

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen
Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1931. Heft II

Mai-Julisitzung

München 1931

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München



Zur Theorie der Büschel von Flächen 2. Ordnung.

Von **Richard Baldus**, Karlsruhe i. B.

Mit 2 Figuren.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 11. Juli 1931.

Zur Klassifikation der Büschel von Flächen 2. Ordnung gelangte man bisher im wesentlichen auf drei verschiedenen Wegen¹⁾:

v. Staudt²⁾ geht synthetisch vor, mit seinem großen Können, aber in einer Weise, der man nur schwer folgen kann, nicht so sehr wegen der als sehr gedrängt bekannten Form seiner Darstellung, sondern vor allem deshalb, weil der Diskussion, welche in der Hauptsache mit den zerfallenden oder kegelförmigen Büschelflächen arbeitet, ein durchsichtiger, einheitlicher Gedanke fehlt. Deshalb sind diese seine Untersuchungen nicht einmal in solche Darstellungen der projektiven Geometrie eingegangen, die sich sonst stark auf seine Ergebnisse stützen. Ein anderer Weg führt über die Wurzelmultiplizitäten und die zugehörigen Rangzahlen der Koeffizientendeterminante des Büschels³⁾. Da es aber zwei verschiedene Büscheltypen gibt, welchen gleiche Wurzelmultiplizitäten und gleiche Rangzahlen entsprechen, muß man dabei ohne unmittelbar ersichtlichen methodischen Zwang einen Fall in zwei Unterfälle auflösen⁴⁾. Dem gegenüber bietet der Weg über die Theorie der Elementarteiler⁵⁾ den Vorteil des einheit-

¹⁾ Über die reiche einschlägige Literatur unterrichtet der Artikel von O. Staudé „Flächen 2. Ordnung und ihre Systeme und Durchdringungskurven“ (1904) Enzykl. d. Mathem. Wissenschaften III 2, insbes. S. 212–223.

²⁾ Beiträge zur Geometrie der Lage, 3. Heft (1860) S. 346–358.

³⁾ So z. B. bei Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie II. Bd., Leipzig 1891, S. 215–236 oder bei L. Heffter, Lehrbuch der analytischen Geometrie II. Bd., Leipzig und Berlin 1923, S. 362–390.

⁴⁾ Clebsch-Lindemann a. a. O. bei den Fällen 10 und 11, Heffter a. a. O. beim Fall III, e.

⁵⁾ Literatur bei Staudé a. a. O. S. 216/217.

lichen, durchsichtigen Gedankenganges und die Möglichkeit, unmittelbar die Vollständigkeit der Aufzählung zu erkennen¹⁾, setzt aber nicht unerhebliche arithmetische Spezialkenntnisse voraus, wie sie sonst nur noch an einer Stelle der Geometrie der linearen und der quadratischen Formen benötigt wurden. Es ist das die Klassifikation der räumlichen Kollineationen, die zum gleichen Elementarteilerproblem führt wie die der Büschel von Flächen 2. Ordnung²⁾, und die auch auf Wegen behandelt wurde, über die dem soeben Ausgeführten ganz Ähnliches zu sagen ist.

In früheren Ausführungen³⁾ habe ich gezeigt, wie man die Klassifikation der räumlichen Kollineationen im Komplexen mittels einfacher Inzidenzschlüsse vollständig und geometrisch übersichtlich durchführen kann, wobei nur ganz elementare algebraische Hilfsmittel benötigt werden. Damit ist dort die Elementarteilertheorie entbehrlich geworden⁴⁾.

¹⁾ Hierauf wird bei Clebsch-Lindemann a. a. O. S. 233 mit Recht hingewiesen. Staude sagt a. a. O. S. 217 „Erst durch Weierstrass's Theorie der Elementarteiler . . . wurde die Einteilung vollständig begründet“.

²⁾ J. Wellstein, „Zur Klassifikation der regulären Scharen quadratischer Formen“, Sitzungsberichte d. Heidelberger Akad. d. Wiss., Math.-naturwiss. Kl., 1930, 7. Abhdlg., 8 S., geht diesem Zusammenhange zwischen den beiden Problemen mit algebraischen und arithmetischen Hilfsmitteln nach, während hier geometrische Zusammenhänge mit geometrischen Schlußweisen aufgedeckt werden sollen. Soweit es sich dabei um die gleichen Ergebnisse handelt, sind Herr Wellstein und ich im wesentlichen unabhängig voneinander gleichzeitig dazu gelangt.

³⁾ „Zur Klassifikation der ebenen und räumlichen Kollineationen“, diese Berichte 1928, S. 375—395, weiterhin zitiert als „K.K.“. Ich hatte darin auf die vollständige Diskussion der automorphen Kollineationen der Flächen 2. Ordnung hingewiesen; inzwischen ist in der Erlanger Dissertation von F. Seel „Klassifikation und Darstellung der reellen räumlichen Kollineationen mit invarianter nicht-ausgearteter Fläche zweiten Grades“, Sitzungsber. der Physikal.-medizin. Sozietät zu Erlangen, 62 (1930), S. 167—258 dieses Problem im Reellen behandelt worden.

⁴⁾ E. A. Weiß, „Zur Klassifikation der räumlichen Kollineationen“, diese Ber. 1930, S. 63—72 schließt an K.K. an und weist darauf hin, daß man Teile der Elementarteilertheorie nicht entbehren kann, wenn man durch analytische notwendige und hinreichende Kriterien die verschiedenen Kollineationstypen charakterisieren will. Die hier einschlägige Frage, zu welchem Typ eine vorgegebene Kollineation gehört, will ich an anderer Stelle behandeln.

Die vorliegenden Ausführungen sollen zeigen, daß es, abermals in der Hauptsache mit einfachen Inzidenzschlüssen, möglich ist, auch zur vollständigen Klassifikation der Büschel von Flächen 2. Ordnung im Komplexen in geometrischer, übersichtlicher Weise zu gelangen, wobei, da ständig mit vollständigen Disjunktionen gearbeitet wird, die Vollständigkeit der Klassifikation nicht mehr ausdrücklich zu beweisen ist. Damit ist auch hier die Elementarteilertheorie durch ein einfaches, geometrisches Verfahren ersetzt.

Zwischen räumlichen Kollineationen und Büscheln von Flächen 2. Ordnung besteht auch geometrisch ein enger, bekannter Zusammenhang: die Polaritäten zweier Büschelflächen liefern, zusammengesetzt, eine Kollineation, und jedes Doppelement dieser Kollineation hat für alle Büschelflächen dasselbe Polarelement, ist „Hauptelement“ des Büschels. So gehört zu jedem Büschel ein „Hauptsystem“, welches Doppelementensystem einer Kollineation ist. Und nun werden im folgenden, das ist der naheliegende Grundgedanke, die Flächenbüschel einfach nach ihren Hauptsystemen klassifiziert, d. h. es werden zu jedem nicht-identischen Kollineationstyp die Flächenbüschel gesucht, für welche das Doppelementensystem Hauptsystem ist. Es gelingt mit den einfachsten Sätzen aus der Polarentheorie und über das Schneiden von Kegelschnitten die Grundkurven dieser Flächenbüschel und damit die Büscheltypen vollständig zu charakterisieren, und da, wie gesagt, nach K.K. die Kollineationen klassifiziert sind¹⁾, ist damit auch die Klassifikation der Flächenbüschel durchgeführt. Das Ergebnis sind die bekannten 13 Büscheltypen.

§ 1 handelt von den Kegelschnittbüscheln und gibt damit Unterlagen für die späteren Betrachtungen, daneben ein einfaches Vorbild für die späteren Schlußweisen im Raume. Mit § 2 beginnen die eigentlichen Betrachtungen über Flächenbüschel. Es werden, da keine weiteren algebraisch-geometrischen Kenntnisse verwendet werden sollen, zunächst einige einfache Abzählungstatsachen über Schnittkurven 4. und 3. Ordnung von Flächen 2. Ordnung abgeleitet, weiterhin einige Hilfssätze über Hauptsysteme und Büschelgrundkurven. In § 3 erfolgt die Klassifikation

¹⁾ Die vorliegenden Ausführungen sind auch ohne Kenntnis von K.K. verständlich, da immer ausdrücklich gesagt wird, was von dort übernommen wird.

der Flächenbüschel in der soeben charakterisierten Weise. Mit § 4 beginnt der zweite Teil der Untersuchungen, die Verwertung der gewonnenen Ergebnisse bei der Behandlung einiger nach dem Bisherigen naheliegender Fragen. Zunächst werden Gleichungen für die Flächenbüschel der verschiedenen Typen gegeben, deren Konstantenzahl durch entsprechende Wahl des Koordinatensystems möglichst heruntergedrückt ist, sodaß man für weitere Betrachtungen über Flächenbüschel teilweise erheblich einfachere Gleichungen als die bisher bekannten zur Verfügung hat. Anschliessend behandelt § 5 die Kollineationen zwischen Flächenbüscheln. Hier wird ein geometrisches Verfahren angegeben, das alle Kollineationen liefert, die zwei gegebene Flächenbüschel — die dem gleichen Typ angehören müssen — ineinander überführen, ebenso alle automorphen Kollineationen eines Büschels. § 6 enthält als Erweiterung bekannter Ergebnisse über Kegelschnittbüschel die Feststellung, zu welchen Typen die Flächenbüschel gehören, die gleichzeitig Flächenscharen, demnach Büschelscharen sind. In § 7 wird gezeigt, daß und wie man jede räumliche Kollineation aus zwei Polaritäten zusammensetzen kann, mit expliziter Angabe solcher Polaritäten für jeden Kollineationstyp. Die bisherigen Betrachtungen spielten sich im komplexen, projektiven Raum ab. Spezialisierend bringt zum Schluß § 8 einfache reelle, metrische Beispiele für Flächenbüschel aller Typen, während bisher in der Literatur nur einzelne Typen mit Beispielen belegt sind.

Die vorliegenden Betrachtungen lassen sich für höhere Räume verallgemeinern und würden dabei im vierdimensionalen Raum auf 26 Typen von Büscheln quadratischer dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten führen.

Naturgemäß sind die beigegebenen Figuren wegen des komplexen Charakters der Betrachtungen nur als bequemes Mittel zur Darstellung derjenigen Lagenbeziehungen gewählt, die gegenüber komplexen Kollineationen invariant sind, weiter darf aus ihnen nichts herausgelesen werden.

§ 1.

Kegelschnittbüschel.

1. Die Betrachtungen dieses § bereiten die Untersuchung der Flächenbüschel vor. Sie spielen sich in der komplexen, projektiven

Ebene ab, die auftretenden Gleichungen haben komplexe Koeffizienten. Wir handeln dabei nur von Kegelschnittbüscheln, die nicht aus lauter zerfallenden Kurven 2. Ordnung bestehen und definieren ein solches Büschel in bekannter Weise durch irgend zwei verschiedene seiner irreduziblen Kurven, die „Ausgangskurven“ (K_a) und (K_b) .

Aus der Büschelgleichung

$$\lambda \cdot A(x, x) + \mu \cdot B(x, x) = 0$$

erhält man ohne weiteres das bekannte Ergebnis, daß eine Gerade, welche Polare eines Punktes für die beiden Ausgangskurven ist, dies für alle Kegelschnitte des Büschels ist¹⁾. Sie heißt eine Hauptgerade, ihr Punkt ein Hauptpunkt des Büschels. Bezeichnet man als „Hauptsystem“ eines Büschels die Gesamtheit seiner Hauptpunkte und Hauptgeraden, dann ergibt sich ohne weiteres der

Satz 1. Das Hauptsystem enthält zu jedem seiner Punkte die Polare für alle Büschelkurven, zu jeder seiner Geraden den Pol und ist in sich dual.

2. (K_a) und (K_b) schneiden sich, algebraisch gezählt, in vier Punkten, den Grundpunkten des Büschels, von denen auch mehrere zusammenfallen können. Ist H ein Hauptpunkt, der nicht Grundpunkt ist, h seine Polare und G ein Grundpunkt außerhalb h , dann muß jede Büschelkurve durch den Punkt von HG gehen, der mit G ein zu H und dem Schnittpunkte mit h harmonisches Paar bildet. Das ist der Beweis für den

Satz 2. Verbindet man einen Hauptpunkt, der nicht Büschelgrundpunkt ist, mit einem ihm nicht konjugierten Grundpunkte, dann enthält diese Verbindungslinie noch einen weiteren Grundpunkt des Büschels.

Liegt G auf h , dann kann, wie die gleiche Überlegung zeigt, HG keine Büschelkurve außerhalb G treffen, folglich gilt der

Satz 3. Verbindet man einen Hauptpunkt mit einem ihm konjugierten Grundpunkte, dann berührt diese Verbindungslinie alle irreduziblen Kurven im Grundpunkt.

