Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1932. Heft III

November-Dezember-Sitzung

München 1933
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Ein Axiomensystem der komplexen, projektiven Geometrie.

Herrn S. Finsterwalder zum 70. Geburtstag gewidmet.

Von Richard Baldus in München.

Mit 9 Figuren.

Vorgelegt von G. Faber.

§ 1.

Die verschiedenen Zugänge zur komplexen, analytischen Geometrie.

Das Axiomensystem der komplexen projektiven Geometrie, das hier behandelt wird, soll einen neuen Zugang zur komplexen Geometrie ermöglichen. Inwiefern ein solcher Weg erwünscht ist und von welchen Hauptabsichten man sich auf ihm leiten läßt, das mögen — der Kürze halber für den Fall der ebenen Geometrie — einige Bemerkungen über die drei verschiedenen Weisen zeigen, in denen man bisher in der Regel zur komplexen Geometrie gelangte.[1]

1. Die meisten Darstellungen der komplexen Geometrie gehen, ausgesprochen oder nicht, von einer axiomatisch begründeten reellen Geometrie aus und erweitern diese dann zur komplexen analytischen Geometrie.[2] Etwa so:[3]

---

[1] Eine Ausnahme macht Herr M. Pieri in der interessanten Abhandlung „Nuovi principii di geometria projettiva complessa", Torino mem. (2) 55 (1905) S. 189—235. Mit seinem aus 30 Postulaten bestehenden Axiomensystem schlägt er in den für das Komplexe charakteristischen Teilen einen von dem hier entwickelten Axiomensystem ganz verschiedenen Weg ein.

[2] Daß man dabei nicht immer ausdrücklich auf ein axiomatisches Fundament der betreffenden reellen Geometrie zurückgreift, sondern sich oft auf eine Anzahl abgeleiteter Sätze beschränkt, ändert nichts Grundsätzliches an den folgenden Ausführungen.

[3] Die grundsätzlichen Bedenken, die hier für den Fall des reell-Euklidischen Ausgangspunktes geltend gemacht werden, gelten, nur mit anderen Einzelheiten belegt, auch für den Fall der Entwicklung aus einer Axiomatik der reellen Vektoren oder aus einer reellen projektiven Geometrie. Den letzt-

Man führt, Euklidisch von zwei zueinander senkrechten, orientierten Geraden ausgehend, rechtwinklige Parallelkoordinaten ein, leitet die Gleichung der Geraden und des Kreises ab — alles im Reellen — und sieht sich bei der Berechnung der Schnittpunkte einer Geraden und eines Kreises aus algebraischen Gründen veranlaßt, komplexe Zahlenpaare als „Koordinaten" von „Punkten" einzuführen. Dieser ersten Erweiterung des Begriffes Punkt folgt als zweite, abermals aus algebraischen Gründen, die dem Homogenisieren entsprechende durch die „uneigentlichen Punkte", wodurch erst allgemeine Aussagen ermöglicht werden wie die, daß sich irgend zwei verschiedene irreduzible Kurven 2. Ordnung, algebraisch gezählt, in genau 4 Punkten schneiden. Man ist damit von der axiomatisch fundierten reell-Euklidischen analytischen Geometrie genetisch fortschreitend über die komplex-Euklidische bei der komplex-projektiven analytischen Geometrie angelangt. Dabei kann man zunächst im Reellen Tatsachen wie die folgenden analytisch fassen:

a) Irgend zwei verschiedene Punkte haben eine bestimmte Entfernung voneinander. Sie ist von Null verschieden.

b) Sind g und h irgend zwei Gerade, dann gibt es eine Bewegungsformation, welche g auf h legt.

c) Ist eine Strecke AB, ferner eine Gerade g mit einem ihrer Punkte P gegeben, dann kann man auf g zwei Punkte Q_1, Q_2 so angeben, daß die Strecken PQ_ν und AB gleiche Längenquadrate haben.

d) Ist g eine Gerade und P einer ihrer Punkte, dann gibt es genau eine Gerade h durch P, welche zu g senkrecht steht. g und h sind verschieden.

e) Existieren die drei Nebenecken eines vollständigen Vierecks, dann liegen sie nicht in einer Geraden.

Was geschieht nun mit diesen Tatsachen beim Übergange zur komplexen Euklidischen Geometrie? Von a) bleibt der erste Satz gültig, der zweite nicht; b) und c) gelten nicht mehr; von d) bleibt der erste Satz gültig, der zweite nicht; e) bleibt richtig.

genannten Weg gehen Heffter-Koehler in ihrem „Lehrbuch der analytischen Geometrie" Bd. I, in der 2. Auflage 1927; vgl. hierzu meine Rezension im Jahresber. d. Deutsch. Mathem. Vereinigung 38 (1929) *S. 104—107*.

Diese Veränderungen entstehen zunächst dadurch, daß die Anordnungsaxiome[1] und mit ihnen die „zwischen"-Beziehungen im Komplexen nicht erfüllt sind. Nun setzen aber die Kongruenzaxiome und die Stetigkeitsaxiome Tatsachen voraus, die aus den Anordnungsaxiomen folgen. Das alles geht daher beim Übergange zum Komplexen verloren, so daß man aus der reell-Euklidischen Geometrie in die komplex-Euklidische nur das als bewiesen übernehmen kann, was von allen diesen Axiomen unabhängig ist. Das zu tun ist aber erstens nicht ganz einfach und zweitens nicht genügend. Erstens nicht ganz einfach deshalb, weil man keineswegs jeder Tatsache der reell-Euklidischen Geometrie ansieht, ob sie nur aus den übriggebliebenen Axiomen — nämlich den Verknüpfungsaxiomen und dem Parallelenaxiom — folgt: so verwendet, um ein merkwürdiges, bekanntes Beispiel zu nennen, e) nur Verknüpfungsbegriffe, ist aber nicht ohne Anordnungsaxiome beweisbar.[2] Zweitens nicht genügend, weil man dabei zuviel verliert, da ein Satz in der komplex-Euklidischen analytischen Geometrie gültig bleiben kann, obwohl zu seinem Beweis im Reellen Axiome benötigt werden, die im Komplexen wegfallen; Beispiele hierfür sind außer dem soeben genannten Satze e) der erste Satz von a), ferner der erste Satz von d). Zu diesen Schwierigkeiten kommt noch, daß bereits die oben erwähnte Einführung der Koordinaten, welche die ganze analytische Geometrie trägt, durch den Übergang zum Komplexen ihren Sinn verliert, schon weil der Begriff der orientierten Geraden mit den Anordnungsaxiomen verloren geht. Diese genetische Einführung der komplexen Geometrie auf reell-axiomatischer Grundlage ist demnach verwirrend, nicht nur für den

---

[1] Es wird hier das Axiomensystem der reellen Euklidischen Geometrie von D. Hilbert, „Grundlagen der Geometrie", 7. Aufl. (1930) S. 2—33, vorausgesetzt.

[2] Davon wird noch in Nr. 21 die Rede sein. Ein analoger Fall in der Euklidischen Geometrie: vor Einführung des Parallelenaxioms beweist man aus den Verknüpfungs-, Anordnungs-, Kongruenzaxiomen die Existenz von Parallelen; dabei genügen für den Beweis dieser Tatsache, wie die reelle projektive Geometrie zeigt, nicht die Verknüpfungsaxiome, obwohl es sich um die Verknüpfungsaussage handelt, daß es in einer Ebene durch einen Punkt eine Gerade gibt, welche mit einer anderen Geraden der Ebene keinen Punkt gemeinsam hat.

Anfänger.[1] Zum Schlusse gibt man durch den Übergang zur komplexen projektiven Geometrie auch noch das Parallelenaxiom auf. Die bekannte große Bedeutung dieses Überganges ist nicht nur in der damit erreichten Allgemeinheit der algebraischen Aussagen begründet, auf die schon hingewiesen wurde, sondern in dem bekannten vereinfachenden projektiven Zusammenhange, der zwischen metrischen Begriffen wie Kreis, Orthogonalität, Hauptachsen, Winkelgröße, Diskrepanz zwischen Strecken- und Winkelmetrik besteht.

Die soeben besprochene Verwirrung auf dem skizzierten Wege läßt sich vermeiden, wenn man nach der reellen analytischen Geometrie vollständig neu anfängt, indem man die Punkte als geordnete Paare komplexer Zahlen, ferner Gerade, Abstandsquadrat, Kreis, Orthogonalität, Doppelverhältnis usw. durch die den reellen entsprechenden komplexen analytischen Ausdrücke definiert und lediglich aus diesen Definitionen alles weitere rein analytisch ableitet.

2. E. Study geht — und das ist ein zweiter Weg zur komplexen analytischen Geometrie — in seiner „abstrakten Euklidischen Koordinatengeometrie"[2] gleich von den soeben genannten komplexen Definitionen aus, ohne die reelle analytische Geometrie vorauszuschicken. So wird mit einem Schlage die ganze komplexe Geometrie gewonnen. Man treibt dabei reine Analysis und verwendet nur die der reellen Geometrie entnommenen Worte „Punkt", „Gerade", „Abstand" usw. Warum man sie aber, ebenso wie die Bezeichnung „Geometrie" wählt, warum man gerade diese und keine anderen Probleme behandelt, das wird dabei nicht klar, ebensowenig, daß es ein Teilgebiet dieser analytischen Disziplin gibt, in dem die im Anschluß an die räumliche An-

---

[1] Daß man im Komplexen zwar von Bewegungstransformationen spricht, dabei aber b) nicht mehr gilt, daß man den Begriff der Streckenkongruenz aus dem Reellen übernimmt, ohne daß c) richtig bleibt, dies und zahlreiche ähnliche Fälle erzeugen begreiflicherweise die bei Studierenden so oft zu beobachtende Unsicherheit bei metrischen Aussagen in der komplexen Ebene.

[2] E. Study, „Die realistische Weltansicht und die Lehre vom Raume", 1. Aufl., Braunschweig 1914, S. 84—92. (Die 2. Auflage behandelt nur einen Teil des Stoffes der 1. Auflage.) Ebenso H. Beck, „Koordinatengeometrie" Bd. I, Berlin 1919, insbesondere S. 80—84.

schauung gewonnenen Tatsachen der reell-Euklidischen Geometrie gelten; erst wenn man das gezeigt hat, kann man das komplex-analytische Instrument für Fragen der reell-Euklidischen Geometrie verwenden.[1]

Will man dies in Ordnung bringen, dann muß man aus der abstrakten Koordinatengeometrie die reell-Euklidische analytische Geometrie für sich entwickeln; damit führt man im ganzen wieder genau die beiden Prozesse des Schlußabsatzes von Nr. 1 durch, nur in umgekehrter Reihenfolge. Hier wie dort operiert man außerhalb des geometrisch-axiomatisch fundierten Teilgebietes lediglich mit rein analytischen Analogien, und der geometrisch naheliegende Wunsch bleibt unerfüllt, die geometrischen Axiome auch im Komplexen soweit zu verwerten, als Folgerungen aus ihnen formal gelten.

3. Diesem letzten Wunsche nach möglichst weit getriebener geometrischer Erfassung des Komplexen wird v. Staudts bekannter Aufbau der komplexen Geometrie gerecht.[2] Hier werden die Worte „imaginärer Punkt" und „imaginäre Gerade" derart als Konstellationen reeller Elemente interpretiert, daß die komplexen Gebilde projektive Axiome der reellen erfüllen. Jede Aussage über das Imaginäre ist hier letzten Endes nur ein kurzer Ausdruck für einen, unter Umständen recht verwickelten, reellen Sachverhalt. v. Staudts Deutung des Imaginären ist ein genialer Griff, doch ist der Weg recht umständlich und begrifflich ist das Imaginäre aus dem Reellen abgeleitet, so daß nicht, wie bei Study, die ganze komplexe Geometrie mit einem Schlage gewonnen wird. Das ergibt sich zwangläufig daraus, daß v. Staudt *nur* von Tatsachen ausgeht, die im Reellen gelten.

4. Die Ergebnisse der bisherigen Ausführungen lassen sich in folgender Weise zusammenfassen:

Die analytische Geometrie endigt in der komplex-projektiven als der umfassendsten.

Die abstrakte Koordinatengeometrie hat den Vorteil, die komplex-Euklidische Geometrie mit einem Schlage zu liefern. Damit

---

[1] z. B. H. Beck a. a. O. schon S. 8.

[2] v. Staudt, „Beiträge zur Geometrie der Lage" 1. Heft, Nürnberg 1856, insbesondere § 7. Eine schöne Darstellung findet man bei Clebsch-Lindemann, „Vorlesungen über Geometrie" Bd. II_1, Leipzig 1891, S. 104—130.

wird die Verwirrung vermieden, die bei dem genetischen Übergange vom Reellen zum Komplexen dadurch entsteht, daß nur ein nicht ohne weiteres feststellbarer Teil der Sätze gültig bleibt.

Daß ein Teilgebiet der komplexen Geometrie die Axiome der reellen Euklidischen erfüllt, muß nachgewiesen werden.

Es ist erwünscht, die komplexe Geometrie nicht rein analytisch zu begründen, sondern unter weitgehender Heranziehung aus der Anschauung entwickelter geometrischer Vorstellungen. Das ausschließliche Operieren mit solchen Vorstellungen jedoch stört die Einheitlichkeit des Aufbaues und macht ihn unübersichtlich.

