

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen
Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1931. Heft I

Januar-Märzsitzung

München 1931

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München



Über Kontinua von beschränkter Ordnung.

Von **Otto Haupt** in Erlangen.

Vorgelegt von G. Faber in der Sitzung am 7. März 1931.

1. Die folgenden Zeilen sind veranlaßt durch eine Arbeit gleichen Titels von Herrn Marchaud¹⁾. Im ersten Kapitel dieser Arbeit beweist Herr Marchaud einen „Zerlegungssatz“ für beschränkte Kontinua im R_n , welche bezüglich n verschiedener Ebenenbüschel von beschränkter Relativordnung²⁾ sind; auf die Frage, inwieweit sich dieser Zerlegungssatz verallgemeinern und verschärfen läßt, sind wir an anderer Stelle eingegangen³⁾. In den übrigen Kapiteln seiner Arbeit behandelt sodann Herr Marchaud vor allem Kontinua bzw. Kurven von möglichst niedriger Ordnung, und im letzten Kapitel insbesondere auch Kontinua von beschränkter zyklischer Ordnung; einige Anmerkungen zu diesen Kapiteln seien in den folgenden Zeilen zusammengestellt.

„Bogen“ oder „Kurve“ bedeutet im folgenden immer soviel wie „Parameterbogen“ bzw. „Parameterkurve“⁴⁾. Mit R_n bezeichnen wir den n -dimensionalen euklidischen Raum.

¹⁾ A. Marchaud, Sur les continus d'ordre borné, Acta mathematica 55 (1930) S. 67 ff.

²⁾ Wegen des Begriffes der „Relativordnung“ vgl. z. B. Haupt, Über Kurven endlicher Ordnung, Math. Zeitschr. 19 (1924) S. 284.

³⁾ Haupt, Über Kontinua von endlicher Relativordnung. Erscheint in Crelles Journal Bd. 166.

⁴⁾ Bezüglich der im folgenden benutzten Begriffe Bogen, Kurve, Vielfachheit eines Punktes, Ordnung eines Bogens, Schnittpunkt usw. sei verwiesen auf Haupt, Über die Struktur reeller Kurven, Crelles Journal 164 (1931) S. 50 ff. Wir heben hervor, daß in der dort zu Grunde gelegten Definition der Ordnung jeder Punkt des (Parameter)Bogens mit seiner Vielfachheit gezählt wird. Sind nur endlich viele mehrfache Punkte vorhanden, so bleibt die Ordnung ungeändert, wenn man jeden Punkt nur einfach zählt. Vgl. dazu auch Marchaud¹⁾, a. a. O., S. 79 und S. 80, Fußnote 1).

2. Herr Marchaud beweist, daß jedes ebene beschränkte Kontinuum 2. Ordnung ein Konvexbogen ist⁵⁾. Es sei der Hinweis darauf gestattet, daß dieser Satz bereits von Herrn Rosenthal bewiesen wurde⁶⁾ im Zusammenhang mit der Frage nach Punktmengen mit vorgeschriebener Verteilung der Ordnungsindezes⁷⁾ und speziell nach Punktmengen $\mathfrak{R}$, welche mit jeder Geraden genau n Punkte gemeinsam haben ($n \geq 2$).

3. Ferner beweist Herr Marchaud, daß jedes ebene beschränkte Kontinuum 3. Ordnung entweder selbst ein einfacher Bogen ist oder die Summe von zwei einfachen Bogen. Überdies zeigt er, daß jeder ebene Bogen 3. Ordnung aus höchstens vier Konvexbogen besteht⁸⁾. Die Tatsache, daß jeder ebene Bogen 3. Ordnung aus endlich vielen Konvexbogen besteht, ist auch vom Verfasser bewiesen worden⁹⁾.

4. Gelegentlich¹⁰⁾ bemerkt Herr Marchaud, daß jeder doppelpunktfreie ebene Bogen 4. Ordnung einen konvexen Teilbogen enthalte. Darüber hinaus gilt folgender Satz¹¹⁾:

Bezeichnet $\mathfrak{B}_4$ einen ebenen beschränkten Bogen 4. Ordnung, so ist jeder, ganz im Innern der konvexen Hülle des $\mathfrak{B}_4$ gelegene Teilbogen von $\mathfrak{B}_4$ ein Bogen von höchstens 3. Ordnung. (Vgl. dazu die Verallgemeinerung in No. 7).

⁵⁾ Marchaud¹⁾ a. a. O., S. 85.

⁶⁾ A. Rosenthal, Über Gebilde mit einzigem Ordnungsindex, Sitz.-Ber. d. bayer. Akad. d. Wiss., München, math.-physikal. Klasse, Jahrgang 1922, S. 233.

⁷⁾ Als Ordnungsindex einer Punktmenge $\mathfrak{M}$ bezüglich einer Geraden g bezeichnet Herr Rosenthal die Mächtigkeit des Durchschnittes von $\mathfrak{M}$ und g . Der größte bei $\mathfrak{M}$ auftretende Ordnungsindex heißt die „Ordnung von $\mathfrak{M}$ “, falls ein solcher maximaler Ordnungsindex vorhanden ist. (Vgl. Rosenthal⁶⁾, a. a. O., S. 222.)

