Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1929. Heft II

Mai-Julisitzung

München 1929
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Die Grundgleichungen der Flächentheorie und ihr Ausdruck durch Integralsätze.

Von **Frank Löbell** in Stuttgart-Cannstatt.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 1. Juni 1929.

In neuerer Zeit beginnt die kinematische Differentialgeometrie, wie sie besonders Cesàro in seinen Vorlesungen über natürliche Geometrie[1]) dargestellt hat, mehr Pflege zu finden; so wurde sie verschiedentlich von Herrn Lagally gefördert und auch bei mechanischen Untersuchungen angewandt[2]). Allgemein bekannt ist die wichtige Rolle, die kinematische Überlegungen in der Darbouxschen Behandlung der Kurven- und Flächentheorie spielen. Bedenkt man, wie nahe verwandt diese Methoden durch ihre Anschaulichkeit mit der rein geometrischen Betrachtungsweise sind, durch die kürzlich die Herren Finsterwalder und Sauer die Einsicht in mancherlei differentialgeometrische Zusammenhänge erleichtert haben[3]), so werden vielleicht die folgenden Bemerkungen zu den Fundamentalgleichungen der Flächentheorie einigem Interesse begegnen.

---

[1]) Cesàro, Lezioni di geometria intrinseca, Napoli 1896; Cesàro-Kowalewski, Vorl. ü. natürliche Geometrie, 1. Aufl. Leipzig 1901, 2. Aufl. Leipzig u. Berlin 1926.

[2]) Lagally, Die Verwendung des begleitenden Dreibeins für den Aufbau der natürlichen Geometrie, Sitzungsb. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-naturw. Abt., 1927, S. 5ff.; Lagally, Vorl. ü. Vektorrechnung, Leipzig 1928, S. 60—98; Lagally, Über Spannung und elastische Deformation von unebenen Membranen, Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech., Bd. 4 (1924), S. 377ff. — Anwendungen der kinematischen Flächentheorie finden sich auch in zwei Arbeiten des Verfassers in der Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech., Bd. 7 (1927), S. 463ff. und Bd. 9 (1929), S. 213ff. — S. auch Delens, Méthodes et problèmes des géométries différentielles euclidienne et conforme, Paris 1927.

[3]) Sauer, Geometrische Überlegungen zu den Grundgleichungen der Flächentheorie, Sitzungsb. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-naturw. Abt., 1928, S. 97ff.

1. Die Lagrange-Darbouxsche Beziehung und die Grundgleichungen der Flächentheorie.

Besitzt ein starrer Körper eine Beweglichkeit von zwei Freiheitsgraden, sodaß seine Lage als Funktion von zwei Parametern p und q angesehen werden kann, so bezeichnen wir als seine partiellen Winkelgeschwindigkeiten bezüglich der gewählten Parameter die Winkelgeschwindigkeitsvektoren $\mathfrak{u}_1$ und $\mathfrak{u}_2$ der Bewegungen, die der Körper beschreibt, wenn das eine Mal q als Konstante und p als die Zeit, das andere Mal p als Konstante und q als die Zeit betrachtet wird; es gilt dann die schon auf Lagrange zurückgehende, aber wohl erst von Darboux viel gebrauchte Formel[1]):

$$\underline{\frac{\partial \mathfrak{u}_1}{\partial q} - \frac{\partial \mathfrak{u}_2}{\partial p} + \mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{u}_2 = 0.} \tag{1}$$

Diese Beziehung kann man zur Untersuchung einer Fläche verwenden, wenn man auf dieser zunächst eine integrable Richtungsübertragung[2]) einführt und dann einem starren Körper $\mathfrak{S}$ eine zweiparametrige Bewegung durch die Forderung

---

[1]) Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ drei beliebige Vektoren, so bedeute im folgenden $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ das skalare Produkt, $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ das Vektorprodukt von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$; ferner wird $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ besetzt. — Die Formel (1) ist bewiesen bei Hamel, Elementare Mechanik, Leipzig u. Berlin 1912, S. 532; es möge jedoch ihre Herleitung hier skizziert werden: Wenn $\mathfrak{q}$ irgend einen mit dem starren Körper fest verbundenen Vektor bedeutet, so gilt

$$\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial p} = \mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{q} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial q} = \mathfrak{u}_2 \times \mathfrak{q};$$

folglich ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathfrak{q}}{\partial p\,\partial q} &= \frac{\partial \mathfrak{u}_1}{\partial q}\times\mathfrak{q} + \mathfrak{u}_1\times\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial q} = \frac{\partial \mathfrak{u}_1}{\partial q}\times\mathfrak{q} + \mathfrak{u}_1\times(\mathfrak{u}_2\times\mathfrak{q})\\ &= \frac{\partial \mathfrak{u}_2}{\partial p}\times\mathfrak{q} + \mathfrak{u}_2\times\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial p} = \frac{\partial \mathfrak{u}_2}{\partial p}\times\mathfrak{q} + \mathfrak{u}_2\times(\mathfrak{u}_1\times\mathfrak{q}).\end{aligned}$$