5. Aus dem allem erklärt sich der Wunsch nach einer geometrisch-axiomatischen Begründung der komplexen projektiven Geometrie in einem Axiomensystem, das naturgemäße, einfache Axiome verwendet, die auf dem Weg über die Anschauung gewonnen sind. Im folgenden wird die Erfüllung dieses Wunsches für die komplex-projektive analytische Geometrie des Raumes versucht. Da das Komplexe nicht anschaulich ist, wenn man die Worte „Punkt", „Punktreihe" usw. in dem ursprünglich gemeinten Sinn auffaßt, muß das Axiomensystem notwendig der Anschauung widersprechen; das vorliegende Axiomensystem ist so aufgebaut, daß diese Abweichung von der Anschauung in einem einzigen Axiom erzwungen wird, bei dessen Aufstellung demnach die Anschauung ebenfalls mitgewirkt hat, aber in der Weise, daß ihr bewußt widersprochen wird. Aus der durch dieses Axiomensystem gewonnenen komplex-analytischen projektiven Geometrie gelangt man dann durch zusätzliche Definitionen zur komplex-Euklidischen und zur reell-Euklidischen.

Hier wie in jedem Axiomensystem ist es bis zu einem gewissen Grade Geschmackssache, welche Tatsachen man als Axiome wählen will und wie weit man in der Verschärfung der Axiome geht; es gibt Fälle, in denen zu weit getriebene Verschärfung an Stelle einer kurzen, leicht verständlichen Aussage eine verwirrende Menge von Worten liefert. Daran war zu Beginn dieser Nummer bei dem Ausdrucke „naturgemäße, einfache Axiome" gedacht.

Das hier vorliegende Axiomensystem ist durch das Hereinziehen des Komplexen charakterisiert. Es ist selbstverständlich, daß es mancherlei Berührungspunkte mit bekannten, reellen

Axiomensystemen hat;[1] darauf kann nur an wichtigen Stellen und nicht in jedem Einzelfalle verwiesen werden.

§ 2.

Axiomatische Vorbemerkungen.

6. Der Aufstellung des Axiomensystems mögen in diesem Paragraphen einige Bemerkungen grundsätzlich axiomatischer Art vorausgeschickt werden.

Es liegt nahe, nach einem projektiven Axiomensystem zu suchen, in dem ohne weiteres das Prinzip der Dualität dadurch zum Ausdrucke kommt, daß zu jedem Axiom das duale auftritt. Dies hat aber besondere Schwierigkeiten, wenn man sich nicht auf ein „konziliantes" Axiomensystem beschränken will,[2] das erhebliche Verschärfungen der Axiome zuläßt, was man schon am Beispiele der ebenen projektiven Geometrie erkennt:

Deren erstes Axiom lautet naturgemäß etwa „Irgend zwei Punkte gehören unabhängig von ihrer Reihenfolge mit genau einer Geraden zusammen",[3] das dazu duale Axiom wäre „Irgend zwei Gerade gehören unabhängig von ihrer Reihenfolge mit genau einem Punkte zusammen". Dieses zweite Axiom läßt sich aber auf Grund des ersten dadurch verschärfen, daß man „mindestens einem" statt „genau einem" setzt.

Die Forderung nach einem dualen Axiomensystem schließt demnach wünschenswerte Verschärfungen aus, wenn sie nicht sogar zur Einführung überzähliger Axiome führt. Daher wird im folgenden auf einen dualen Aufbau des Axiomensystems verzichtet, dessen Wert in einer projektiven Geometrie des Raumes

---

[1] Vgl. den zusammenfassenden Artikel von F. Enriques, „Die Prinzipien der Geometrie", Enzykl. d. math. Wiss. III_1, insbesondere S. 70—82, ferner M. Pieri, „I principii della geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo", Torino mem. (2) 48 (1898) S. 1—62 (hierauf beziehen sich die weiteren Verweisungen auf M. Pieri) und A. N. Whitehead, „The axioms of projective geometry", Cambridge Univ. Press 1913, 64 S.

[2] Dies tut aus pädagogischen Gründen bewußt L. Heffter, „Die Grundlagen der Geometrie", Leipzig und Berlin 1921, eine Darstellung, die im wesentlichen in Heffter-Koehler a. a. O. wiederkehrt.

[3] Daß sich dieses Axiom in weitere Axiome zerspalten läßt — vgl. Hilber a. a. O. S. 3, I_1 und I_2 —, ist hier der Kürze halber unterdrückt.

auch dadurch herabgedrückt würde, daß man selbst dann immer noch das Prinzip der Dualität in der Ebene beweisen müßte.

7. Durch den Verzicht auf die Dualität im Axiomensystem ist die Möglichkeit gegeben, in den Axiomen nur von einem einzigen System von Dingen zu handeln, den Punkten,[1] nicht von den drei Systemen der Punkte, Geraden, Ebenen. Das ist begrifflich einfacher und liegt gerade in der projektiven Geometrie mit ihren Punktreihen und Punktfeldern nahe. Gleichzeitig ist noch folgender Vorteil damit verbunden: das Axiomensystem läßt sich dann so aufbauen, daß man mit geringen Abänderungen ein Axiomensystem der projektiven Geometrie im komplex 4-, 5-dimensionalen Raum usw. erhält, während man im anderen Falle jedesmal ein neues System von Dingen zu den bisher gedachten Systemen hinzudenken müßte, nämlich Räume und Überräume.

8. In geometrisch-axiomatischen Untersuchungen kennt man schon lange interessante Sätze, die es gestatten, aus einem geometrischen Sachverhalt in einem einzigen Fall auf das allgemeine Vorkommen dieses Sachverhaltes zu schließen.[2] Es liegt danach nahe, auch die Forderungen der Axiome, wenn sie dann noch weit genug tragen, nicht für alle einschlägigen Elementkonstellationen auszusprechen, sondern nur für eine bestimmte. So genügt es z. B. in der Euklidischen Planimetrie das Parallelenaxiom so zu formulieren: „Es gibt (mindestens) einen Punkt A und eine ihn nicht enthaltende Gerade a derart, daß a von höchstens einer Geraden durch A nicht getroffen wird.“[3]

Gegen dieses Vorgehen könnte eingewendet werden, daß durch ein solches Axiom eine bestimmte Konstellation von Ele-

[1] Ebenso schon G. Peano 1894 (vgl. Enriques a. a. O. S. 71), Pieri sowie Whitehead a. a. O.

[2] Als erster hat wohl G. Saccheri in seinem „Euclides ab omni naevo vindicatus“, Mailand 1733, Lehrsatz V—VII, XVI, derartige Sätze bewiesen, z. B. dem Inhalte nach den folgenden Satz: „Wenn in einem einzigen Viereck die Winkelsumme vier Rechte (größer, kleiner als 4 R) ist, gilt dasselbe für jedes Viereck.“ Besonders bekannt ist in diesem Zusammenhange der eng mit Saccherischen Sätzen zusammenhängende 2. Legendresche Satz über die Winkelsumme im Dreieck geworden, vgl. Hilbert a. a. O. S. 44 u. 50.

[3] Vgl. des Verfassers „Nichteuklidische Geometrie“, Sammlung Göschen 1927, S. 70—73, und Hilbert a. a. O. S. 38.

menten ausgezeichnet wird, die, wie man nachträglich beweist, unter den gleichartigen Konstellationen keine Sonderstellung einnimmt. Doch trifft derselbe Einwand auch durchaus gebräuchliche Axiome, wie etwa das Axiom „Es gibt (mindestens) zwei Punkte auf einer Geraden", in dem unter den gleichberechtigten Punkten der Geraden zwei hervorgehoben werden.

Für eine solche Fassung von Axiomen spricht aber die Tatsache, daß die in einem Axiom enthaltene Forderung geringer ist, wenn sie nur für einen einzigen Fall gestellt wird, als wenn sie für die Gesamtheit der Fälle ausgesprochen wird. Denn — am Beispiele des Parallelenaxioms erläutert — die übliche Form des Parallelenaxioms[1] läßt sich begrifflich in die beiden Teile zerspalten „Es gibt einen Punkt A .... nicht getroffen wird" und „Für jeden Punkt und jede Gerade gilt dasselbe", von denen der zweite überflüssig ist, weil er aus vorhergehenden Axiomen und dem ersten Teile beweisbar ist. Daher werden im folgenden Axiome auf den Einzelfall beschränkt, wenn dies in einfacher, übersichtlicher Weise möglich ist.

Daraus ergibt sich noch für manche axiomatische Untersuchungen die wesentliche Erleichterung, daß man bei der Behandlung nicht-trivialer Deutungen an einem bequemen Einzelfalle feststellen kann, ob ein solches Axiom erfüllt ist, ohne die ganze Deutung durchprüfen zu müssen.

9. Besondere Aufmerksamkeit erfordern die reinen Existenzialaxiome, und zwar aus folgendem Grunde:

Man wird naturgemäß von einem Axiomensystem fordern, es solle keine überzähligen Axiome oder Axiomteile enthalten, was zweierlei nach sich zieht, nämlich, daß erstens das Axiomensystem deutbar sein soll, u. z. so, daß jedes Axiom benötigt und erfüllt wird, d. h. daß Dinge dieser Deutung dem betreffenden Axiom genügen,[2] und zweitens, daß kein Axiom und kein

---

[1] Hilbert a. a. O. S. 28.

[2] Damit sind Möglichkeiten wie die ausgeschlossen, daß jemand den Axiomen der reell-Euklidischen Geometrie etwa ein biologisches Axiom hinzufügt und dann behauptet, die Euklidische Geometrie sei eine Deutung dieses Systems, da sie sich mit diesen Axiomen in dem Sinne vertrage, daß sie gegen keines verstoße (weil das biologische Axiom bei dieser Deutung gar nicht benützt wird).

Teil eines solchen aus den übrigen Axiomen beweisbar sein soll.[1] Aus dem ersten folgt, daß — die Axiome so formuliert vorausgesetzt, daß sie aus einem die Voraussetzungen enthaltenden Vordersatz und einem die Forderung des Axioms aussprechenden Nachsatze bestehen — die Vordersätze der Axiome erfüllbar sein müssen. Ist dies nun nicht durch die vorausgehenden Axiome gewährleistet, dann enthält das Axiom zweierlei Forderungen, nämlich die, daß sein Vordersatz erfüllbar sein soll und die des Nachsatzes.[2]

Dies ist unerwünscht, zunächst deshalb, weil man naheliegenderweise die Axiome möglichst so aussprechen wird, daß jedes nur eine Forderung enthält.[3] Viel wichtiger ist aber, daß es mit der Klarheit, die man von einem Axiomensystem verlangen muß, unvereinbar ist, in dieser versteckten Weise Existenzialforderungen einzuschmuggeln.[4] Daher wird man durch rechtzeitig eingeführte Existenzialaxiome dafür sorgen, daß die Vordersätze der Axiome erfüllbar sind.

Es ist klar, daß die beiden soeben geforderten Eigenschaften die Zahl der Axiome vermehren.

---

[1] Nach dem vorletzten Absatze von Nr. 5 wird man trotzdem in manchen Fällen beweisbare Axiomteile bewußt beibehalten.

[2] A. Rosenthal, „Über das dritte Hilbertsche Axiom der Verknüpfung", Math. Ann. 69 (1910) S. 224: „Das Axiom I 4 sagt aus: ‚Drei nicht auf derselben Geraden liegende Punkte A, B, C bestimmen stets eine Ebene α.' Dieses Axiom würde sinnlos werden, wenn es nicht mindestens einen Fall gäbe, in dem es realisierbar wäre, d. h. wenn es nicht wenigstens drei nicht auf einer Geraden gelegene Punkte gäbe." Vgl. auch meine Schrift „Formalismus und Intuitionismus in der Mathematik", Karlsruhe 1924, S. 41, IV und A. Rosenthal, „Eine Bemerkung zu der Arbeit von Fräulein S. Weinlös: »Sur l'indépendance des axioms de coïncidence et de la parallélité ...«", Fundamenta Mathematicae XIII S. 304—306.

[3] Darauf wird nicht immer Wert gelegt, vgl. Hilbert a. a. O. S. 3, I 4 und S. 13/14, III 4. Es gibt allerdings Fälle, in denen die Zerspaltung in Einzelaussagen die Axiome in unübersichtlicher Weise vermehrt.

[4] So würde z. B. bei Hilbert a. a. O. S. 3 der Vordersatz des Axioms I 4 „Zu irgend drei nicht auf ein und derselben Geraden liegenden Punkten ...." den zweiten Teil von I 3 „Es gibt wenigstens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen" nach sich ziehen.

§ 3.

Die 8 ersten Axiome der Verknüpfung.

10. In der nun folgenden Darstellung besteht das Axiomensystem lediglich aus den kursiv gedruckten Teilen, nämlich einer Einleitung A und einer Forderung B, Axiomen und Erklärungen. Die dazwischenstehenden erläuternden Bemerkungen, die sich auf die Struktur des Axiomensystems beziehen, sollen das Verständnis erleichtern, während die aus den Axiomen bewiesenen Sätze Tatsachen aussprechen, die entweder in späteren Axiomen benötigt werden oder die projektive Geometrie auf dem Axiomensystem aufbauen.

A. Einleitung. *Die komplexe, projektive Geometrie handelt von einem System von Dingen, die man „Punkte" nennt. Punkte lassen sich zu „Punktreihen" zusammenfassen.*[1] *Die Punkte und Punktreihen, ferner eine durch das Wort „projektiv" bezeichnete Beziehung, die später eingeführt werden wird, sowie die in Erklärungen beschriebenen, abgeleiteten Begriffe erfüllen die hier folgenden Axiome, es sind das* 10 *Axiome der Verknüpfung,* 4 *Axiome der Projektivität,* 3 *Axiome der Doppelverhältnisse.*

Punkte werden mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet, Punktreihen mit zwei nebeneinandergesetzten großen lateinischen Buchstaben. Die Buchstaben in den Axiomen auftretender Punkte, auf die wiederholt zurückgegriffen wird, werden durch Überstreichen hervorgehoben.[2]

I. Axiome der Verknüpfung.

I 1. *Es gibt (mindestens) zwei Punkte,*[3] $\overline{S}$ *und* $\overline{T}$.

