Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1928. Heft III

November-Dezembersitzung

München 1928
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

AKADEMIE D. WISSENSCHAFTEN

Zur Klassifikation der ebenen und räumlichen Kollineationen.

Von **Richard Baldus**, Karlsruhe i. B.

Mit 3 Figuren.

Vorgetragen von S. Finsterwalder in der Sitzung am 15. Dezember 1928.

Die Klassifikation der nicht singulären[1]) räumlichen Kollineationen nach ihren Doppelelementen ist in der Fragestellung so einfach, in den Ergebnissen so wichtig, daß es den mit dem speziellen Gegenstande nicht näher Vertrauten überrascht, selbst in ausführlichen Darstellungen der projektiven Geometrie, auch solchen analytischen Charakters, dieses Problem fast nie behandelt zu finden. Als erster hat Ch. v. Staudt[2]) die 13 Typen räumlicher Kollineationen, die es außer der identischen Kollineation gibt, in der für ihn charakteristischen synthetischen, sehr gedrängten Weise abgeleitet. Da er hiebei Kenntnisse über Flächen 2. Ordnung und unebene Kurven 3. Ordnung voraussetzt, sind seine Ausführungen erst nach eingehender synthetisch-geometrischer Vorbereitung verständlich; dazu kommt eine gewisse Unübersichtlichkeit der Ableitung, die dadurch verursacht wird, daß die Typen gruppenweise durch verschieden geartete geometrische Gedankengänge gewonnen werden und daß nicht fortlaufend mit vollständigen Disjunktionen gearbeitet wird. Der letzte Umstand macht nach der Aufstellung der Typen den Nachweis der Vollständigkeit der Aufzählung nötig. Dies dürften die Gründe dafür sein, daß diese bisher wohl einzige rein synthetische Lösung nicht in die Darstellungen der projektiven Geometrie übernommen worden ist.

---

[1]) Der Zusatz „nicht singulär" wird in der Folge weggelassen werden, gemeint sind in der ganzen vorliegenden Untersuchung stets nicht singuläre Kollineationen.

[2]) Beiträge zur Geometrie der Lage, 3. Heft (1860) S. 328—333.

Geht man analytisch vor, wobei man den Vorteil hat, gleich komplex arbeiten zu können, dann kann man die verschiedenen Typen der kollokalen ebenen Kollineationen angeben, indem man die Vielfachheiten der Wurzeln und die zu den Wurzeln gehörenden Rangzahlen der für die Doppelpunkte charakteristischen Determinante aufzählt. Dieses Verfahren genügt bei den räumlichen Kollineationen nicht, weil es hier Kollineationen gibt, die sich in den Wurzelmultiplizitäten und den Rangzahlen gleich verhalten und doch zu verschiedenen Typen gehören[1]). Daher müßte man, was die schon bis hierher nicht ganz einfachen Betrachtungen noch umständlicher gestalten würde, die Ranguntersuchungen über die Determinante selbst hinausgreifen lassen. Man hat es deshalb vorgezogen, durch Verwendung der Theorie der Elementarteiler überhaupt einen anderen Weg zu gehen[2]). Hier gelangt man zu einer zwar übersichtlichen, aber, wenn man nicht erhebliche arithmetische Spezialkenntnisse voraussetzen will, recht umfangreichen Ableitung; diese hat allerdings den großen Vorteil, daß sie in Räumen beliebig hoher Dimension verwendbar ist[3]).

Im folgenden soll gezeigt werden, daß es möglich ist, mittels der einfachsten Inzidenzschlüsse die räumlichen Kollineationen auf kurzem, übersichtlichem Weg erschöpfend zu klassifizieren, lediglich unter Voraussetzung des Fundamentalsatzes der Algebra und der Tatsache, daß ein System von homogenen, linearen Gleichungen mit verschwindender Koeffizientendeterminante mindestens ein nicht aus lauter Nullen bestehendes Lösungssystem hat. Weil dabei immer vollständige Disjunktionen verwendet werden, folgt aus der Ableitung gleichzeitig die Vollständigkeit der Aufzählung.

---

[1]) Vgl. unsere Nr. 29.

[2]) G. Loria, Sulle corrispondenze proiettive fra due piani e fra due spazii, Giornale di matematiche, Vol. XXII (1884) p. 1—16 beschreitet als erster diesen Weg und bringt gleichzeitig die erste vollständige Klassifizierung aller räumlichen Kollineationen, einschließlich der singulären. Vgl. auch P. Muth, Theorie und Anwendung der Elementarteiler (1899), vor allem S. 214ff.

[3]) C. Segre, Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in un spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni. Atti della R. Accademia dei Lincei Ser. 3, Vol. XIX (1884) p. 127—148. Vgl. auch E. Bertini, Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume; deutsch von A. Duschek (1924), Kap. IV.

Da geometrisch nur die einfachsten Tatsachen über Projektivitäten und Kollineationen vorausgesetzt werden, können diese Überlegungen den Betrachtungen über Kurven und Flächen 2. Grades vorausgehen, sodaß vor der Behandlung der quadratischen Formen die Geometrie der Linearformen abgeschlossen werden kann.

Den räumlichen Kollineationen werden wir die entsprechenden Überlegungen über Projektivitäten und ebene Kollineationen vorausschicken. Dadurch tritt das Wesentliche der Schlußweisen in diesen einfacheren Fällen klar hervor, weiterhin erkennt man auf diesem Wege, daß man nach den gleichen Prinzipien vom dreidimensionalen in den vierdimensionalen Raum und höher aufsteigen kann. Die Betrachtungen würden schon im vierdimensionalen Raume ziemlich umfangreich werden, was durch die große Zahl 27 seiner Kollineationstypen bedingt ist.