⁸⁾ Marchaud¹⁾, a. a. O., S. 88.

⁹⁾ a) Haupt, Bemerkung über die ebenen Elementarkurven 3. Ordnung, Math. Annalen 92 (1924) S. 88ff. An dieser Stelle (S. 88/89) ist auch darauf hingewiesen, daß auf Grund des dort bewiesenen Satzes die Juelsche Theorie im wesentlichen unverändert sich auf die allgemeinen Kurven 3. Ordnung überträgt. b) Ders., Zur Juelschen Theorie der reellen, ebenen Kurven 4. Ordnung, Sitz.-Ber. d. bayer. Akad. d. Wiss., München, math.-physikal. Klasse, Jahrgang 1925, S. 2.

¹⁰⁾ Marchaud¹⁾, a. a. O., S. 96, Fußnote 1).

¹¹⁾ Vgl. Haupt⁹⁾, b) S. 6/7. Die oben im Text gewählte Formulierung der ersten Behauptung ist etwas modifiziert.

Eine Kurve 4. Ordnung in der projektiven Ebene, welche mit *jeder* Geraden Punkte gemeinsam hat, läßt sich als Vereinigung von endlich vielen Konvexbogen (im projektiven Sinne) darstellen. Allgemeiner: Jede Kurve (in der projektiven Ebene) von beschränkter Ordnung und vom Maximalindex ist als Vereinigung endlich vieler Konvexbogen darstellbar (vgl. die Ordnungsdefinition a. a. O.).

5. In diesem Zusammenhange bezeichnet es Herr Marchaud als wahrscheinlich¹²⁾, daß die Tangente eines überall differenzierbaren Bogens im R_2 von höherer als 4. Ordnung (und ohne Doppelpunkte) stetig variiert, ausgenommen höchstens eine (auf dem Bogen) nirgends dichte Punktmenge. Daß diese Vermutung zutrifft, sogar für Kurven *endlicher* Ordnung, ist unmittelbare Folge des nachstehenden „Zerlegungssatzes“ von Herrn Hjeltslev¹³⁾: Jeder ebene, überall differenzierbare Bogen endlicher Ordnung ist darstellbar als abgeschlossene Hülle der Summe von höchstens abzählbar vielen (Strecken und) Konvexbogen, welche höchstens paarweise Endpunkte gemeinsam haben. Zuzufolge dieses Zerlegungssatzes liegen nämlich diejenigen Punkte eines differenzierbaren Bogens $\mathfrak{B}$ von höchstens endlicher Ordnung, welche keiner Strecke und keinem Konvexbogen angehören, nirgends dicht auf $\mathfrak{B}$. (Und längs eines differenzierbaren Konvexbogens ändert sich die Tangente stetig.¹⁴⁾)

Der eben genannte Satz von der Stetigkeit der Tangente einer ebenen Kurve gilt allgemeiner für jeden Bogen, der sich als abgeschlossene Hülle einer Summe von abzählbar vielen Strecken und Konvexbogen darstellen läßt. Notwendig und hinreichend hierfür ist, daß die Punkte unendlicher Ordnung auf dem Bogen nirgends dicht liegen¹⁵⁾. Daraus folgt allgemein, d. h. für den R_n ($n \geq 3$) der

¹²⁾ Vgl. Marchaud¹⁾, a. a. O., S. 96, Nr. 22, letzter Absatz.

¹³⁾ J. Hjeltslev, Contribution à la géométrie infinitésimale de la courbe réelle. Oversigt over det kgl. Danske Vidensk. selskabs forhandl. 1911, Nr. 5, S. 482. Bezüglich der Zulässigkeit beliebig vieler mehrfacher Punkte (und Spitzen) vgl. A. Rosenthal, Über die Singularitäten der reellen ebenen Kurven, Math. Ann. 73 (1913), Nr. 39.

¹⁴⁾ Vgl. dazu Marchaud¹⁾, a. a. O., S. 87.

¹⁵⁾ Haupt⁴⁾, a. a. O., Nr. 3, 2.

Satz: Liegen auf dem, überall bis auf eine nirgends dichte Menge von Punkten differenzierbaren, Bogen $\mathfrak{B}$ im R_n die Punkte unendlicher Ordnung nirgends dicht, so ändert sich die Tangente von $\mathfrak{B}$ stetig, ausgenommen höchstens eine auf $\mathfrak{B}$ nirgends dichte Punktmenge.

In der Tat (wir führen der größeren Anschaulichkeit wegen den Beweis für $n = 3$): Liegen die Punkte unendlicher Ordnung nirgends dicht auf $\mathfrak{B}$, so gilt das gewiß auch für die Parallelprojektionen $\mathfrak{B}^{(x)}$ von $\mathfrak{B}$ auf die Ebenen, welche durch je zwei der Koordinatenachsen aufgespannt werden. (Projektionsrichtung parallel zur dritten Achse.) Infolgedessen ist $\mathfrak{B}^{(x)}$ Hülle einer Konvexbogensumme. Ist ferner $\mathfrak{B}$ differenzierbar, so sind es natürlich auch die $\mathfrak{B}^{(x)}$. Daher haben die $\mathfrak{B}^{(x)}$ stetige Tangenten je bis auf eine nirgends dichte Menge von Punkten. Daraus folgt, daß auch die Tangente an $\mathfrak{B}$ stetig ist bis auf eine nirgends dichte Punktmenge.

