

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen
Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1931. Heft II

Mai-Julisitzung

München 1931

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München



Ein Abbildungssatz.

Von **M. Lagally** in Dresden.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 9. Mai 1931.

Wenn man eine beliebige Fläche punktweise auf eine Ebene abbildet, so besteht zwischen der geodätischen Krümmung einer Flächenkurve und der gewöhnlichen ebenen Krümmung ihrer Bildkurve ein Zusammenhang, in den nur der Maßstab der Abbildung und eine Anzahl von Differentialquotienten desselben eingehen. Der Nachweis und die Herstellung dieses Zusammenhangs ist der Zweck der folgenden Untersuchung¹⁾.

Die geodätische Krümmung einer Flächenkurve wird durch die folgende Beltramische Formel gegeben, wobei u und v Gaußsche Koordinaten sind und die Striche Differentiationen nach einem beliebigen Parameter bedeuten:

$$\frac{1}{\varrho_g} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{1}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} \cdot [(EF_u - \frac{1}{2}FE_u - \frac{1}{2}EE_v)u'^3 + (FF_u + EG_u - \frac{1}{2}GE_u - \frac{3}{2}FE_v)u'^2v' - (FF_v + GE_v - \frac{1}{2}EG_v - \frac{3}{2}FG_u)u'v'^2 - (GF_v - \frac{1}{2}FG_v - \frac{1}{2}G(G_u))v'^3 + (EG - F^2)(v''u' - u''v')]$$

Bei Einführung der Christoffelschen Symbole nimmt die Beltramische Formel folgende Gestalt an:

¹⁾ Herr A. E. Young, Tunbridge Wells, hat die Krümmung der ebenen Bildkurve einer geodätischen Linie untersucht und das Ergebnis sowie die Methode dem Verfasser persönlich mitgeteilt. A. E. Young verwendet für die Ableitung seiner Formel, die im folgenden als Spezialfall auftritt, die Extremaleigenschaft der geodätischen Linien, bedient sich also eines Verfahrens, das für die allgemeinen Flächenkurven nicht erweiterbar ist.

$$\frac{1}{\varrho_g} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} [\{ \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix} \} u'^3 + (2 \{ \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix} \} - \{ \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \}) u'^2 v' - (2 \{ \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix} \} - \{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \}) u' v'^2 - \{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \} v'^3 + (v'' u' - u'' v')]. \quad (1')$$

Für ebene Kurven reduziert sie sich auf die Formel für die Krümmung

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{v'' u' - u'' v'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}} \quad (2)$$

wenn u und v rechtwinklige Cartesische Koordinaten sind.

Verwendet man bei der Abbildung einer Fläche auf eine Ebene als Gaußsche Koordinaten eines Flächenpunktes die rechtwinkligen Koordinaten seines Bildpunktes in der Ebene, so sind $\frac{1}{\varrho_g}$ und $\frac{1}{\varrho}$ nach (1) und (2) die geodätische Krümmung einer Flächenkurve und die gewöhnliche Krümmung ihres ebenen Bildes. Man kann zwischen diesen beiden Größen eine Beziehung herstellen, indem man die zweiten Differentialquotienten von u und v enthaltende Determinante $v'' u' - u'' v'$ eliminiert:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_g} \frac{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{1}{\sqrt{u'^2 + v'^2}} \cdot [\{ \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix} \} u'^3 + (2 \{ \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix} \} - \{ \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \}) u'^2 v' - (2 \{ \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix} \} - \{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \}) u' v'^2 - \{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \} v'^3]. \quad (3)$$

Um diese Beziehung umzuformen, führen wir die Richtung des ebenen Bildes der Flächenkurve

$$p = \frac{dv}{du} = \frac{v'}{u'} \quad (4)$$

ein; ferner den linearen Maßstab der Abbildung:

$$M = \frac{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}}{\sqrt{u'^2 + v'^2}} = \frac{\sqrt{E + 2Fp + Gp^2}}{\sqrt{1 + p^2}}. \quad (5)$$

Dieser Maßstab hängt von u , v , p ab und ist eine Funktion des Ortes und der Richtung. Neben dem linearen Maßstab tritt im folgenden auch der Flächenmaßstab auf, der mit

$$\mu^2 = \sqrt{EG - F^2} \quad (6)$$

bezeichnet werden soll.