§ 1. Kollokale Projektivitäten.

1. Die ganzen folgenden Betrachtungen spielen sich im Komplexen ab, Realitätsfragen scheiden aus[1]). Eine Punktreihe sei projektiv (nicht singulär) auf sich bezogen, die Gleichungen der Projektivität seien

$$\begin{aligned} \varrho\, x_1' &= a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 \\ \varrho\, x_2' &= a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 \end{aligned} \qquad \varrho \neq 0, \quad \Delta \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Für die Doppelpunkte erhält man in üblicher Weise die charakteristische Determinante der Projektivität

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho \end{vmatrix} \equiv \varrho^2 + \ldots \varrho + \Delta = 0,$$

eine Gleichung, welche wegen $\Delta \neq 0$ immer mindestens eine von 0 verschiedene Wurzel ϱ hat; diese Wurzel liefert mindestens einen Doppelpunkt D_1.

2. Es sind nun folgende Fälle denkbar:

A) Es gibt einen Doppelpunkt D_2 außer D_1

a) D_1 und D_2 sind die einzigen Doppelpunkte, nichtparabolische Projektivität

[1]) Die Figuren veranschaulichen daher lediglich die analytischen Prozesse, welche Inzidenzbeziehungen entsprechen, stellen aber nicht notwendig reelle Gebilde dar.

b) Es gibt außer D_1 und D_2 noch einen Doppelpunkt, identische Projektivität

B) Es gibt keinen Doppelpunkt außer D_1

c) Parabolische Projektivität.

3. Die Geraden a und u in Fig. 1 seien die Träger parabolischer Projektivitäten mit dem gemeinsamen Doppelpunkt X und den Paaren entsprechender Punkte $A \sim A'$, $B \sim B'$, sowie $U \sim U'$, $V \sim V'$. Dann geht die Gerade BV durch den Schnittpunkt P der Geraden $AU \equiv B'V'$ und $A'U'$. Das folgt unmittelbar aus der bekannten harmonischen Eigenschaft der parabolischen Projektivitäten $(XAA'B) = -1$ [1]) und $(XUU'V) = -1$, welche die identische Zuordnung $P(XAA'B) \barwedge P(XUU'V)$ gestattet.

Fig. 1

§ 2. Klassifikation der ebenen Kollineationen.

4. Es liege nun eine (nicht singuläre) kollineare Beziehung einer Ebene auf sich vor. Dann erkennt man entsprechend Nr. 1 die Existenz mindestens eines Doppelpunktes, nach dem Prinzip der Dualität gibt es daher auch mindestens eine Doppelgerade. Wir unterscheiden folgende Fälle:

A) Die Kollineation enthält einen Doppelpunkt D und eine Doppelgerade d, die nicht ineinander liegen. Unterfälle: die Projektivität in d ist

α) nicht-parabolisch, mit den Doppelpunkten D_1 und D_2,

β) identisch,

γ) parabolisch, Doppelpunkt D_1.

B) Jeder Doppelpunkt liegt in jeder Doppelgeraden. Unterfälle: es gibt

δ) mehr als eine Doppelgerade,

ε) genau eine Doppelgerade.

5. Bei der Betrachtung der Einzelfälle, in die wir jetzt eintreten, ist immer wieder der einfache Schluß zu verwenden, daß, da jedes Doppelelement sich selbst entspricht, die Verbindungs-

[1]) Hieraus konstruiert man, wenn eine parabolische Projektivität durch ihren Doppelpunkt und ein Punktpaar $A \sim A'$ gegeben ist, in bekannter Weise zu irgendeinem Punkte der Punktreihe den entsprechenden Punkt.

linie zweier Doppelpunkte eine Doppelgerade, der Schnittpunkt zweier Doppelgeraden ein Doppelpunkt ist. Daraus folgt ohne weiteres, daß im Fall A, α) der Punkt D Scheitel eines auf sich projektiv bezogenen Strahlenbüschels ist, dessen einzige Doppelstrahlen DD_1 und DD_2 sind. Daher können nur auf diesen beiden Strahlen Doppelpunkte auftreten. Dabei sind folgende Möglichkeiten zu berücksichtigen:

1) keine der Geraden DD_1 und DD_2 enthält einen weiteren Doppelpunkt,
2) genau eine dieser Geraden, etwa DD_1, ist identisch auf sich bezogen,
3) die beiden Geraden sind identisch auf sich bezogen.

Der 1. Fall liefert den Kollineationstyp (I), die Konstellation der Doppelelemente zeigt Fig. 2[1]) (auf die in diesem § nicht mehr

Fig. 2

besonders hingewiesen werden wird). Daß die angegebenen Doppelelemente die einzigen sind, möge bei diesem ersten Typ bewiesen werden, bei den folgenden Typen werden wir die analogen Betrachtungen weglassen: Nach 1) liegt auf DD_1 und DD_2 kein weiterer Doppelpunkt; gäbe es einen weiteren Doppelpunkt außerhalb dieser Geraden, dann würde er mit D verbunden eine Doppelgerade liefern, deren Schnittpunkt mit d ein weiterer Doppel-

[1]) Die ausgefüllten Nullkreise und die ausgezogenen Geraden bezeichnen in Fig. 2 Doppelelemente. Die gestrichelten Geraden und die nicht ausgefüllten Nullkreise werden in späteren Betrachtungen für Koordinatensysteme verwendet werden.

punkt wäre, entgegen α). Es gibt aber auch keine weitere Doppelgerade, denn eine solche würde mindestens auf einer der Doppelgeraden DD_1, DD_2, $D_1 D_2$ einen weiteren Doppelpunkt hervorrufen.