Da der oben genannte Satz über die Zerlegung in Konvexbogen allgemein für beliebige (nicht notwendig differenzierbare) ebene Kurven endlicher Ordnung gilt¹⁶⁾, so überträgt sich auf solche Bogen die Monotonieeigenschaft der einseitigen Tangente eines Konvexbogens (s. S. 51 Fußn.¹⁴⁾) in folgender Weise: Bis auf eine nirgends dichte Punktmenge ändern sich die (stets vorhandenen) einseitigen Tangenten eines ebenen Bogens von (höchstens) endlicher Ordnung in der Weise, daß z. B. die rechtsseitigen Tangenten in den Punkten P_i einer monoton von links her gegen den Punkt P konvergierenden Folge gegen die linksseitige Tangente in P konvergieren (s. S. 51 Fußn.¹⁴⁾).

Allgemeiner gilt diese Behauptung wieder für jeden Bogen, welcher als abgeschlossene Hülle einer Konvexbogensumme darstellbar ist, auf welchem also die Punkte unendlicher Ordnung nirgends dicht liegen. Auf die Verallgemeinerung für den R_n sei nur hingewiesen.

Man kann jetzt nach einer näheren Kennzeichnung derjenigen Punkte fragen (s. S. 51 Fußn.¹²⁾), in welchen Unstetigkeiten

¹⁶⁾ Haupt, a) Über einen Satz von Herrn J. Hjelmslev, Sitz. Ber. d. physik.-med. Sozietät Erlangen 60 (1928), S. 327; vgl. ferner b) Haupt⁴⁾, a. a. O., z. B. Nr. 0, 2.

der Tangente auftreten können. Für den Fall der Ebene bemerken wir hierzu (Entsprechendes gilt übrigens im R_n ; vgl. Nr. 10):

Unstetigkeiten der Tangente eines differenzierbaren einfachen Bogens $\mathfrak{B}$ im R_2 sind nur in Punkten von höherer als 3. Ordnung¹⁷⁾ möglich.

In der Tat: Sehen wir von den Punkten der etwa in $\mathfrak{B}$ enthaltenen Teilstrecken ab, so kommen nur Punkte von 2. und höherer Ordnung in Frage. Ein Punkt 2. Ordnung ist nun aber entweder innerer Punkt eines konvexen Teilbogens von $\mathfrak{B}$ oder Endpunkt eines solchen und zugleich Endpunkt von $\mathfrak{B}$; und für Konvexbogen zieht die Existenz der Tangente auch deren Stetigkeit nach sich. Ferner kann ein Punkt Q von 3. Ordnung nur gemeinsamer Endpunkt zweier Konvexbogen sein¹⁸⁾, weil jeder Bogen 3. Ordnung nur aus endlich vielen Konvexbogen besteht. Wenn also unser Bogen überall, auch in Q , eine Tangente besitzt, so ist diese der gemeinsame Limes der Tangenten an die Konvexbogen in den zu Q benachbarten Punkten, d. h. diese Tangente ist stetig in Q . Somit kann eine Unstetigkeit nur in Punkten 4. und höherer Ordnung auftreten.

Ein Beispiel für einen (einseitigen) Punkt 4. Ordnung mit unstetiger Tangente hat Herr Marchaud angegeben¹⁹⁾.

¹⁷⁾ Ein Punkt P auf einem Bogen $\mathfrak{B}$ heißt von n -ter Ordnung, wenn jede hinreichend kleine Umgebung von P auf $\mathfrak{B}$ von n -ter Ordnung ist. Vgl. Haupt¹⁾, a. a. O. Nr. 1, 2.

¹⁸⁾ Man kann das auch so ausdrücken: Punkte von einseitiger 3. Ordnung existieren nicht. Man spricht dabei von einseitiger (links- bzw. rechtsseitiger) Ordnung k eines Punktes P auf $\mathfrak{B}$, wenn alle genügend kleinen einseitigen (links- oder rechtsseitigen) Umgebungen von P auf $\mathfrak{B}$ von k -ter Ordnung sind. Die Nichtexistenz von einseitigen Punkten 3. Ordnung ist mit der Tatsache gleichbedeutend, daß jeder Bogen 3. Ordnung Summe von endlich vielen Konvexbogen ist. Vgl. den allgemeinen Satz bei Haupt¹⁾, a. a. O., Nr. 2, 2. Die auf Punkte niedrigerer als 4. Ordnung bezügliche Feststellung des Textes findet sich der Sache nach natürlich auch bei Herrn Marchaud (siehe ¹⁾, a. a. O., S. 89).