¹⁾ Bei v. Staudt S. 208 ist dies eine definierende Eigenschaft des Büschels.

Treffen sich zwei irreduzible Kegelschnitte in einem Punkte vierpunktig, dann hat bekanntlich jeder Punkt ihrer gemeinsamen Tangente dieselbe Polare für beide Kegelschnitte²⁾. Sind umgekehrt zwei Kegelschnitte gegeben, zu denen eine Punktreihe von Hauptpunkten gehört, dann tritt nach Satz 1 auch ein Büschel von Hauptstrahlen auf. Gehört dessen Scheitel P zur Punktreihe, dann berühren die Kegelschnitte den Träger der Punktreihe in P als Gerade, die ihren Pol enthält. Ein weiterer Schnittpunkt der beiden Kurven kann nicht auftreten, da jeder Punkt der Hauptpunktreihe sonst nach Satz 2 einen weiteren Schnittpunkt liefern würde und die Kurven damit identisch wären. Das ist der Beweis für den seinem Inhalte nach bekannten

Satz 4. Dann und nur dann, wenn sich zwei irreduzible Kegelschnitte vierpunktig treffen, gehört zu ihrem Hauptsystem ein Strahlenbüschel und eine dazu polare Punktreihe durch dessen Scheitel.

3. (K_a) und (K_b) seien wieder die Ausgangskurven eines Büschels. Einem Punkte P der Büschelebene entspricht in der Polarität von (K_a) eine Gerade p , dieser in der Polarität von (K_b) ein Punkt P' . Durch diese zwei aufeinander folgenden Polaritäten ist die Ebene kollinear auf sich bezogen. P und P' fallen dabei nur dann aufeinander, wenn P dieselbe Polare für beide Kurven hat. Demnach liefern irgend zwei irreduzible Kegelschnitte eines Büschels durch Zusammensetzung ihrer Polaritäten eine Kollineation, deren Doppелеlemente die Hauptelemente des Büschels sind.

Man unterscheidet die bekannten 5 Typen von Kegelschnittbüscheln nach der Konstellation der Grundpunkte oder, was auf dasselbe hinausläuft, nach der Konfiguration der zerfallenden Büschelkurven. Typen nicht-identischer Kollineationen gibt es ebenfalls 5, wobei man zwei Kollineationen dann und nur dann zum gleichen Typ rechnet, wenn die Konstellationen ihrer Doppелеlemente projektiv äquivalent sind, durch eine Kollineation ineinander überführt werden können.

²⁾ Dies ergibt sich ohne weiteres aus den Gleichungen $x_1^2 - x_2 x_3 = 0$ und $x_1^2 - x_2 x_3 + c x_3^2 = 0$, die man erhält, wenn man als Koordinatensystem die beiden Tangenten an den ersten Kegelschnitt aus einem solchen Punkt und dessen Polare wählt, dazu den Einheitspunkt auf der Kurve.

Die enge Verbindung, die nach dem soeben abgeleiteten Ergebnis durch die Hauptelemente zwischen den Kegelschnittbüscheln und den Kollineationen besteht, legt den Gedanken nahe, die Kegelschnittbüschel, wie es im folgenden geschieht, nach den Kollineationstypen, denen ihre Hauptsysteme angehören, zu klassifizieren. Diese Klassifizierung der Büschel führt nicht schneller zum Ziel als andere Methoden, das Verfahren wird aber, auf den Raum übertragen, dort wertvoll werden. Dabei übernehmen wir hier, wie später bei den Flächenbüscheln, die Reihenfolge der Kollineationstypen der in der Einleitung erwähnten Abhandlung K.K. Auf die hier folgende Figur 1 wird in diesem § nicht mehr be-

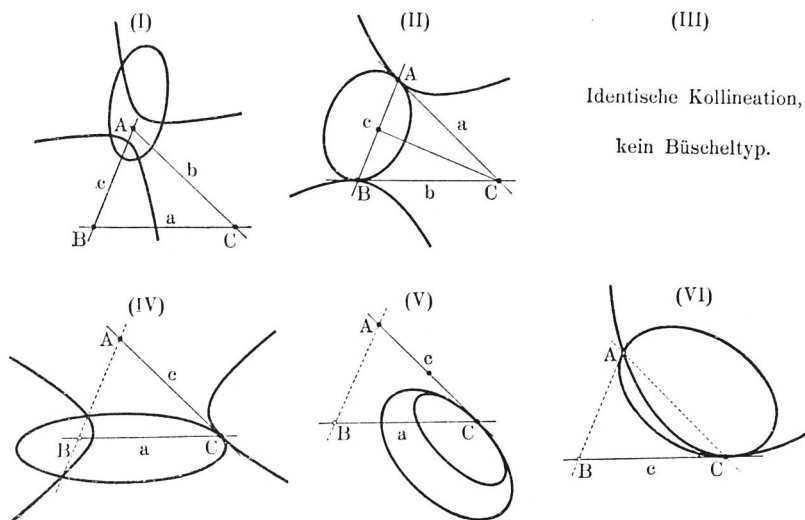


Fig. 1

sonders hingewiesen werden; in ihr sind die Hauptpunkte durch ausgefüllte Nullkreise, die Hauptgeraden durch ausgezogene Linien angegeben.

4. Kollineationstyp (I). Zu dem Hauptsystem A, B, C , a, b, c ist ein Kegelschnittbüschel zu suchen. Die nach Satz 1 zwischen diesen Punkten und Geraden existierende polare Zuordnung ist in zwei Weisen denkbar: es gibt einen Hauptpunkt, der auf seiner Polaren liegt, oder es gibt keinen solchen.

Wäre, den ersten Fall angenommen, z. B. b die Polare von A , dann müßte die Polare von C durch A gehen, demnach c sein,

und für B bliebe a übrig. Alle irreduziblen Büschelkurven müßten wegen der Inzidenz von Pol und Polare b in A und a in B berühren, und jeder Punkt von AB hätte die gleiche Polare für alle Büschelkurven, wäre Hauptpunkt, was bei dem vorliegenden Hauptsystem nicht der Fall ist.

Daher tritt der zweite Fall ein, jeder Hauptpunkt ist Pol der gegenüber liegenden Hauptgeraden. Demnach kann kein Hauptpunkt Grundpunkt sein, da er sonst als Kurvenpunkt auf seiner Polaren liegen müßte. Auch auf einer Hauptgeraden kann kein Grundpunkt liegen, da diese sonst nach Satz 2 einen weiteren Grundpunkt enthalten müßte, sodaß ihre ganze Punktreihe zum Hauptsystem gehören würde.

Jedes Kegelschnittbüschel hat mindestens einen Grundpunkt, dann aber ein zu diesem Hauptsystem gehörendes nach dem ersten Absatze von Nr. 2 noch drei weitere; das Hauptsystem ist das Nebendreieck des vollständigen Vierecks der Grundpunkte. Es liegt hier demnach der Fall von vier getrennten Grundpunkten vor, mit dem gemeinsamen Polardreieck als Hauptsystem.

Daß bei einem solchen Büschel keine weiteren Hauptpunkte oder Hauptgeraden auftreten, ist nach den Sätzen 2 und 3 auf Grund der Tatsache ohne weiteres klar, daß zwei verschiedene irreduzible Kegelschnitte nicht mehr als 4 Schnittpunkte haben können. Auch bei den folgenden Kollineationstypen muß man beweisen, daß die gegebenen Doppelemente tatsächlich das vollständige Hauptsystem des betreffenden Büscheltyps bilden. Dieser Beweis, der immer mit den genannten beiden Sätzen leicht zu führen ist, wird weiterhin der Kürze halber unterdrückt werden.

Kollineationstyp (II). Zentrale Kollineation mit dem Zentrum C und der C nicht enthaltenden Achse c . Wegen des Satzes 1 ist der Scheitel C des Strahlenbüschels von Hauptgeraden Pol des Trägers c der Punktreihe von Hauptpunkten. Jeder Punkt dieser Punktreihe hat dieselbe Polare für die beiden Ausgangskurven (K_a) und (K_b) , folglich ist die Involution konjugierter Punkte auf c für beide dieselbe, und in deren Doppelpunkten A, B berühren sich die beiden Kurven mit durch C laufenden Tangenten. Das Büschel hat demnach zwei Grundpunkte, in jedem berühren sich die irreduziblen Büschelkurven.

Kollineationstyp (III), die identische Kollineation, liefert als Hauptsystem das ganze ebene Feld und führt damit, im Widerspruch mit dem ersten Absatze von Nr. 1, auf zwei zusammenfallende Ausgangskurven.

5. Kollineationstyp (IV). Dem Schnittpunkte C der zwei Hauptgeraden entspricht nach Satz 1 polar die Verbindungslinie der zwei Hauptpunkte, das ist c . Da C auf seiner Polaren liegt, berühren die beiden Ausgangskurven c in C . Daß C beim vorliegenden Hauptsystem nicht der einzige Grundpunkt sein kann, geht aus Satz 4 hervor. Auf a kann kein weiterer Grundpunkt liegen, da seine Verbindungslinie mit A für beide Ausgangskurven seine Polare und damit Hauptgerade wäre. Daher existiert ein Grundpunkt P außerhalb a und c^1), sowie auf seiner Verbindungslinie mit A nach Satz 2 noch ein weiterer. Das Büschel hat drei Grundpunkte, in einem berühren sich die irreduziblen Büschelkurven.

Kollineationstyp (V). Zentrale Kollineation mit dem Zentrum C und der Achse c durch C . Der Träger C der Hauptgeraden ist Pol des Trägers c der Hauptpunkte und nach Satz 4 hat das Büschel einen Grundpunkt, in ihm treffen sich die Büschelkurven vierpunktig.

Kollineationstyp (VI). Der einzige Hauptpunkt, C , ist Pol der einzigen Hauptgeraden, c , und liegt auf dieser, ist demnach (Berührungs-)Punkt der beiden Ausgangskurven und damit Büschelgrundpunkt, in dem sich die irreduziblen Büschelkurven berühren. Nach Satz 4 tritt noch ein weiterer Grundpunkt auf, und zwar nur einer, da bei zwei weiteren Grundpunkten ihre Verbindungslinie im Schnittpunkte mit c wie bei (IV) einen weiteren Hauptpunkt liefern würde. Demnach hat das Büschel zwei Grundpunkte, in einem treffen sich die Büschelkurven dreipunktig. Das letzte ist klar, denn ein zweipunktiges Treffen im anderen Grundpunkte würde auf das Hauptsystem von (II) führen.

6. Damit sind die 5 bekannten Kegelschnittbüscheltypen aus den Doppелеlementen der 5 nicht-identischen Kollineationen heraus gewonnen. Es ist nun leicht, die Büschelgleichungen in diesen 5 Fällen auf einfache Formen zu bringen:

¹⁾ Außerhalb c , weil sonst c , algebraisch gezählt, jede Büschelkurve in drei Punkten schneiden würde.

Wählt man bei (I) drei Grundpunkte als Ecken, den vierten als Einheitspunkt eines Koordinatensystems, dann wird die Büschelgleichung bei dem

$$\text{Typ (I)} \quad \lambda x_1 x_2 + \mu x_1 x_3 - (\lambda + \mu) x_2 x_3 = 0.$$

Hat bei (II) das Koordinatensystem die Ecken A, B, C mit den gegenüberliegenden Seiten $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$, dann wird die Büschelgleichung bei

$$\text{Typ (II)} \quad \lambda x_1 x_2 + \mu x_3^2 = 0.$$

Sind bei (IV) A, C und ein weiterer Grundpunkt die Ecken des Koordinatendreiecks und ist $(1; 1; 0)$ der letzte Grundpunkt, dann ist die Büschelgleichung für den

$$\text{Typ (IV)} \quad \lambda x_1^2 - \lambda x_1 x_2 + \mu x_2 x_3 = 0.$$

Bei (V) liefert das Koordinatendreieck A, B, C mit dem Einheitspunkt auf dem durch B laufenden Kegelschnitt als Büschelgleichung für den

$$\text{Typ (V)} \quad \lambda x_1^2 + \mu x_2^2 - \lambda x_2 x_3 = 0.$$

Das Koordinatensystem A, B, C bei (VI) und der Einheitspunkt auf dem BA in A berührenden Kegelschnitte liefert als Büschelgleichung für

$$\text{Typ (VI)} \quad \lambda x_1 x_2 + \mu x_1 x_3 - \mu x_2^2 = 0.$$

Liegen nun zwei Büschel des gleichen Typs vor, dann wählt man für jedes das Koordinatensystem in der soeben angegebenen Weise und erhält dieselbe Büschelgleichung. Daher werden die beiden Büschel durch die Kollineation, welche den 4 Punkten des ersten Koordinatensystems die analog gewählten des zweiten zuordnet, ineinander übergeführt. Damit ist bewiesen, daß zwei Kegelschnittbüschel des gleichen Typs kollinear äquivalent sind¹⁾.