Der 2. Fall führt auf den Kollineationstyp (II), zentrale Kollineationen mit dem Zentrum D_2 und der Achse DD_1. Der 3. Fall würde die identische Kollineation liefern, im Widerspruch mit α).

A, β): Es gibt außerhalb d entweder nur den Doppelpunkt D, was wieder den Typ (II) liefert, oder noch einen weiteren Doppelpunkt $\bar{D}$, wodurch auch für die Gerade $D\bar{D}$ die identische Projektivität und als Kollineationstyp (III) die identische Kollineation folgt.

6. Für die Diskussion der weiteren Fälle benötigen wir den folgenden

Satz 1: Enthält eine ebene Kollineation zwei Doppelgerade mit parabolischen Projektivitäten, dann enthält sie eine durch den Schnittpunkt der Doppelgeraden laufende Punktreihe von Doppelpunkten[1]).

Beweis: Die Doppelgeraden seien die Geraden a und u der Fig. 1. Dann wählt man eine beliebige Gerade $AU \equiv B'V'$ und erhält nach Nr. 3 den Punkt P sowohl als Schnittpunkt von AU mit BV als auch von $A'U'$ mit $B'V'$, daher ist P Doppelpunkt der Kollineation. Auf jeder Geraden der Ebene liegt demnach ein Doppelpunkt und die Verbindungslinie zweier solcher Doppelpunkte ist Doppelgerade und trifft daher a in einem Doppelpunkte, demnach in X.

7. Wir kommen zum Fall A, γ). Ein Doppelpunkt $\bar{D}$ außerhalb DD_1 würde durch den Schnittpunkt von $D\bar{D}$ mit d auf einen Widerspruch mit γ) führen. Daher sind nur die beiden Möglichkeiten zu berücksichtigen

1) D und D_1 sind die einzigen Doppelpunkte.

2) Alle und nur die Punkte von DD_1 sind Doppelpunkte.

Der 1. Fall führt auf den Kollineationstyp (IV). Hier kann keine weitere Doppelgerade $\bar{d}$ auftreten, denn $\bar{d}$ müßte durch D_1 gehen und nach Satz 1 würde aus den beiden Doppelgeraden d und $\bar{d}$ ein Widerspruch zur Annahme 1) folgen.

---

[1]) Jede Gerade durch den Schnittpunkt der beiden Doppelgeraden ist daher Doppelgerade.

Im 2. Falle sind alle Doppelpunkte außer D_1 Träger parabolischer Projektivitäten. Irgend zwei von diesen liefern daher wegen des zu Satz 1 dualen Satzes ein Büschel von Doppelstrahlen. Diese müssen wegen γ) alle durch D_1 gehen. Damit ist der Kollineationstyp (V) gefunden, zentrale Kollineation, Zentrum auf der Achse.

8. Der Fall B, δ) ist unmöglich, denn es gäbe mindestens zwei Doppelgerade, außer ihrem Schnittpunkt dürfte nach B) kein Doppelpunkt auftreten, während diese beiden Doppelgeraden nach Satz 1 weitere Doppelpunkte liefern würden.

Im Falle B, ε) kann nur ein Doppelpunkt auf der einzigen Doppelgeraden liegen, da zwei Doppelpunkte als Träger parabolischer Projektivitäten dual zu Satz 1 ein Büschel von Doppelstrahlen hervorrufen würden. Daher gibt es nur noch den Kollineationstyp (VI).

Da immer mit vollständigen Disjunktionen gearbeitet wurde, sind damit alle Möglichkeiten ebener Kollineationstypen aufgezählt. Daß diese sechs Typen auch wirklich vorkommen, kann man entweder durch die Angabe von Beispielen zeigen, oder, wie wir es im nächsten Paragraphen tun werden, durch Aufstellung der zugehörigen Kollineationsgleichungen.

Als einfache Beispiele metrischen Charakters, die sich ohne weiteres in rechtwinkeligen Koordinaten fassen lassen, seien die folgenden erwähnt: (I) Drehung der Ebene um O, Drehwinkel $\neq n\pi$; (II) dasselbe, Drehwinkel π; (III) dasselbe, Drehwinkel 2π; (IV) Streckung der Ebene von O aus, dazu eine Affinität mit der x-Achse als Affinitätsachse und der x-Richtung als Affinitätsrichtung; (V) Parallelverschiebung der Ebene in der x-Richtung; (VI) Affinität wie bei (IV), dazu eine Parallelverschiebung in der y-Richtung.

9. Ein Blick auf Fig. 2 zeigt, daß eine ebene Kollineation, die eine Punktreihe von Doppelpunkten enthält, auch ein Strahlenbüschel von Doppelstrahlen enthält, ein Satz, dessen raumduales Gegenstück im Bündel wir wiederholt benützen werden. Dieser Satz über ebene Kollineationen ist ein Spezialfall des allgemeineren Satzes, den man auch ohne weiteres aus Fig. 2 abliest:

Satz 2: Die Konstellation der Doppelelemente einer ebenen Kollineation ist in sich dual.

Hätten wir unsere Betrachtungen zur Klassifikation der ebenen Kollineationen in dualer Weise in der Ebene ausgeführt, dann hätten wir statt jeder Konstellation der Doppelelemente eine zu ihr duale, das ist aber nach Satz 2 wieder sie selbst, erhalten, d. h. jeder Kollineationstyp wäre an der gleichen Stelle aufgetreten.