¹⁹⁾ Marchaud¹⁾, a. a. O., S. 95. — Ein Beispiel für einen Punkt 6. Ordnung (mit unstetiger Tangente) wird geliefert durch den bei Haupt²⁾, a. a. O., Nr. 20 angegebenen Bogen. Das hier benutzte Konstruktionsverfahren liefert leicht auch einseitige Punkte, z. B. 4. Ordnung, sowohl mit stetiger als mit unstetiger Tangente.

Andererseits liegt aber nicht in jedem Punkte höherer als 3. Ordnung (auf einem ebenen differenzierbaren Bogen) notwendig eine Unstetigkeit der Tangente vor.

In der Tat gibt es z. B. einfache, stetig differenzierbare Bogen, deren Punkte sämtlich sogar von unendlicher Ordnung sind. Man braucht nur $y = f(x)$ so zu wählen, daß $f(x)$ einmal stetig differenzierbar ist und daß die 2. Ableitung nirgends existiert, sodaß also $y = f(x)$ keinen konvexen Teilbogen enthält²⁰⁾. Die Ausführung der Konstruktion von Punkten k -ter Ordnung für $k \geq 4$ mit stetiger und unstetiger Tangente, soll einer anderen Gelegenheit vorbehalten bleiben.

6. Bezüglich der beschränkten Kontinua $\mathfrak{K}$ von n -ter Ordnung im R_n bemerkt bereits Herr Marchaud, daß jedes solche $\mathfrak{K}$ ein einfacher Bogen sein muß²¹⁾ (welcher keine Teilbogen enthält, die ganz in einer Hyperebene des R_n liegen) ($n \geq 2$). Wir fügen hinzu (Verallgemeinerung des Satzes, daß jeder Bogen 2. Ordnung im R_2 konvex ist):

Jeder beschränkte Bogen $\mathfrak{B}_n$ von n -ter Ordnung im R_n liegt vollständig auf der Begrenzung seiner (im R_n gebildeten) konvexen Hülle ($n \geq 2$). ($\mathfrak{B}_n$ soll natürlich keine Teilbogen enthalten, welche ganz in einer Hyperebene liegen.)

Beweis: I. $\mathfrak{B}_n$ enthält keine vielfachen Punkte²¹⁾.

(Wäre nämlich P von höherer Vielfachheit und $\mathfrak{E}$ eine Hyperebene durch P und weitere $(n-1)$ Punkte von $\mathfrak{B}_n$, so existierten in der Nachbarschaft von $\mathfrak{E}$ solche Hyperebenen, welche mit $\mathfrak{B}_n$ mehr als n verschiedene Punkte gemeinsam hätten.)

II. Ferner bemerken wir: Hat eine Hyperebene $\mathfrak{E}$ mit einem $\mathfrak{B}_n$ (genau) n (verschiedene) Punkte $P_1, \dots, P_n$ gemeinsam, so ist jeder dieser Punkte P_r ein Schnittpunkt²²⁾ auf $\mathfrak{E}$ sofern nur P_r nicht gleichzeitig ein Endpunkt von $\mathfrak{B}_n$ ist.

²⁰⁾ Vgl. Hjelmslev¹³⁾, a. a. O., S. 482.

²¹⁾ Marchaud¹⁾, a. a. O., S. 98.

²²⁾ Ein auf der Ebene $\mathfrak{E}$ gelegener innerer Punkt P von $\mathfrak{B}$ heißt „Schnittpunkt“ (bzw. „Stützpunkt“) von $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{E}$, wenn in jeder beiderseitigen Umgebung von P auf $\mathfrak{B}$ noch Punkte (bzw. keine Punkte) exi-

Wäre in der Tat z. B. der Punkt $P_n = Q$ ein Stützpunkt (s. S. 54 Fußn. ²²) auf $\mathfrak{E}$, so läge eine beiderseitige Umgebung von Q , also sowohl eine rechtsseitige Umgebung $\mathfrak{U}^+$ als eine linksseitige Umgebung $\mathfrak{U}^-$ von Q auf $\mathfrak{B}_n$ auf der nämlichen Seite von $\mathfrak{E}$ (abgesehen von Q selbst). Man wähle je einen von Q verschiedenen Punkt Q^+ bzw. Q^- aus $\mathfrak{U}^+$ bzw. $\mathfrak{U}^-$. Alsdann lege man durch $P_1, \dots, P_{n-1}$ und durch einen zu Q genügend benachbarten Punkt Q' , etwa aus $\mathfrak{U}^+$, eine Hyperebene $\mathfrak{E}'$. Bei passender Wahl von Q' liegen dann Q^+ und Q^- beide auf der entgegengesetzten Seite von $\mathfrak{E}'$ wie Q ; dies lehren einfache Determinanten- und Stetigkeitsbetrachtungen. Dann muß aber sowohl in $\mathfrak{U}^+$ zwischen Q und Q^+ , als auch in $\mathfrak{U}^-$ zwischen Q und Q^- je mindestens ein Schnittpunkt von $\mathfrak{E}'$ mit $\mathfrak{B}_n$ liegen. $\mathfrak{E}'$ hätte demnach mindestens $(n+1)$ verschiedene Punkte mit $\mathfrak{B}_n$ gemeinsam, was der Definition von $\mathfrak{B}_n$ widerspricht.

