}\frac{\delta}{\partial s^*} \tag{3}$$

verstanden wird. Wir finden, wenn wir noch zur Abkürzung $\mathfrak{n} \times \mathfrak{D} = \mathfrak{D}^*$ setzen:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{G} &= -\mathfrak{D}^* T + 2\frac{\partial H}{\partial s}\mathfrak{t}^*, \quad \mathfrak{G}^* = \mathfrak{D}^* T - 2\frac{\partial H}{\partial s^*}\mathfrak{t}, \\ \overline{\mathfrak{G}} &= -\mathfrak{D}T + K\mathfrak{n}, \quad \overline{\mathfrak{G}}^* = \mathfrak{D}T + K\mathfrak{n}, \end{aligned}\right. \tag{4'}$$

also $\quad \mathfrak{n} \times \overline{\mathfrak{G}} = -\mathfrak{D}^* T, \quad \mathfrak{n} \times \overline{\mathfrak{G}}^* = \mathfrak{D}^* T.$

Schließlich sei noch auf folgende Beziehungen hingewiesen:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{D}N, \quad \mathfrak{G}^* = \mathfrak{D}N^*; \tag{4''}$$

wir erhalten sie, wenn wir in den mehrfach verwendeten Ausdrücken für $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^*$ die geodätischen Ableitungen von T mit Hilfe von (1′) durch solche von N und N^* ersetzen.

Als untereinander unabhängige Komponenten kann man auch die im wesentlichen schon von Cesaro betrachteten Funktionen $\frac{\delta N}{\partial s}$ und $\frac{\delta T}{\partial s}$ benützen.