Liegt eine nicht identische, involutorische ebene Kollineation vor, und sind AA' und UU' zwei ihrer Punktpaare, dann ist der Schnittpunkt von AA' mit UU' ein Doppelpunkt, ebenso der Schnittpunkt von AU und $A'U'$. Daraus erkennt man im Anschluß an Fig. 2 leicht die bekannte Tatsache, daß jede nicht identische ebene involutorische Kollineation zum Typ (II) gehört.

§ 3. Kanonische Gleichungen der ebenen Kollineationen.

10. Ist $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ ein Doppelpunkt einer Kollineation, dann fehlen in Ausdrücken für $\varrho x_1'$ und $\varrho x_2'$ die Glieder mit x_3; ist $x_1 = 0$ eine Doppelgerade, dann reduziert sich der Ausdruck für $\varrho x_1'$ auf das Glied mit x_1. Daher wird man, um die Kollineationsgleichungen der einzelnen Typen zu vereinfachen, in jedem Fall ein Koordinatensystem suchen, das möglichst viele Doppelelemente als Ecken und Seiten des Koordinatendreiecks enthält. Die so gewonnenen einfachen Kollineationsgleichungen gelten inbezug auf das gleiche Koordinatensystem für alle Kollineationen des betreffenden Typs, welche dieselben Doppelelemente haben, sie mögen als kanonische Gleichungen des betreffenden Typs bezeichnet werden. Es ist bemerkenswert, daß es bei jedem Kollineationstyp nur eine Form der kanonischen Gleichungen gibt. Die Lage des Koordinatensystems bei den verschiedenen Typen zeigt Fig. 2.

Beim Typ (I) erhält man aus der Bedingung, daß die Koordinatengeraden und nur diese sich selbst entsprechen sollen, sofort die

$$\text{Kanonischen Gln. zu (I)} \qquad \begin{aligned} \varrho x_1' &= x_1 & a \cdot b &\neq 0 \\ \varrho x_2' &= a x_2 & a,\ b &\neq 1 \\ \varrho x_3' &= b x_3 & a &\neq b \end{aligned}$$

Hieraus entstehen für $a = 1$ die

$$\text{Kanonischen Gln. zu (II)} \quad \begin{aligned} \varrho\, x_1' &= x_1 \\ \varrho\, x_2' &= x_2 \\ \varrho\, x_3' &= b\, x_3 \end{aligned} \qquad b \neq 0,\ \neq 1$$

$b = 1$ entspricht dem Typ (III) der identischen Kollineation.

11. Im Falle (IV) führen die beiden Doppelgeraden, der Doppelpunkt A_1 und der parabolische Charakter der Projektivität in $x_1 = 0$ auf die

$$\text{Kanonischen Gln. zu (IV)} \quad \begin{aligned} \varrho\, x_1' &= a\, x_1 \\ \varrho\, x_2' &= x_2 \\ \varrho\, x_3' &= b\, x_2 + x_3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a \cdot b &\neq 0 \\ a &\neq 1 \end{aligned}$$

Wählt man hier den Einheitspunkt auf der Geraden g', welche der Geraden $x_3 = 0$ entspricht, dann wird $b = 1$. Die so vereinfachte Form der Kollineationsgleichungen ist zwar bei jeder einzelnen Kollineation (IV) zu erreichen, sie gilt aber, im Gegensatze zu den kanonischen Gleichungen, nicht mehr bei gemeinsamem Koordinatensystem für alle Kollineationen (IV), welche die gleichen Doppelelemente haben.

Aus den kanonischen Gleichungen (IV) entstehen für $a = 1$ die

$$\text{Kanonischen Gln. zu (V)} \quad \begin{aligned} \varrho\, x_1' &= x_1 \\ \varrho\, x_2' &= x_2 \\ \varrho\, x_3' &= b\, x_2 + x_3 \end{aligned} \qquad b \neq 0$$

Nimmt man auch hier den Einheitspunkt auf der $x_3 = 0$ entsprechenden Geraden g' an, dann wird $b = 1$, wieder eine in jedem Einzelfall erreichbare Vereinfachung.

12. Der Typ (VI) liefert aus dem parabolischen Charakter der Projektivitäten auf der Doppelgeraden und im Doppelpunkte die

$$\text{Kanonischen Gln. zu (VI)} \quad \begin{aligned} \varrho\, x_1' &= x_1 \\ \varrho\, x_2' &= a\, x_1 + x_2 \\ \varrho\, x_3' &= b\, x_1 + c\, x_2 + x_3 \end{aligned} \qquad a \cdot c \neq 0$$

Besonders einfach und übersichtlich werden hier die Gleichungen bei der folgenden, in jedem Einzelfall erreichbaren Wahl des Koordinatensystems: $x_1 = 0$ und A_3 sind die Doppelelemente; man wählt A_1 willkürlich, $A_1 A_1'$ als die Gerade $x_3 = 0$ und den Einheitspunkt als Schnittpunkt von $A_3 A_1'$ und $A_1 A_2'$. Dann erhält man, wie man sofort berechnet, die vereinfachten

$$\text{Gln. jeder Kollineation (VI)} \quad \begin{aligned} \varrho\, x_1' &= x_1 \\ \varrho\, x_2' &= x_1 + x_2 \\ \varrho\, x_3' &= x_2 + x_3. \end{aligned}$$

§ 4. Klassifikation der räumlichen Kollineationen.

13. Zu den Typen der räumlichen Kollineationen gelangen wir nun durch die gleichen einfachen Schlüsse, die bei den ebenen Kollineationen angewendet wurden. Dabei bezeichnen wir im folgenden die Kollineationstypen im Bündel nach ihrem raumdualen Gegenstück in der Ebene mit (I)′, (II)′ usw.

