

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen
Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1932. Heft II

Mai-Juli-Sitzung

München 1932

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung



Über mehrfach transzendente Erweiterungen des natürlichen Rationalitätsbereichs.

Von Oskar Perron.

Vorgetragen in der Sitzung am 7. Mai 1932.

§ 1. Die Aufgabe.

Daß es transzendente Zahlen gibt, folgt nach Cantor aus der Abzählbarkeit der Menge der algebraischen Zahlen; etwas ganz anderes ist es aber, wenn man verlangt, transzendente Zahlen wirklich anzugeben, eine Aufgabe, die bekanntlich Liouville zuerst gelöst hat.¹

Ebenso leicht kann man mengentheoretisch die Existenz einer Folge von Zahlen $\xi_1, \xi_2, \dots$ nachweisen, die so beschaffen ist, daß für jedes r der Körper $\mathfrak{K}(\xi_1, \dots, \xi_r)$ eine r -fach transzendente Erweiterung des natürlichen Rationalitätsbereiches $\mathfrak{K}(1)$ ist, d. h., daß keine algebraische Beziehung

$$(1) \quad \sum_{l_1 \dots l_r} A_{l_1 \dots l_r} \xi_1^{l_1} \dots \xi_r^{l_r} = 0$$

mit rationalen Koeffizienten $A_{l_1 \dots l_r}$, die nicht sämtlich verschwinden, besteht. Denn jedenfalls gibt es eine transzendente Zahl ξ_1 . Nehmen wir an, wir hätten schon die Existenz von $r(\geq 1)$ Zahlen $\xi_1, \dots, \xi_r$ erkannt, für welche keine Relation der Form (1) besteht, so bilden die Zahlen des Körpers $\mathfrak{K}(\xi_1, \dots, \xi_r)$ eine abzählbare Menge. Die algebraischen Gleichungen mit Koeffizienten aus diesem Körper bilden also ebenfalls eine abzählbare Menge, folglich bilden auch die Wurzeln dieser Gleichungen eine abzählbare Menge. Es gibt daher Zahlen, die nicht Wurzeln einer derartigen Gleichung sind; jede solche Zahl läßt sich für ξ_{r+1} verwenden.

Etwas ganz anderes ist es wieder, eine Folge der verlangten Art wirklich anzugeben. Schon zwischen zwei Liouville-

¹ J. Liouville, Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques. Journal de mathématiques pures et appliquées 16 (1851).

schen Zahlen kann sehr wohl eine algebraische Gleichung mit rationalen Koeffizienten bestehen, so daß auch das Liouvillesche Verfahren hier zunächst versagt. Dagegen ergeben sich Folgen der verlangten Art leicht aus dem Lindemannschen Satz. Sei nämlich $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ eine Folge algebraischer Zahlen, zwischen denen keine Beziehung der Form

$$(2) \quad \sum_{\nu=1}^r l_{\nu} \alpha_{\nu} = 0$$

mit rationalen nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten l_{ν} besteht, etwa $\alpha_{\nu} = \sqrt[p_{\nu}]{}{p_{\nu}}$, wo p_{ν} die ν te Primzahl ist. Dann bilden die Zahlen

$$\xi_1 = e^{a_1}, \xi_2 = e^{a_2}, \dots$$

eine Folge der verlangten Art. Denn eine algebraische Beziehung der Form (1) geht über in

$$\sum A_{l_1 \dots l_r} e^{l_1 x_1 + \dots + l_r x_r} = 0,$$

und da hier die Exponenten von e wegen der Nichtexistenz einer Beziehung der Form (2) lauter verschiedene algebraische Zahlen sind, müssen nach dem Lindemannschen Satz alle Koeffizienten $A_{l_1 \dots l_r}$ verschwinden.¹

Obwohl man hiernach in mannigfacher Weise solche Folgen $\xi_1, \xi_2, \dots$ bilden kann, so sind doch alle ξ_{ν} immer aus ein und derselben abzählbaren Zahlenmenge entnommen, nämlich aus der Menge der Zahlen mit algebraischen Logarithmen. Es fragt sich, ob man nicht umfangreichere Mengen für die ξ_{ν} zur Verfügung stellen kann. Das ist in der Tat möglich; wir werden durch geeigneten Ausbau des Liouvilleschen Verfahrens folgendes beweisen:

Satz 1. Man kann in mannigfacher Weise eine Folge von Zahlenmengen $M_1, M_2, \dots$, die sämtlich die Mächtigkeit des Kontinuums haben, wirklich angeben, von der Art, daß, wenn ξ_{ν} irgendeine Zahl aus M_{ν} bedeutet, für jedes r der Körper $\mathfrak{K}(\xi_1, \dots, \xi_r)$ stets eine r -fach transzendente Erweiterung von $\mathfrak{K}(1)$ ist.

¹ F. Lindemann, Über die Zahl π . Mathemat. Annalen 20 (1882).

§ 2. Verallgemeinerung des Liouvilleschen Satzes.

Satz 2. Wenn die r reellen Zahlen $\xi_1, \dots, \xi_r$ einer Gleichung n ten Grades der Form (1) genügen, so daß in jedem Glied $l_1 + l_2 + \dots + l_r \leq n$ ist, und wenn c eine hinreichend kleine (von $\xi_1, \dots, \xi_r$ und n abhängige) positive Zahl bedeutet, so gibt es kein System von $r + 1$ ganzen rationalen Zahlen $q (> 0)$, $p_1, \dots, p_r$, für welche die r Ungleichungen gelten:

$$0 < \left| \xi_1 - \frac{p_1}{q} \right| < \frac{c}{q^n},$$

$$0 < \left| \xi_\rho - \frac{p_\rho}{q} \right| < \frac{c}{q^n} \left| \xi_{\rho-1} - \frac{p_{\rho-1}}{q} \right|^n \quad (\rho = 2, 3, \dots, r).$$

Beweis. Wir nehmen an, es sei doch ein solches System q , $p_1, \dots, p_r$ vorhanden, und definieren dann r Zahlen $\beta_1, \dots, \beta_r$ durch die Formeln

$$\left| \xi_\rho - \frac{p_\rho}{q} \right| = \frac{1}{(2q)^{\beta_\rho}} \quad (\rho = 1, 2, \dots, r).$$

Setzen wir dann

$$(3) \quad \xi_\rho = \frac{p_\rho}{q} + \frac{\delta_\rho}{(2q)^{\beta_\rho}},$$

so ist also $\delta_\rho = \pm 1$. Für die (im allgemeinen irrationalen) Exponenten β_ρ gelten auf Grund der Voraussetzungen die Ungleichungen

$$(2q)^{\beta_1} > \frac{q^n}{c} = \frac{(2q)^n}{2^{nc}},$$

$$(2q)^{\beta_\rho - n\beta_{\rho-1}} > \frac{q^n}{c} = \frac{(2q)^n}{2^{nc}} \quad (\rho = 2, 3, \dots, r);$$

also ist, wenn eine Zahl γ durch die Formel

$$(4) \quad (2q)^\gamma = \frac{1}{2^{nc}}$$

definiert wird:

$$(5) \quad \begin{cases} \beta_1 > n + \gamma, \\ \beta_\rho - n\beta_{\rho-1} > n + \gamma \end{cases} \quad (\rho = 2, 3, \dots, r).$$

Dabei ist $\gamma > 0$, wenn nur c klein genug (es genügt $c < 2^{-n}$); also sind dann erst recht alle β_ϱ positiv, und es ist $\beta_\varrho > \beta_{\varrho-1}$.

In der nach Voraussetzung bestehenden Formel (I) dürfen die rationalen Koeffizienten $A_{l_1 \dots l_r}$ natürlich ganzzahlig angenommen werden. Schreibt man dann die Gleichung (I) zur Abkürzung in der Form

$$(6) \quad f(\xi_1, \dots, \xi_r) = 0,$$

so geht sie durch Einsetzen der Größen (3) und Anwendung des Taylorschen Satzes über in:

$$(7) \quad \sum_{\lambda_1 \dots \lambda_r} \frac{1}{\lambda_1! \dots \lambda_r!} f_{\lambda_1 \dots \lambda_r}^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_r)} \left(\frac{p_1}{q}, \dots, \frac{p_r}{q} \right) \frac{\delta_1^{\lambda_1} \dots \delta_r^{\lambda_r}}{(2q)^{\lambda_1 \beta_1 + \dots + \lambda_r \beta_r}} = 0$$

$$(\lambda_1 + \dots + \lambda_r \leq n).$$

Nun ist, weil alle δ_r gleich ± 1 sind,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda_1! \dots \lambda_r!} f_{\lambda_1 \dots \lambda_r}^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_r)} \left(\frac{p_1}{q}, \dots, \frac{p_r}{q} \right) \delta_1^{\lambda_1} \dots \delta_r^{\lambda_r} \\ &= \pm \sum_{l_1 \dots l_r} \binom{l_1}{\lambda_1} \dots \binom{l_r}{\lambda_r} A_{l_1 \dots l_r} \left(\frac{p_1}{q} \right)^{l_1 - \lambda_1} \dots \left(\frac{p_r}{q} \right)^{l_r - \lambda_r} = \frac{B_{\lambda_1 \dots \lambda_r}}{q^n}, \end{aligned}$$

wobei die $B_{\lambda_1 \dots \lambda_r}$ ganze rationale Zahlen sind, die nicht sämtlich verschwinden, weil sonst das Polynom f identisch verschwinden würde, also auch alle Koeffizienten $A_{l_1 \dots l_r}$ verschwinden würden, entgegen der Voraussetzung. Für die $B_{\lambda_1 \dots \lambda_r}$ ergibt sich aus ihrer Definitionsformel zunächst die Abschätzung

$$|B_{\lambda_1 \dots \lambda_r}| \leq q^n \sum_{l_1 \dots l_r} \binom{l_1}{\lambda_1} \dots \binom{l_r}{\lambda_r} A \left| \frac{p_1}{q} \right|^{l_1 - \lambda_1} \dots \left| \frac{p_r}{q} \right|^{l_r - \lambda_r},$$

wobei

$$\text{Max } |A_{l_1 \dots l_r}| = A$$

gesetzt ist. Setzt man ferner

$$\text{Max}_{\varrho=1}^r |\xi_\varrho| = G,$$

so folgt aus (3), weil $\delta_\varrho = \pm 1$, weil ferner $2q \geq 2 > 1$ und weil die Exponenten β_ϱ positiv sind,

$$\left| \frac{p_\varrho}{q} \right| < G + 1,$$

so daß sich aus der vorigen Abschätzung weiter ergibt:

$$(8) \quad |B_{\lambda_1 \dots \lambda_r}| \leq q^n A \sum_{l_1 \dots l_r} \binom{l_1}{\lambda_1} \dots \binom{l_r}{\lambda_r} (G+1)^n \leq M q^n,$$

wo man für M etwa die Zahl

$$M = A \binom{n+r}{r} (n!)^r (G+1)^n$$

wählen kann, die jedenfalls von q unabhängig ist. Die Gleichung (7) lautet jetzt einfach nach Multiplikation mit q^n :

$$(9) \quad \sum_{\lambda_1 \dots \lambda_r} \frac{B_{\lambda_1 \dots \lambda_r}}{(2q)^{\lambda_1 \beta_1 + \dots + \lambda_r \beta_r}} = 0 \quad (\lambda_1 + \dots + \lambda_r \leq n).$$

Nun vergleichen wir zwei für $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ in Betracht kommende Systeme $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_r)$ und $(\lambda''_1, \dots, \lambda''_r)$. Ist dabei ρ der größte unter denjenigen Indizes τ , für welche $\lambda'_\tau \neq \lambda''_\tau$ ist, und ist etwa $\lambda'_\rho > \lambda''_\rho$, so ist mit Rücksicht auf (5) für $\rho > 1$:

$$\begin{aligned} (\lambda'_1 \beta_1 + \dots + \lambda'_r \beta_r) - (\lambda''_1 \beta_1 + \dots + \lambda''_r \beta_r) &\geq \beta_\rho - (\lambda''_1 \beta_1 + \dots + \lambda''_{\rho-1} \beta_{\rho-1}) \\ &\geq \beta_\rho - (\lambda''_1 + \dots + \lambda''_{\rho-1}) \beta_{\rho-1} \\ &\geq \beta_\rho - n \beta_{\rho-1} > n + \gamma, \end{aligned}$$

und für $\rho = 1$:

$$(\lambda'_1 \beta_1 + \dots + \lambda'_r \beta_r) - (\lambda''_1 \beta_1 + \dots + \lambda''_r \beta_r) \geq \beta_1 > n + \gamma.$$