Es kommt demnach auf das Gleiche hinaus, ob man — algebraisch — die Kegelschnittbüschel nach den Vielfachheiten der Schnittpunkte ihrer Ausgangskurven klassifiziert, oder — geometrisch — zwei Kegelschnittbüschel zum gleichen Typ rechnet, wenn sie kollinear ineinander übergeführt werden können, oder — wieder geometrisch — wenn ihre Hauptssysteme projektiv äquivalent sind.

¹⁾ Es ist leicht, auf die projektive Äquivalenz direkt geometrisch zu schließen, ohne den Weg über die Büschelgleichungen zu nehmen. Hier wurde der letztere Weg gewählt, weil er sich kürzer wiedergeben läßt.

7. Durch Dualisieren des Bisherigen erhält man Kegelschnittscharen statt der Kegelschnittbüschel, während die Kollineationstypen dieselben bleiben, da jede Konstellation der Doppelemente einer Kollineation in sich dual ist (K.K. S. 331). Damit erhält man wieder 5 Typen (I), (II), (IV)—(VI) für die Kegelschnittscharen. Zwei irreduzible Kegelschnitte bestimmen daher als Ordnungskurven ein Kegelschnittbüschel, als Klassenkurven eine Kegelschnittschar, und beide Systeme gehören zu demselben Kollineationstyp.

Eine unmittelbare Folgerung hieraus ist die bekannte Tatsache, daß zwei irreduzible Kegelschnitte, die sich in einem Punkte k -punktig, in einem anderen l -punktig treffen, auch eine k -fach und eine l -fach zählende gemeinsame Tangente haben.

In diesem Zusammenhang ergeben sich die Büschelscharen von Kegelschnitten, das sind die Büschel, die gleichzeitig Scharen sind¹⁾: es sind das, wie aus dem soeben Ausgeführten ohne weiteres hervorgeht, die Büschel der Typen (II) und (V).

8. Der Ausgangsgedanke war, daß die Zusammensetzung der Polaritäten zweier Kegelschnitte eine mit dem Büschel der beiden Kegelschnitte eng verbundene Kollineation liefert. In diesem Zusammenhange kann man sofort zeigen, daß man jede ebene Kollineation — in mannigfacher Weise — als Folge zweier Polaritäten erhalten kann. Es möge dies hier einfach in der Weise geschehen, daß für jede Kollineation, je nach ihrem Typ, zwei einfach gewählte Kegelschnitte angegeben werden, deren Polaritäten, zusammengesetzt, die Kollineation liefern. Die Gleichungen der Kollineationen, die durch passende Wahl des Koordinatensystems vereinfacht sind, werden dabei aus K.K. S. 382/383 entnommen.

$$(I) \quad \varrho x'_1 = x_1, \varrho x'_2 = a x_2, \varrho x'_3 = b x_3 \quad a, b \text{ verschieden; } \neq 0; \neq 1 \\ x_1^2 + a x_2^2 + b x_3^2 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

$$(II) \quad a = 1, \text{ sonst wie (I)}$$

¹⁾ Genau gesprochen: die irreduziblen Kegelschnitte des Büschels sind gleichzeitig die irreduziblen Kegelschnitte einer Schar. Die reduziblen Kurven des Büschels (der Schar) gehören nur dann zur Schar (zum Büschel), wenn man sie in geeigneter Weise als Klassenkurven (Ordnungskurven) auffaßt.

- (IV) $\varrho x'_1 = a x_1, \varrho x'_2 = x_2, \varrho x'_3 = x_2 + x_3 \quad a \neq 0; \neq 1$
 $a x_1^2 + a x_2^2 + 2(a-1)x_2 x_3 = 0, x_1^2 + x_2^2 + 2(a-1)x_2 x_3 = 0$
- (V) $\varrho x'_1 = x_1, \varrho x'_2 = x_2, \varrho x'_3 = x_2 + x_3$
 $x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 x_3 = 0, x_1^2 + 2x_2 x_3 = 0$
- (VI) $\varrho x'_1 = x_1, \varrho x'_2 = x_1 + x_2, \varrho x'_3 = x_2 + x_3$
 $2x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + x_2^2 = 0, 2x_1 x_3 + x_2^2 = 0$

9. Als einfache reelle¹⁾, metrische Beispiele für die 5 Typen seien genannt: (I) ein hyperbolisches oder elliptisches Kreisbüschel; (II) ein System konzentrischer Kreise oder ein System von Hyperbeln mit gemeinsamen Asymptoten; (IV) ein parabolisches Kreisbüschel; (V) alle Kegelschnitte, welche in einem festen Punkt einen festen Kreis zum Scheitelkrümmungskreis haben, oder alle Lagen, die eine Parabel bei Verschiebung in ihrer Achsenrichtung annimmt; (VI) alle Kegelschnitte, welche durch einen festen Punkt gehen und in einem anderen festen Punkt einen festen Kreis zum Krümmungskreis haben.

Ein nicht ganz so einfaches, metrisch interessantes Beispiel für den Büscheltyp (I) ist: alle Kegelschnitte, welche durch die 4 Brennpunkte eines Kegelschnittes (K) hindurchgehen; setzt man die Polaritäten, die zu zwei solchen Büschelkurven gehören, zusammen, dann erhält man eine Drehstreckung der Ebene mit dem Mittelpunkte von (K) als Festpunkt²⁾.

Beispiele für die Kegelschnittscharen, soweit sie nicht als Büschelscharen schon soeben mit behandelt wurden, sind: (I) ein System konfokaler Kegelschnitte mit 4 Brennpunkten, oder alle Kegelschnitte, welche die Seiten eines festen Parallelogramms berühren, oder ein System konfokaler Parabeln, die eine feste Gerade berühren; (IV) ein System konfokaler Parabeln mit gleicher Hauptachsenrichtung; (VI) alle Parabeln, welche in einem festen Punkt einen festen Kreis zum Krümmungskreis haben.

¹⁾ D.h. im komplexen Kegelschnittbüschel ist als Teil ein reelles Büschel enthalten.

²⁾ Eine Drehstreckung der Ebene stellt eine Kollineation vom Typ (I) dar, mit dem Drehpunkt als einem Doppelpunkt und den absoluten Punkten der Ebene als den beiden anderen. Hieraus gewinnt man das hier genannte Beispiel.

§ 2.

Das Hauptsystem eines $\{F^2\}$ -Büschels.

10. Die nun folgenden Überlegungen über die Büschel von Flächen 2. Ordnung verlaufen streckenweise analog den bisherigen Betrachtungen über Kegelschnittbüschel, sodaß wir uns vielfach kurz fassen können. Da sich unsere Untersuchungen im komplexen, projektiven Raum abspielen, sind alle auftretenden irreduziblen Flächen 2. Ordnung entweder Kegel oder Regelflächen mit zwei Scharen von Erzeugenden.

Von der Betrachtung ausgeschlossen bleiben wieder die Büschel mit lauter reduziblen Gebilden, hier Ebenenpaaren oder Doppelebenen.

Die Büschel mit lauter Kegeln 2. Ordnung lassen sich in bekannter Weise durch ganz einfache Rechnungen ohne weiteres klassifizieren: entweder haben zwei, und damit alle Kegel die gleiche Spitze, dann liefert die Projektion eines Kegelschnittbüschels aus einem Punkt außerhalb seiner Ebene das Kegelbüschel, oder zwei, und damit alle Kegel haben verschiedene Spitzen, dann erhält man das Kegelbüschel dadurch, daß man einen irreduziblen Kegelschnitt aus den Punkten einer ihn treffenden und nicht in seiner Ebene liegenden Geraden projiziert¹⁾.

Weiterhin sehen wir auch von den Kegelbüscheln ab. Ein Büschel von Flächen 2. Ordnung, die nicht alle reduzibel oder Kegel sind, möge weiterhin als $\{F^2\}$ -Büschel bezeichnet werden.

Als Ausgangsflächen $[F_a]$ und $[F_b]$ für ein $\{F^2\}$ -Büschel verwenden wir immer zwei verschiedene seiner regulären²⁾, d. h. irreduziblen, nicht kegelförmigen Flächen. In ihren Gleichungen $A(x, x) = 0$ und $B(x, x) = 0$ sind demnach $A(x, x)$, $B(x, x)$ quaternäre quadratische Formen mit komplexen Koeffizienten und

¹⁾ v. Staudt behandelt synthetisch die Kegelbüschel a. a. O. Nr. 537 und 543, Heffter analytisch a. a. O. Nr. 391.

²⁾ Vielfach wird in der projektiven Geometrie, so auch bei v. Staudt, diesen Flächen der Name „Regelflächen“ vorbehalten, was sich nicht mit dem heutigen Sprachgebrauche der algebraischen und der Differentialgeometrie deckt. Die Bezeichnung „regulär“ deutet im Sinne der Differentialgeometrie darauf hin, daß jeder Flächenpunkt genau eine Tangentialebene besitzt.

nicht verschwindender Koeffizientendeterminante. Die Gleichung des Büschels lautet dann

$$(1) \quad \lambda \cdot A(x, x) + \mu \cdot B(x, x) = 0.$$

11. Da im folgenden nichts über unebene Kurven 4. Ordnung 1. Spezies, speziell auch nichts über ihr Zerfallen vorausgesetzt werden soll, sei zunächst daran erinnert, wie man die weiterhin benötigten einschlägigen Tatsachen so ableiten kann, daß dabei lediglich die Kenntnis der Zahl und Multiplizität der Schnittpunkte zweier Kegelschnitte vorausgesetzt wird, eine Kenntnis, die man in bekannter, elementarer Weise durch projektive Betrachtungen und Rechnung gewinnen kann:

Die Schnittkurve der Ausgangsflächen $[F_a]$ und $[F_b]$, die Grundkurve des Büschels, trifft eine Ebene ε algebraisch gezählt in 4 Punkten, nämlich in den Schnittpunkten der Kegelschnitte (K_a) und (K_b) , in denen ε die Ausgangsflächen trifft. Die Grundkurve des Büschels ist demnach von der 4. Ordnung. Für diesen Schluß ist ε so anzunehmen, daß es nicht die beiden Ausgangsflächen in demselben Kegelschnitt oder derselben Geraden trifft, was in manchen Fällen vorkommen kann. In diesen Fällen ist die Grundkurve reduzibel. Die Summe der Ordnungen der Einzelbestandteile ist dann, wie der Schnitt mit ε zeigt, wieder 4. In einer reduziblen Grundkurve kann eine Gerade g doppelt zählen, nämlich dann und nur dann, wenn sie in jedem Schnitt mit einer Ebene ε von den 4 Punkten 2 absorbiert, d. h. wenn sich in jedem Punkte von g die beiden Ausgangsflächen berühren¹⁾.

Ebenso erkennt man, daß ein Kegelschnitt in einer reduziblen Grundkurve doppelt zählen kann, und zwar immer und nur dann, wenn sich längs seiner die Ausgangsflächen und folglich die regulären Büschelflächen berühren.

Da die Grundkurve auf der Fläche $[F_a]$ liegt, deren ebene Schnitte die Ordnung 2 haben, ist eine irreduzible Grundkurve 4. Ordnung uneben, ebenso ein irreduzibler Bestandteil 3. Ord-

¹⁾ Ist nämlich G der Schnittpunkt von g mit ε , dann berühren sich (K_a) und (K_b) in G , und ist t deren gemeinsame Tangente, dann berührt die Ebene (t, g) offenbar in G die beiden Ausgangsflächen.

nung einer Grundkurve. Im ersten Falle kann höchstens ein Doppelpunkt auftreten, im letzten keiner³⁾).

12. Wie in Nr. 1 erkennt man, daß zu jedem $\{F^2\}$ -Büschel ein in sich duales Hauptssystem gehört, das aus den Elementen besteht, die zueinander paarweise für alle Büschelflächen polar liegen.

Daraus, daß jedes der drei Arten von Doppelementen einer räumlichen Kollineation, Punkt, Gerade, Ebene der Träger mindestens eines Doppelements jeder der beiden anderen Arten ist, folgt unmittelbar der

Satz 5. Im Hauptssystem eines $\{F^2\}$ -Büschels ist jedes der Elemente Punkt, Gerade, Ebene der Träger mindestens eines Elementes jeder der beiden anderen Arten.