Zunächst findet man, analog zu Nr. 1, wieder die einzige benötigte algebraische Tatsache, daß immer mindestens ein Doppelpunkt und dual mindestens eine Doppelebene existiert. Nun sind wieder die zwei einzig möglichen Hauptfälle zu unterscheiden:

A) Die Kollineation enthält einen Doppelpunkt A_1 und eine Doppelebene ε_1, die nicht ineinander liegen.

B) Jeder Doppelpunkt liegt in jeder Doppelebene.

Dabei werden wir bei A) in ε_1 die Kollineationstypen (I) bis (VI) zu berücksichtigen haben.

14. Wir beginnen mit A, I), d. h. dem Falle, in dem die soeben ausgesprochene Annahme A) gilt und in ε_1 der Kollineationstyp (I) auftritt. Im Bündel A_1, das ja ε_1 projiziert, liegt dann der Typ (I)′ vor. Sind A_2, A_3, A_4 die Doppelpunkte in ε_1, dann können weitere Doppelpunkte der räumlichen Kollineation nur auf den drei Doppelstrahlen $A_1 A_2$, $A_1 A_3$, $A_1 A_4$ auftreten[1]). Das gibt drei Möglichkeiten:

1) Keine der Geraden $A_1 A_2$, $A_1 A_3$, $A_1 A_4$ ist punktweise identisch auf sich bezogen.

2) Genau eine dieser Geraden, etwa $A_1 A_2$, ist identisch auf sich bezogen.

3) Mindestens zwei der Geraden, etwa $A_1 A_2$ und $A_1 A_3$, sind identisch auf sich bezogen.

---

[1]) Das Schnitt- oder Verbindungselement zweier Doppelelemente ist wieder ein Doppelelement. Auch hier führen wir die lediglich mit dieser Tatsache operierenden Schlüsse nicht aus; dazu gehört auch bei jedem einzelnen Typ der Nachweis, daß die Aufzählung der Doppelelemente vollständig ist.

15. Der 1. Fall liefert den Kollineationstyp (1), vgl. Fig. 3[1]). Die Doppelelemente sind die folgenden:

Typ (1): Doppelpunkte A_1, A_2, A_3, A_4. Die vier Doppelebenen ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 zeigen den Typ (I). Die Doppelgeraden sind die sechs Kanten des Tetraeders der Doppelpunkte und Doppelebenen.

Der 2. Fall führt unmittelbar zum

Typ (2): Doppelpunkte sind alle Punkte der Geraden $A_1 A_2$ sowie die Punkte A_3 und A_4. Doppelebenen sind die Ebenen des Büschels $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ nach Typ (I), die Ebenen ε_3 und ε_4 nach Typ (II). Die Doppelgeraden sind $A_1 A_2$, $A_3 A_4$ sowie die Strahlen der Büschel $A_3 (A_1 A_2)$ und $A_4 (A_1 A_2)$.

Der 3. Fall würde die identische Kollineation in ε_4 und damit auch die identische Projektivität in der Geraden $A_2 A_3$ liefern, in Widerspruch zur Annahme (I) in ε_1.

16. A, II): In ε_1 sei A_1 das Kollineationszentrum, $A_2 A_3$ die Kollineationsachse. Ist A_1 der einzige Doppelpunkt außerhalb ε_1, dann liegt wieder Typ (2) vor; gibt es aber noch weitere Doppelpunkte außerhalb ε_1, dann können sie nur entweder in der Ebene $A_1 A_2 A_3$ auftreten, die damit identisch auf sich bezogen ist, oder auf der Geraden $A_1 A_4$, die dann Träger einer identischen Projektivität ist[2]). Das Ergebnis dieser beiden Möglichkeiten sind die beiden folgenden Typen:

Typ (3): Doppelpunkte sind A_4 und alle Punkte von ε_4. Doppelebenen sind alle Ebenen des Bündels A_4 nach Typ (II), weiterhin ε_4 nach Typ (III). Doppelgerade sind alle Strahlen des Bündels A_4 und alle Strahlen in ε_4. Zentrale Kollineation mit dem Zentrum A_4 und der Kollineationsebene ε_4, die das Zentrum nicht enthält.

Typ (4): Doppelpunkte sind alle Punkte von $A_2 A_3$ und von $A_1 A_4$, Doppelebenen alle Ebenen der Büschel $A_2 A_3$ und $A_1 A_4$

---

[1]) Auf diese Figur, die sich am Ende der Abhandlung befindet, wird weiterhin nicht ausdrücklich verwiesen. Die Bezeichnung ε_i der Koordinatenebenen ist nur bei der Figur zu (1) eingetragen, sie gilt auch für die übrigen Typen. Die Doppelebenen sind durch Winkelbogen bezeichnet.

[2]) Träte beides gleichzeitig ein, dann wäre jede Ebene des Raumes Doppelebene; identische Kollineation, im Widerspruch mit der Annahme (II)

nach Typ (II), Doppelgerade alle Geraden, welche gleichzeitig die Geraden $A_2 A_3$ und $A_1 A_4$ treffen. Gescharte Kollineation.

A, III): Ist A_1 einziger Doppelpunkt außerhalb ε_1, dann liegt wieder Typ (3) vor, gibt es noch einen Doppelpunkt außerhalb ε_1, dann erhält man den

Typ (5): Identische Kollineation.

17. A, IV): A_2 und A_4 seien in ε_1 die Doppelpunkte, $A_2 A_4$ und $A_3 A_4$ die Doppelgeraden. Da jeder weitere Doppelpunkt auf $A_1 A_2$ oder $A_1 A_4$ liegen muß, sind folgende Möglichkeiten zu unterscheiden:

1) A_1 ist einziger Doppelpunkt außerhalb ε_1;
2) $A_1 A_2$ ist identisch auf sich bezogen, aber nicht $A_1 A_4$;
3) $A_1 A_4$ ist identisch auf sich bezogen, aber nicht $A_1 A_2$;
4) $A_1 A_2$ und $A_1 A_4$ sind identisch auf sich bezogen.