Bei Verwendung der Größen p , M und μ nimmt die Beziehung zwischen den beiden Krümmungen folgende Form an:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_g} \frac{M^3}{\mu^2} - \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} [\{ \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix} \} + (2 \{ \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix} \} - \{ \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \}) p - (2 \{ \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix} \} - \{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix} \}) p^2 - \{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \} p^3]. \quad (7)$$

Es sollen nun eine Reihe von Differentialquotienten des Maßstabs M berechnet werden, deren Kenntnis sich als zweckdienlich herausstellt. Dabei werden statt der Differentiationen nach u, v, p drei andere Differentiationen eingeführt:

1. die Differentiation nach dem Richtungswinkel q der Kurve, der mit der Richtung p durch die Beziehung $p = \operatorname{tg} q$ zusammenhängt:

$$\frac{\partial}{\partial q} = (1 + p^2) \frac{\partial}{\partial p}. \quad (8)$$

2. Die Differentiation in Richtung der ebenen Kurve:

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{du}{ds} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{dv}{ds} \frac{\partial}{\partial v} = \cos q \frac{\partial}{\partial u} + \sin q \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\frac{\partial}{\partial u} + p \frac{\partial}{\partial v}}{\sqrt{1+p^2}}. \quad (9)$$

3. Die Differentiation in Richtung der Kurvennormale:

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{du}{dn} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{dv}{dn} \frac{\partial}{\partial v} = -\sin q \frac{\partial}{\partial u} + \cos q \frac{\partial}{\partial v} = \frac{-p \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}}{\sqrt{1+p^2}}. \quad (9')$$

Dann folgt zunächst aus (5) durch Differentiation von M nach q

$$\frac{\partial M}{\partial q} = \frac{1}{M} \frac{F + (G - E)p - Fp^2}{1 + p^2}; \quad (10)$$

sodann ergibt sich $\frac{\partial^2 M}{\partial q^2}$ als ein Quotient, dessen Zähler eine ganze rationale Funktion 4. Ordnung in p ist. Fügt man M als Summand hinzu, so tritt eine Vereinfachung ein und man erhält:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial q^2} + M = \frac{1}{M^3} \frac{1}{(1+p^2)^2} (EG - F^2) [1 + 2p^2 + p^4] \quad (11)$$

$$= \frac{EG - F^2}{M^3}.$$

Diese Gleichung hat eine selbständige Bedeutung, wenn man sie nach (6) durch Einführung des Flächenmaßstabs umformt; man erhält

$$\mu^4 = M^3 \left[M + \frac{\partial^2 M}{\partial q^2} \right] \quad (12)$$

und erkennt, in welcher Weise der Flächenmaßstab durch den linearen Maßstab bestimmt ist¹⁾.

Mehr Rechnung erfordert die Berechnung der Richtungs-differentialquotienten. Zunächst erhält man

$$\frac{\partial M}{\partial n} = \frac{1}{2M\sqrt{1+p^2}} [E_v + (2F_v - E_u)p + (G_v - 2F_u)p^2 - G_u p^3]. \quad (13)$$

$\frac{\partial M}{\partial s}$ wird nicht benötigt, wohl aber $\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial M}{\partial q}$, das sich als Quotient ergibt mit einem Zähler, der eine ganze Funktion 5. Ordnung in p ist. Eine Vereinfachung ist wieder dadurch zu erreichen, daß man $-\frac{\partial M}{\partial n}$ hinzufügt, weil dann die Funktion 5. Ordnung reduzibel wird und den Faktor $1+p^2$ enthält; dann ergibt sich unter Einführung der Christoffelschen Symbole folgende Zusammenfassung:

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial M}{\partial q} - \frac{\partial M}{\partial n} = \frac{EG - F^2}{M^3 \sqrt{1+p^2}^3} \quad (14)$$

$$[\{ \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix} \} + (2\{ \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix} \} - \{ \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \})p - (2\{ \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix} \} - \{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix} \})p^2 - \{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \} p^3].$$

Damit ist die ganze Funktion 3. Ordnung in p wieder erschienen, die schon auf der rechten Seite von (7) aufgetreten ist;