III. Schließlich bemerken wir, daß jeder Teilbogen $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{B}_n$ selbst von der Ordnung n ist; denn durch je n verschiedene Punkte von $\mathfrak{T}$ läßt sich ja (mindestens) eine Hyperebene legen. $\mathfrak{B}_n$ besteht somit aus lauter Punkten (sogar einseitiger) n -ter Ordnung.

IV. Im Falle $n \equiv 0 \pmod{2}$ folgt aus III. unser Satz. Denn alsdann ist $n = 2k$, es besteht also $\mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}_{2k}$ aus lauter Punkten $2k$ -ter Ordnung und nach einem weiter unten (Nr. 7) zu beweisenden Satz liegt daher $\mathfrak{B}_n$ ganz auf der Begrenzung seiner konvexen Hülle.

V. Im Falle $n \equiv 1 \pmod{2}$ führen wir den Beweis indirekt: Wir nehmen an, daß Punkte von $\mathfrak{B}_n$ im Innern der konvexen Hülle H von $\mathfrak{B}_n$ liegen. Dann existiert sogar ein abgeschlossener Teilbogen $\mathfrak{B}_n^*$ von $\mathfrak{B}_n$, welcher ganz im Innern von H liegt²³). Auf $\mathfrak{B}_n^*$ wählen wir irgend $n-1 = 2r$ verschiedene Punkte

stieren, die auf verschiedenen Seiten von $\mathfrak{E}$ gelegen sind. Im Texte oben ist dabei stets die Voraussetzung erfüllt, daß P isoliert liegt, d. h., daß in einer Umgebung von P auf $\mathfrak{B}$ keine weiteren zu $\mathfrak{E}$ gehörigen Punkte existieren.

²³) Übrigens besitzt H stets innere Punkte, da $\mathfrak{B}_n$ in keiner Hyperebene gelegen ist. Die niedrigste Ordnung, die für einen, in keiner Hyperebene gelegenen Bogen im R_n möglich ist, muß natürlich n sein.

$P_1, \dots, P_{2r}$, unter denen sich keiner der Endpunkte von $\mathfrak{B}$ befinden soll. Die Numerierung der $P_1, \dots, P_{2r}$ sei dabei so gewählt, daß für den zu P_ν gehörigen Parameterwert t_ν gilt: $t_\nu < t_{\nu+1}$; $\nu = 1, \dots, 2r-1$. Nun sei $\mathfrak{E}$ eine Hyperebene durch $P_1, \dots, P_{n-1}$ und einen Endpunkt S von $\mathfrak{B}_n$. Weitere Punkte kann $\mathfrak{B}_n$ mit $\mathfrak{E}$ nicht gemeinsam haben, da $\mathfrak{B}_n$ von n -ter Ordnung sein soll. Da $P_1, \dots, P_{n-1}$ Schnittpunkte von $\mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{B}_n$ sein müssen (vgl. II.), so liegen die, ganz dem Innern von H angehörigen Bogen $\widehat{P_{2q-1} P_{2q}}$ (welche die Bilder der Parameterintervalle $t_{2q-1} < t < t_{2q}$ sind ($q = 1, \dots, r$)) sämtlich auf der gleichen Seite von $\mathfrak{E}$, während alle übrigen Punkte von $\mathfrak{B}_n$ (abgesehen von S und von den P_ν) auf der entgegengesetzten Seite von $\mathfrak{E}$ gelegen sind. Unter den zu $\mathfrak{E}$ parallelen Hyperebenen, welche auf der gleichen Seite von $\mathfrak{E}$ liegen, wie die $\widehat{P_{2q-1} P_{2q}}$, gibt es daher eine Stützebene an H ; auf dieser Stützebene liegt mindestens ein Punkt R der Begrenzung von H . Da aber R zugleich auf einem der $\widehat{P_{2q-1} P_{2q}}$, also auf $\mathfrak{B}_n^*$, liegen müßte, so müßte R auch zum Innern von H gehören, womit wir zu einem Widerspruch gelangt sind und den Satz auch für den Fall $n \equiv 1 \pmod{2}$ bewiesen haben.

Die $\mathfrak{B}_n$ sind für die Kurventheorie im R_n als die naturgemäße Verallgemeinerung der Konvexbogen in der Ebene anzusehen.

7. Der in Nr. 6, Beweis, IV., bereits benutzte Satz lautet folgendermaßen²⁴⁾:

Satz: Ist $\mathfrak{B}_{2k}$ ein (beschränkter) Bogen $2k$ -ter Ordnung ($k \geq 1$) im R_n ($n \geq 2$, $2k \geq n$), so liegen alle Punkte von $2k$ -ter Ordnung auf der Begrenzung der konvexen Hülle von $\mathfrak{B}_{2k}$. Ferner ist jeder, ganz dem Innern dieser konvexen Hülle angehörige, abgeschlossene Teilbogen von $\mathfrak{B}_{2k}$ ein Bogen von höchstens $(2k-1)$ -ter Ordnung.