Der 1. Fall führt auf den

Typ (6): Die Doppelpunkte sind A_1, A_2, A_4. Die Doppelebenen sind ε_1 und ε_2 nach Typ (IV), ε_3 nach Typ (I). Die Doppelgeraden sind $A_1 A_2$, $A_1 A_4$, $A_2 A_4$, $A_3 A_4$.

Der 2. Fall liefert den

Typ (7): Doppelpunkte sind alle Punkte von $A_1 A_2$, weiterhin A_4. Doppelebenen sind die Ebenen des Büschels $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ nach Typ (IV), außerdem ε_3 nach Typ (II). Die Doppelgeraden sind $A_1 A_2$, $A_3 A_4$ und die Geraden des Büschels $A_4 (A_1 A_2)$.

Im 3. Falle tritt in ε_2 die identisch auf sich bezogene Doppelgerade $A_1 A_4$ auf und die Doppelgerade $A_3 A_4$ mit dem einzigen Doppelpunkt A_4. Daher ist ε_2 nach Typ (V) auf sich bezogen und jede ihrer Geraden durch A_4 ist Doppelgerade. Dadurch gewinnt man den

Typ (8): Die Doppelpunkte sind A_2 und die Punkte der Geraden $A_1 A_4$. Doppelebenen sind ε_2 nach Typ (V), ε_3 nach Typ (II), alle anderen Ebenen des Büschels $\varepsilon_1 \varepsilon_3$ nach Typ (IV). Die Doppelgeraden sind die Geraden der Büschel $A_2 (A_1 A_4)$ und $A_4 (A_1 A_3)$.

Der 4. Fall scheidet aus, da er in ε_3 und folglich auch in $A_2 A_4$ die Identität liefern würde, entgegen der Annahme (IV).

18. A, V): In ε_1 sei A_4 das Kollineationszentrum, $A_2 A_4$ die Kollineationsachse. Entweder ist A_1 der einzige Doppelpunkt außerhalb ε_1, was wieder den Typ (8) liefert, oder es tritt noch ein

Doppelpunkt auf, dann notwendig in ε_3, das damit identisch auf sich bezogen ist. Das Ergebnis hievon ist

Typ (9): Doppelpunkte sind alle Punkte von ε_3. Doppelebenen sind ε_3 nach Typ (III), alle übrigen Ebenen des Bündels A_4 nach Typ (V). Doppelgerade sind alle Geraden in ε_3 und alle durch A_4. Zentrale Kollineation, Kollineationszentrum A_4, Kollineationsebene ε_3 durch das Zentrum.

A, VI): In ε_1 sei A_4 der Doppelpunkt, $A_3 A_4$ die Doppelgerade. A_1 ist entweder einziger Doppelpunkt außerhalb ε_1 oder $A_1 A_4$ geht punktweise in sich über. Aus der ersten Annahme entsteht der

Typ (10): Doppelpunkte sind A_1 und A_4. Die Ebene ε_1 ist Doppelebene nach Typ (VI), ε_2 nach Typ (IV). $A_1 A_4$ und $A_3 A_4$ sind die Doppelgeraden.

Bei der zweiten Annahme ist die Doppelebene ε_2 wegen der identischen Projektivität in $A_1 A_4$ und der parabolischen in $A_3 A_4$ nach Typ (V) in sich übergeführt. Daher enthält sie ein Büschel A_4 von Doppelstrahlen. Im Bündel A_4 tritt demnach in der Doppelebene ε_2 eine identische Projektivität der Bündelstrahlen auf, in der Doppelebene ε_1 eine parabolische, daher wird dieses Bündel nach Typ (V)′ in sich transformiert, es enthält demnach die Ebenen des Büschels $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ als Doppelebenen. Damit kennt man den

Typ (11): Doppelpunkte sind alle Punkte von $A_1 A_4$. ε_2 ist Doppelebene nach Typ (V), alle übrigen Ebenen des Büschels $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ sind Doppelebenen nach Typ (VI). Die Strahlen des Büschels $A_4 (A_1 A_3)$ sind die Doppelgeraden.

Damit ist die Betrachtung des Hauptfalles A) von Nr. 13 abgeschlossen.

19. Wir kommen zur Annahme B) von Nr. 13, daß jeder Doppelpunkt in jeder Doppelebene liegt, die wir mittels folgender Disjunktion fassen:

a) Es gibt mindestens zwei Doppelebenen der Kollineation, etwa ε_1 und ε_3.

b) Es gibt genau eine Doppelebene, ε_1.

Wir betrachten zunächst den Fall a). Wegen der Annahme B) müssen alle Doppelpunkte auf der Schnittlinie von ε_1 und ε_3 liegen. Daher kommt für jede dieser beiden Ebenen nur einer der

Typen (IV), (V), (VI) in Frage. Das führt uns auf folgende Unterfälle: ε_1 enthält eine Kollineation

α) vom Typ (IV),

β) vom Typ (V),

γ) vom Typ (VI).