Damit ist der Vordersatz des nun folgenden Axioms ermöglicht.

---

[1] Daß hier die axiomatische Verwendung der Punktreihen der Einführung der Kollinearität eines Punktetripels vorgezogen wird, hat einen Grund, von dem in Nr. 21 die Rede sein wird.

[2] Das sind nicht etwa Punktindividuen, die durch keine anderen ersetzt werden können, nur müßte ihre Ersetzung in allen Axiomen und Erklärungen, die von ihnen handeln, zugleich vorgenommen werden.

[3] Wenn gelegentlich in axiomatischen Betrachtungen von „zwei zusammenfallenden Punkten" die Rede ist (nicht im Sinne von zwei bei einem Grenzprozeß zusammenrückenden), handelt es sich immer um e i n e n Punkt, der mit zwei verschiedenen Buchstaben bezeichnet ist. Da es zwei nicht verschiedene

I 2. *Irgendein Punkt A und irgendein weiterer Punkt B bestimmen eine einzige Punktreihe AB.*

Aus diesen beiden ersten Axiomen folgt die Existenz mindestens einer Punktreihe. Die Punktreihe AB braucht keinen der Punkte A, B zu enthalten, wie die folgende mit den beiden Axiomen verträgliche Deutung zeigt: „Punkte" sind die vier Ecken eines Tetraeders, die durch zwei solche Punkte bestimmte „Punktreihe" besteht aus den beiden anderen Ecken. Daher spricht das folgende Axiom eine neue Forderung aus:

I 3. *Die Punktreihe AB enthält den Punkt A.*

Die folgende Deutung erfüllt diese drei Axiome: „Punkte" sind die Ecken eines Dreiecks, die „Punktreihe" AB besteht aus dem erstgenannten Punkt und der dritten Ecke. Die Punktreihe AB besteht demnach aus den Punkten A und C, die Punktreihe BA dagegen aus B und C. Diese bisher mögliche Verschiedenheit schließt das folgende Axiom aus:

I 4. *Die Punkte B und A bestimmen dieselbe Punktreihe wie die Punkte A und B.*

D. h. jeder Punkt einer der beiden Punktreihen AB und BA ist auch Punkt der anderen, die Punktreihen sind identisch. Aus I 3 und I 4 folgt unmittelbar der

Satz 1. Die durch zwei Punkte bestimmte Punktreihe enthält diese beiden Punkte.

I 5. *Jede Punktreihe enthält (mindestens) drei Punkte.*

In der reellen Geometrie genügt es bekanntlich, in den Verknüpfungsaxiomen zwei Punkte für jede Gerade zu fordern, weil dort ein dritter Punkt durch ein Anordnungsaxiom garantiert wird,[1] das in der komplexen Geometrie wegfällt.

11. Die bisherigen Axiome lassen die folgende Deutung zu: man nennt „Punktreihen" die geradlinigen und die kreisförmigen Punktreihen einer reell-Euklidischen Ebene und versteht unter der nach I 2 durch zwei Punkte bestimmten Punktreihe deren geradlinige Verbindungspunktreihe. Hier werden die kreis-

---

Punkte nicht gibt, sind bei uns mit zwei, drei .... Punkten, Punktreihen usw. immer zwei, drei ..... verschiedene gemeint.

[1] z. B. II 2 bei Hilbert a. a. O. S. 5.

förmigen Punktreihen durch die Bestimmung der Axiome I 2—I 4 gar nicht erfaßt. Derartiges zu vermeiden ist Aufgabe des Axioms I 6. *Eine Punktreihe ist durch irgend zwei ihrer Punkte bestimmt.*

Nun ergeben sich vermöge Axiom I 2 unmittelbar die beiden Sätze

Satz 2. Eine Punktreihe ist durch irgend zwei ihrer Punkte eindeutig bestimmt.

Satz 3. Zwei Punktreihen haben höchstens einen Punkt gemeinsam.

Nach den bisherigen Axiomen könnten alle Punkte einer einzigen Punktreihe angehören. Diese Möglichkeit wird in dem nun folgenden Axiom, das auf I 1 zurückgreift, ausgeschlossen.

I 7. *Es gibt zwei Punkte U, V derart, daß die Punktreihen $\overline{ST}$ und $\overline{UV}$ keinen gemeinsamen Punkt haben.*

Man kann die bisherigen 7 Axiome durch die Punkte und Punktreihen einer reell-Euklidischen Ebene erfüllen, $\overline{ST}$ und $\overline{UV}$ sind dann parallele Punktreihen. Erst in Zusammenhang mit dem noch folgenden Axiom I 8 wird I 7 aus der Ebene herausführen.

12. Nach I 7 ist man berechtigt, von Punkten außerhalb einer Punktreihe zu sprechen. Es gilt nun der

Satz 4. Die 6 Punktreihen, zu denen Paare der Punkte S, T, U, V gehören, sind voneinander verschieden.

Denn würden auch nur drei dieser Punkte der gleichen Punktreihe angehören, etwa S, T, U, dann hätten die Punktreihen $\overline{ST}$ und $\overline{UV}$ entgegen I 7 einen gemeinsamen Punkt, in diesem Fall U.

1. Erklärung. *QR sei eine Punktreihe, P ein nicht in ihr enthaltener Punkt. Diejenigen Punkte, welche Punktreihen angehören, die P und einen Punkt der Punktreihe QR enthalten, bilden das „Punktfeld PQR“.*

Zufolge dieser Erklärung und I 4 können in der Bezeichnung des Punktfeldes PQR die Buchstaben Q und R vertauscht werden, während P vorläufig noch eine Sonderstellung einnimmt.

In den zwischen das Axiomensystem geschobenen Betrachtungen werden weiterhin Punktreihen auch durch kleine lateinische Buchstaben, Punktfelder durch kleine griechische Buchstaben bezeichnet. Daraus, daß ein Punktfeld durch drei nicht zur gleichen Punktreihe gehörende, nicht „kollineare" Punkte definiert ist, folgt unmittelbar der

Satz 5. Ist α ein Punktfeld, g eine seiner Punktreihen,[1] dann gibt es in α einen Punkt außerhalb g.

g sei irgendeine Punktreihe, dann liegt nach Satz 4 wenigstens einer der Punkte S, T, U, V nicht in ihr, er bestimmt mit ihr nach der 1. Erklärung ein Punktfeld und es gilt der

Satz 6. Außerhalb jeder Punktreihe liegt mindestens ein Punkt, jede Punktreihe gehört mindestens einem Punktfeld an.

13. Das Axiom I 7 liefert vier Punktfelder, darunter $\overline{STU}$. Die Punktreihe $\overline{ST}$ enthält nach I 5 noch einen Punkt P — Fig. 1[2] —,

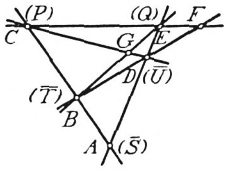

Fig. 1.

die Punktreihe $\overline{SU}$ noch einen, nach Satz 3 von P verschiedenen, Punkt Q. Darüber, ob die Punktreihen $\overline{PQ}$ und $\overline{TU}$ einen Punkt gemeinsam haben oder nicht, sagen die bisherigen Axiome nichts aus.[3] Dies geschieht im folgenden Axiom — Fig. 1 —, das dem Axiomensystem die für die Projektivität charakteristische Prägung verleiht:[4]

I 8. *Sind A, B, C irgend drei Punkte einer Punktreihe und A, D, E drei Punkte einer davon verschiedenen Punktreihe, dann*

---

[1] D. h. alle Punkte der Punktreihe sind Punkte des Feldes.

[2] Die Beweise werden rein formallogisch geführt. Es ist selbstverständlich, daß die Figuren die abstrakten Schlußweisen nur leichter verständlich machen, nicht etwa ersetzen sollen. Hier gelten die eingeklammerten Buchstaben der Fig. 1, die übrigen Buchstaben beziehen sich auf das unmittelbar folgende Axiom I 8.

[3] Man erkennt dies, wie am Schlusse von Nr. 11, aus einer Euklidischen Deutung.

[4] Dieses Axiom stimmt inhaltlich überein mit einem Postulat von Pieri a. a. O. S. 16.

haben die Punktreihen BD und CE mindestens einen gemeinsamen Punkt.

Aus den Sätzen 2 und 3 folgt unmittelbar der

Satz 7. Die Punktreihen BD und CE des Axioms I8 haben genau einen Punkt gemeinsam, er ist von den 5 Ausgangspunkten des Axioms verschieden.

I8 fordert die Existenz von F in Fig. 1, und da man nach Satz 2 die Buchstaben E und D in I8 vertauschen darf, auch die von G. Die Punkte F und G sind verschieden, weil sonst C, E, F, B kollinear wären und damit nach Satz 3 der Punkt B der Punktreihe BC nicht von C verschieden wäre. Damit kommt man zu der

2. Erklärung. *Sind irgend vier Punkte eines Punktfeldes gegeben, von denen keine drei derselben Punktreihe angehören, dann haben irgend zwei Punktreihen, welche diese vier Punkte enthalten, einen gemeinsamen Punkt. Man erhält so zu den vier Ausgangspunkten als „Ecken" eines „vollständigen Vierecks" drei neue Punkte*[1] *als dessen „Nebenecken".*

14. Wir betrachten nun eine Punktreihe g mit den Punkten Q, R und ein nach der 1. Erklärung durch die Punkte P, Q, R bestimmtes Punktfeld γ.

A, B seien zwei Punkte von γ und C ein weiterer Punkt der Punktreihe AB. Dann sind folgende 4 Fälle zu unterscheiden: A fällt mit P zusammen, B auf g; A fällt mit P zusammen, B nicht auf g; A ist von P verschieden, B fällt auf g; A und B sind von P und den Punkten von g verschieden. Im ersten Fall ist C nach der 1. Erklärung und dem Satze 3 ein Punkt des Feldes γ; im zweiten Falle liefert B, als Punkt von γ, einen Punkt der Punktreihe AB in g, womit wieder der erste Fall vorliegt; im dritten Fall enthält PA einen Punkt S von g, fällt dieser mit B zusammen, dann tritt wieder der erste Fall ein, ist aber S von B verschieden, dann liefern die Punktreihen ASP und ABC nach I8 einen Punkt von PC auf SB, d. h. auf g, und C ist daher wieder Punkt von γ; im vierten Fall endlich enthält AP einen Punkt S

[1] Da man, Fig. 1, G vermöge I8 aus A oder F so finden kann, wie F aus A, sind nach dem vorigen Absatze die drei Punkte A, F, G voneinander verschieden.

von g, ferner PB einen Punkt T von g, und die Punktreihen PAS und PBT führen nach I8 auf einen gemeinsamen Punkt der Punktreihen ST und AB, womit wieder der dritte Fall vorliegt. Das ist der Beweis für den

Satz 8. Hat eine Punktreihe mit einem Punktfelde zwei Punkte gemeinsam, dann gehört sie dem Punktfelde ganz an.

h sei eine von g verschiedene, P nicht enthaltende Punktreihe von γ. Dann enthält nach den zwei letzten Fällen des soeben durchgeführten Beweises h einen Punkt von g, er heiße D. Irgendein Punkt C von h gehört nach der 1. Erklärung zu einer Punktreihe, welche P und einen Punkt R von g enthält; umgekehrt gehört auch irgendein Punkt S von g zu einer Punktreihe, welche P und einen Punkt A von h enthält, ihn liefert I8 aus den Punktetripeln R, S, D und R, P, C. Daher kann man zur Definition des Punktfeldes statt P und g auch P und h verwenden, und jede Punktreihe des Feldes hat, wie vorher mit g, jetzt mit h einen Punkt gemeinsam. Daher gilt der

Satz 9. Irgend zwei Punktreihen eines Feldes haben genau einen Punkt gemeinsam.

15. Läßt man an die Stelle von P, Q, R in der 1. Erklärung irgend drei nicht kollineare Feldpunkte L, M, N treten, dann haben, wenn A irgendein Feldpunkt ist, LA und MN nach Satz 9 einen Punkt gemeinsam, man kann demnach auch L, M, N zur Definition des Feldes benützen. Das ist der Beweis für den

Satz 10. Ein Punktfeld ist durch irgendein nicht-kollineares Tripel seiner Punkte eindeutig bestimmt.

Damit ist auch die unmittelbar nach der 1. Erklärung erwähnte Sonderstellung von P aufgehoben. Eine einfache Folgerung aus den Sätzen 10 und 8 ist der

Satz 11. Haben zwei Punktfelder mehr als zwei Punkte gemeinsam, dann haben sie die Punkte einer Punktreihe und nur diese gemeinsam.

16. Nach Satz 9 gehören die vier Punkte $\overline{S}, \overline{T}, \overline{U}, \overline{V}$ der Axiome I1 und I7 nicht dem gleichen Punktfeld an. Ist irgendein Punktfeld gegeben, dann liegt demnach mindestens einer dieser Punkte nicht in ihm, und es gilt der

Satz 12. Außerhalb jedes Punktfeldes liegt mindestens ein Punkt.

Daß auf den hierin zum Ausdruck kommenden räumlichen Charakter der projektiven Geometrie erst vermöge I 8 geschlossen werden kann, war unmittelbar nach I 7 erwähnt worden. Analog der 1. Erklärung lautet nun die

3. Erklärung. *Diejenigen Punkte, welche Punktreihen angehören, die* $\overline{S}$ *und einen Punkt des Feldes* $\overline{TUV}$ *enthalten, bilden den „Punktraum* $\overline{STUV}$“.