Vermöge der Identität

$$\mathfrak{u}_1\times(\mathfrak{u}_2\times\mathfrak{q}) + \mathfrak{u}_2\times(\mathfrak{q}\times\mathfrak{u}_1) + \mathfrak{q}\times(\mathfrak{u}_1\times\mathfrak{u}_2) = 0$$

ist also

$$\frac{\partial \mathfrak{u}_1}{\partial q}\times\mathfrak{q} - \frac{\partial \mathfrak{u}_2}{\partial p}\times\mathfrak{q} + (\mathfrak{u}_1\times\mathfrak{u}_2)\times\mathfrak{q} = 0;$$

da dies für jeden Vektor $\mathfrak{q}$ gilt, ist (1) bewiesen.

[2]) Hessenberg, Beispiele zur Richtungsübertragung, Jahresber. d. D. Math. Verein. Bd. 33 (1925), 2. Abt., S. *93* ff.

aufzwingt, daß ein Punkt P von $\mathfrak{S}$ sich auf der Fläche bewege, und daß ferner die orientierte Tangentialebene und die durch die soeben eingeführte Richtungsübertragung in jedem Flächenpunkte festgelegte, tangentielle Leitrichtung in dem Körper $\mathfrak{S}$ fest sei. Die Winkelgeschwindigkeiten von $\mathfrak{S}$ können dann durch sogenannte Krümmungsvektoren ersetzt werden; unter dem Krümmungsvektor einer Flächenkurve[1]) in einem ihrer Punkte P versteht man den Vektor

$$(2) \qquad \mathfrak{d} = T\,\mathfrak{t} + N\,\mathfrak{f} + G\,\mathfrak{n},$$

wo T die geodätische Windung, N die Normalkrümmung, G die geodätische Krümmung, $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{f}$ die Einheitsvektoren der Tangente und der Tangentialnormale[2]) und $\mathfrak{n} = \mathfrak{t} \times \mathfrak{f}$ den Einheitsvektor der Flächennormale in P bedeutet. Sind nämlich $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{d}_2$ die Krümmungsvektoren der Parameterlinien $q =$ const. u. $p =$ const., v_1 und v_2 die Geschwindigkeitsbeträge von P bei Konstanz von q bzw. p und bei Deutung von p bzw. q als Zeit, ferner φ_1 und φ_2 die Winkel der Leitrichtung mit den Tangentenvektoren $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ der Parameterlinien, sodaß also $\omega = \varphi_1 - \varphi_2$ der Winkel zwischen diesen ist, so wird, wenn man

$$\mathfrak{d}_p = v_1\,\mathfrak{d}_1, \qquad \mathfrak{d}_q = v_2\,\mathfrak{d}_2$$

setzt,

$$\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{d}_p + \mathfrak{n}\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}, \qquad \mathfrak{u}_2 = \mathfrak{d}_q + \mathfrak{n}\frac{\partial \varphi_2}{\partial q},$$

und man findet, wenn man die für jeden mit dem Körper $\mathfrak{S}$ fest verbundenen Vektor $\mathfrak{q}$ gültigen Formeln

$$\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial p} = \mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{q} = \left(\mathfrak{d}_p + \mathfrak{n}\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}\right) \times \mathfrak{q},$$
$$\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial q} = \mathfrak{u}_2 \times \mathfrak{q} = \left(\mathfrak{d}_q + \mathfrak{n}\frac{\partial \varphi_2}{\partial q}\right) \times \mathfrak{q}$$

anwendet:

$$(3) \qquad \underline{\frac{\partial \mathfrak{d}_p}{\partial q} - \frac{\partial \mathfrak{d}_q}{\partial p} + \mathfrak{d}_p \times \mathfrak{d}_q + \mathfrak{n}\frac{\partial^2 \omega}{\partial p\,\partial q} = 0.}$$

[1]) Es ist dies der „Darbouxsche Vektor" bei Lagally. (Die nachfolgende Beziehung (2) dient beim Aufbau der kinematischen Differentialgeometrie zur Definition der drei Flächenkrümmungen G, N, T einer Flächenkurve.)