Wir setzen dabei der Einfachheit wegen hier und im folgenden stets voraus, daß die auftretenden Bogen keine Teilbogen besitzen, welche in einer Hyperebene des R_n ent-

²⁴⁾ Vgl. für den Fall des R_2 auch Haupt⁴⁾, a. a. O., Nr. 3, 1; Zusatz 2.

halten sind; übrigens kann die hierdurch bedingte Einschränkung der Allgemeinheit leicht beseitigt werden²⁵⁾.

Beweis: Sei P ein Punkt $2k$ -ter Ordnung auf $\mathfrak{B}_{2k}$ und $\mathfrak{U}(P)$ eine Umgebung von P auf $\mathfrak{B}_{2k}$ (übrigens sei $\mathfrak{U}$ nur dann eine einseitige Umgebung, wenn P Endpunkt des Bogens ist). Nach Voraussetzung gibt es Hyperebenen $E(\mathfrak{U})$, welche mit $\mathfrak{U}$ genau $2k$, darunter eventuell mehrfach gezählte, Punkte gemeinsam haben.

I. Ist nun P kein Endpunkt von $\mathfrak{B}_{2k}$, so können wir $E(\mathfrak{U})$ stets so wählen, daß die $2k$ auf $E(\mathfrak{U})$ gelegenen Punkte sämtlich Schnittpunkte (s. S. 54 Fußn. ²²⁾) sind. Man erkennt in der Tat: Würden Stützpunkte (s. S. 54 Fußn. ²³⁾) auftreten, so müßten sich diese auf einer zu $E(\mathfrak{U})$ benachbarten, passend gewählten Hyperebene in Schnittpunkte auflösen, welche sämtlich ebenfalls zu $\mathfrak{U}$ gehören²⁶⁾. Weil nun aber $\mathfrak{B}_{2k}$ mit $E(\mathfrak{U})$ lediglich $2k$, zu $\mathfrak{U}$ gehörige Schnittpunkte gemeinsam hat, so folgt (vgl. Nr. 6, Beweis, V.), daß innerhalb $\mathfrak{U}$ ein zur Begrenzung der konvexen Hülle von $\mathfrak{B}_{2k}$ gehöriger Punkt existiert. Lassen wir also $\mathfrak{U}$ sich auf P zusammenziehen, so ergibt sich P als Häufungspunkt von Punkten, welche der Begrenzung der konvexen Hülle von $\mathfrak{B}_{2k}$ angehören. Daher liegt P selbst auf dieser Begrenzung.

II. Ist P Endpunkt von $\mathfrak{B}_{2k}$, so modifiziert man die Schlüsse wie folgt: Alle nicht zu $\mathfrak{U}$ d. h. alle zum Komplement $\mathfrak{B}_{2k} - \mathfrak{U}$ gehörigen Punkte liegen auf der nämlichen Seite von $E(\mathfrak{U})$, weil $\mathfrak{B}_{2k}$ mit $E(\mathfrak{U})$ nur die zu $\mathfrak{U}$ gehörigen $2k$ Punkte gemeinsam hat. Betrachtet man jetzt eine absteigende Folge von Umgebungen $\mathfrak{U}_\nu = \mathfrak{U}_\nu(P; \mathfrak{B}_{2k})$ ($\nu = 1, 2, \dots$; $\mathfrak{U}_\nu > \mathfrak{U}_{\nu+1}$), welche sich auf P zusammenziehen, so bestimmen die $\mathfrak{U}_\nu$ eine Folge von Hyperebenen $E_\nu = E(\mathfrak{U}_\nu)$. Aus der Folge von E_ν können wir eine Teilfolge auswählen, welche gegen eine, P enthaltende,

²⁵⁾ Man hat es hier mit der Verallgemeinerung des Falles zu tun, daß ein ebener Bogen Strecken als Teilbogen enthält (vgl. Hjelmslev¹³⁾ a. a. O., Seite 469).

²⁶⁾ Vgl. Haupt⁴⁾, a. a. O., Nr. 1, 1; Bemerkung und Zusatz. Obwohl für die dortigen Betrachtungen $n = 2$ angenommen ist, gelten sie doch für beliebiges $n \geq 3$.

Hyperebene E^* konvergiert²⁷⁾. Wegen $ll_r > ll_{r+1}$ liegen dann alle $\mathfrak{B}_{2k} - ll_r$ auf der nämlichen Seite von E^* , d. h. E^* ist Stützhyperebene von $\mathfrak{B}_{2k}$ in P und folglich liegt P auf der konvexen Hülle von $\mathfrak{B}_{2k}$, wie behauptet.

III. Durch ganz entsprechende Schlüsse wie in Ziffer I. unseres Beweises erkennt man ferner, daß ein im Innern der konvexen Hülle von $\mathfrak{B}_{2k}$ gelegener abgeschlossener Teilbogen $\mathfrak{B}^*$ von $\mathfrak{B}_{2k}$ von höchstens $(2k - 1)$ -ter Ordnung sein kann. Denn anderenfalls existierte eine Hyperebene E , welche von $\mathfrak{B}^*$ in $2k$ Punkten geschnitten wird und folglich mit $\mathfrak{B}_{2k}$ keine weiteren, nicht zu $\mathfrak{B}^*$ gehörigen Punkte gemeinsam haben kann. Daraus folgt, daß $\mathfrak{B}^*$ Punkte enthalten müßte, die auf der Begrenzung der konvexen Hülle von $\mathfrak{B}_{2k}$ liegen, was der über $\mathfrak{B}^*$ gemachten Annahme widerspricht.