Da, wie vorher bei den Kegelschnitten, auch hier wieder die Büscheltypen auf dem Weg über ihre Hauptssysteme bestimmt werden sollen, mögen in diesem §, als Unterbau der eigentlichen Betrachtungen, einige Sätze abgeleitet werden, die sich leicht aus bekannten Polareigenschaften der Flächen 2. Ordnung ergeben. Dabei besteht ein einfacher Zusammenhang zwischen den Hauptsystemen von Kegelschnittbüscheln und denen von $\{F^2\}$ -Büscheln, denn man erhält bekanntlich die durch einen ebenen, nicht tangentialen Schnitt einer regulären Fläche 2. Ordnung bestimmte Polarität als ebenen Schnitt der Flächenpolarität. Dies liefert, auf die Flächen eines Büschels angewendet, den

Satz 6. Enthält eine Hauptebene ε eines $\{F^2\}$ -Büschels ihren Pol nicht, dann trifft sie das Flächenbüschel in einem Kegelschnittbüschel, dessen Hauptssystem der Schnitt von ε mit dem Hauptssystem des Flächenbüschels ist.

³⁾ Doppelpunkt ist definitionsgemäß ein Punkt, der in jedem ihn enthaltenden ebenen Schnitt 2 Punkte absorbiert. Wären D_1 und D_2 zwei Doppelpunkte einer solchen (C^4) und P einer ihrer weiteren Punkte, dann würden die beiden Kegelschnitte, in welchen die Ebene PD_1D_2 die Ausgangsflächen trifft, algebraisch 5 Punkte gemeinsam haben, d. h. zusammenfallen und damit Bestandteil der Grundkurve sein. Analog würde ein Doppelpunkt D der (C^3) mit zwei ihrer einfachen Punkte eine Ebene bestimmen, in welcher die (C^3) für die beiden Kegelschnitte 4 Schnittpunkte liefern würde, die Restgerade einen fünften.

13. Wir wenden uns nun Zusammenhängen zwischen den Grundkurven und den Hauptsystemen zu. Ist ein Punkt P der Grundkurve zugleich Hauptpunkt, dann ist, da er auf der Ausgangsfläche $[F_a]$ liegt, seine Polarebene π die Tangentialebene an $[F_a]$ in P , und dies gilt für jede reguläre Büschelfläche. Fällt umgekehrt ein Hauptpunkt in seine Polarebene, dann muß er, wie die Polarität für $[F_a]$ zeigt, auf dieser Fläche liegen und auch dies trifft wieder für jede reguläre Büschelfläche zu. Dies gibt zusammengefaßt den

Satz 7. a) Ein Hauptpunkt eines $\{F^2\}$ -Büschels liegt immer und nur dann in seiner Polarebene, wenn er der Grundkurve angehört.

b) Die regulären Büschelflächen berühren sich dann in ihm, und zwar mit seiner Polarebene als Tangentialebene.

Ganz entsprechend dem Beweise des Satzes 2 in Nr. 2 beweist man den

Satz 8. a) Verbindet man einen Hauptpunkt P eines $\{F^2\}$ -Büschels, der nicht auf der Grundkurve liegt, mit einem Punkte der Grundkurve, der nicht in der Polarebene π von P liegt, dann enthält diese Verbindungsgerade noch einen weiteren Punkt der Grundkurve.

b) Die beiden Punkte der Grundkurve liegen zu P und dem Schnittpunkt ihrer Verbindungslinie mit π harmonisch.

14. Reduzible Grundkurven lassen einige besondere Aussagen zu. Gehört eine Gerade zur Grundkurve, dann ist sie als Erzeugende von $[F_a]$ ihre eigene Polare. Ist umgekehrt eine Hauptgerade ihre eigene Polare, dann muß sie Erzeugende von $[F_a]$ sein. Da dies für alle regulären Büschelflächen richtig ist, gilt der

Satz 9. Eine Gerade ist dann und nur dann Teil der Grundkurve eines $\{F^2\}$ -Büschels, wenn sie Hauptgerade und ihre eigene Polare ist.

Wenn das ganze Feld einer Ebene ε zum Hauptsystem gehört, dann bestimmen die Schnitte von ε mit $[F_a]$ und $[F_b]$ dieselbe Polarität, sie sind demnach identisch. Ist ε nicht Tangentialebene, dann muß ε als Hauptebene denselben Pol für beide Aus-

gangsflächen haben, d. h. diese berühren sich in ihrem Schnitte mit ε . Das ist der Beweis für den

Satz 10. Im Hauptsystem eines $\{F^2\}$ -Büschels tritt immer und nur dann ein ebenes Feld auf, das seinen Pol nicht enthält, wenn sich die regulären Büschelflächen längs eines irreduziblen Kegelschnittes berühren.

Gehen wieder $[F_a]$ und $[F_b]$ durch einen irreduziblen Kegelschnitt (K) , aber ohne sich in ihm zu berühren, dann sind die beiden Pole S und T der Kegelschnittebene ε verschieden. ST trifft ε in einem Punkte P . Liegt P auf (K) , dann berühren sich die beiden Flächen in P , und P ist Hauptpunkt. Liegt aber P nicht auf (K) , und sind u, v die Kegelschnitttangente aus P , ferner U, V deren Berührungspunkte, dann sind (S, T, u) und (S, T, v) Hauptebenen, ebenso U, V Hauptpunkte. Hieraus und aus Satz 10 erhält man den

Satz 11. Gehört zur Grundkurve eines $\{F^2\}$ -Büschels ein irreduzibler Kegelschnitt, dann liegt auf ihm mindestens ein Hauptpunkt.

Haben $[F_a]$ und $[F_b]$ zwei verschiedene, einander in einem Punkte P berührende Kegelschnitte (K_1) und (K_2) gemeinsam, und ist t deren Tangente in P , dann hat irgendein Punkt U von t die gleiche Polarebene für $[F_a]$ und $[F_b]$, sie geht nämlich durch die beiden Polaren u_1 und u_2 von U , die zu (K_1) und (K_2) gehören. Daher ist t Hauptgerade, folglich auch deren Polare $\bar{t}$ ¹⁾, die dann, ebenso wie t , die beiden Ausgangsflächen in P berühren muß, sodaß $t\bar{t}$ gemeinsame Tangentialebene aller regulären Büschelflächen in P ist. Das ist der Beweis für den

Satz 12. Besteht die Grundkurve eines $\{F^2\}$ -Büschels aus zwei verschiedenen, irreduziblen Kegelschnitten, die sich in einem Punkte P mit der gemeinsamen Tangente t berühren, dann berühren sich alle regulären Büschelflächen in P , und t ist Träger einer Punktreihe von Hauptpunkten sowie eines Büschels von Hauptebenen²⁾.

¹⁾ Wegen des Satzes 9 sind t und $\bar{t}$ verschieden.

²⁾ In Nr. 22 werden wir das vollständige Hauptsystem eines solchen $\{F^2\}$ -Büschels kennen lernen.

§ 3.

Klassifikation der $\{F^2\}$ -Büschel.

15. Nach den vorbereitenden Betrachtungen des § 2 soll nun die Klassifikation der $\{F^2\}$ -Büschel mittels der in K.K. gegebenen Klassifikation der räumlichen Kollineationen durchgeführt werden. Jeder der 14 räumlichen Kollineationstypen liefert einen Flächenbüscheltyp, wieder mit Ausnahme der identischen Kollineation, Typ (5), welche, wie Typ (III) in Nr. 4, zu keinem Büschel führt.

Die hierher gehörende Figur 2, auf die nicht mehr besonders hingewiesen wird, befindet sich am Ende dieser Abhandlung²⁾. Sie gibt zunächst, wie in K.K., die Doppelemente der einzelnen Kollineationstypen an³⁾, und zwar die Punkte durch ausgefüllte Nullkreise, die Doppelgeraden durch ausgezogene Linien, die Doppelebenen durch Winkelbogen. Die gestrichelten Geraden sowie die nicht ausgefüllten Nullkreise werden später für Koordinatensysteme verwendet werden, sie sind keine Doppelemente, demnach auch keine Hauptelemente. Bei den einzelnen Typen sind die zugehörigen Grundkurven stark gezeichnet.

Wie schon in § 1 wird auch hier der Kürze halber der Nachweis unterdrückt, daß die Doppelemente des Kollineationstyps die einzigen Hauptelemente eines Flächenbüschels mit der jeweils angegebenen Grundkurve sind, ein Nachweis, der mittels der Sätze 5—8 immer leicht zu führen ist. Daß im folgenden in jedem Falle die ganze Grundkurve angegeben ist, folgt ohne weiteres aus Nr. 11.

16. Der Kollineationstyp (1). Wie zu Beginn von Nr. 4 sind auch hier zunächst mehrere Unterfälle zu unterscheiden, von denen wieder nur einer tatsächlich auftreten kann. Diese sind:

²⁾ Die Grundkurven der verschiedenen Typen von $\{F^2\}$ -Büscheln in anschaulich befriedigender Weise und richtig in Figuren darzustellen, ist, vor allem auch wegen der zahlreichen Kontrollen infolge der polaren Beziehungen, nicht ganz einfach, noch dazu, wenn alle Fälle, wie in der vorliegenden Figur, im gleichen Koordinatentetraeder gezeigt werden sollen. Hieraus erklärt sich die Vorsicht, mit der man in der Literatur dieser Aufgabe aus dem Wege gegangen ist.

³⁾ In K.K. Fig. 3 ist bei (13) versehentlich der Zusatz „Gescharte Kollineation“ weggelassen.

- a) Ein Hauptpunkt, A , liegt in seiner Polarebene, γ , in dieser liegt noch ein Hauptpunkt, B , der in seine Polarebene fällt;
 b) Ein Hauptpunkt, A , fällt in seine Polarebene, γ , ein Hauptpunkt außerhalb dieser Ebene, C , ebenfalls in seine Polarebene und es liegt nicht Fall a) vor;
 c) Genau ein Hauptpunkt, A , liegt in seiner Polarebene, γ ;
 d) Kein Hauptpunkt liegt in seiner Polarebene.

Der Fall a): Die Polarebene von B müßte durch A gehen und von γ verschieden sein, es wäre dies δ . Die Polarebene von C enthielte dann B , aber nicht A , fiel demnach in α , während D die Polarebene β hätte. Nach Satz 9 bestünde dann die Grundkurve aus dem Vierseit $ABCD$, und ein Punkt P von AC hätte für jede reguläre Büschelfläche die Ebene BDQ zur Polarebene mit $(ACPQ) = -1$, sodaß, da man ebenso für BD schließen könnte, die Punktreihen und Ebenenbüschel mit den Trägern AC und BD zum Hauptsystem gehören müßten, was bei (1) nicht der Fall ist.

Der Fall b): Die Polarebene von C dürfte A nicht enthalten, fiel somit in α , und da es sich nicht um den Fall a) handeln soll, wären β und δ die Polarebenen von B und D . AC wäre Polare von BD , und nach Satz 7a die Punkte A und C auf der Grundkurve liegen würden, ergäbe sich genau wie im vorigen Falle, daß die Punktreihe AC und das Ebenenbüschel BD Bestandteile des Hauptsystems sein müßten¹⁾.

Der Fall c) kann nicht eintreten, weil für den außerhalb γ liegenden Punkt C keine Ebene übrig bliebe, die C nicht enthielte.

Der Fall d) ist demnach der einzige, der hier eintreten kann; den Hauptpunkten A, B, C, D sind die Hauptebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ polar zugeordnet. Nach Satz Satz 7a liegt kein Hauptpunkt auf der Grundkurve, nach den Sätzen 9 und 11 ist diese irreduzibel. Hätte sie einen Doppelpunkt P , dann würde eine beliebige Ebene durch P die Ausgangsflächen $[F_a]$ und $[F_b]$ in Kegelschnitten treffen, die sich in P berührten, die beiden Flächen hätten demnach in P dieselbe Tangentialebene π und die polare Zuordnung $P \sim \pi$ würde der Annahme d) widersprechen. Das gibt zusammen-

¹⁾ Man könnte aber, abweichend vom vorigen Falle, nicht schließen, daß alle Punkte von BD und alle Ebenen durch AC Hauptelemente wären.

gefaßt: die Grundkurve ist eine irreduzible, doppelpunktfreie, unebene Kurve 4. Ordnung.

17. Der Kollineationstyp (2). Wegen der Dualität im Hauptssystem sind den Punkten von AB die Ebenen durch CD polar zugeordnet, und da diese zwei zueinander polaren Träger windschief sind, kann keiner von beiden eine der Ausgangsflächen berühren¹⁾; ebenso gehört nach Satz 9 keiner von beiden zur Grundkurve.

A , B seien die Schnittpunkte ihres Trägers mit $[F_a]$. Dann liegen sie in ihren Polarebenen, es sind dies demnach α und β , und zwar gilt dies, da es sich um Hauptpunkte handelt, für alle regulären Büschelflächen. Nach Satz 7 b sind daher α und β Tangentialebenen dieser Büschelflächen in A und B .