¹⁾ Einen anderen Weg, den Flächenmaßstab durch den linearen Maßstab zu bestimmen, liefert die Tissotsche Theorie der Verzerrungen. Diese verwendet die Hauptwerte des linearen Maßstabs, deren Kenntnis von der Lösung eines Hauptachsenproblems, also einer algebraischen Aufgabe abhängt. Doch finden sich in der Literatur auch Ausdrücke, die der rechten Seite von (12) verwandt sind. Vgl. P. Böhm, Geometrische Approximationen, Diss. Göttingen 1904. S. 47.

man braucht sie jetzt nur zu eliminieren, um das eingangs gestellte Problem vollständig zu erledigen:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_g} \frac{M^3}{\mu^2} - \frac{M^3}{\mu^4} \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial M}{\partial q} - \frac{\partial M}{\partial n} \right) \quad (15)$$

ist die Krümmung der ebenen Bildkurve, ausgedrückt durch die geodätische Krümmung der Flächenkurve und den Maßstab der Abbildung und seine Differentialquotienten; nicht zu übersehen ist dabei, daß nach (12) der Flächenmaßstab μ^2 selbst durch den linearen Maßstab M bestimmt ist¹⁾.

Der einfachste Fall, daß der lineare Maßstab M von der Richtung unabhängig, also $\frac{\partial M}{\partial q} = 0$ ist, soll noch weiter verfolgt werden. Die Abbildung ist dann konform. Nach (5) sind die Bedingungen dafür $E = G$ und $F = 0$. Der Flächenmaßstab wird nach (12) $\mu^2 = M^2$. Für die Krümmung der ebenen Bildkurve ergibt sich nach (15)

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{\varrho_g} + \frac{\partial \lg M}{\partial n}$$

oder ausführlicher

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{\varrho_g} - \sin q \frac{\partial \lg M}{\partial u} + \cos q \frac{\partial \lg M}{\partial v}. \quad (16)$$

Es werde nun ein Büschel von ebenen Bildkurven betrachtet, deren Krümmungskreise im gemeinsamen Schnittpunkt ein Kreisbüschel bilden, deren Krümmungsmittelpunkte also eine Gerade erfüllen. Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes einer Kurve sind: $x = -\varrho \sin q$; $y = \varrho \cos q$; sollen die Krümmungsmittelpunkte für veränderliches q auf einer Geraden $Ax + By = 1$ liegen, so muß

$$\frac{1}{\varrho} = -A \sin q + B \cos q \quad (17)$$

¹⁾ Für $\frac{1}{\varrho_g} = 0$ ergibt sich die eingangs erwähnte Youngsche Formel, die ihr Entdecker zu geodätischen Zwecken, wie zur Berechnung der Krümmung der Bilder der geodätischen Linien in der Cassinischen Projektion verwendet hat.

sein. Dann ergibt sich für die geodätische Krümmung der entsprechenden Flächenkurven

$$\frac{M}{\varrho_g} = - \left(A - \frac{\partial \lg M}{\partial u} \right) \sin q + \left(B - \frac{\partial \lg M}{\partial v} \right) \cos q. \quad (18)$$

Die Mittelpunkte der geodätischen Krümmung erfüllen also, wenn man sie in der Tangentialebene aufträgt, ebenfalls eine Gerade; die zugehörigen Krümmungskreise bilden ein Büschel. Die konforme Abbildung läßt sich in der Umgebung eines jeden Punktes durch eine Kreisverwandtschaft ersetzen.

Insbesondere liegen die Krümmungsmittelpunkte der Bilder eines Büschels von geodätischen Linien auf einer Geraden. Für den speziellen Fall der konformen Abbildung in der Ebene ist das die bekannte Bonnetsche Gerade, auf der die Krümmungsmittelpunkte der Bilder eines Geradenbüschels liegen¹⁾.

¹⁾ Cesaro-Kowalewski, Vorlesungen über natürliche Geometrie, 1. Aufl. S. 146. Neuerdings hat Erl. I. Ginzel in ihrer Diss. Die konforme Abbildung durch die Gammafunktion, Acta mathematica 56, 1931, von der Bonnetschen Geraden praktischen Gebrauch gemacht.