Wir sprechen weiterhin nur kurz vom „Punktraum“ und nennen dessen Punkte „Raumpunkte“, während das Punktfeld $\overline{TUV}$ mit $\overline{\alpha}$ bezeichnet werden möge.

Aus der 3. Erklärung und dem Axiom I 2 folgt zunächst sofort, daß jede Punktreihe, welche außer $\overline{S}$ noch einen Raumpunkt enthält, ganz dem Punktraum angehört, ebenso zufolge der 1. Erklärung jedes Punktfeld, welches außer $\overline{S}$ noch zwei mit diesem Punkte nicht kollineare Raumpunkte enthält.

17. Nun ist man in der Lage, die bekannten räumlichen projektiven Koinzidenztatsachen einfach zu beweisen. A und B seien zwei mit S nicht kollineare Raumpunkte, dann hat die Punktreihe SA mit α einen Punkt D gemeinsam, SB einen Punkt E, und da nach Satz 8 die Punktreihe AB dem Punktfeld $\overline{SDE}$ angehört, liegt sie nach dem Schlusse von Nr. 16 auch im Punktraume. Das ist der

Satz 13. Hat eine Punktreihe zwei Punkte mit dem Punktraume gemeinsam, dann liegt sie ganz in ihm.

Hieraus und aus der 1. Erklärung ergibt sich unmittelbar der

Satz 14. Hat ein Punktfeld drei nicht kollineare Punkte mit dem Punktraume gemeinsam, dann gehört sie ihm ganz an.

18. R sei ein von $\overline{S}$ verschiedener Raumpunkt außerhalb α, P ein zu R und $\overline{S}$ nicht kollinearer Raumpunkt. Dann enthält die Punktreihe SP einen Punkt von α, die Punktreihe $\overline{S}R$ einen Punkt B, ferner liefern nach I 8 und Satz 13 die Punktreihen $\overline{S}RB$ und SPA einen Punkt der Punktreihe RP in $\overline{\alpha}$, d. h. man darf in der 3. Erklärung S durch R ersetzen.

Q sei ein von S verschiedener Raumpunkt außerhalb α. Das Punktfeld QTU heiße β. C sei ein Punkt von β. Nach Satz 14 ist er Raumpunkt und nach der 3. Erklärung hat demnach die Punktreihe SC mit α einen Punkt gemeinsam. Ist umgekehrt D ein Punkt von α und E der Punkt, den nach der 3. Erklärung SQ mit α gemeinsam hat, dann enthält nach Satz 9 die Punktreihe DE einen Punkt F von TU, und die Punktreihen ESQ, EDF liefern nach Axiom 18 und Satz 8 einen Punkt von SD in β. Demnach kann man in der 3. Erklärung β an die Stelle von α setzen.

Sind nun K, L, M, N irgend vier Raumpunkte, die nicht in einem Punktfelde liegen — nicht „komplanar" sind —, dann kann man an die Stelle des Punktfeldes TUV der Reihe nach die Punktfelder LTU, LMU, LMN setzen, K an die Stelle von S.[1] Demnach gilt der

Satz 15. In der 3. Erklärung können die Punkte S, T, U, V durch irgend vier nicht komplanare Raumpunkte ersetzt werden.

18. Da nach dem Schlusse von Nr. 16 jede S enthaltende Punktreihe des Punktraumes einen Punkt mit α gemeinsam hat, gilt dies im Punktraume nach Satz 15 für jedes Punktfeld und jede nicht in ihm enthaltene Punktreihe; das ist der

Satz 16. Im Punktraume hat jedes Punktfeld mit jeder nicht dem Punktfeld angehörenden Punktreihe genau einen Punkt gemeinsam.

Ist β ein von α verschiedenes Punktfeld des Raumes, dann liefert Satz 16 aus drei nicht kollinearen Punkten von β vermöge Satz 8 eine β und α gemeinsame Punktreihe. Daraus ergibt sich zufolge Satz 15 unmittelbar der

Satz 17. Im Punktraume haben irgend zwei verschiedene Punktfelder die Punkte einer Punktreihe gemeinsam.

Damit sind die bekannten Koinzidenzeigenschaften des projektiven Raumes aus den Axiomen bewiesen. Man kann nun aus diesen z. B. in bekannter Weise den Satz von Desargues ableiten.

---

[1] Sollte bei diesen Ersetzungen eines der Felder S enthalten, dann setzt man vorher an die Stelle von S irgendeinen Raumpunkt außerhalb dieses Feldes und operiert mit ihm statt mit S weiter.

Definiert man analog der 3. Erklärung aus irgend vier nicht komplanaren Punkten A, B, C, D einen Punktraum $ABCD$, dann gelten, lediglich mit Vertauschung der Buchstaben A . . D mit $\bar{S}$ . . $\bar{V}$, die Beweise der Sätze 13—17 und damit auch diese Sätze für den Punktraum $ABCD$.

§ 4.

Über die Nebenecken eines vollständigen Vierecks. Die zwei letzten Axiome der Verknüpfung

19. In Nr. 13 war gezeigt worden, daß es mindestens ein vollständiges Viereck gibt und daß in diesem die Nebenecken voneinander und von den Hauptecken verschieden sind. Die bekannte fundamentale Bedeutung des vollständigen Vierecks für die projektive Geometrie beruht in seiner harmonischen Eigenschaft, bei deren Ableitung — manchmal stillschweigend[1] — vorausgesetzt wird, daß die drei Nebenecken nicht in einer Geraden liegen. Daß dies nicht selbstverständlich ist, zeigt Fig. 2:

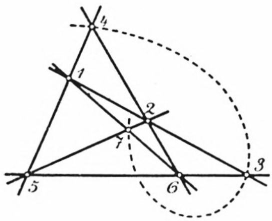

Fig. 2.

nennt man die 7 Nullkreise „Punkte", die Punkte der 6 Geraden und der gestrichelten Kurve — in formallogisch einwandfreier Weise — „kollinear", dann sind dadurch, wie man ohne weiteres erkennt, die ebenen Verknüpfungsaxiome I 1—I 6 und I 8 erfüllt; dabei gehören die Nebenecken 3, 4, 7 des vollständigen Vierecks 1, 2, 5, 6 zur gleichen Punktreihe.

---

[1] So wies M. Pieri, „Sui principî che reggono la Geometria di Posizione", Nota II, Torino Atti 31 (1896) S. 387, auf eine Lücke in der 1. Auflage der „Vorlesungen über neuere Geometrie" von M. Pasch hin, die dieser in der Note „Zur projektiven Geometrie", Math. Ann. 48 (1897) S. 111—112 ausfüllte.

20. Diese Deutung läßt sich nun zu einer räumlichen Deutung der sämtlichen Axiome I 1—I 8 erweitern, in der 15 „Punkte", 35 „Punktreihen", 15 „Punktfelder" derart auftreten, daß jeder Punkt zu 7 Punktreihen und 7 Punktfeldern gehört, jede Punktreihe 3 Punkte enthält und zu 3 Punktfeldern gehört, in jedem Punktfelde 7 Punkte und 7 Punktreihen liegen, das letzte analog Fig. 2. Die Inzidenztafel dieser Konfiguration zeigt Fig. 3: die Punkte sind 1, 2, 3 .... 15, die Punktfelder (1), (2), (3) .... (15),

Konfiguration I.

	(1)				(5)					(10)					(15)	
1	×	×	×	×	×	×	×	○	○	○	○	○	○	○	○	1
2	×	×	×	○	○	○	○	×	×	×	×	○	○	○	○	2
3	×	×	×	○	○	○	○	○	○	○	○	×	×	×	×	3
	×	○	○	×	×	○	○	○	○	×	×	○	○	×	×	
5	×	○	○	×	×	○	○	×	×	○	○	×	×	○	○	5
	×	○	○	○	○	×	×	○	○	×	×	×	×	○	○	
7	×	○	○	○	○	×	×	×	×	○	○	○	○	×	×	7
	○	×	○	○	×	○	×	○	×	○	×	×	○	×	○	
9	○	×	○	○	×	○	×	×	○	×	○	○	×	○	×	9
	○	×	○	×	○	×	○	○	×	○	×	○	×	○	×	
11	○	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○	11
	○	○	×	○	×	×	○	×	○	○	×	○	×	×	○	
13	○	○	×	○	×	×	○	○	×	×	○	×	○	○	×	13
	○	○	×	×	○	○	×	×	○	○	×	×	○	○	×	
15	○	○	×	×	○	○	×	○	×	×	○	○	×	×	○	15
	(1)				(5)					(10)					(15)	

Fig. 3.

die Kreuze bezeichnen Inzidenzen; die Punktreihen bestehen aus den Punktetripeln, die zwei (und dann drei) Punktfeldern gemeinsam sind, z. B. 1, 2, 3 oder 3, 12, 15. Überträgt man die übliche Bezeichnungsweise für Punkte, Gerade, Ebenen einer Konfiguration[1] hier auf die Punkte, Punktreihen, Punktfelder, dann liegt in Fig. 3 eine Konfiguration (15_7^7, 35_3^3, 15_7^7) vor.

21. In der Konfiguration I ist eine Deutung gefunden, die, wie man leicht nachprüft, alle Verknüpfungsaxiome I 1—I 8 erfüllt, in der aber z. B. die Nebenecken des vollständigen Vierecks 1, 2, 5, 6 in der Punktreihe 3, 4, 7 liegen, da das Punktfeld (1) mit Fig. 2 übereinstimmt. Damit ist bewiesen, daß — wovon schon

[1] E. Steinitz, „Konfigurationen der projektiven Geometrie", Enzykl. d. math. Wiss. III 1_1, S. 481—516, insbes. S. 483; unsere Fig. 2 stellt die bekannte Konfiguration 7_3 dar, vgl. über diese S. 489 und F. Levi, „Geometrische Konfigurationen", Leipzig 1929, 310 S., insbes. S. 94—98.

in Nr. 1 die Rede war — e) nicht aus den übrigen Verknüpfungsaxiomen folgt,[1] auch nicht im Raume.[2]

Es liegt nahe und ist auch schon geschehen,[3] das Axiomensystem so aufzubauen, daß man in den ersten Axiomen nicht von Punktreihen spricht, sondern die Kollinearität von Punktetripeln einführt, etwa in andeutender Fassung so: 1. Es gibt drei nicht kollineare Punkte. 2. Zu zwei Punkten A, B gibt es mindestens einen dritten kollinearen Punkt C, in Zeichen $\overline{ABC}$. 3. Aus $\overline{ABC}$ folgt $\overline{BAC}$ und $\overline{BCA}$. Die naturgemäße nächste Forderung wäre nun: 4. Aus $\overline{ABC}$ und $\overline{ABD}$ folgt $\overline{BCD}$. Hier ist aber von vier kollinearen Punkten die Rede, und nach der Konfiguration I brauchen diese nach den vorhergehenden Axiomen nicht zu existieren. Deshalb muß man, wenn man sich den Ausführungen von Nr. 9 anschließt, bei dieser natürlichen Reihenfolge der Axiome die Existenz von 4 Punkten in einer Punktreihe fordern, statt wie bei uns nur von 3. Das ist ein Grund für unsere Wahl des Weges über die Punktreihen.

22. Man kann nun aus den Axiomen I 1—I 8 beweisen, daß, je nachdem die drei Nebenecken eines einzigen vollständigen Vierecks kollinear sind oder nicht, dasselbe bei jedem vollständigen Viereck der Fall ist (Fig. 4).

$ABCD$ sei, Fig. 4, ein vollständiges Viereck mit den, nicht kollinearen, Nebenecken EFG, ferner $ABC'D'$ ein mit dem ersten nicht komplanares vollständiges Viereck mit den Nebenecken E, F', G'. Der nun folgende Beweis spielt sich, wie man jeweils aus Satz 13 erkennt, im Punktraum $ABCD'$ ab. Das erste Viereck liegt in einem Punktfeld α, das zweite in einem Punktfeld α'. Die Punktetripel ECD und $EC'D'$ liefern vermöge I 8 einen gemeinsamen Punkt S der Punktreihen CC' und DD'. Die Punktreihe SF gehört zum Punktfeld ADS, dieses hat nach Satz 17

[1] Ein anderer Beweis für die projektive Geometrie der Ebene bei R. Moufang, „Zur Struktur der projektiven Geometrie der Ebene", Math. Ann. 105 (1931) S. 552.

[2] Das letzte ist nicht selbstverständlich, wie der Satz von Desargues zeigt, der bekanntlich aus den räumlichen, aber nicht aus den ebenen Verknüpfungsaxiomen bewiesen werden kann.

[3] Z. B. bei K. Th. Vahlen, „Abstrakte Geometrie", Leipzig 1905, 302 S., insbes. S. 55 ff.

mit α' die Punktreihe AD' gemeinsam, zu der demnach der vermöge Satz 16 existierende gemeinsame Punkt von SF und α' gehören muß. Er muß aber auch der Punktreihe BC' angehören, wie man ohne weiteres erkennt, wenn man in der ganzen Überlegung die Buchstaben A und B vertauscht, ebenso C und D. Demnach ist F' dieser Punkt. Analog müssen auch die Punkte S, G, G' kollinear sein. Wären nun die Nebenecken E, F', G' des Vierecks von α' kollinear, dann hätten die Nebenecken E, F, G als in den Punktfeldern α und $SEF'G'$ liegend nach Satz 11 ebenfalls kollinear sein müssen.

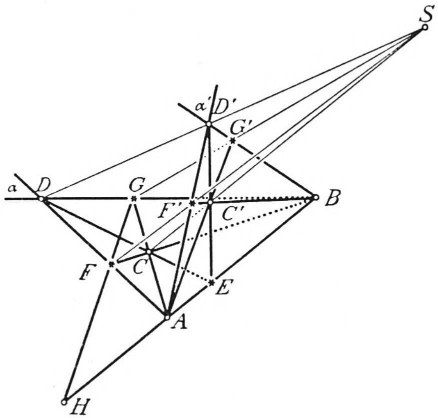

Fig. 4.