Hätte C die Polarebene δ , dann würde für D nur die Polarebene γ übrig bleiben, und nach Satz 9 würde die Grundkurve aus dem Viereck $ABCD$ bestehen und damit nach dem beim Fall a) von Nr. 16 Ausgeführten auf ein von dem hier vorliegenden verschiedenes Hauptssystem führen. Daher sind γ und δ die Polarebenen von C und D .

Ist P ein von A und B verschiedener Punkt der Grundkurve, dann trifft die Ebene ABP die Ausgangsflächen in zwei Kegelschnitten, die sich nach dem vorletzten Absatz in A und B berühren und außerdem den Punkt P gemeinsam haben, d. h. zusammenfallen. Dieser Kegelschnitt (K) gehört demnach zur Grundkurve. Auf CP liegt nach Satz 8 a ein Punkt P_1 der Grundkurve außerhalb (K). P_1 liefert ebenso wie P einen Grundkegelschnitt. Die Grundkurve zerfällt demnach in zwei irreduzible Kegelschnitte, die sich in zwei Punkten treffen und in verschiedenen Ebenen liegen.

18. Der Kollineationstyp (3). Zentrale Kollineation mit dem Zentrum D und der D nicht enthaltenden Kollineationsebene δ . Wegen der Dualität im Hauptssystem ist D der Pol von δ . Hier gilt demnach Satz 10 und die Grundkurve besteht aus einem irreduziblen Kegelschnitt, längs dessen sich alle regulären Büschelflächen berühren.

¹⁾ Die Polare einer Flächentangente berührt die Fläche im gleichen Punkt.

19. Der Kollineationstyp (4). Gescharte Kollineation mit den beiden Achsen AD und BC . Wäre die Gerade AD ihre eigene Polare, dann würden sich nach den Sätzen 7 und 9 die Flächen $[F_a]$ und $[F_b]$ längs AD berühren, ebenso längs BC . Auf $[F_a]$ müßte die zweite von einem Punkte P ausgehende Erzeugende durch den Schnittpunkt von BC mit der Tangentialebene des Punktes P laufen, ebenso auf $[F_b]$, und die beiden Ausgangsflächen wären damit identisch.

Demnach muß BC Polare von AD sein. Genau wie in den beiden ersten Absätzen von Nr. 17 erkennt man auch hier, daß diese beiden Geraden die Ausgangsflächen in denselben vier Punkten treffen, es seien dies $A, B, C, D^1)$ und daß sich die zwei Flächen dort berühren. Dies ist aber, bis auf die Bezeichnung, der Fall a) von Nr. 16, man weiß demnach, daß hier die Grundkurve aus dem unebenen Vierseit $ABDCA$ besteht.

Der Kollineationstyp (5), die identische Kollineation, liefert, worauf schon in Nr. 15 hingewiesen wurde, nichts.

20. Der Kollineationstyp (6). Dem Schnittpunkte D von drei Doppelgeraden entspricht polar die Ebene δ dreier Doppelgeraden. Für D trifft demnach Satz 7 zu.

Die Polarebenen von B und A sind β und α . Wäre nämlich α Polarebene von B und damit β von A , dann wären die Geraden AD und BD nach Satz 9 Grundgerade des Flächenbüschels, und das Strahlenbüschel (D, δ) müßte zum Hauptssystem gehören²⁾.

Da somit AB Polare von CD ist, AD von BD , kann sich nach Satz 9 von der Grundkurve keine Gerade abspalten. Die Grundkurve kann aber auch nicht in zwei Kegelschnitte zerfallen, denn nach Satz 10 könnten diese nicht zusammenfallen, nach Satz 12 sich nicht in einem Punkte berühren und schneiden sie sich in zwei getrennten Punkten, dann würden zwei Hauptpunkte in ihren Polarebenen liegen, nämlich diese Schnittpunkte³⁾, und

1) Diese Punkte sind innerhalb ihrer Punktreihen im System der Doppelpunkte der Kollineation nicht ausgezeichnet.

2) Denn irgendein Strahl dieses Büschels hätte zur Polaren für alle Büschelflächen den Strahl, der zu ihm und zu DA, DB harmonisch liegt.

3) Wäre nämlich P einer dieser Punkte, und wären s, t die Tangenten in ihm an die beiden Kegelschnitte, dann wäre (s, t) Tangentialebene in P an die regulären Büschelflächen.

nicht nur der eine Hauptpunkt D . Die Grundkurve ist demnach irreduzibel.

Nach Satz 6 trifft die Ebene α das $\{F^2\}$ -Büschel in einem Kegelschnittbüschel vom Typ (IV), d. h. die Grundkurve in zwei einzelnen Punkten und zwei in D zusammenfallenden. Da dasselbe auch für β gilt, ist D Doppelpunkt der Grundkurve¹⁾. Die Grundkurve ist hier demnach eine irreduzible, unebene Kurve 4. Ordnung mit Doppelpunkt.

Daß hier tatsächlich ein Doppelpunkt mit verschiedenen Tangentenrichtungen und keine Spitze vorliegt, wird in Nr. 32 gezeigt werden.

21. Der Kollineationstyp (7). Im Hauptsystem entspricht der Ebene δ des einzigen Strahlenbüschels dual dessen Scheitel D , und dieser liegt nach Satz 7 auf der Grundkurve. Genau wie in den beiden ersten Absätzen von Nr. 17 erkennt man auch hier, daß AB Polare von CD ist, und daß die beiden Ausgangsflächen $[F_a]$ und $[F_b]$ in A und B die gemeinsamen Tangentialebenen α und β haben. Nach Satz 9 sind demnach AD und BD Grundgerade des Büschels.

Irgendeine von α und β verschiedene Ebene des Büschels CD trifft nach Satz 6 das $\{F^2\}$ -Büschel in einem Kegelschnittbüschel vom Typ (IV) und liefert damit Punkte der Grundkurve außerhalb der beiden Grundgeraden. Wie im letzten Absatze von Nr. 17 findet man mittels eines solchen Punktes P einen Grundkegelschnitt, er berührt α und β in A und B . Somit besteht die Grundkurve aus einem irreduziblen Kegelschnitt und zwei sich schneidenden Geraden außerhalb seiner Ebene, die diesen in je einem Punkte treffen.

22. Der Kollineationstyp (8). Dual ist der Träger AD der Punktreihe von Doppelpunkten Polare des Trägers BD des Büschels von Doppel-ebenen. Somit gilt für D und dessen Polarebene δ der Satz 7. Dem Scheitel B eines Büschels von Doppelstrahlen entspricht polar β als einzige noch freie Ebene eines solchen Büschels. Die Polarebene von A ist eine von δ verschiedene Ebene des Büschels BD , es sei dies α .

¹⁾ Das folgt auch aus der Tatsache, daß irgendeine Ebene ε durch D das Flächenbüschel in einem Kegelschnittbüschel schneidet, dessen Kegelschnitte sich in D mit der Schnittlinie $\varepsilon \times \delta$ als Tangente berühren.

ϵ sei irgendeine von δ verschiedene Ebene des Büschels AD . Sie schneidet die Ausgangsflächen in zwei Kegelschnitten, welche für irgendeinen Punkt P von AD dieselbe Polare (durch D) liefern, nämlich die Schnittlinie von ϵ mit der Polarebene π von P im Büschel BD . Diese beiden Kegelschnitte berühren sich daher nach Satz 4 in D vierpunktig.

Satz 6 liefert in α den Büscheltyp (IV) und damit zwei von D verschiedene Punkte L und M der Grundkurve, die nach Satz 8 auf einem Strahl durch B liegen. In den Ebenen ADL und ADM fallen die Schnittkegelschnitte mit den Ausgangsflächen zusammen, da sie trotz vierpunktiger Berührung noch einen weiteren Punkt gemeinsam haben. Demnach besteht die Grundkurve aus zwei irreduziblen Kegelschnitten, die sich berühren und in verschiedenen Ebenen liegen.

23. Der Kollineationstyp (9). Zentrale Kollineation mit dem Zentrum D und der Kollineationsebene δ durch D . Dual ist δ , der Träger des ebenen Feldes von Doppelementen, Polarebene für den Scheitel D des Bündels von Doppelementen. Für D und δ gilt der Satz 7, und die beiden Schnitterzeugenden von δ mit $[F_a]$ sind als Gerade von δ Hauptgerade und gehören demnach zufolge Satz 9 zur Grundkurve. Jeder Punkt dieser Erzeugenden hat im Bündel dieselbe Polarebene, d. h. die Grundkurve besteht aus zwei sich schneidenden Geraden, längs deren sich alle regulären Büschelflächen berühren.

24. Der Kollineationstyp (10). Dem Schnittpunkte D der beiden Doppelgeraden entspricht polar deren Ebene δ , während α Polarebene von A ist. AD ist demnach Polare von CD .

Die Grundkurve geht nach Satz 7 durch D , ferner ist sie irreduzibel, was man wie im dritten Absatze von Nr. 20 erkennt. Irgendeine Ebene durch D trifft die Ausgangskurven in zwei Kegelschnitten, die sich in D berühren, D ist demnach Doppelpunkt der Grundkurve.

Die Frage der Tangenten an die Grundkurve in D wird wieder später behandelt werden, und zwar rechnerisch¹⁾: in Nr. 34 wird sich ergeben, daß DC die einzige Tangente im Doppelpunkt

¹⁾ Der Schluß, mittels dessen v. Staudt a. a. O. Nr. 554 in diesem Fall auf eine Spitze schließt, ist nicht so weit ausgeführt, daß er bindend wäre.

ist. Daher hat das Büschel eine unebene, irreduzible Kurve 4. Ordnung mit Spitze zur Grundkurve.

25. Der Kollineationstyp (11). D und δ sind als Scheitel und Ebene des einzigen Büschels von Doppelstrahlen Pol und Polarebene, für sie gilt Satz 7. Der Träger der Doppelpunktreihe AD der Kollineation ist Pol des Trägers DC des Doppelbenenbüschels.

Das Strahlenbüschel (D, δ) ist polar auf sich bezogen, die Doppelstrahlen dieser Involution gehören nach Satz 9 zur Grundkurve. Jede von δ verschiedene Ebene des Büschels CD enthält nach Satz 6 ein Kegelschnittbüschel vom Typ (VI) und damit einen von D verschiedenen Punkt der Grundkurve. Diese Restkurve kann nach Satz 9 keine Gerade sein, ist folglich ein Kegelschnitt, und zwar ein durch D laufender und dort δ berührender. Folglich besteht die Grundkurve aus einem irreduziblen Kegelschnitt und außerhalb seiner Ebene aus zwei von einem seiner Punkte ausgehenden Geraden, deren Ebene ihn berührt.

26. Der Kollineationstyp (12). Die Verbindungslinie BD der beiden Doppelpunkte, in der sich auch die beiden Doppelbenen schneiden, ist nach Satz 9 Grundgerade. Wäre die Gerade AB ihre eigene Polare, dann wäre auch sie Grundgerade, und das Strahlenbüschel $B(A, D \dots)$ müßte zum Hauptssystem gehören. Demnach ist CD Polare von AB , folglich sind β, δ die Polarebenen von B, D , und für sie gilt Satz 7.

Nach Satz 9 ist BD die einzige Grundgerade. Daher ist die Restkurve 3. Ordnung (C^3) irreduzibel, denn es könnte sich höchstens BD von ihr abspalten, was nach Nr. 11 die Berührung der beiden Ausgangsflächen längs DB bedeuten würde und damit die Zugehörigkeit des Ebenenbüschels BD zum Hauptssystem.

Irgendeine Ebene ε durch B trifft die Ausgangsflächen in zwei Kegelschnitten, die sich in B berühren, folglich wird ε von der (C^3) außerhalb B in zwei Punkten getroffen, d. h. B und entsprechend auch D liegen auf der (C^3). Die Grundkurve besteht aus einer irreduziblen, unebenen Kurve 3. Ordnung und einer ihrer Doppelsekanten. Die Bestimmung der Tangenten in den Sekantenschnittpunkten folgt in Nr. 35.

27. Der Kollineationstyp (13). Gescharte Kollineation mit der einzigen Achse BD . BD ist als Träger der einzigen Punktreihe und des einzigen Ebenenbüschels des Hauptsystems nach Satz 9 Grunderzeugende. Da die Punkte von BD Hauptpunkte sind, berühren sich längs dieser Erzeugenden die Ausgangsflächen.