[2]) Diese Bezeichnung stammt von Knoblauch.

Diese von der speziellen Wahl der Richtungsübertragung, wie zu erwarten war, unabhängige Gleichung umfaßt die Grundgleichungen der Flächentheorie von Gauß, Codazzi und Mainardi[1]).

2. Gauss' theorema egregium und der Gauss-Bonnetsche Integralsatz.

Multipliziert man die Gleichung (3) skalar mit $\mathfrak{n}$, so erhält man wegen

$$\frac{\partial(\mathfrak{n}\,\mathfrak{d}_p)}{\partial q} = \mathfrak{n}\frac{\partial\,\mathfrak{d}_p}{\partial q} + \mathfrak{d}_p\frac{\partial\,\mathfrak{n}}{\partial q}, \qquad \frac{\partial(\mathfrak{n}\,\mathfrak{d}_q)}{\partial p} = \mathfrak{n}\frac{\partial\,\mathfrak{d}_q}{\partial p} + \mathfrak{d}_q\frac{\partial\,\mathfrak{n}}{\partial p}$$

und

$$\mathfrak{n}\,\mathfrak{d}_p = v_1 G_1, \quad \mathfrak{n}\,\mathfrak{d}_q = v_2 G_2, \quad \frac{\partial\,\mathfrak{n}}{\partial p} = \mathfrak{d}_p \times \mathfrak{n}, \quad \frac{\partial\,\mathfrak{n}}{\partial q} = \mathfrak{d}_q \times \mathfrak{n}$$

$$(4)\quad \frac{\partial(v_1 G_1)}{\partial q} - \mathfrak{d}_p\,\mathfrak{d}_q\,\mathfrak{n} - \frac{\partial(v_2 G_2)}{\partial p} + \mathfrak{d}_q\,\mathfrak{d}_p\,\mathfrak{n} + \mathfrak{n}\,\mathfrak{d}_p\,\mathfrak{d}_q + \frac{\partial^2\omega}{\partial p\,\partial q} = 0.$$

Es erweist sich nun vielfach als nützlich, neben dem Krümmungsvektor $\mathfrak{d}$ einer Flächenkurve noch dessen mit einer besonderen Bezeichnung versehene Tangentialkomponente zu verwenden; wir setzen

$$(5)\qquad \mathfrak{g} = T\,\mathfrak{t} + N\,\mathfrak{f},$$

sodaß nach (2)

$$(6)\qquad \mathfrak{d} = \mathfrak{g} + G\,\mathfrak{n}$$

wird. Die Bedeutung des Vektors $\mathfrak{g}$ wird von vornherein einleuchten, wenn man beachtet, daß $\mathfrak{g}$ die Winkelgeschwindigkeit eines starren Körpers bei Zugrundelegung der Bogenlänge als Zeitskala ist, der mit der längs der Kurve im Levi-Civitàschen Sinn parallel verschobenen Berührebene fest verbunden ist. Es ist dann

$$\mathfrak{n}\,\mathfrak{d}_p\,\mathfrak{d}_q = v_1 v_2 \cdot \mathfrak{n}\,\mathfrak{g}_1\,\mathfrak{g}_2.$$

Nun erkennt man unmittelbar aus der Beziehung

$$(7)\qquad \frac{d\,\mathfrak{n}}{d\,s} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{n},$$

in der s die Bogenlänge der Flächenkurve, zu der $\mathfrak{g}$ gehört, be-

---

[1]) Eine Zusammenfassung dieser drei skalaren Gleichungen in eine Vektorgleichung gab zum ersten Mal Cesàro, Lezioni (s. Fußn. 1, S. 165) p. 253.

deutet, daß $\frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial s_1}$ und $\frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial s_2}$, die Ableitungen von $\mathfrak{n}$ in den Richtungen der Parameterlinien, durch „Stürzen"[1]) aus $-\mathfrak{g}_1$ und $-\mathfrak{g}_2$ hervorgehen; hieraus folgt ohne weitere Rechnung:

$$\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 = \frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial s_1} \times \frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial s_2}. \tag{8}$$

Nach Gauß' ursprünglicher Definition gilt aber für das Krümmungsmaß K:

$$\mathfrak{n}\, K \sin \omega = \frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial s_1} \times \frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial s_2}; \tag{9}$$

folglich ist

$$\mathfrak{n}\, \mathfrak{d}_p\, \mathfrak{d}_q = K v_1 v_2 \sin \omega.$$

Mithin gilt nach (4)

$$\underline{K \sin \omega = \frac{1}{v_1 v_2}\left(\frac{\partial (v_1 G_1)}{\partial q} - \frac{\partial (v_2 G_2)}{\partial p} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial p\, \partial q}\right)}. \tag{10}$$

Dies ist das theorema egregium von Gauß in der Liouvilleschen Form.