Indem man nun das Viereck $ABC'D'$ aus einem anderen Punkte der Punktreihe $DD'S$ in α zurückprojiziert, hat man in α vom Viereck $ABCD$ mit der Nebenecke E auf ein Viereck ABC_1D mit der Nebenecke E geschlossen, d. h. man hat eine Ecke in einer Seite verschoben. Ist nun irgendein Viereck gegeben, dann projiziert man es, wenn es nicht schon in α liegt, aus einem Raumpunkt in die Ebene α und erhält dort ein Viereck $KLMN$. Man findet analog Fig. 5 den Punkt X und kann nach der soeben durchgeführten Betrachtung in der Viereckskette $ABCD$, $ABCX$, $ABCK$ von jedem Viereck auf das folgende schließen und dann ebenso die Punkte A, B, C durch L, M, N ersetzen. D. h.:

Die Nebenecken aller vollständigen Vierecke des Raumes verhalten sich, die Axiome I 1—I 8 vorausgesetzt, gleich.[1]

23. Dieses Ergebnis wird nun bei der Fortführung des Axiomensystems verwertet.

I 9. *Es gibt ein vollständiges Viereck, dessen drei Nebenecken nicht der gleichen Punktreihe angehören.*

Aus Nr. 22 folgt jetzt der

Satz 18. In jedem vollständigen Viereck sind die drei Nebenecken nicht kollinear.

Statt von den Nebenecken eines vollständigen Vierecks zu sprechen, kann man bekanntlich den Satz 18 auch so aussprechen:

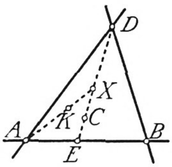

Fig. 5.

Projiziert man einen Punkt des Punktfeldes irgendeines Dreiseits, der keiner Seite angehört, aus den drei Ecken auf die Gegenseiten, dann liegen die drei Projektionen des Punktes nicht in einer Punktreihe.

24. In bekannter Weise gelangt man nun, Fig. 4, zu harmonischen Quadrupeln durch die

4. Erklärung. *A, B seien zwei Ecken eines vollständigen Vierecks und E, F, G dessen Nebenecken, davon E in der Punktreihe AB; ferner sei H der den Punktreihen FG und AB gemeinsame Punkt. Die Punkte A, B, E, H bezeichnet man als „vier harmonische Punkte".*

---

[1] Da wir uns im folgenden auf einen einzigen Punktraum beschränken werden, genügt uns diese Formulierung. Würde man zu einer vierdimensionalen Punktmannigfaltigkeit aufsteigen — vgl. Nr. 46 —, dann könnte man aus unserem Punktraum in einen anderen auf dem Weg über das Schnittpunktfeld übergehen und so auch bei höheren Dimensionen auf das gleichartige Verhalten aller vollständigen Vierecke schließen.

A und B können in dieser Erklärung vertauscht werden. Da in Fig. 4 die Vierecke $ABCD$ und $ABC'D'$ nach Nr. 22 zueinander perspektiv liegen, ist H auch Punkt der Punktreihe $F'G'$. Liegt nun in α ein anderes vollständiges Viereck mit den Ecken A, B und der Nebenecke E und sind dessen weitere Nebenecken F_1 und G_1, dann liegt nach den Betrachtungen von Nr. 22 auch dieses Viereck perspektiv zu $ABC'D'$ (mit von S verschiedenem Perspektivitätszentrum), und die Punktreihe F_1G_1 hat demnach wieder den Punkt H mit AB gemeinsam. Daher ist der vierte harmonische Punkt zu A, B und E von den übrigen Ecken und

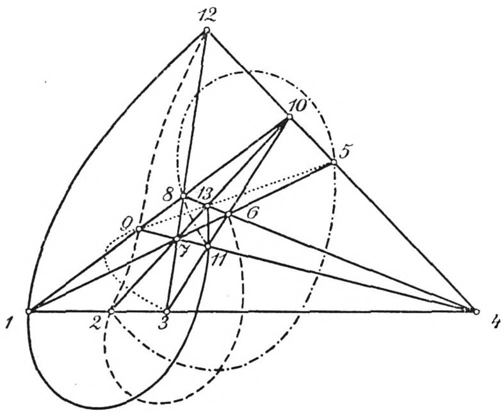

Fig. 6.

Nebenecken des definierenden vollständigen Vierecks unabhängig. Das ist der

Satz 19. Zu einem Punktpaar und einem dritten Punkt einer Punktreihe gibt es genau einen vierten harmonischen Punkt.

25. Im Punktfelde $\overline{TUV}$ treten weitere Punkte auf, z. B. nach Nr. 13 die Punkte eines vollständigen Vierecks. Irgendein solcher Punkt bestimmt mit $\bar{S}$ eine Punktreihe, die nach I 5 mindestens einen von $\bar{S}$ verschiedenen Punkt außerhalb α enthält. Von solchen Punkten handelt das nun folgende letzte Verknüpfungsaxiom, das die Aufgabe hat, die Punkte auf einen einzigen (komplex dreidimensionalen) Punktraum zu beschränken. Es lautet I 10. *Ist P irgendein von $\bar{S}$ verschiedener Punkt, der nicht dem*

Punktfelde $\overline{TUV}$ *angehört, dann hat die Punktreihe* $\overline{PS}$ *mit dem Punktfelde* $\overline{TUV}$ *mindestens einen Punkt gemeinsam.*

Zunächst folgt aus Satz 8, daß zufolge Axiom I 10 genau ein gemeinsamer Punkt auftritt. Ferner gehört nach Satz 13 die Punktreihe $\overline{PS}$ dem Punktraum $\overline{STUV}$ an, daher gilt der

Satz 20. Jeder Punkt gehört dem Punktraume $\overline{STUV}$ an.

Damit sind die 10 Axiome der Verknüpfung des Axiomensystems aufgestellt. Der Fortsetzung des Axiomensystems möge im folgenden Paragraphen eine Bemerkung über die Tragweite der bisherigen Axiome vorausgeschickt werden.

§ 5.

Tragweite der Verknüpfungsaxiome.

26. Denkt man an die Konstruktion des vierten harmonischen Punktes D zu drei gegebenen kollinearen Punkten A, B, C mittels des vollständigen Vierecks, des vierten harmonischen E zu A, D, C, des vierten harmonischen F zu A, E, C usw., dann liegt die Vermutung nahe, aus den Verknüpfungsaxiomen folge, daß jede Punktreihe eine unendliche Menge von Punkten enthält. Diese Vermutung ist, wie nun bewiesen werden möge, irrig. Faßt man in Fig. 6 die eingetragenen 13 Nullkreise als „Punkte" auf, als „kollineare" Punkte dann, wenn sie auf einer der eingezeichneten Geraden oder Kurven liegen, so hat man eine Deutung, die alle ebenen Verknüpfungsaxiome erfüllt, darunter I 9 deshalb, weil das vollständige Viereck 1, 3, 6, 8 die nicht kollinearen Nebenecken 4, 7, 10 besitzt.[1]

27. Diese ebene Konfiguration $(13_4, 13_4)$ kann man nun zu der räumlichen Konfiguration mit der Inzidenztafel der Fig. 7 erweitern. Die 40 Punkte 1, 2, 3 . . . 40 und 40 Punktfelder (1), (2), (3) . . . . (40) bilden mit 130 Punktreihen eine Konfiguration $(40^{13}_{13}, 130^4_4, 40^{13}_{13})$. Das Punktfeld (1) ist das von Fig. 6. Irgend zwei Punktfelder haben 4 Punkte gemeinsam, jede solche Punktreihe gehört 4 Feldern an.

[1] Das ist ein Beispiel für die Bemerkung am Schlusse von Nr. 8: es wäre hier und noch viel mehr bei der unmittelbar folgenden räumlichen Konfiguration recht umständlich, jedes vollständige Viereck auf seine Nebenecken hin zu prüfen.

Die Konfiguration II erfüllt alle Verknüpfungsaxiome I 1—I 10: die Punkte 16 und 25 z. B. bestimmen die Punktreihe 7, 16, 25, 32,[1] diese und die Punktreihe 2, 5, 8, 11 haben keinen Punkt gemeinsam usf. Damit ist bewiesen:

Konfiguration II.

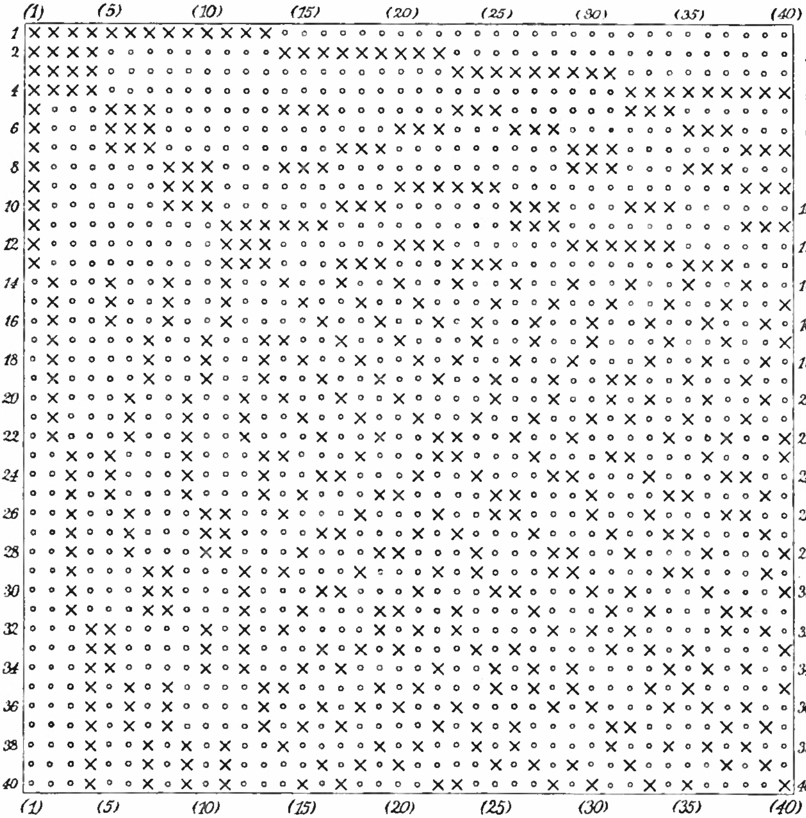

Fig. 7.

Es gibt eine Deutung sämtlicher Verknüpfungsaxiome mit endlich vielen Punkten.

Die zu Beginn von Nr. 26 genannte Konstruktionsfolge braucht demnach nicht immer neue Punkte zu liefern.

[1] Sie liegt in den Punktfeldern (5), (19), (30), (39).

28. Die Konfigurationen I und II sowie ihre ebenen Teilkonfigurationen der Figuren 2 und 6 sind regelmäßig und haben die Eigenschaft, daß ihre Diagonalen, Diagonalpunkte, Diagonalebenen wieder Elemente der Konfiguration sind, d. h. daß die Prozesse des Projizierens und Schneidens, auf die Elemente angewendet, immer wieder Elemente liefern.[1] Jede dieser Konfigurationen ist wegen der diagonalen Symmetrie ihrer Inzidenztafel zu sich involutorisch reziprok.

Die Konfiguration II erfüllt zwar alle Verknüpfungsaxiome, läßt sich aber doch nicht durch reelle Punkte, Punktreihen, Punktfelder darstellen, vgl. Fig. 6. Daraus ergibt sich, daß man bei der Aussage „eine Konfiguration ist geometrisch nicht ausführbar"[2] entweder noch mehr Verknüpfungsaxiome als die vorliegenden 10 oder Anordnungsaxiome voraussetzt.

Man kann zeigen, daß in der Konfiguration II die einfachste Deutung der Axiome I 1—I 10 vorliegt, daß es nämlich keine mit weniger als 40 Punkten und keine davon wesentlich verschiedene mit 40 Punkten gibt. Dieser Beweis, der ein näheres Eingehen auf die Konstruktion der Konfiguration erfordert, sei hier der Kürze halber unterdrückt.

29. Die Deutung durch die Konfiguration II hat, neben vielfacher Übereinstimmung mit der gewöhnlichen projektiven Geometrie, merkwürdige Eigenschaften, durch die sie sich von dieser unterscheidet.[3] Für beides mögen einige Beispiele gegeben werden.

In der Konfiguration II gibt es vollständige Vierecke, harmonische Quadrupel, es gilt nach Nr. 18 der Satz von Desargues, die sämtlichen bisher bewiesenen Sätze bleiben richtig, alles in Übereinstimmung mit der gewöhnlichen projektiven Geometrie.

---

[1] Sie haben, in der Bezeichnungsweise von S. Kantor, für kein Element ein Restsystem. Vgl. Steinitz a. a. O. S. 487. G. Fano, „Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva in un spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni", Giorn. d. Matem. 30 (1892) S. 106—132 weist S. 114 u. 116 auf die Möglichkeit dieser vier Konfigurationen hin.

[2] Z. B. Steinitz a. a. O. S. 487.

[3] Diese Unterschiede sind demnach nicht in unseren Verknüpfungsaxiomen, sondern in weiteren Axiomen begründet.

Man kann 10 Punkte angeben, von denen keine drei kollinear sind, z. B. 1, 2, 5, 13, 14, 21, 25, 30, 36, 38. Dagegen sind von irgend 6 Punkten mindestens 4 komplanar, und in jedem Punktfelde von irgend 5 Punkten wenigstens 3 kollinear. Ein Beispiel für 5 Punkte im Raume, von denen keine 3 komplanar sind, ist 1, 2, 5, 14, 30.