Damit ist alles bewiesen.

Anmerkung: Die Schlüsse in obiger Ziffer II gelten allgemeiner für jeden Punkt q -ter Ordnung, welcher Endpunkt eines beschränkten Bogens q -ter Ordnung ist (q auch ungerade natürliche Zahl).

8. Im 4. Kapitel seiner Arbeit beweist Herr Marchaud bemerkenswerte Sätze über Kontinua $\mathfrak{K}$ von beschränkter zyklischer Ordnung²⁸⁾. Unter der „(beschränkten) zyklischen Ordnung“ von $\mathfrak{K}$ versteht man dabei die Maximalzahl der Schnittpunkte eines (beliebigen) Kreises mit $\mathfrak{K}$; die Geraden sind dabei nicht zu den Kreisen gerechnet. Wird $\mathfrak{K}$ von jedem Kreis nur in einer endlichen Anzahl von Punkten getroffen, ohne daß aber eine obere Schranke für diese Anzahlen existiert, so heiße $\mathfrak{K}$ von „endlicher zyklischer Ordnung“. Zum Unterschied gegenüber der zyklischen Ordnung soll im folgenden der mit Hilfe der Geraden definierte (gewöhnliche) Ordnungsbegriff auch als „lineare

²⁷⁾ Wir sagen dabei: die E_v konvergieren gegen E^* , wenn die senkrechten Abstände der E_v von P gegen Null konvergieren und die Normalenrichtungen der E_v gegen die Normalenrichtung von E konvergieren.

²⁸⁾ Über Kurven der zyklischen Ordnung vier siehe insbes. Juel, C., Om simple cykliske Kurver. D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, 7. R. Naturvid. og mat. Afd. Bd. VIII (1911) Nr. 6. Vgl. ferner Mukhopadhyaya³³⁾, a. a. O.

Ordnung“ bezeichnet werden. Herr Marchaud zeigt²⁹⁾ unter anderem, daß jedes (beschränkte) Kontinuum $\mathfrak{K}$, welches die zyklische Ordnung k besitzt, notwendig von höchstens $(2k - 3)$ -ter linearer Ordnung ist; ferner daß jeder Bogen, dessen zyklische Ordnung k ist und der nur endlich viele mehrfache Punkte besitzt, höchstens die lineare Ordnung k besitzt.

Unter der Voraussetzung endlicher zyklischer bzw. (beschränkter) linearer Ordnung besteht, wie wir bemerken möchten, eine entsprechende Beschränkung für die lineare bzw. zyklische Ordnung nicht mehr. Wir zeigen nämlich durch Beispiele:

A. Es gibt Kontinua (sogar einfache Bogen), welche von endlicher zyklischer Ordnung, aber unendlicher linearer Ordnung sind.

In der Tat: Es sei $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ für $x > 0$ und $f(0) = 0$. Man lege nun in den durch die Ungleichungen $0 \leq y \leq f(x)$, $0 \leq x \leq 1$ definierten Bereich B einen einfachen Bogen $\mathfrak{B}$, welcher mit der Achse $y = 0$ unendlich viele Punkte gemeinsam hat, die sich nur gegen $x = y = 0$ häufen. Setzt man $\mathfrak{B}$ aus abzählbar vielen Bogen zusammen, welche je von endlicher zyklischer Ordnung sind (z. B. aus Ellipsenbogen) und welche sich nur gegen $x = y = 0$ häufen, so wird $\mathfrak{B}$ von jedem Kreisbogen nur in endlich vielen Punkten getroffen. In der Tat ist dies ohne weiteres klar, ausgenommen lediglich diejenigen Kreise $\mathfrak{K}$, welche durch $x = y = 0$ gehen und $y = 0$ berühren. Nun schmiegt sich aber $f(x)$ bekanntlich im Punkte $x = 0$, $y = 0$ stärker an die x -Achse an als jeder Kreis. Daher dringt jeder Berührungskreis K in den Bereich B erst für gewisse $x \geq \eta > 0$ ein (wo η vom jeweils betrachteten Kreise abhängt). Daraus folgt die Behauptung.

²⁹⁾ Marchaud¹⁾, a. a. O., S. 110. Die beim Beweise gemachte Annahme, daß jede Gerade mit $\mathfrak{K}$ nur endlich viele Punkte gemeinsam hat, läßt sich durch die Forderung ersetzen, daß $\mathfrak{K}$ keine Strecken enthalte. In der Tat liefert der schon von Herrn Marchaud benutzte Beweisgedanke den Satz:

Jedes, keine Strecken enthaltende, Kontinuum von beschränkter zyklischer Ordnung ist eo ipso von beschränkter linearer Ordnung. Der Fall, daß $\mathfrak{K}$ Strecken enthält, kann durch geeignete Modifikation der linearen Ordnungsdefinition ebenfalls einbezogen werden.