Es ist bekannt, daß diese Beziehung gleichbedeutend mit dem Gauß-Bonnetschen Integralsatz ist. Es sei gestattet, hier eine einfache Form für diesen anzugeben, zu der man gelangt, wenn man von der methodisch naheliegenden Frage ausgeht, wann die Levi-Civitàsche Parallelverschiebung eine integrable, wann eine nichtintegrable Richtungsübertragung darstellt. Um dies zu entscheiden, betrachten wir die Levi-Civitàsche Parallelverschiebung längs einer Kurve γ, die von einem Punkte A zu einem andern Punkte B führt; bedeutet $\mathfrak{e}$ irgend einen Einheitsvektor in der Berührebene von A, so ist die Änderung, die der Winkel von $\mathfrak{e}$ mit dem Tangentenvektor $\mathfrak{t}$ von γ bei der Parallelverschiebung erleidet,

$$-\int_\gamma G\, ds$$

(γ muß also eine integrierbare geodätische Krümmung besitzen). Um die Abhängigkeit dieser Änderung vom Wege zu finden, betrachten wir eine zweite Kurve γ', die ebenfalls von A nach B führt; es kommt dann auf die Feststellung der Differenz der

[1]) Hessenberg l. c. (Fußn. 2, S. 166) S. 94.

beiden Integrale $-\int_{\gamma'} G\,ds$ und $-\int_{\gamma} G\,ds$ oder des Wertes des über den geschlossenen, von den beiden Kurven γ und $-\gamma'$ gebildeten Weg erstreckten Integrales

$$\oint G\,ds$$

an. Es soll angenommen werden, daß γ und γ' ein einfach zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{G}$ auf der Fläche umschließen; die Bezeichnung sei so gewählt, daß $\mathfrak{G}$ zur Linken von $\gamma - \gamma'$ liegt. Damit der Winkel von $\mathfrak{e}$ mit $\mathfrak{t}$ während der Parallelverschiebung nirgends einen Sprung erleide, sollen die Kurven γ und γ' keine Ecken haben; ferner ist es bequem für den Vergleich der Winkeländerung längs der beiden Wege γ und γ', wenn diese so verlaufend vorausgesetzt werden, daß sie am Anfang in A und am Ende in B gleiche Winkel (auch dem Sinne nach) miteinander bilden, dies aber kann, weil $\gamma - \gamma'$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet einschließen soll, also keinen Doppelpunkt haben darf, nur dadurch zustandekommen, daß sich γ und γ' in A und in B berühren. Führt man nun eine Schar von Parameterlinien zwischen γ und γ' ein, die alle γ und γ' in A und B berühren, und eine zweite Schar, die so beschaffen ist, daß jede ihrer Kurven einen Punkt von γ mit einem Punkt von γ' verbindet, so findet man, wenn man beachtet, daß das skalare Flächenelement $df = v_1 v_2 \sin\omega\, dp\, dq$ ist[1]):

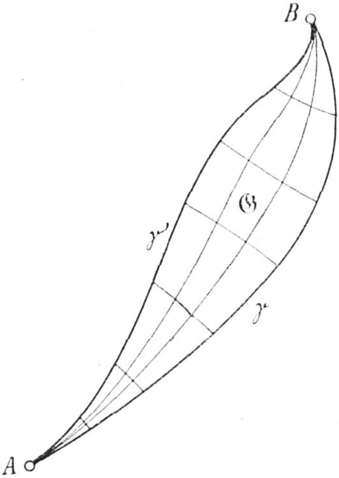

Fig. 1

[1]) Es sei besonders darauf aufmerksam gemacht, daß hier, wie man bei der Durchführung der Umformungen im einzelnen bemerkt, sich der Zweifel, ob in (11) rechts statt 0 nicht ein anderes ganzzahliges Vielfaches von 2π, $2k\pi$, stehen muß, gar nicht erhebt; aber auch wenn dies der Fall wäre, so würde stetige Überführung von γ' in γ, bei der sich $2k\pi$ nur stetig, also überhaupt nicht ändern könnte, erkennen lassen, daß $k = 0$ sein muß, weil, sobald γ' mit γ zusammenfällt, dieser Wert allein in Frage kommt.