Jeder Punkt von BD ist Scheitel eines zum Hauptsystem gehörenden Strahlenbüschels, dessen Ebene durch BD läuft. Angenommen, das Büschel (B, β) entspräche sich selbst polar; dann wäre auch der von BD verschiedene Doppelstrahl der polaren Involution dieses Büschels nach Satz 9 Grundgerade. Daher können nicht alle diese Strahlenbüschel zu sich selbst polar sein, weil sonst die Ausgangsflächen alle Erzeugenden der einen Schar gemeinsam hätten und damit identisch wären. Die Scheitel der zueinander polaren Büschel liegen demnach in Involution, und von jedem Doppelpunkte dieser Involution, es seien dies B und D , geht nach dem soeben Ausgeführten eine von BD verschiedene Grundgerade aus. Die Grundkurve besteht aus zwei windschiefen und einer diese beiden treffenden Geraden; längs der letzten berühren sich die regulären Büschelflächen.

28. Der Kollineationstyp (14). Die Gerade DC ist als einzige Hauptgerade ihre eigene Polare und daher nach Satz 9 Grundgerade.

D ist der einzige Hauptpunkt, daraus folgt, daß δ als einzige Hauptebene dessen Polarebene ist, und daß sich die Ausgangsflächen wegen des Satzes 7 in keinem anderen Punkte von DC berühren können. Irgend eine Ebene durch DC trifft daher die Ausgangsflächen außer in DC in zwei Erzeugenden, die sich außerhalb DC schneiden. Diese Schnittpunkte liegen auf einer Restkurve, die man wie im 2. Absatze von Nr. 26 als irreduzible (C^3) erkennt. Die Ebenen des Büschels CD zeigen, daß die Büschelachse von der (C^3) in zwei Punkten getroffen wird. Diese beiden Punkte fallen in D zusammen, da der Schnitt der Ausgangsflächen mit δ aus DC und zwei weiteren sich in D schneidenden Erzeugenden besteht. Folglich berührt die (C^3) , die ja nach Nr. 11 keinen Doppelpunkt hat, DC in D . Die Grundkurve besteht aus einer irreduziblen, unebenen Kurve 3. Ordnung und einer ihrer Tangenten¹⁾.

¹⁾ Da alle drei Schnittpunkte von δ mit der (C^3) in D liegen, ist δ Schmiegungsebene der Kurve in diesem Punkte. [Forts. S. 116]

Damit sind die bekannten 13 Typen von $\{F^2\}$ -Büscheln aus ihren Hauptsystemen gefunden. Daß wirklich Büschel mit den angegebenen Grundkurven existieren, ergibt sich entweder aus der Angabe der Büschelgleichungen der verschiedenen Typen im folgenden § oder aus den Beispielen des § 8. Die Büscheltypen werden weiterhin nach ihrem Kollineationstyp numeriert.

§ 4.

Gleichungen der $\{F^2\}$ -Büschel.

29. Ehe wir uns der Aufgabe zuwenden, zu untersuchen, ob irgend zwei $\{F^2\}$ -Büschel des gleichen Typs projektiv äquivalent sind, wollen wir hier Büschelgleichungen der verschiedenen Typen geben. Dabei wird jeweils das Koordinatensystem so zur Grundkurve gelegt werden, daß die Zahl der Konstanten in der Gleichung möglichst klein wird.

Die bisher verwendete Figur 2 gilt auch weiterhin, im Koordinatentetraeder liegen den Eckpunkten A, B, C, D die Ebenen $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$ gegenüber.

Aus den Büschelgleichungen kann man dann ohne weiteres die Konstellation der kegelförmigen und der zerfallenden Büschelflächen zur Grundkurve erschließen¹⁾, eine Kenntnis, die man bei der erwähnten Untersuchung der projektiven Äquivalenz benötigt.

Die Büschelgleichungen zeigen ferner, wie erwähnt, daß es Büschel eines jeden Typs gibt.

[Forts. von S. 115] Man kann diese $\{F^2\}$ -Büschel auch so charakterisieren: irgend zwei reguläre Büschelflächen haben eine Erzeugende gemeinsam, nur in einem Punkte derselben die Tangentialebene und in dieser Tangentialebene nicht auch die zweiten Erzeugenden gemeinsam. Das ergibt sich, da alle anderen Fälle von $\{F^2\}$ -Büscheln schon behandelt sind, ohne weiteres daraus, daß bei jedem anderen Büscheltyp mit mindestens einer Grundgeraden — es sind das die Typen (4), (7), (9), (11), (12), (13) — wenigstens eine der beiden soeben genannten Zusatzeigenschaften fehlt.

¹⁾ Damit wird das Heranziehen algebraisch-geometrischer Tatsachen vermieden, wie der, daß eine unebene (C^3) aus einem ihrer Punkte durch einen Kegel 2. Ordnung projiziert wird, ebenso eine unebene (C^3) mit Doppelpunkt aus diesem Doppelpunkt.

30. Typ (1): Nach Nr. 16 ist A, B, C, D das gemeinsame Polardreieck der beiden Ausgangsflächen, deren Gleichungen enthalten demnach nur die rein quadratischen Glieder. Nach Gl. (1) von Nr. 10 enthält demnach das Flächenbüschel 4 Kegel mit den Spitzen A, B, C, D ¹⁾. $[A]$ und $[B]$ seien die beiden ersten von ihnen, sie sollen der Büschelgleichung zugrunde gelegt werden. Legt man dann den Einheitspunkt E_2 in der Ebene $x_2 = 0$ so, daß $[B]$ durch die Punkte $(1; 0; 0; 1)$ und $(0; 0; 1; 1)$ geht, und wählt man als räumlichen Einheitspunkt einen Schnittpunkt von BE_2 mit $[A]$, dann ist die Büschelgleichung beim

$$\text{Typ (1)} \quad \lambda x_1^2 + \mu x_2^2 + (\lambda + a\mu) x_3^2 - (\lambda + \mu + a\mu) x_4^2 = 0.$$

Typ (2): In der Gleichung von $[F_a]$ sind wegen der in Nr. 17 angegebenen Polareigenschaften alle Koeffizienten Null, außer a_{12}, a_{33}, a_{44} . Die Gleichung des Flächenbüschels zeigt dann, daß C und D Spitzen von Kegeln des Büschels sind, daß die Ebenen der beiden Grundkegelschnitte harmonisch zu γ und δ liegen, und daß die beiden Kegelschnittebenen eine Büschelfläche bilden. Baut man die Gleichung aus dieser Fläche und einem der Kegel auf, und wählt man den Einheitspunkt auf einem der Grundkegelschnitte, dann findet man als Büschelgleichung für den

$$\text{Typ (2)} \quad \lambda x_1 x_2 - (\lambda - \mu) x_3^2 - \mu x_4^2 = 0.$$

31. Weiterhin wird der Kürze halber die Angabe unterbleiben, welche speziellen Werte die Koeffizienten in den Gleichungen von $[F_a]$ und $[F_b]$ auf Grund der in § 3 genannten Polareigenschaften des betreffenden Typs annehmen, ebenso die ausdrückliche Erwähnung, daß man die Existenz der aufgeführten kegelförmigen oder zerfallenden Büschelflächen an der aus $[F_a]$ und $[F_b]$ gewonnenen Büschelgleichung erkennt.

Typ (3) von Nr. 18: Die doppelt zählende Ebene $x_4 = 0$ ist Büschelfläche, weiterhin der den Grundkegelschnitt aus D projizierende Kegel. Nimmt man in $x_4 = 0$ die Punkte B, C und den Einheitspunkt auf dem Grundkegelschnitt an, A im Pol von BC , dann ist die Büschelgleichung bei dem

$$\text{Typ (3)} \quad \lambda x_1^2 - \lambda x_2 x_3 + \mu x_4^2 = 0.$$

Typ (4) von Nr. 19: Die Ebenenpaare BCD, BCA und ADC, ADB gehören zum Flächenbüschel. Sie liefern bei beliebigem Einheitspunkt als Büschelgleichung für den

¹⁾ Diese Kegel projizieren nach Satz 8a die Grundkurve doppelt.

Typ (4): $\lambda x_1 x_4 + \mu x_2 x_3 = 0$.

Einen Büscheltyp (5) gibt es nach Nr. 15 nicht.

32. Typ (6): Zunächst möge die in Nr. 20 gestellte Frage nach der Zahl der Tangenten im Doppelpunkte D der Grundkurve beantwortet werden.

Im Flächenbüschel treten 3 Kegel mit den Spitzen A, B, D auf. Sind $[A]$ und $[B]$ die beiden ersten, und wählt man den Punkt C auf $[A]$, ferner den Einheitspunkt auf der Grundkurve, dann sind die Gleichungen der beiden Kegel

$$[A]: x_2^2 - x_3 x_4 = 0, \quad [B]: x_1^2 + a x_3^2 - a x_3 x_4 = 0.$$

Eine Ebene ε des Ebenenbüschels $x_1 + \tau x_2 = 0$ trifft diese Kegel in Kegelschnitten, deren Projektionen (K) und (L) aus A in die Ebene α die Gleichungen $x_2^2 - x_3 x_4 = 0$, $\tau^2 x_2^2 + a x_3^2 - a x_3 x_4 = 0$ haben. Daher liefert $a x_3^2 + (\tau^2 - a) x_3 x_4 = 0$ die von B ausgehenden Richtungen nach den Schnittpunkten von (K) und (L) , und für $\tau = \pm \sqrt{a}$ erhält man zwei verschiedene Ebenen ε , welche die Grundkurve in mehr als zwei in D zusammenfallenden Punkten treffen¹⁾. $x_1 + \sqrt{a} \cdot x_2 = 0$, $x_3 = 0$ sind die beiden Tangenten $t, \bar{t}$ im Doppelpunkte der Grundkurve, der demnach keine Spitze ist.

Wählt man den räumlichen Einheitspunkt in der Ebene (BDt) , dann ist die Büschelgleichung für den

$$\text{Typ (6)} \quad \lambda x_1^2 + \mu x_2^2 + \lambda x_3^2 - (\lambda + \mu) x_3 x_4 = 0.$$

33. Typ (7) von Nr. 21: Das aus der Ebene des Grundkegelschnittes und ABD bestehende Ebenenpaar tritt unter den Büschelflächen auf, ferner der den Grundkegelschnitt aus D projizierende Kegel. Wählt man C in der Ebene des Grundkegelschnittes und auf diesem den Einheitspunkt seiner Ebene, dann lautet die Büschelgleichung für den

$$\text{Typ (7)} \quad \lambda x_1 x_2 - \lambda x_3^2 + \mu x_3 x_4 = 0.$$

¹⁾ Genau sind es 4 Punkte, diese Ebenen des Büschels CD sind nämlich die Schmiegungebenen der Grundkurve in deren Doppelpunkten. Dies hängt damit zusammen, daß AB und CD zueinander polar sind, und demnach eine Ebene des Büschels CD , welche die Grundkurve außerhalb D in einem Punkte P trifft, noch einen weiteren ihrer Punkte, Q , enthält, und zwar derart, daß PQ aus AB und CD zwei Punkte ausschneidet, die zu P und Q harmonisch liegen.

Typ (8) von Nr. 22: Derselbe Büschelkegel projiziert aus B die beiden Grundkegelschnitte. Das, durch AD laufende, Ebenenpaar dieser Kegelschnitte ist ebenfalls Büschelfläche. Nimmt man C auf der Geraden BLM an, den Einheitspunkt auf einem der Grundkegelschnitte, dann erhält man als Büschelgleichung für den

$$\text{Typ (8)} \quad \lambda x_1^2 + \mu x_2^2 - \mu x_3^2 - \lambda x_3 x_4 = 0.$$

Typ (9) von Nr. 23: Zum Flächenbüschel gehört die Doppelsebene δ und kein Kegel. Nimmt man A und B auf den Grundgeraden an, AC und BC als Erzeugende einer Büschelfläche und den Einheitspunkt auf dieser Fläche, dann liefert dies als Büschelgleichung für den

$$\text{Typ (9)} \quad \lambda x_1 x_2 + \mu x_3^2 - \lambda x_3 x_4 = 0.$$

34. Typ (10) von Nr. 24: Das Flächenbüschel enthält zwei Kegel, ihre Spitzen sind A und D . In α liefert Satz 6 ein Kegelschnittbüschel vom Typ (VI) und damit einen weiteren Punkt der Grundkurve; in diesen legen wir B . BD und DC muß dann der Schnitt von α mit dem zweiten Kegel sein. Wählt man C in der den ersten Kegel längs AB berührenden Ebene und den Einheitspunkt auf der Grundkurve, dann sind die Gleichungen der beiden Kegel

$$[D]: x_1^2 - x_2 x_3 = 0, \quad [A]: x_2 x_4 - x_3^2 = 0.$$

Eine Tangente t an die Grundkurve in deren Doppelpunkt D liegt wegen des Satzes 7 in δ , ferner schneidet die Ebene $(t, B) \equiv \varepsilon$ die Grundkurve außerhalb D nur in einem, und zwar einfach zählenden, Punkte. $x_3 = 0$ trifft die Grundkurve in B und D je zweipunktig, scheidet demnach für ε aus. Ist $x_1 - \tau x_3 = 0$ die Gleichung von ε , dann erkennt man aus dem Schnitte von ε mit $[D]$ und $[A]$ durch Elimination von x_1 , d. h. durch Projektion aus A , sofort, daß für ε nur der Wert $\tau = 0$ in Frage kommt, daß demnach DC einzige Kurventangente in D und damit D Spitze ist.