In der Formel (9) sind daher die (im allgemeinen irrationalen) Exponenten von $2q$ alle voneinander verschieden. Bezeichnet man sie, der Größe nach geordnet, mit $h_1, \dots, h_s$, so ist

$$(10) \quad h_{\sigma+1} > h_\sigma + n + \gamma \quad (\sigma = 1, 2, \dots, s-1)$$

und die Formel (9) geht über in

$$(11) \quad \sum_{\sigma=1}^s \frac{C_\sigma}{(2q)^{h_\sigma}} = 0,$$

wobei die C_σ einfach die ganzen Zahlen $B_{\lambda_1 \dots \lambda_r}$ in gewisser Reihenfolge sind. Die C_σ können also nicht alle verschwinden und nach (8) ist

$$(12) \quad |C_\sigma| \leq M q^n < M (2q)^n.$$

Ist C_0 die erste von 0 verschiedene unter den Zahlen $C_1, \dots, C_s$, so folgt aus (11):

$$C_0 = - \sum_{\sigma=0+1}^s \frac{C_\sigma}{(2q)^{h_\sigma - h_0}},$$

also mit Rücksicht auf (12) und (10) und weil $2q \geq 2 > 1$ ist:

$$1 \leq |C_0| < \sum_{\sigma=0+1}^s \frac{M(2q)^n}{(2q)^{(n+r)(\sigma-0)}} < \sum_{r=1}^{\infty} \frac{M(2q)^n}{(2q)^{(n+r)r}} = \frac{M(2q)^n}{(2q)^{n+r-1}} < \frac{2M}{(2q)^r}.$$

Somit ist $(2q)^r < 2M$, oder also nach (4)

$$\frac{1}{2^{nc}} < 2M.$$

Wählt man daher die Zahl c kleiner als $\frac{1}{2^{n+1}M}$, so hat man einen Widerspruch, wodurch Satz 2 bewiesen ist.

§ 3. Beweis von Satz 1.

Mit Hilfe von Satz 2 lassen sich nun Mengen von der in Satz 1 behaupteten Art auf mannigfache Weise konstruieren. Seien etwa g, h zwei ganze rationale Zahlen, und zwar $g \geq 2, h \geq 2$. M_μ sei die Menge aller Zahlen der Form

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{j_r}{g^{(r\mu)!}},$$

wobei die j_r beliebig aus den Zahlen $1, 2, \dots, h$ ausgewählt seien. Jede Menge M_μ hat dann die Mächtigkeit h^{s_0} , also die Mächtigkeit des Kontinuums. Wir wollen zeigen, daß die Mengenfolge $M_1, M_2, \dots$ die in Satz 1 behauptete Eigenschaft hat. Sei also

$$(13) \quad \xi_\mu = \frac{j_{\mu 1}}{g^{\mu!}} + \frac{j_{\mu 2}}{g^{(2\mu)!}} + \frac{j_{\mu 3}}{g^{(3\mu)!}} + \dots$$

eine Zahl aus M_μ . Angenommen, die Zahlen $\xi_1, \dots, \xi_r$ genügen, entgegen unserer Behauptung, einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten, etwa vom Grad n . Dann gibt es eine positive Zahl c von der in Satz 2 angegebenen Eigenschaft. Ist nun k irgendeine durch $2, 3, \dots, r$ teilbare positive ganze Zahl, so folgt aus (13):

Das gleichzeitige Bestehen dieser Ungleichungen widerspricht aber dem Satz 2. Die Annahme, daß die Zahlen $\xi_1, \dots, \xi_r$ einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten genügen, war also falsch, und damit ist unsere Behauptung bewiesen.