$$\int_{\bigcirc} G\,ds + \int_{\mathfrak{G}} K\,df = 0. \tag{11}$$

Von der Annahme der Ecken in A und B mit Winkeln von der Größe π und von der Annahme der Glattheit in den übrigen Punkten der Randkurve können wir uns dadurch befreien, daß wir durch kleine Kurvenbögen, die je die beiden in einer Ecke zusammentreffenden Kurvenstücke berühren, die Randkurve glätten; läßt man diese glättenden Bögen gegen die Ecken zusammenschrumpfen, so ergibt sich, daß (11) noch gilt, wenn man das Linienintegral der geodätischen Krümmung in jeder Ecke um den an ihr liegenden Außenwinkel springen läßt (sodaß man es am besten im Stieltjesschen Sinne auffaßt). Dies führt auf die gewohnte Form des Gauß-Bonnetschen Integralsatzes.

Man erkennt aber durch solche Überlegungen auch, daß die geometrische Bedeutung dieses Satzes in folgendem gesehen werden kann[1]): Verschiebt man einen die Fläche berührenden Vektor längs einer Kurve γ parallel nach Levi-Cività von A nach B, so nimmt er, wenn man von einer bestimmten Anfangslage in A ausgeht, eine gewisse Endlage in B an; transformiert man die Kurve γ stetig so, daß sie immer A mit B verbindet, so dreht sich diese Endlage, feste Ausgangslage vorausgesetzt, um einen Winkel, der gleich der curvatura integra des von der Kurve überstrichenen Gebietes ist, und zwar gilt dies auch dann, wenn die Kurve in ihrer neuen Lage die ursprüngliche Kurve γ in A und B nicht mehr berührt und wenn sogar Ecken zwischen A und B auftreten. Diese Betrachtung führt weiter zu der Einsicht, daß man durch die Gauß-Bonetsche Integralformel in den Stand gesetzt wird, die Levi-Civitàsche Parallelverschiebung längs Kurven zu erklären, die keine stärkere Anforderung erfüllen als die, stetig zu sein und den Jordanschen Inhalt 0 zu besitzen.

3. Die Codazzi-Mainardische Beziehung und ihre integrale Fassung.

Subtrahiert man von der Grundgleichung (3) die mit $\mathfrak{n}\,v_1 v_2$ multiplizierte Gleichung (10), so erhält man, wenn man die Beziehungen

[1]) Vgl. Klein-Blaschke, Vorl. ü. höh. Geometrie, Berlin 1926, S. 342 f.

$$\frac{\partial(\mathfrak{n} v_1 G_1)}{\partial q} = \mathfrak{n}\frac{\partial(v_1 G_1)}{\partial q} + v_1 G_1 \frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial q} = \mathfrak{n}\frac{\partial(v_1 G_1)}{\partial q} + v_1 v_2 G_1 \mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{n},$$
$$\frac{\partial(\mathfrak{n} v_2 G_2)}{\partial p} = \mathfrak{n}\frac{\partial(v_2 G_2)}{\partial p} + v_2 G_2 \frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial p} = \mathfrak{n}\frac{\partial(v_2 G_2)}{\partial p} + v_1 v_2 G_2 \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{n},$$

ferner (6), (8) und (9) berücksichtigt, die folgende, die beiden Geichungen von Codazzi-Mainardi zusammenfassende Formel:

$$(12) \qquad \underline{2\mathfrak{n} K \sin\omega = \frac{1}{v_1 v_2}\left(\frac{\partial(v_2 \mathfrak{g}_2)}{\partial p} - \frac{\partial(v_1 \mathfrak{g}_1)}{\partial q}\right)}.$$

Durch Integration über ein einfach zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{G}$ auf der Fläche kann man hieraus auch einen Integralsatz erhalten, und zwar braucht man, wie sich zeigt, hierbei keine Bedenken gegen das Vorhandensein von Ecken am Rande von $\mathfrak{G}$ zu haben; der Grund hierfür ist, daß der Vektor $\mathfrak{g}$ in jedem Punkt der Fläche durch die Richtung $\mathfrak{t}$, der er zugehört, schon eindeutig bestimmt ist. Man findet, wenn $d\mathfrak{f} = \mathfrak{n}\, df$ das vektorielle Flächenelement bedeutet:

$$(13) \qquad \underline{\int_{\bigcirc} \mathfrak{g}\, ds = 2\int_{\mathfrak{G}} K\, d\mathfrak{f}}.$$