20. Im Fall α) enthalte ε_1 die Doppelgeraden $A_2 A_4$ und $A_3 A_4$ sowie die Doppelpunkte A_2 und A_4. Diese Doppelpunkte bestimmen in ε_3 ebenfalls den Typ (IV), und zwar mit der einen Doppelgeraden $A_2 A_4$; die andere Doppelgerade geht durch A_2, denn ginge sie durch A_4, dann würde sie mit $A_3 A_4$ eine Doppelebene bestimmen, die A_2 nicht enthielte, entgegen Annahme B). Damit kennt man den

Typ (12): Die Doppelpunkte sind A_2 und A_4; ε_1 und ε_3 sind Doppelebenen, u. z. nach Typ (IV); die Doppelgeraden sind $A_1 A_2$, $A_2 A_4$ und $A_4 A_3$.

Im Falle β) trägt die Schnittlinie von ε_1 und ε_3 lauter Doppelpunkte von ε_1, daher weist auch ε_3 den Typ (V) auf, und $A_2 A_4$ ist die Kollineationsachse für beide Ebenen. A_4 sei das Kollineationszentrum für ε_1, dann muß das Kollineationszentrum für ε_3 davon verschieden sein, etwa in A_2 liegen, da sonst jede nicht durch $A_2 A_4$ gehende Ebene des Bündels A_4 eine A_2 nicht enthaltende Doppelebene wäre, im Widerspruch zu B). Das Bündel A_4 enthält in ε_1 ein Büschel von Doppelstrahlen, folglich, nach dem raumdualen Gegenstück des Satzes 2 von Nr. 9, auch ein Büschel von Doppelstrahlen, dessen Achse zufolge Annahme B) die Gerade $A_2 A_4$ sein muß. Jede dieser Büschelebenen muß wieder nach Typ (V) auf sich bezogen sein und irgend zwei dieser Ebenen haben, aus dem gleichen Grunde wie ε_1 und ε_3, verschiedene Büschelscheitel. Damit kennen wir den

Typ (13): Die Doppelpunkte sind die Punkte der Geraden $A_2 A_4$. Die Doppelebenen sind die Ebenen des Büschels $A_2 A_4$, und zwar nach Typ (V). Jeder Punkt von $A_2 A_4$ ist Scheitel eines Büschels von Doppelstrahlen in einer Doppelebene.

Die zuletzt genannte Eigenschaft folgt daraus, daß in dem Bündel um den Punkt ein Büschel von Doppelebenen auftritt. Die naheliegende Vermutung, daß die Ebenen der Doppelstrahlenbüschel den Scheiteln projektiv zugeordnet sind und daß damit die Doppelstrahlen ein parabolisches Strahlennetz bilden, werden

wir erst nach Aufstellung der Gleichungen dieses Kollineationstyps beweisen können (Nr. 27).

Der Fall γ) führt aus folgendem Grund zu keinem Kollineationstyp: Zufolge B) müßte auch ε_3 den Typ (VI) aufweisen, der gemeinsame Doppelpunkt der beiden Ebenen wäre etwa A_2. Das Bündel A_2 enthielte zwei Doppelebenen, folglich nach den Typen der Bündelkollineationen mindestens zwei Doppelstrahlen, deren Ebene hätte nach den Typen der ebenen Kollineationen mindestens zwei Doppelpunkte, einer davon würde außerhalb ε_1 liegen, entgegen Annahme B).

Damit sind die Betrachtungen über die Annahme a) von Nr. 19 abgeschlossen.

21. Wir kommen zur Annahme b), deren Betrachtung auf folgendem Wege sehr einfach wird: Die bisher abgeleiteten 13 Typen der räumlichen Kollineationen zeigen alle, wie man aus der Fig. 3 erkennt, eine raumduale Konstellation der Doppelelemente, d. h. es treten immer gleich viel Doppelpunkte und Doppelebenen auf, liegt eine Punktreihe von Doppelpunkten vor, dann liegt auch ein Ebenenbüschel von Doppelebenen vor, enthält eine Doppelebene drei Doppelpunkte, dann gibt es auch einen Doppelpunkt mit drei Doppelebenen in dem betreffenden Typ usf. Wir haben im bisherigen alle Fälle untersucht, in denen mindestens zwei Doppelebenen auftreten. Hätten wir alle Fälle untersucht, in denen mindestens zwei Doppelpunkte auftreten, dann wäre die Untersuchung zu der bisherigen dual gewesen, statt jeder Konstellation der Doppelelemente hätten wir die zu ihr duale, das ist aber nach dem soeben Gesagten wieder sie selbst, erhalten. Daher kennen wir in den bisherigen 13 Typen nicht nur alle Fälle mit mindestens zwei Doppelebenen, sondern gleichzeitig auch alle Fälle mit mindestens zwei Doppelpunkten. Demnach verschärft sich die Annahme b) zu der Aussage: es gibt genau eine Doppelebene und genau einen Doppelpunkt. Dadurch kennt man als letzten den

Typ (14): A_4 ist der einzige Doppelpunkt; ε_1 ist die einzige Doppelebene, sie hat den Typ (VI); $A_3 A_4$ ist die einzige Doppelgerade[1]).

[1]) Eine weitere Doppelgerade müßte durch A_4 laufen und würde nach Nr. 6, Satz 1 mit $A_3 A_4$ zusammen weitere Doppelpunkte liefern.

22. Da auch diese letzte Konstellation der Doppelelemente in sich dual ist, gilt als räumliches Gegenstück zu Nr. 9, Satz 2 der

Satz 3: Jede Gesamtheit der Doppelelemente einer räumlichen Kollineation ist zu sich selbst (raum-)dual.

Die Tatsache, daß jede räumliche Kollineation, die unendlich viele Doppelpunkte enthält, auch unendlich viele Doppelebenen enthält, ist ein Spezialfall dieses Satzes.