Die vier Punkte jeder Punktreihe bilden ein harmonisches Quadrupel und dieses Quadrupel bleibt merkwürdigerweise bei beliebiger Vertauschung der Punkte harmonisch,[1] so daß die Konstruktion des Möbiusschen Netzes immer wieder dieselben Punkte liefert.

S sei der gemeinsame Punkt zweier verschiedener Punktreihen $SABC$ und $SA_1B_1C_1$. Die beiden Punktquadrupel sind immer perspektiv. Sind K, L, M, N die Punkte einer Punktreihe, K_1, L_1, M_1, N_1 die einer anderen, dann kann man durch eine Folge von Perspektivitäten K, L, M, N in K_1, L_1, M_1, N_1 überführen, so daß hier, abweichend von der gewöhnlichen Geometrie, jedes Quadrupel kollinearer Punkte jedem Quadrupel kollinearer Punkte projektiv ist.[2]

Eine wichtige Übereinstimmung mit der gewöhnlichen projektiven Geometrie besteht im folgenden: K, L, M, N seien vier Punkte einer Punktreihe, K_1, L_1, M_1 drei Punkte derselben oder einer anderen Punktreihe; es gibt dann eine Kette von Perspektiven, welche K, L, M in K_1, L_1, M_1 überführt, und jede solche Kette führt N in einen Punkt N_1 der anderen Punktreihe über, der bei allen solchen Ketten der gleiche ist.

Ein Analogon der Kegelschnittslehre gibt es in der Konfiguration II nicht, weil, wie gesagt, von irgend 5 komplanaren Punkten mindestens 3 kollinear sind. Dagegen gelten Sätze über Flächen 2. Grades:

Es gibt bis zu 10 zueinander windschiefe Gerade (Punktreihen). Irgend 3 windschiefe Gerade gehören zu einer einzigen $[F^2]$, die aus 16 Punkten besteht und 2 Scharen von je 4 Erzeugenden enthält. Die beiden Erzeugenden eines Punktes einer $[F^2]$ liegen

---

[1] Fano a. a. O. S. 116.

[2] Sind auch noch die beiden Quadrupel zueinander kollinear, dann ist das zweite Quadrupel lediglich eine Permutation des ersten.

in dessen „Tangentialebene", sie enthält die (zwei) Geraden des Raumes, welche die $[F^2]$ nur in diesem Punkte treffen. Eine Ebene (Punktfeld), die nicht Tangentialebene ist, hat mit der $[F^2]$ 4 Punkte gemeinsam, von denen keine 3 kollinear sind. Ist P irgendein Punkt außerhalb der $[F^2]$, dann gibt es durch P merkwürdigerweise 3 Gerade, welche $[F^2]$ überhaupt nicht treffen, während 6 Gerade je 2 Punkte, die übrigen 4 je 1 Punkt von $[F^2]$ enthalten. Diese letzten laufen in den 4 Tangentialebenen, die es von P aus an die $[F^2]$ gibt, nach deren Berührungspunkten. Die 4 Berührungspunkte liegen in der Polarebene von P, in der auch die vierten harmonischen Punkte der 6 zweipunktig schneidenden Geraden liegen. Die polare Zuordnung hat im übrigen die bekannten Eigenschaften.

§ 6.

Die 3 ersten Axiome der Projektivität.

30. Eine Axiomgruppe, die den Anordnungsaxiomen der reellen Geometrie entspricht, gibt es hier nicht. Bei den nun folgenden Axiomen der Projektivität könnte man an manchen Stellen eine Art Analogie zu Kongruenzaxiomen finden.

5. Erklärung. *Irgend vier Punkte A, B, C, D einer Punktreihe bilden einen „Punktwurf" $[ABCD]$.*[1] *Zwei Punktwürfe $[ABCD]$ und $[A_1B_1C_1D_1]$ sind verschieden, wenn nicht A und A_1, B und B_1, C und C_1, D und D_1 je denselben Punkt bezeichnen. Punktwürfe werden auch mit w, w_1, w_2 . . . bezeichnet.*

Während unsere Erklärungen reine Wort- oder Bezeichnungserläuterungen sind, folgt nun, als Fortsetzung der Einleitung A, die Forderung der Existenz einer weiteren in Axiomen auftretenden Beziehung.

B. Projektive Beziehung. *Zwischen zwei Würfen kann eine Beziehung bestehen, die durch das Wort „projektiv" oder das Zeichen $\overline{\wedge}$ bezeichnet wird.*

II. Axiome der Projektivität.

Als erstes wird die Transitivität der Projektivität gefordert im Axiom

---

[1] Das Symbol $[ABCD]$ sagt demnach bei uns aus, daß A, B, C, D verschiedene Punkte einer Punktreihe sind.

II 1. *Sind* w_1, w_2, w_3 *irgendwelche Punktwürfe*[1] *und ist* $w_1 \overline{\wedge}\, w_2$ *sowie* $w_2 \overline{\wedge}\, w_3$, *dann ist auch* $w_1 \overline{\wedge}\, w_3$.

Hieraus folgt sofort der

Satz 21. Führt eine Kette von Projektivitäten von einem Punktwurf w zu einem Punktwurf w', dann ist $w \overline{\wedge}\, w'$.

Das nächste Axiom, das eine Eindeutigkeitsforderung enthält, zeichnet wieder Punkte aus:

II 2. *Es gibt drei Punkte* X, Y, Z *einer Punktreihe, für deren weitere Punkte aus* $[XYZA] \overline{\wedge}\, [XYZB]$ *folgt, daß* A *und* B *denselben Punkt bezeichnen.*

31. Die nun folgende Erklärung der Perspektivität schließt Punktwürfe derselben Punktreihe aus:

6. Erklärung. *Zwei Punktwürfe* $[ABCD]$ *und* $[A_1B_1C_1D_1]$ *werden als „perspektiv" bezeichnet,* $[ABCD] \overline{\overline{\wedge}}\, [A_1B_1C_1D_1]$, *wenn es genau einen Punkt* S *so gibt, daß die Punktreihen* SA, SB, SC, SD *der Reihe nach die Punkte* A_1, B_1, C_1, D_1 *enthalten.*

Aus dieser Erklärung folgt unmittelbar der

Satz 22. Aus $w \overline{\overline{\wedge}}\, w_1$ folgt $w_1 \overline{\overline{\wedge}}\, w$.

Der Anschluß an die von Poncelet und Cremona[2] verwendete, anschaulich wertvolle Definition der Projektivität als Folge von Perspektivitäten wird in dem nun folgenden, weittragenden Axiom gewonnen:

II 3. *Sind* w *und* w_1 *irgend zwei Würfe und ist* $w \overline{\overline{\wedge}}\, w_1$, *dann ist auch* $w \overline{\wedge}\, w_1$.

32. Ist w ein Punktwurf, dann kann man ihn nach Satz 9 in einen Punktwurf w_1 in einer anderen Punktreihe und wieder zurück projizieren, nach II 3 ist daher $w \overline{\wedge}\, w_1$ sowie $w_1 \overline{\wedge}\, w$, und aus II 1 folgt der

Satz 23. Jeder Punktwurf ist sich selbst projektiv.

Aus II 3 und II 1 ergibt sich unmittelbar der

Satz 24. Zwei Punktwürfe, zwischen denen eine Kette von Perspektivitäten liegt, sind projektiv.

---

[1] Da es nicht heißt „irgend drei" Punktwürfe, braucht es sich nicht um drei verschiedene Punktwürfe zu handeln.

[2] Vgl. Enriques a. a. O. S. 78.

Von den Würfen des Axioms II 2 spricht die

7. Erklärung. *Einen Punktwurf* $[\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}P]$ *bezeichnet man als „Grundwurf". Der vierte harmonische Punkt* $\overline{E}$ *zu* $\overline{X}$, $\overline{Y}$ *und* $\overline{Z}$ *liefert den „harmonischen Grundwurf"* $[\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}\overline{E}]$.

Die Punktreihe, welche die Grundwürfe enthält, bezeichnen wir weiterhin mit $\overline{x}$.

33. Die nun folgenden Beweise operieren in bekannter Weise mit den Sätzen 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 16, 22. Aus ihnen ergibt sich sofort, daß man einen Punktwurf $[ABCD]$ immer in einen Punktwurf $[A_1B_1C_1D_1]$ projizieren kann, der nicht in $\overline{x}$, aber mit $\overline{x}$ in einem Punktfelde liegt, $[ABCD] \overline{\overline{\wedge}} [A_1B_1C_1D_1]$. Ordnet man den Punkten A_1, B_1, C_1 die Punkte $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ zu, dann treten (mindestens zwei) Paare verschiedener einander zugeordneter Punkte auf; $A, \overline{X}$ sei ein solches Paar, Fig. 8.[1] L sei der gemeinsame Punkt der Punktreihen $A_1\overline{Y}$ und $\overline{X}B_1$, M der von $A_1\overline{Z}$ und $\overline{X}C_1$, N der von LM und $\overline{X}D_1$, K der von LM und $A_1\overline{X}$, P der von A_1N und $\overline{X}\overline{Y}$. Dann ist $[ABCD] \overline{\overline{\wedge}} [A_1B_1C_1D_1] \overline{\overline{\wedge}} [KLMN] \overline{\overline{\wedge}} [\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}P]$ und nach Satz 24 $[ABCD] \overline{\wedge} [\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}P]$. Daraus folgt zunächst der

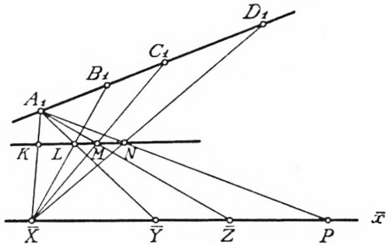

Fig. 8.

Satz 25. Von jedem Punktwurf kann man durch eine Kette von Perspektivitäten zu einem (ihm projektiven) Grundwurf gelangen.

Wäre nun $[ABCD] \overline{\wedge} [ABCD']$ mit verschiedenem D und D', dann würde, wegen der Eindeutigkeit in der Kette der Perspektivitäten, D' einen von P verschiedenen Punkt P' in $\overline{x}$ liefern,

[1] Die Figur zeigt einen Fall, in dem drei solche Punktpaare auftreten. Würde etwa B_1 mit $\overline{Y}$ zusammenfallen, dann würde sich die Figur einfach in der Weise ändern, daß auch L mit $\overline{Y}$ zusammenfiele.

und es wäre nach Satz 23 $[\bar X\bar Y\bar Z P] \overline{\wedge} [ABCD]$, nach Annahme $[ABCD] \overline{\wedge} [ABCD']$, nach Satz 23 $[ABCD'] \overline{\wedge} [\bar X\bar Y\bar Z P']$, folglich nach Satz 21 $[\bar X\bar Y\bar Z P] \overline{\wedge} [\bar X\bar Y\bar Z P']$, in Widerspruch zu Axiom II 2. Das ist der Beweis für den

Satz 26. Ist $[ABCD] \overline{\wedge} [ABCD']$, dann bezeichnen D und D' denselben Punkt.

Demnach leistet jedes Tripel kollinearer Punkte dasselbe wie die Punkte $\bar X$, $\bar Y$, $\bar Z$ des Axioms II 2.

34. Es sei $w_1 \overline{\wedge} w_2$. Dann gibt es nach Satz 25 einen Grundwurf w so, daß zwischen w und w_1 eine Kette von Perspektivitäten liegt, demnach ist $w \overline{\wedge} w_1$. Entsprechend gibt es eine Kette von Perspektivitäten zwischen w_2 und einem Grundwurf w', so daß $w_2 \overline{\wedge} w'$ ist.[1] Wegen $w \overline{\wedge} w_1$, $w_1 \overline{\wedge} w_2$, $w_2 \overline{\wedge} w'$ ist $w \overline{\wedge} w'$, folglich bezeichnen nach Axiom II 1 w und w' denselben Wurf. Damit ist eine Kette von Perspektivitäten zwischen w_1 und w_2 gefunden, und es gilt der

Satz 27. Zwischen irgend zwei projektive Grundwürfe läßt sich immer eine Kette von Perspektivitäten legen.

Daraus folgt vermöge Satz 22 der

Satz 28. Aus $w \overline{\wedge} w_1$ folgt $w_1 \overline{\wedge} w$.

Eine unmittelbare Folgerung aus Satz 27 ist auch der

Satz 29. Aus $w \overline{\wedge} w_1$ folgt, daß auch die beiden Würfe projektiv sind, die man aus w durch irgendeine Vertauschung der vier Punkte und aus w_1 durch die entsprechende Vertauschung erhält.

Zu Beginn von Nr. 33 wurde durch die Zuordnung von A, B, C zu $\bar X$, $\bar Y$, $\bar Z$ eine Kette von Perspektivitäten gefunden, welche zum Punktwurf $[ABCD]$ den projektiven Grundwurf lieferte. Man hätte sie auch verwenden können, um zu einem Grundwurf einen projektiven Punktwurf $[ABCP]$ zu finden. Sind nun ein Punktwurf $[ABCD]$ und drei kollineare Punkte A_1, B_1, C_1 gegeben, dann liefern die Zuordnungen $A \sim \bar X \sim A_1$, $B \sim \bar Y \sim B_1$, $C \sim \bar Z \sim C_1$ zwei Ketten von Perspektivitäten, die aneinandergehängt zum Punkte D einen Punkt D_1 und damit einen Punkt-

[1] Hier ist die Möglichkeit, die Kette der Perspektivitäten auch in umgekehrter Reihenfolge zu durchlaufen, wie sie der Satz 22 gibt, wesentlich.

wurf $[A_1B_1C_1D_1] \overline{\wedge} [ABCD]$ liefern. Nach Satz 26 ist es der einzige derartige mit den Punkten $A_1B_1C_1$ beginnende Punktwurf. Damit hat man den fundamentalen

Satz 30. Sind ein Punktwurf $[ABCD]$ und irgend drei kollineare Punkte A_1, B_1, C_1 gegeben, dann gibt es genau einen Punkt D_1 so, daß $[ABCD] \overline{\wedge} [A_1B_1C_1D_1]$ ist.