Die Büschelgleichung lautet beim

$$\text{Typ (10)} \quad \lambda x_1^2 - \lambda x_2 x_3 + \mu x_2 x_4 - \mu x_3^2 = 0.$$

Typ (11) von Nr. 25: Wir nehmen A in seiner Punktreihe außerhalb D beliebig an, B auf dem Grundkegelschnitt und gleichzeitig in der Polarebene von A , den Punkt C auf der Achse des Doppelebenenbüschels beliebig, den Einheitspunkt der Ebene $x_3 = 0$

auf dem Grundkegelschnitt, endlich den räumlichen Einheitspunkt in der Ebene, die B mit einer Grundgeraden verbindet. Das Flächenbüschel enthält keinen Kegel, aber das Ebenenpaar ADB , ADC . Man findet dann als Büschelgleichung für den

$$\text{Typ (11)} \quad \lambda x_1^2 + \mu x_2 x_3 - \lambda x_2 x_4 - \lambda x_3^2 = 0.$$

35. Typ (12) von Nr. 26: Das Büschel enthält einen Kegel $[B]$ mit der Spitze B , ebenso einen Kegel $[D]$. Nimmt man A auf $[D]$ an, C auf $[B]$ und den Einheitspunkt auf der (C^3) , dann erhält man als Büschelgleichung für den

$$\text{Typ (12)} \quad \lambda x_1^2 - \mu x_1 x_2 + \mu x_3^2 - \lambda x_3 x_4 = 0^1).$$

Typ (13) von Nr. 27: Bezeichnet man die beiden windschiefen Doppelgeraden mit AB und CD , die dritte Doppelgerade mit BD , dann tritt im Flächenbüschel das Ebenenpaar BDA , BDC auf und kein Kegel. Legt man AC in eine Erzeugende von $[F_a]$ und den Einheitspunkt auf $[F_a]$, dann ist die Büschelgleichung für den

$$\text{Typ (13)} \quad \lambda x_1 x_3 + \mu x_1 x_4 - \mu x_2 x_3 = 0.$$

Typ (14) von Nr. 28: Das Flächenbüschel enthält einen Kegel $[D]$ mit der Spitze D . Den Punkt A nimmt man auf der (C^3) an. $[D]$ berührt δ längs DC^2). Als Gerade DB wählen wir die Schnittlinie von δ mit der $[D]$ längs AD berührenden Ebene. Durch einen Punkt von DB geht eine Büschelfläche $[F]$, und da diese δ in D berührt, ist für sie BD Erzeugende. Den Punkt B wählen wir so, daß BA Erzeugende von $[F]$ ist; weiterhin legen wir AC ebenfalls in eine Erzeugende von $[F]$. Endlich liege der Einheitspunkt auf der (C^3) . Dann lautet die Büschelgleichung für den

$$\text{Typ (14)} \quad \lambda x_1 x_3 + \mu x_1 x_4 - \lambda x_2^2 - \mu x_2 x_3 = 0.$$

¹⁾ Man berechnet nun leicht, daß die Schnitte des $\{F^2\}$ -Büschels mit den Ebenen $x_2 - vx_3 = 0$ Kegelschnittbüschel vom Typ (VI) sind, mit ihrem dreifach zählenden Grundpunkt in D , sodaß zwei Schnittpunkte jeder solchen Ebene mit der (C^3) in D liegen. Demnach ist DA Tangente der (C^3) in D , entsprechend BC in B .

²⁾ Eine andere Tangentialebene würde auf DC in einem von D verschiedenen Punkt eine Berührung von $[F_a]$ und $[D]$ liefern und damit einen weiteren Hauptpunkt.

§ 5.

Kollineationen zwischen $\{F^2\}$ -Büscheln.

36. Im vorigen § wurden einfache Gleichungen für die $\{F^2\}$ -Büschel dadurch gewonnen, daß man sich bei der Wahl des Koordinatentetraeders und des Einheitspunktes auf die Grundkurven und die Kegel der Büschel stützte. In der Büschelgleichung trat dann beim Typ (1) in Nr. 30 noch eine wesentliche Konstante, α , auf, bei allen anderen Typen dagegen keine solche.

Am Schlusse von Nr. 6 war darauf hingewiesen worden, daß zwei Kegelschnittbüschel, deren Hauptssysteme zu demselben Kollineationstyp gehören, kollinear ineinander übergeführt werden können, sodaß man dort von Kegelschnitttypen im Sinne projektiver Äquivalenz innerhalb eines jeden Typs sprechen kann.

Wie steht es damit bei den $\{F^2\}$ -Büscheln?¹⁾ Für die Büschel vom Typ (2) ab ist die Frage sofort zu beantworten: sind zwei solche Büschel des gleichen Typs gegeben, dann wählt man in der im vorigen § angegebenen Weise bei jedem ein Koordinatensystem mit Einheitspunkt und erhält damit gleiche Büschelgleichungen, was nichts anderes heißt, als daß die Kollineation, welche den Ecken und dem Einheitspunkt des einen Koordinatensystems die analog gewählten Punkte des anderen Koordinatensystems zuordnet, das eine Büschel in das andere transformiert. Folglich gilt der

Satz 13. Irgend zwei $\{F^2\}$ -Büschel des gleichen, von (1) verschiedenen Typs lassen sich kollinear ineinander überführen.

Diese $\{F^2\}$ -Büschel verhalten sich demnach ebenso wie die Kegelschnittbüschel.

37. Anders liegt die Sache bei den $\{F^2\}$ -Büscheln vom Typ (1). Nach Nr. 30 ist durch ein solches Büschel das zugehörige Koordinatensystem mit Einheitspunkt in endlich-deutiger Weise bestimmt. Zwei solche Büschel sind aber nur dann projektiv äquivalent, wenn sie dann dieselben Gleichungen, d. h. dieselbe Konstante α haben, was nicht notwendig der Fall ist, da die Büschel-

¹⁾ Daß zwei kollinear äquivalente Flächenbüschel notwendig zum gleichen Typ gehören, ist wegen der projektiven Verschiedenheit der Grundkurven der verschiedenen Typen selbstverständlich.

gleichung für jeden Wert a ein Büschel vom Typ (1) liefert, das in der in Nr. 30 beschriebenen Weise zum Koordinatensystem liegt. Das gibt den

Satz 14. Zwei $\{F^2\}$ -Büschel vom Typ (1) sind nicht notwendig kollinear ineinander überführbar¹⁾.

Würde man die $\{F^2\}$ -Büschel nach ihrer projektiven Äquivalenz zu klassifizieren versuchen, wie es bei den Kegelschnittbüscheln nach Nr. 6 angängig ist, dann würden schon die zum Kollineationstyp Typ (1) gehörenden eine unendliche Menge von Typen liefern. Deshalb wurden im § 3 die Hauptssysteme zur Klassifikation herangezogen und zwei $\{F^2\}$ -Büschel immer und nur dann zum gleichen Büscheltyp gerechnet, wenn ihre Hauptssysteme projektiv äquivalent sind.

38. Nach dem in Nr. 36 Ausgeführten kennt man sämtliche Kollineationen, welche zwei $\{F^2\}$ -Büschel, die zum gleichen, von (1) verschiedenen Büscheltyp gehören, ineinander überführen. Man erhält sie, indem man zum ersten Büschel das Koordinatensystem nebst Einheitspunkt in einer Weise legt, wie sie in § 4 bei dem betreffenden Typ angegeben ist, zum zweiten ein Koordinatensystem in allen solchen Weisen; die Zuordnung der analogen Punkte der beiderseitigen Koordinatensysteme liefert die gesuchten Kollineationen²⁾.

Speziell liefern alle Möglichkeiten zweier solcher Koordinatensysteme für dasselbe Büschel die automorphen Kollineationen dieser, nicht zum Typ (1) gehörenden $\{F^2\}$ -Büschel. Es ist das bei jedem Büschel eine unendliche Menge von Kollineationen. Die genauere, projektiv reizvolle Betrachtung dieser Kollineationen, die sich nun unschwer durchführen läßt, sei hier der Kürze halber unterdrückt, ebenso die nähere Analyse der in Nr. 30 beim Typ (1)

¹⁾ Der Grund hierfür liegt darin, daß zwei elliptische, unebene Kurven 4. Ordnung nicht notwendig projektiv äquivalent sind, da bekanntlich jede solche Kurve eine projektive Invariante besitzt, nämlich das Doppelverhältnis der 4 Ebenen, die durch eine Doppelsekante der Kurve gehen und die Kurve außerhalb dieser Sekante berühren.

²⁾ Nun kann man auch entscheiden, ob man zwei Büschel eines Typs so ineinander kollinear überführen kann, daß dabei eine vorgegebene Büschelfläche in eine vorgegebene Büschelfläche übergeht, eventuell noch mit vorgeschriebener Punktzuordnung.

gegebenen Vorschrift für die Wahl des Koordinatensystems, welche die bekannten 32 automorphen Kollineationen eines $\{F^2\}$ -Büschels vom Typ (1)¹⁾ liefern würde.

§ 6.

Büschelscharen von Flächen 2. Grades.

39. Dualisiert man, analog Nr. 7, die Betrachtungen über die $\{F^2\}$ -Büschel, dann erhält man $\{F^2\}$ -Scharen und damit, da die Konstellation der Doppelemente einer Kollineation in sich dual ist, den

Satz 15. Zwei reguläre Flächen 2. Grades bestimmen ein $\{F^2\}$ -Büschel und eine $\{F^2\}$ -Schar; diese beiden Flächensysteme haben projektiv äquivalente Hauptsysteme und damit dieselbe Typennummer.

Daraus folgt sofort, daß zwei reguläre Flächen 2. Grades, die sich in einer doppelpunktfreien Kurve 4. Ordnung schneiden, auch einen elliptischen Torsus 4. Klasse gemeinsamer Tangentialebenen besitzen, daß der Torsus, wenn die Schnittkurve in eine (C^3) mit Doppelsekante zerfällt, aus einem Ebenenbüschel und einem, zwei von dessen Ebenen enthaltenden Torsus 3. Klasse besteht, daß jeder Doppelpunkt der irreduziblen (reduziblen) Schnittkurve eine Doppeltangentialebene des dann auch irreduziblen (reduziblen) Torsus der gemeinsamen Tangentialebenen nach sich zieht usw.

40. Über die Büschelscharen, das sind die $\{F^2\}$ -Büschel, die gleichzeitig $\{F^2\}$ -Scharen sind, lassen sich einige Bemerkungen machen, die sofort zu den Büschelscharen hinführen:

Das in Anm. 1 von Nr. 7 Gesagte gilt hier sinngemäß für die regulären Flächen und für die kegelförmigen oder zerfallenden Büschelflächen; in diesem Sinn ist ein derartiges Flächensystem in sich dual. Tritt daher in dem Büschel ein Kegel auf, dann liefert dieser zu der Schar das Bündel der Ebenen durch seinen Scheitel, und im Büschel muß das dazu duale Gebilde, d. h. ein Punktfeld, eine reduzible Fläche auftreten. Damit scheiden zunächst die Typen (1), (6), (10), (12), (14) für die Büschelscharen aus.

¹⁾ Vgl. Staudé a. a. O. S. 244.

Von den noch übrigen Typen kommt (2) nicht in Frage, weil zufolge Nr. 17 und 30 die Spitzen der Kegel Hauptpunkte sind, aber nicht auch dual die Ebenen der beiden Kegelschnitte Hauptebenen. Dasselbe gilt nach Nr. 21 und 33 für den Kegel und den Kegelschnitt bei Typ (7), aus dem gleichen Grunde fällt nach Nr. 22 und 43 Typ (8) weg.

Würde Typ (11) von Nr. 29 Büschelscharen liefern, dann müßte, dual zum Grundkegelschnitt, ein gemeinsamer Tangentialkegel aller Büschelflächen existieren, mit der Spitze auf dem Träger CD des Hauptebenenbüschels, und zwar außerhalb D . Mittels der Gleichung dieses Büscheltyps in Nr. 34 berechnet man sofort, daß dies nicht der Fall ist.