Aber auch, wenn man die Integration erst ausführt, nachdem man vorher die Gleichung (12) vektoriell mit dem Ortsvektor $\mathfrak{r}$ der Fläche multipliziert hat, gelangt man zu einer Integralformel. Es ist nämlich

$$\frac{1}{v_1 v_2}\frac{\partial(\mathfrak{r}\times\mathfrak{g}_2 v_2)}{\partial p} = \frac{\mathfrak{r}}{v_1 v_2}\times\frac{\partial(v_2\mathfrak{g}_2)}{\partial p} + \mathfrak{t}_1\times\mathfrak{g}_2$$

und

$$\frac{1}{v_1 v_2}\frac{\partial(\mathfrak{r}\times\mathfrak{g}_1 v_1)}{\partial q} = \frac{\mathfrak{r}}{v_1 v_2}\times\frac{\partial(v_1\mathfrak{g}_1)}{\partial q} + \mathfrak{t}_2\times\mathfrak{g}_1.$$

Nun ist aber

$$(14) \qquad \mathfrak{t}_1\times\mathfrak{g}_2 - \mathfrak{t}_2\times\mathfrak{g}_1 = 0,$$

wie in einer demnächst im Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung erscheinenden Arbeit gezeigt wird, in der nachgewiesen wird, daß in jedem Punkt der Fläche ein Tensor Γ von der Art existiert, daß $\mathfrak{g} = \Gamma\mathfrak{t}$ ist; die Bedeutung der Gleichung (14) ist einfach, daß der Tensor Γ in der Tangentialebene wirkt und symmetrisch ist. Hier soll diese Gleichung nur unter der im vorliegenden Fall immer erlaubten Annahme orthogonaler Parameterlinien bewiesen werden:

Es ist (mit $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{s}_2 = -\mathfrak{t}_1$)

$$\text{(15)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{g}_1 = T_1\,\mathfrak{t}_1 + N_1\,\mathfrak{s}_1, \\ \mathfrak{g}_2 = T_2\,\mathfrak{t}_2 + N_2\,\mathfrak{s}_2, \end{cases}$$

folglich

$$\mathfrak{t}_1 \times \mathfrak{g}_2 - \mathfrak{t}_2 \times \mathfrak{g}_1 = (T_1 + T_2)\,\mathfrak{n};$$

nach **Bonnet** sind aber die geodätischen Windungen zweier senkrechter Tangentenrichtungen in einem Flächenpunkt entgegengesetzt gleich, womit (14) bewiesen ist. Wegen des Bestehens von (14) ergibt sich aber aus (12) die weitere Integralformel:

$$\text{(16)} \qquad \underline{\int_{\mathfrak{C}} \mathfrak{r} \times \mathfrak{g}\,ds = 2\int_{\mathfrak{G}} \mathfrak{r} \times K\,d\mathfrak{f}.}$$

Die beiden Integralsätze (13) und (16) lassen sich unmittelbar mechanisch deuten[1]): sie zeigen, daß man das System der Vektoren $\mathfrak{g}$ einer Fläche als System von tangentialen Spannungen in einer mit der Fläche in Deckung liegenden Membran ansehen kann, das einem System von äußeren Kräften äquivalent ist, die in der Richtung der Membrannormalen wirken und die Größe $2K$ haben. Man kann dies auch so ausdrücken: Γ läßt sich als ein Spannungstensor deuten, der dem System der äußeren Kräfte $2K\mathfrak{n}$ äquivalent ist; die **Boltzmann**sche Forderung der Symmetrie des Spannungstensors ist nach dem oben benützten Satze von **Bonnet** erfüllt, da dieser Satz, wie die Gleichungen (15) zeigen, mit der Aussage identisch ist, daß der Tensor Γ symmetrisch ist.

Bemerkenswert ist noch Folgendes: Bei einer Verbiegung der Membran transformiert sich das System der Spannungskräfte $\mathfrak{g}$ derart, daß die ihm das Gleichgewicht haltenden äußeren Kräfte $-2K\mathfrak{n}$ starr an die Berührebenen geheftet erscheinen. Bekanntlich ist aber durch die äußeren Kräfte allein der Spannungstensor noch keineswegs bestimmt.

---

[1]) Vgl. auch **Finsterwalder**, Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation, Jahresber. d. D. Math.-Verein., Bd. VI, 2 (1899), S. 45ff.