35. Der mit Satz 30 ganz leicht zu führende Beweis, daß zwei projektive Punktwürfe, die einen Punkt entsprechend gemein haben, zueinander perspektiv liegen, möge hier übergangen werden.

Es sei, Fig. 9, ein Punktwurf $[ABCD]$ gegeben. Aus einem Punkte P projiziert man ihn in den Punktwurf $[AB'C'D']$. Q sei

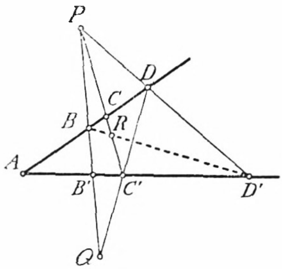

Fig. 9.

der gemeinsame Punkt der Punktreihen PBB' und DC'. Dann ist $[ABCD] \overset{P}{\overline{\overline{\wedge}}} [AB'C'D'] \overset{D}{\overline{\overline{\wedge}}} [BB'QP] \overset{C'}{\overline{\overline{\wedge}}} [BADC]$, daher ist $[ABCD] \overline{\wedge} [BADC]$.

Ist ferner, wieder Fig. 9, R der gemeinsame Punkt der Punktreihen PCC' und BD', dann ist $[ABCD] \overset{P}{\overline{\overline{\wedge}}} [AB'C'D'] \overset{B}{\overline{\overline{\wedge}}} [CPC'R] \overset{D'}{\overline{\overline{\wedge}}} [CDAB]$, und es gilt $[ABCD] \overline{\wedge} [CDAB]$. Wendet man hierauf die unmittelbar vorher gefundene Beziehung an, dann folgt daraus noch $[ABCD] \overline{\wedge} [DCBA]$. Das ist der Beweis für den

Satz 31. Vertauscht man in einem Punktwurf irgend zwei Buchstaben miteinander und gleichzeitig auch die beiden übrigen, dann ist der neue Punktwurf zum Ausgangswurf projektiv.

36. In dieser Nummer mögen bekannte Eigenschaften der harmonischen Punktwürfe abgeleitet werden.

Daß für einen harmonischen Punktwurf $[ABCD] \barwedge [BACD]$ gilt, beweist man in bekannter Weise durch zweimaliges Projizieren im vollständigen Viereck. Und daß diese Eigenschaft nur den harmonischen Punktwürfen zukommt, erkennt man folgendermaßen: Es sei ein Punktwurf $[ABCD]$ gegeben, für den $[ABCD] \barwedge [BACD]$ ist; aus einem Punkte P projiziert man den Wurf in einen perspektiven $[A'B'C'D] \overset{P}{\overline{\wedge}} [ABCD]$, dann ist $[A'B'C'D] \barwedge [BACD]$ und überdies perspektiv, demnach haben die drei Punktreihen BA', AB', CC' einen gemeinsamen Punkt, womit die Figur des vollständigen Vierecks gewonnen ist. Das ist der

Satz 32. Dann und nur dann, wenn $[ABCD]$ ein harmonischer Punktwurf ist, gilt $[ABCD] \barwedge [BACD]$.

Wendet man den Satz 31 auf die beiden projektiven Würfe von Satz 32 an, dann erhält man $[BADC] \barwedge [ABDC]$, und das ist nach Satz 32 wieder ein harmonischer Wurf; ebenso erhält man die harmonischen Würfe $[CDAB] \barwedge [DCAB]$. Damit hat man den

Satz 33. Ein harmonischer Punktwurf besteht aus zwei gleichberechtigten Paaren von Punkten, in jedem Paare sind die beiden Punkte gleichberechtigt.

Aus den Sätzen 19, 29, 30, 32 folgt der

Satz 34. Jeder zu einem harmonischen Punktwurf projektive Punktwurf ist wieder harmonisch. Irgend zwei harmonische Punktwürfe sind projektiv.

Aus den Bemerkungen von Nr. 29 folgt, daß die Konfiguration II auch noch die bisher eingeführten Axiome der Projektivität II 1—II 3 erfüllt. Demnach gelten alle bisher bewiesenen Sätze, die einen erheblichen Teil der gewöhnlichen projektiven Geometrie zu liefern scheinen, in einem System von 40 Punkten, in dem es keine Kegelschnitte gibt, in dem überhaupt alle Merkwürdigkeiten von Nr. 29 vorkommen.

§ 7.

Das letzte Axiom der Projektivität: das Axiom des imaginären Punktes.

37. Während die bisherigen Axiome auch in einem Axiomensystem der reellen projektiven Geometrie auftreten könnten, soll das nun folgende letzte Axiom der Projetivität, das in der am Schlusse des 1. Absatzes von Nr. 5 geschilderten Weise gewonnen wird, zum Verlassen des reellen Raumes zwingen.

Die reellen Anordnungstatsachen gelten im Komplexen nicht. Daher liegt es nahe, für die komplexe Geometrie ein Axiom zu suchen, das reellen Anordnungseigenschaften widerspricht, ohne explizite eine Anordnungsaussage zu enthalten.[1] Man findet ein solches durch folgende Überlegung:

In der reellen projektiven Geometrie gehen sich trennende Punktpaare bei der Projektion in ebensolche über; trennen sich daher die beiden Punktpaare eines Punktwurfes, dann trennen sich auch die jedes zu ihm projektiven Wurfes. Ist $[ABCD]$ ein harmonischer reeller Punktwurf, dann erkennt man an der Hand einer Figur für einen beliebigen Punkt P derselben Punktreihe leicht, daß sich die Punktpaare AB, PD trennen (nicht trennen), wenn sich die Punktpaare AB, CP nicht trennen (trennen), so daß im Reellen nie $[ABCP] \overline{\wedge} [ABPD]$ sein kann. Damit hat man, an die 7. Erklärung anschließend, das Axiom

II 4. Axiom des imaginären Punktes. *Es gibt (mindestens) einen Punkt* I *so, saß* $[XYZI] \overline{\wedge} [XYIE]$ *ist.*[2]

Man hätte im Reellen auch ohne Heranziehung der Anschauung überlegen und dabei eine später verwertbare numerische Einsicht gewinnen können, und zwar so: für irgend 5 kollineare Punkte gilt die bekannte Doppelverhältnisrelation $(ABCP) \cdot (ABPD) = (ABCD)$; bei $(ABCD) = -1$ gibt es daher keinen Punkt mit $(ABCP) = (ABPD)$, weil für ihn $(ABCP)^2 = -1$ wäre.

38. Aus dem Axiom des imaginären Punktes und den Sätzen 30 und 26 folgt sofort der

Satz 35. Jede Punktreihe enthält mindestens 5 Punkte.

Daher erfüllt die Konfiguration II das Axiom des imaginären Punktes nicht. Nach dem Bisherigen liegt die Forderung nach einer Konfiguration mit endlich vielen Punkten nahe, welche

---

[1] Ein Beispiel eines Axioms der letztgenannten Art, das allerdings in der komplexen Geometrie nicht gilt, wäre nach dem vorletzten Absatze von Nr. 1 „Die drei Nebenecken eines vollständigen Vierecks sind kollinear".

[2] Nach der Definition des Wurfes ist daher I ein Punkt von x und von den anderen vier Punkten verschieden.

auch noch das Axiom II 4 erfüllt. Eine solche Konfiguration wäre noch anzugeben.[1]

§ 8.

Doppelverhältnisse von Grundwürfen.

39. Die nun folgende Erklärung führt Doppelverhältnisse von Grundwürfen ein. Da sie keine Eindeutigkeit der Zuordnung verlangt und nur Rechenoperationen mit komplexen Zahlen verwendet, handelt es sich dabei tatsächlich nur um eine Worterklärung und nicht um eine neue axiomatische Forderung.

8. Erklärung. „*Doppelverhältnisse*“ *von Grundwürfen sind diesen zugeordnete komplexe Zahlen, welche folgende Bedingungen erfüllen*:

a) dem harmonischen Grundwurf ist die Zahl —1 *zugeordnet, in Zeichen*

$$(\overline{XYZE}) = -1\,;$$

b) ist einem Grundwurf $[\overline{XYZA}]$ *die Zahl* δ_a *zugeordnet, dann ist dem Grundwurf* $[\overline{XYZB}] \barwedge [\overline{XZYA}]$ *die Zahl* $1-\delta_a$ *zugeordnet, in Zeichen*

$$(\overline{XZYA}) = 1-(\overline{XYZA})\,;$$

c) sind zwei Grundwürfen $[\overline{XYZA}]$ *und* $[\overline{XYZB}]$ *die Zahlen* δ_a *und* δ_b *zugeordnet und ist* $[\overline{XYAC}] \barwedge [\overline{XYZB}]$, *dann ist dem Grundwurf* $[\overline{XYZC}]$ *die Zahl* $\delta_a \cdot \delta_b$ *zugeordnet, in Zeichen*

$$(\overline{XYZC}) = (\overline{XYZA}) \cdot (\overline{XYAC})\,;$$

d) sind den Grundwürfen $[\overline{XYZA}]$ *und* $[\overline{XYZC}]$ *die Zahlen* $\delta_a \neq 0$ *und* δ_c *zugeordnet, dann ist dem Grundwurf* $[\overline{XYZB}] \barwedge [\overline{XYAC}]$ *die Zahl* $\delta_c : \delta_a$ *zugeordnet, in Zeichen*

$$(\overline{XYAC}) = \frac{(\overline{XYZC})}{(\overline{XYZA})}\,;$$

e) dem Grundwurf $[\overline{XYZI}]$ *ist die Zahl* $+i$ *zugeordnet, in Zeichen*

$$(\overline{XYZI}) = +i.$$ [2]

---

[1] Vgl. A. Comessatti, „Note critiche sui postulati della geometria proiettiva“, Rendic. d. seminario matematico della R. Università di Padova I (1930) S. 17.

[2] Vgl. den letzten Absatz von Nr. 37.

40. Nach dieser Erklärung könnte ein Grundwurf mehrere, sogar unendlich viele Doppelverhältnisse haben. Hätte ein Grundwurf $[XYZA]$ mehrere Doppelverhältnisse, so hätte nach b) der Grundwurf $[XYZB] \overline{\wedge} [XZYA]$ mindestens und nach Satz 28 genau soviele Doppelverhältnisse. Hätte $[XYZA]$ die Doppelverhältnisse δ_a und δ'_a, $[XYZB]$ die Doppelverhältnisse δ_b und δ'_b, dann hätte der Grundwurf $[XYZC]$ von c) die Doppelverhältnisse $\delta_a \,.\, \delta_b$, $\delta_a \,.\, \delta'_b$, $\delta'_a \,.\, \delta_b$, $\delta'_a \,.\, \delta'_b$; das Analoge würde bei mehr als zwei Doppelverhältnissen gelten.

Der Grundwurf $[XYZA] \overline{\wedge} [XZYE]$ hat nach a) und b) das Doppelverhältnis $(XYZA) = 2$. Ist nun B der vierte harmonische Punkt zu X, Y und A, dann ist vermöge c) $(XYZB) = -2$, anschließend liefert $[XYZC] \overline{\wedge} [XZYB]$ den Wert $(XYZC) = +3$ usf. Daher treten alle von Null verschiedenen ganzen Zahlen als Doppelverhältnisse von Grundwürfen auf und wegen d) alle von 0 und 1 verschiedenen reellen, rationalen Zahlen.[1]

Demnach sind zufolge e) und c) auch alle Zahlen bi mit rationalem b Werte von Doppelverhältnissen und wegen $a + bi = a\,(1 - (-\frac{b}{a} \cdot i))$ nach b) und c) darüber hinaus, mit Ausnahme der Werte 0 und $+1$, alle komplexen Zahlen $a + bi$, in welchen a und b rationale Zahlen oder 0 bezeichnen. Das ist der

Satz 36. Als Doppelverhältnisse von Grundwürfen treten alle von 0 und 1 verschiedenen „komplex-rationalen" Zahlen auf.

§ 9.

Die Axiome der Doppelverhältnisse.

41. Die noch folgenden drei Axiome bezwecken die Einführung von Koordinaten in der Punktreihe x.

In der reell-Euklidischen linearen Geometrie beweist man die Existenz einer ein-eindeutigen Zuordnung der Punkte der Geraden zu den reellen Zahlen in zwei Schritten.[2] Mittels des Archimedischen Axioms zeigt man zunächst, daß sich jedem Punkt eine reelle Zahl zuordnen läßt. Das Archimedische Axiom setzt

[1] Man weiß noch nichts darüber, ob zwei verschiedene Grundwürfe dasselbe Doppelverhältnis haben können.

[2] Vgl. z. B. des Verfassers „Nichteuklidische Geometrie" Nr. 29 und 31.

die Anordnungsaxiome voraus, deshalb wird man in der komplexen Geometrie auf ein ihm analoges geometrisches Axiom verzichten;[1] an seine Stelle tritt das folgende Axiom, das dafür sorgt, daß es nicht „zuviel" Punkte gibt.

III. Axiome der Doppelverhältnisse.

III 1. *Jeder Grundwurf hat (mindestens) ein komplexes Doppelverhältnis.*

Das nächste Axiom enthält als Verschärfung von a) in der 8. Erklärung die einzige Eindeutigkeitsforderung über Doppelverhältnisse.