41. Es verbleiben somit für die Büschelscharen noch die Typen (3), (4), (9), (13). Daß Typ (3) Büschelscharen liefert, ist nach Nr. 18 ohne weiteres klar, weil alle Büschelflächen einen gemeinsamen Tangentialkegel haben, auf dem sich alle Büschelflächen schneiden, und das ist die Dualisierung der Beschreibung der Grundkurve dieses Büschels. Das Entsprechende gilt nach Nr. 19 für den Typ (4), da dort die Ebenen der Büschel mit den Achsen AB , BD , DC , CA Tangentialebenen aller Büschelflächen sind. Beim Typ (9) ist die in Nr. 23 gegebene Beschreibung der Grundkurve in sich dual. Ebenso erkennt man nach Nr. 27 ohne weiteres, daß beim Typ (13) für die Büschelflächen auch das duale Gegenstück der Konstellation der Grundkurve gilt. Das ist der Beweis für den

Satz 16. Die $\{F^2\}$ -Büschel der Typen (3), (4), (9), (13) sind Büschelscharen.

§ 7.

Zusammensetzung jeder räumlichen Kollineation aus zwei Polaritäten.

42. Entsprechend Nr. 8 sollen auch für jede räumliche Kollineation zwei Polaritäten angegeben werden, aus denen sie sich zusammensetzen läßt. In K.K. § 6 sind durch die Wahl des Koordinatensystems vereinfachte Gleichungen für die Kollineationen eines jeden Typs angegeben, es sind das für die nicht-identischen Kollineationen folgende Quadrupel von Gleichungen:

Typ (1) $\varrho x'_1 = x_1, \varrho x'_2 = ax_2, \varrho x'_3 = bx_3, \varrho x'_4 = cx_4$
 a, b, c verschieden; $\neq 0; \neq 1$

Typ (2) $a = 1$, sonst wie Typ (1)

Typ (3) $a, b = 1$, sonst wie Typ (1)

Typ (4) $b = a, c = 1$, sonst wie Typ (1)

Typ (6) $\varrho x'_1 = x_1, \varrho x'_2 = ax_2, \varrho x'_3 = bx_3, \varrho x'_4 = bx_3 + bx_4$
 a, b verschieden; $\neq 0; \neq 1$

Typ (7) $a = 1$, sonst wie Typ (6)

Typ (8) $b = 1$, sonst wie Typ (6)

Typ (9) $a = 1, b = 1$, sonst wie Typ (6)

Typ (10) $\varrho x'_1 = ax_1, \varrho x'_2 = x_2, \varrho x'_3 = x_2 + x_3, \varrho x'_4 = x_3 + x_4$
 $a \neq 0; \neq 1$

Typ (11) $a = 1$, sonst wie Typ (10)

Typ (12) $\varrho x'_1 = x_1, \varrho x'_2 = x_1 + x_2, \varrho x'_3 = bx_3, \varrho x'_4 = bx_3 + bx_4$
 $b \neq 0; \neq 1$

Typ (13) $b = 1$, sonst wie Typ (12)

Typ (14) $\varrho x'_1 = x_1, \varrho x'_2 = x_1 + x_2, \varrho x'_3 = x_2 + x_3, \varrho x'_4 = x_3 + x_4$.

43. Indem nun für jede dieser Kollineationen zwei einfache Polaritäten angegeben werden, die, hintereinander ausgeführt, die Kollineation liefern¹⁾, folgt daraus gleichzeitig der

Satz 17. Jede räumliche Kollineation läßt sich aus zwei Polaritäten zusammensetzen²⁾.

Zwei reguläre Flächen 2. Ordnung, deren Polaritäten die betreffende Kollineation liefern, sind beim

Typ (1) $x_1^2 + ax_2^2 + bx_3^2 + cx_4^2 = 0, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$,
 ebenso für die Typen (2), (3), (4) durch Spezialisierung der Konstanten in der in Nr. 42 bei diesen Typen angegebenen Weise.

Typ (6) $x_1^2 - a(1-b)^2 x_2^2 + (a-1)bx_3^2 + 2(a-1)b(1-b) \cdot$
 $\cdot x_3 x_4 = 0, x_1^2 - (1-b)^2 x_2^2 + (a-1)bx_3^2 + 2(a-1) \cdot$
 $\cdot (1-b)x_3 x_4 = 0$

Typ (7) $2x_1 x_2 + x_3^2 + 2(1-b)x_3 x_4 = 0,$
 $2bx_1 x_2 + bx_3^2 + 2(1-b)x_3 x_4 = 0$

Typ (8) $2(a-1)x_1^2 + ax_2^2 - ax_3^2 - 2(a-1)x_3 x_4 = 0,$
 $2(a-1)x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 2(a-1)x_3 x_4 = 0$

¹⁾ Es sind das wieder keineswegs die einzigen Polaritäten, durch deren Zusammensetzung die betreffende Kollineation gewonnen wird.

²⁾ Auch hier ist für die identische Kollineation der Satz trivial, da man diese durch Wiederholung einer Polarität enthält.

$$\text{Typ (9)} \quad x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0, \quad 2x_1 x_2 + x_3^2 - 2x_3 x_4 = 0$$

$$\text{Typ (10)} \quad x_1^2 + 2x_2 x_3 + 2x_3 x_4 + x_3^2 = 0, \quad x_1^2 + 2ax_2 x_4 + ax_3^2 = 0$$

$$\text{Typ (11)} \quad x_1^2 - 2x_2 x_3 - 2x_2 x_4 - x_3^2 = 0, \quad x_1^2 - 2x_2 x_4 - x_3^2 = 0$$

$$\text{Typ (12)} \quad bx_1^2 + 2(b-1)x_1 x_2 + (b-1)x_3^2 - 2(b-1)^2 x_3 x_4 = 0,$$

$$bx_1^2 + 2b(b-1)x_1 x_2 + b(b-1)x_3^2 - 2(b-1)^2 x_3 x_4 = 0$$

$$\text{Typ (13)} \quad x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 = 0, \quad x_1 x_4 + x_2 x_3 = 0$$

$$\text{Typ (14)} \quad 2x_1 x_3 + 2x_1 x_4 + x_2^2 + 2x_2 x_3 = 0, \quad x_1 x_4 + x_2 x_3 = 0.$$

§ 8.

Metrische Beispiele für $\{F^2\}$ -Büschel.

44. Zum Schlusse mögen noch einige einfache, metrische Beispiele für die Büschel der verschiedenen Typen gegeben werden. Dadurch wird nach dem Schlusse von § 3 neuerdings die Existenz aller Büscheltypen nachgewiesen; metrische Beispiele sind auch wegen des einfachen komplexen Zusammenhanges der Metrik mit dem absoluten Kegelschnitte reizvoll, so bei der Betrachtung der Grundkurve, des Hauptsystems und der kegelförmigen (speziell auch zylindrischen) oder zerfallenden Büschelflächen¹⁾.

Es wird dabei nur von den reellen Bestandteilen der betreffenden komplexen Büschel gesprochen, die Grundkurven der Büschel sind dabei naturgemäß keineswegs immer reell. Der leichteren Verständlichkeit halber wird teilweise stärker metrisiert, als es notwendig wäre, die Beispiele lassen sich vielfach ohne weiteres verallgemeinern.

45. Typ (1): Das Büschel, das man aus einer Kugel und einem dreiachsigen Ellipsoid gewinnt, wenn die beiden Flächen, ohne sich zu berühren, den gleichen Mittelpunkt haben.

Typ (2): Alle Kugeln durch einen gegebenen Kreis, oder das Büschel, das man aus einer Kugel und einem dreiachsigen Ellipsoid erhält, wenn das Ellipsoid einen Kugeldurchmesser zur Hauptachse hat.

Typ (3): Alle Kugeln mit gemeinsamem Mittelpunkt, oder alle einschaligen Hyperboloide mit gemeinsamem Asymptotenkegel.

¹⁾ So alt wie die Beschäftigung mit den $\{F^2\}$ -Büscheln ist die Betrachtung metrischer Beispiele, wenigstens für einige Büscheltypen; vgl. Staude a. a. O. S. 219ff.

Typ (4): Alle Drehparaboloide mit gemeinsamer Drehachse und gemeinsamem Scheitel, oder alle hyperbolischen Paraboloide mit denselben Scheitelerzeugenden, oder das Büschel aus einer Kugel und einem Drehellipsoid mit gemeinsamem N- und S-Pol.

Typ (6): Das Büschel, das man durch eine Kugel und einen sie in genau einem Punkte berührenden Drehzylinder erhält.

Typ (7): Alle Kugeln, die eine feste Ebene in einem festen Punkte berühren.

Typ (8): Das Büschel, zu dem die folgenden beiden Flächen gehören: eine Kugel mit einem Meridian und einem diesen berührenden Kleinkreis, dazu der (elliptische) Zylinder, welcher den Kleinkreis enthält und zur Meridianebene senkrecht steht.

Typ (9): Eine Parabel und ihr Scheitelkrümmungskreis rotieren um die Parabelachse; die so entstehenden beiden Drehflächen liefern das Büschel. Oder alle Lagen, welche ein Drehparaboloid annimmt, wenn es in Richtung seiner Drehachse verschoben wird¹⁾.

Typ (10): Das Büschel aus folgenden Flächen: ein Drehkegel und eine Kugel, die in seiner Spitze eine seiner Tangentialebenen berührt.

Typ (11): Alle Lagen, die ein einschaliges Hyperboloid annimmt, wenn man es in Richtung einer Erzeugenden verschiebt.

Typ (12): Ein einschaliges Hyperboloid wird um einen von π und 2π verschiedenen Winkel um eine Erzeugende gedreht. Ausgangs- und Endlage liefern das Flächenbüschel.

Typ (13): Alle Lagen, die ein hyperbolisches Paraboloid annimmt, wenn man es in Richtung einer Erzeugenden verschiebt.

Typ (14): Auf der Scheiteltangentialebene eines hyperbolischen Paraboloids liegt ein Drehkegel mit der Spitze im Scheitel so, daß er die Ebene längs einer Scheitelerzeugenden berührt; diese Ausgangsflächen liefern das Büschel.

Karlsruhe i. B., im Mai 1931.

¹⁾ Auf diese beiden Beispiele hat mich Herr J. Wellstein aufmerksam gemacht

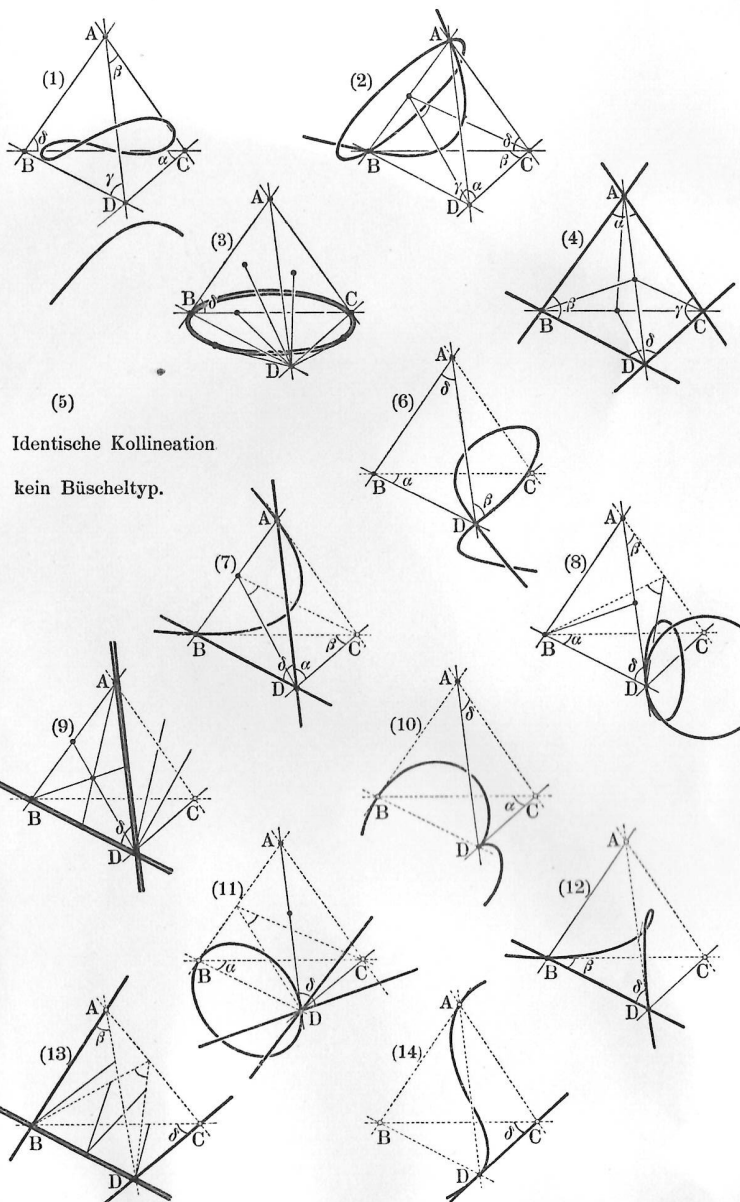


Fig. 2