B. Andererseits gibt es bekanntlich Kontinua (sogar einfache Bogen) von unendlicher zyklischer, aber beschränkter linearer Ordnung (nämlich sogar von der Ordnung zwei). In der Tat leistet jeder Konvexbogen, der mit einem Kreisbogen unendlich viele Punkte gemeinsam hat, das Gewünschte.

9. Zum Abschluß mag noch erwähnt werden: Ein beschränktes Kontinuum $\mathfrak{K}$ im R_2 von endlicher zyklischer Relativordnung bezügl. eines Kreibüschels (z. B. mit reellen Grundpunkten außerhalb $\mathfrak{K}$) ist als Bogensumme darstellbar, d. h. als Summe von höchstens abzählbar vielen einfachen Bogen³⁰⁾. Ferner ist jeder (einfache) Bogen darstellbar als abgeschlossene Hülle einer Summe von höchstens abzählbar vielen zyklisch primitiven Bogen. In der Tat gilt die am Fall der linearen Ordnung entwickelte Theorie³¹⁾ auch für den Fall der zyklischen Ordnung³²⁾. Ein einfacher Bogen heißt dabei „zyklisch primitiv“ von der Ordnung k (bzw. von endlicher Ordnung usw.), wenn er selbst und jeder seiner Punkte die (zyklische) Ordnung k (bzw. endliche Ordnung usw.) besitzt.

Angesichts der vorstehenden Zerlegungssätze erhebt sich vor allem die Frage nach der Existenz zyklisch primitiver Bogen von vorgegebener zyklischer Ordnung, ferner nach der Existenz von Punkten vorgegebener zyklischer Ordnung³³⁾.

³⁰⁾ Vgl. Haupt³⁾, a. a. O., Nr. 0, 5.

³¹⁾ Haupt⁴⁾, a. a. O., Nr. 2, 1–2, 7.

³²⁾ Vgl. Haupt⁴⁾, a. a. O., Nr. 0, 6.

³³⁾ Es sei an dieser Stelle auf die Arbeiten von Herrn S. Mukhopadhyaya hingewiesen (Collected geometrical papers, Part I, Calcutta University Press, 1929, insbesondere Nr. 1, Nr. 2 (Seite 13 ff.) und Nr. 13 (Seite 105 ff.)). In letzterer Arbeit werden übrigens statt der Geraden oder Kreise (allgemeiner) ebene Kurven K zur Betrachtung herangezogen, welche durch r verschiedene Punkte eindeutig bestimmt sind ($r \geq 3$). Definiert man als „ K -Ordnung“ eines (ebenen) Bogens die Maximalzahl der Schnittpunkte des Bogens mit den Kurven K , so gilt für die K -Ordnung wieder im wesentlichen das Gleiche wie für die lineare Ordnung³²⁾. Herr Mukhopadhyaya beweist (in unserer Terminologie gesprochen) eine Reihe von Sätzen über die gegenseitige Lage von Punkten ($r+1$ -ter (und höherer) K -Ordnung auf einem Bogen (unter der Voraussetzung, daß der Bogen nur endlich viele Punkte von höherer als r -ter K -Ordnung enthält, und unter einigen weiteren Annahmen).

10. (Zusatz bei der Korrektur.) Die zuletzt angeschnittenen Fragen betr. ebene Bogen von n -ter zyklischer Ordnung sind (wie stereographische Projektion zeigt) äquivalent mit den entsprechenden Problemen für gewisse Raumkurven von linearer n -ter Ordnung (nämlich solche, die speziell ganz auf der Oberfläche einer Kugel verlaufen (sphärische Kurven)). Man erhält daher aus Sätzen über beliebige (nicht notwendig sphärische) Raumkurven einer vorgegebenen linearen Ordnung durch Spezialisierung Sätze über ebene Kurven der betr. zyklischen Ordnung. Als ein solcher allgemeiner Satz sei erwähnt, daß es im R_3 auf einem (keine ebenen Teilbogen enthaltenden) Bogen $\mathfrak{B}$ keine einseitigen Punkte von linearer 4. Ordnung gibt, insbesondere auch keine primitiven Bogen 4. Ordnung; dabei sind über $\mathfrak{B}$ keine Differenzierbarkeitsannahmen notwendig. Weiterhin ist jeder Bogen (im R_3) von linearer 4. Ordnung darstellbar als Summe von Bogen 3. Ordnung, deren Anzahl eine feste obere Schranke besitzt³⁴). Die Beweise können hier nicht wiedergegeben werden. Ebenso kann die Verallgemeinerung der letzten Behauptungen auf den R_n bzw. auf Probleme bei ebenen Kurven (K -Ordnung) hier nur erwähnt werden.

³⁴) Damit ist eine Frage beantwortet, die auch Herr Marchaud¹⁾, a. a. O., S. 109, Nr. 41) aufgeworfen hat. Für den Spezialfall der sphärischen Kurven bzw. ihrer projektiven Bilder und unter gewissen Differenzierbarkeitsannahmen ist der Satz enthalten in Sätzen von Herrn Juel²⁸⁾, a. a. O., vgl. S. 369 und 379.