III 2. *Der harmonische Grundwurf hat kein von — 1 verschiedenes Doppelverhältnis.*

42. Aus dem letzten Axiome folgen einige wichtige Tatsachen. Angenommen $[XYZA]$ wäre ein Grundwurf mit den beiden verschiedenen Doppelverhältnissen δ_a und δ'_a, ferner F der vierte harmonische Punkt zu X, Y und A;[2] dann hätte nach c) wegen $(XYZA)\,(XYAF) = (XYZF)$ der Grundwurf $[XYZF]$ die Doppelverhältnisse $-\delta_a$ und $-\delta'_a$; nach d) wäre folglich $(XYAF) = \frac{(XYZF)}{(XYZA)} = \frac{-\delta_a}{\delta_a'}$, in Widerspruch mit III 2. Demnach gilt der

Satz 37. Jeder Grundwurf hat genau ein komplexes Doppelverhältnis.

Demnach gibt es nach Einführung des Axioms III 2 zufolge Satz 36 mindestens eine abzählbar unendliche Menge von Grundwürfen und wegen des Satzes 30 in jeder Punktreihe mindestens eine abzählbar unendliche Menge von Punkten.

Hätte ein Grundwurf $[XYZA]$ das Doppelverhältnis 0, dann würde für den Grundwurf, der projektiv zu $[XYAE]$ ist, aus c) fol-

[1] Wenn man nicht, wie es Pieri in der zu Beginn unserer Einleitung genannten Abhandlung tut, Teilpunktmengen einer Punktreihe, die außerhalb axiomatischer Untersuchungen nicht auftreten, einführen will, in denen Anordnungsbeziehungen bestehen.

[2] A ist von X, Y, Z verschieden angenommen und wegen III 2 auch verschieden von E. Demnach können F und Z nicht denselben Punkt bezeichnen, weil sonst $[XYAZ]$ ein harmonischer Punktwurf wäre, folglich nach Satz 33 auch $[XYZA]$, so daß A und E den gleichen Punkt bezeichnen würden. Daher existiert der Grundwurf $[XYZF]$.

gen, daß er wegen $(\overline{XYZE}) = -1$ (Axiom III 2) kein Doppelverhältnis haben könnte, in Widerspruch mit Axiom III 1. Daher tritt 0 nicht als Doppelverhältnis auf, dann aber wegen b) auch nicht 1. Das ist der

Satz 38. Die Zahlen 0 und 1 treten nicht als Doppelverhältnisse auf.

Wenn zwei verschiedene Grundwürfe $[\overline{XYZC}]$ und $[\overline{XYZA}]$ dasselbe Doppelverhältnis hätten, gäbe es zufolge d) einen Grundwurf mit dem Doppelverhältnis 1, entgegen dem Satz 38, demnach gilt der

Satz 39. Verschiedene Grundwürfe haben auch verschiedene Doppelverhältnisse.

43. Die bisherigen Axiome gewährleisten nach Satz 36 lediglich komplex-rationale Doppelverhältnisse. In der reell-Euklidischen Geometrie erzwingt man das Punktkontinuum durch ein geometrisches Stetigkeitsaxiom, das Cantorsche, Dedekindsche Axiom oder das Hilbertsche Vollständigkeitsaxiom. Davon scheiden die beiden ersten wegen ihrer Anordnungsaussagen aus, das dritte wegen der grundsätzlichen axiomatischen Einwände gegen den Charakter dieses Axioms.[1] Daher enthält auch das nun folgende letzte Doppelverhältnisaxiom, das dafür sorgt, daß es nicht „zu wenig" Punkte gibt, eine arithmetische Forderung:
III 3. *Es gibt zwei reelle Zahlen derart, daß jede zwischen ihnen liegende (reelle) Irrationalzahl Doppelverhältnis eines Grundwurfes ist.*

Ist im Reellen ein Intervall und eine beliebige Irrationalzahl x gegeben, dann kann man eine Rationalzahl c so angeben, daß cx im Intervall liegt.[2] Nach Axiom III 3 und Satz 36 existieren Grundwürfe mit den Doppelverhältnissen cx und c, demnach zu-

---

[1] Vgl. des Verfassers „Zur Axiomatik der Geometrie I. Über Hilberts Vollständigkeitsaxiom", Math. Ann. 100 (1928) S. 321—333, insbes. die Nrn. 13—15, sowie A. Fraenkel, „Axiomatische Theorie der Wohlordnung", Journ. f. d. reine u. angew. Math. 167 (1931) S. 1—11, vorletzter Absatz der Einleitung.

[2] a und b mit $0 < a < b$ seien die Endpunkte des Intervalls, $0 < x$ die Irrationalzahl; dann gibt es eine rationale Zahl c mit $\frac{a}{x} < c < \frac{b}{x}$, und es ist $a < cx < b$. Ähnlich einfach ist der Schluß, wenn es sich nicht um lauter positive Zahlen handelt.

folge d) auch ein Grundwurf mit dem Doppelverhältnis x. Wie bei dem Beweise des Satzes 36 kann man nun auf beliebige von 0 und 1 verschiedene komplexe Doppelverhältnisse schließen. Daraus, aus Axiom III 1 und Satz 39 folgt der entscheidende

Satz 40. Die Beziehung zwischen allen Grundwürfen und allen von 0 und 1 verschiedenen komplexen Zahlen als deren Doppelverhältnissen ist ausnahmslos umkehrbar-eindeutig.

Es ist klar, daß dieser Satz, als Axiom eingeführt, erheblich mehr fordern würde, als die Axiome III 1—III 3 verlangen. Mit III 3 ist das vorliegende Axiomensystem der komplexen projektiven Geometrie des Raumes abgeschlossen.

§ 10.

Schlußbetrachtungen.

44. Weiterer Aufbau. Wie man von den vorstehenden Axiomen und Sätzen aus weitergeht, um die ganze komplexe projektive Geometrie zu gewinnen, das braucht, da es sich dabei um bekannte Wege handelt, nur bei den ersten Schritten angedeutet zu werden.

Irgendein Punktwurf erhält das gleiche Doppelverhältnis wie der zu ihm projektive Grundwurf. Nach der 8. Erklärung b) gilt dann für beliebige Doppelverhältnisse $(ACBD) = 1 - (ABCD)$, und für irgendeinen Punkt E derselben Punktreihe ist nach d) $(ABCD) = (ABED) : (ABEC)$ sowie $(ABDC) = (ABEC) : (ABED)$, d. h. es ist $(ABDC) = 1 : (ABCD)$, ferner ist zufolge Satz 31 $(CDAB) = (ABCD)$, endlich gilt, wieder für irgend fünf kollineare Punkte, nach c) die Produktregel $(ABCD) = (ABCE) \cdot (ABED)$. Damit hat man für Doppelverhältnisse die vier Rechenregeln, die man ausschließlich benötigt.

Statt des Ausdruckes „Punkte gehören zu einer Punktreihe, einem Punktfeld“ sagt man auch „Punkte liegen in einem Strahl, einer Ebene“. Ein Strahlen- oder Ebenenwurf erhält das gleiche Doppelverhältnis wie irgendein zu ihm perspektiver Punktwurf. Würfe gleicher Doppelverhältnisse heißen projektiv. Sie können durch eine Kette von Perspektivitäten verbunden werden.

Ebenen, Ebenenbüschel und Ebenenwürfe (Strahlen, Strahlenbüschel und Strahlenwürfe einer Ebene) und ihre Doppelverhältnisse erfüllen die gleichen Axiome (ebenen Axiome) wie die Punkte, Punktreihen, Punktwürfe und ihre Doppelverhältnisse, daher gilt das Prinzip der Dualität im Raum (in der Ebene).

Nun werden in einer Punktreihe, z. B. in x, homogene Koordinaten $(x_1; x_2)$ eingeführt: für einen beliebigen von X, Y, Z verschiedenen Punkt P von x setzt man $(XYZP) = x_2 : x_1$. (0; 0) wird ausgeschlossen und die Punkte X, Y, Z erhalten die Koordinatenwerte (0; 1), (1; 0), (1; 1). Durch wiederholte Anwendung der Produktregel erhält man die Formeln der Koordinatentransformationen in der Geraden. Dann das Analoge in Ebene und Raum. In der Ebene ist die Gleichung einer Geraden durch eine Ecke des Koordinatendreiecks trivial, die Gleichung einer allgemeinen Geraden folgt daraus durch Koordinatentransformation. Entsprechend die Gleichung der Ebene im Raume. Die Formeln der Koordinatentransformationen sind zugleich die der Kollineationen.

Damit sind die analytischen Hilfsmittel für die komplexe projektive Geometrie bereitgestellt. Man kann nun z. B. auch — ohne Heranziehung von Elementarteilern — die Kollineationen klassifizieren, weiterhin auch die Büschel von Flächen 2. Ordnung.[1]

45. Reelle Geometrie. Läßt man aus dem vorstehenden Axiomensystem das Axiom des imaginären Punktes II 4 weg und aus der 8. Erklärung den Teil e), ersetzt man ferner in derselben Erklärung und im Axiom III 1 das Wort „komplex" durch „reell", dann hat man ein Axiomensystem der reellen projektiven Geometrie ohne Anordnungsaxiome.

Die naheliegende Frage, wie man reelle Punkte in dem vorliegenden komplexen Axiomensystem charakterisieren kann, ist einfach zu beantworten: von reellen Punkten, einem reellen Raum an sich im komplexen Raume zu sprechen, hat keinen Sinn, da man jeden Punkt in ein Koordinatensystem so einbetten kann, daß er reelle Koordinaten hat.[2] Dagegen kann man einen „reel-

[1] Vgl. hierzu die beiden Veröffentlichungen des Verfassers in diesen Berichten „Zur Klassifikation der ebenen und räumlichen Kollineationen" (1929) und „Zur Theorie der Büschel von Flächen 2. Ordnung" (1931).

[2] Das liegt daran, daß die Geometrie nicht von Punktindividuen handelt, so daß auch die Axiome der komplexen Geometrie (wie die der reell-Euklidischen) keine Punktindividuen so auszeichnen, daß nicht andere an ihre Stelle

len Raum in bezug auf irgend 5 gegebene Punkte, von denen keine 4 komplanar sind", definieren, indem man diese Punkte als Eckpunkte und Einheitspunkt eines Koordinatensystems wählt und sie sowie alle anderen Punkte mit reellen Koordinatenverhältnissen $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ Punkte des reellen Raumes nennt. In ihm kann man die reell-projektiven Anordnungseigenschaften durch die entsprechenden Eigenschaften der reellen Zahlen erklären.

Hieraus sondert man einen reell-Euklidischen Raum in bekannter Weise aus, indem man eine Ebene ω herausgreift und „Euklidische Punkte" alle die seiner Punkte nennt, die nicht in ω liegen; Abstandsverhältnis dreier kollinearer Euklidischer Punkte A, B, C ist dann das Doppelverhältnis $(ABCU)$, wobei U der Schnittpunkt der Punktreihe AB mit ω ist; zwei Euklidische Gerade einer Ebene heißen parallel, wenn sie keinen Euklidischen Punkt, d. h. einen Punkt von ω gemeinsam haben. Für die Winkelmetrik verwendet man eine irreduzible Kurve 2. Grades in ω. Nun kann man affine oder auch Euklidische Geometrie treiben. Durch die gleichen Festsetzungen kann man auch vom komplex-projektiven Raume zum komplex-Euklidischen übergehen. Damit ist der Anschluß an die einleitenden Betrachtungen von § 1 gewonnen.

46. Mehrdimensionale Geometrie. Schon in Nr. 7 war auf die Möglichkeit hingewiesen worden, das vorliegende Axiomensystem so abzuändern, daß es für eine komplex höherdimensionale projektive Geometrie gilt. Für den komplex 4-dimensionalen projektiven Raum hätte man folgendermaßen vorzugehen: das Axiom I 10 von Nr. 25 wird abgeändert in „Es gibt einen Punkt R so, daß die Punktreihe RS mit dem Punktfeld TUV keinen Punkt gemeinsam hat" und als I 11 eingeführt „Ist P irgendein von R verschiedener Punkt, der nicht dem Punktraum $STUV$ angehört, dann hat die Punkt-

gesetzt werden könnten; im vorliegenden Axiomensystem z. B. können $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ durch irgend drei kollineare Punkte ersetzt werden. Im Gegensatze dazu handelt die Arithmetik von unvertretbaren Individuen, man kann z. B. nicht eine Deutung eines Axiomensystems der Arithmetik im übrigen aufrecht erhalten, wenn man die bisher 1 und 2 genannten Dinge miteinander vertauscht.

reihe $\overline{PR}$ mit dem Punktraum $\overline{STUV}$ einen Punkt gemeinsam". Für den komplex 5-dimensionalen Raum müßte man eine der 3. Erklärung von Nr. 16 analoge Erklärung für den komplex 4-dimensionalen Punktraum bringen, I 11 so abändern wie soeben I 10 und ein abschließendes Axiom I 12 hinzufügen usf.

Zur komplexen projektiven Geometrie — und nach dem 1. Absatze von Nr. 45 entsprechend auch zur reell-projektiven — im Raume von abzählbar unendlich vielen Dimensionen gelangt man, das Axiomensystem der vorhergehenden Paragraphen fortsetzend, folgendermaßen: man erklärt „Der Punktraum ist dreidimensional. Ist V_n ein n-dimensionaler Punktraum und P ein nicht in ihm enthaltener Punkt, dann bilden die Punkte aller Punktreihen, welche P und einen Punkt von V_n enthalten, einen $(n + 1)$-dimensionalen Punktraum V_{n+1}" und setzt an die Stelle von I 10 das Axiom „Ist V_n irgendein Punktraum, dann gibt es mindestens einen Punkt, der ihm nicht angehört". Das ganze übrige Axiomensystem bleibt unverändert.

München, im Oktober 1932.