Ist der Raum involutorisch auf sich bezogen, dann muß jede Doppelebene auf sich identisch oder involutorisch bezogen sein, d. h. den Kollineationstyp (III) oder, zufolge Nr. 9, den Typ (II) aufweisen. Diese Bedingung erfüllen, wie man aus Fig. 3 sofort erkennt, außer dem trivialen Falle der identischen Kollineation nur die räumlichen Typen (3) und (4), sie liefern daher als die beiden einzigen räumlichen Involutionstypen die zentrale Involution und die gescharte Involution.

Auch hier ist nachzuweisen, daß die gefundenen 14 Typen tatsächlich vorkommen, dies kann wieder entweder durch die Angabe von Beispielen oder durch Aufstellung der den einzelnen Typen entsprechenden Kollineationsgleichungen geschehen. Wir werden im folgenden beides tun.

§ 5. Beispiele räumlicher Kollineationen.

23. Wir geben, ähnlich wie in Nr. 8, auch für die räumlichen Kollineationen metrische Beispiele an, die sich in rechtwinkeligen Koordinaten ganz einfach behandeln lassen. Die Angaben über die bestimmenden Elemente sollen nur die Beispiele möglichst rasch beschreiben und übersichtlich gestalten, sie könnten erweitert oder teilweise ganz weggelassen werden. Die Nummern vor den Beispielen geben die Kollineationstypen an.

(1) Streckung von O aus, dazu Drehung um die z-Achse[1]), Drehwinkel $\neq n\pi$.

(2) Drehung um die z-Achse, Drehwinkel $\neq n\pi$.

(3) Streckung von O aus.

(4) Drehung um die z-Achse, Drehwinkel π.

(5) Drehung um die z-Achse, Drehwinkel 2π.

[1]) Das ist kürzer als die Angabe, daß der Ruhepunkt ein eigentlicher Punkt sein soll, die Drehachse eine eigentliche, anisotrope Gerade.

(6) Schraubung um die z-Achse, Drehwinkel $\neq n\pi$.

(7) Schraubung um die z-Achse, Drehwinkel π.

(8) Spiegelung an der x, z-Ebene, dazu Verschiebung in der z-Richtung.

(9) Verschiebung in der z-Richtung.

(10) Aufeinanderfolge folgender Kollineationen: erstens Affinität mit der Affinitätsebene $y = 0$ und der x-Richtung als Affinitätsrichtung; zweitens Affinität mit der Affinitätsebene $z = 0$ und der y-Richtung als Affinitätsrichtung; drittens Streckung von O aus.

(11) Wie (10), aber ohne Streckung.

(12) Zwei Affinitäten wie in (10), dann gleich große Streckung des Raumes in der x-Richtung mit der Ruheebene $x = 0$ und in der y-Richtung mit der Ruheebene $y = 0$; zuletzt Verschiebung in der z-Richtung.

(13) Folgende Verzerrung des Raumes: die z-Koordinaten jedes Punktes bleiben erhalten; die Parallelen zur z-Achse werden so umgelagert, daß ihre Spurpunkte in der Ebene $z = 0$ eine konstante Verschiebung in der x-Richtung erfahren, ihre Spurpunkte in der Ebene $z = 1$ eine gleich große Verschiebung in der y-Richtung.

(14) Zwei Affinitäten wie in (10), dann Verschiebung in der z-Richtung.

§ 6. Kanonische Gleichungen der räumlichen Kollineationen.

24. Die dem 1. Absatze von Nr. 10 entsprechenden Überlegungen führen zu den kanonischen Gleichungen der räumlichen Kollineationen. Da man aus § 2 die kanonischen Gleichungen für die Doppelebenen kennt, kann man die kanonischen Gleichungen der räumlichen Kollineationen fast unmittelbar hinschreiben. Die Lage des Koordinatensystems zu den Doppelelementen der einzelnen Typen zeigt Fig. 3. Man erhält so folgende Systeme kanonischer Gleichungen:

$$\text{Typ (1)} \quad \begin{aligned} \varrho\, x_1' &= x_1 \\ \varrho\, x_2' &= a\, x_2 \\ \varrho\, x_3' &= b\, x_3 \\ \varrho\, x_4' &= c\, x_4 \end{aligned} \qquad a, b, c \text{ von } 0, \text{ von } 1 \text{ und voneinander verschieden.}$$

$$\text{Typ (2)} \quad \begin{aligned} \varrho\, x_1' &= x_1 \\ \varrho\, x_2' &= x_2 \\ \varrho\, x_3' &= b\, x_3 \\ \varrho\, x_4' &= c\, x_4 \end{aligned} \qquad b, c \text{ von } 0, \text{ von } 1 \text{ und voneinander verschieden.}$$

$$\text{Typ (3)} \quad \begin{aligned} \varrho\, x_1' &= x_1 \\ \varrho\, x_2' &= x_2 \\ \varrho\, x_3' &= x_3 \\ \varrho\, x_4' &= c\, x_4 \end{aligned} \qquad c \neq 0;\ 1$$

Die Kollineation (3) ist für $c = -1$ involutorisch, zentrische Involution.

$$\text{Typ (4)} \quad \begin{aligned} \varrho\, x_1' &= x_1 \\ \varrho\, x_2' &= a\, x_2 \\ \varrho\, x_3' &= a\, x_3 \\ \varrho\, x_4' &= x_4 \end{aligned} \qquad a \neq 0;\ 1$$

Die Gleichungen (4) liefern für $a = -1$ die gescharte Involution, für $a = 1$ erhält man die identische Kollineation, Typ (5). Bei diesen ersten fünf Typen, die man alle aus den Gleichungen (1) durch Spezialisierung der Konstanten erhält, sind sämtliche Elemente des Koordinatensystems, mit Ausnahme des Einheitspunktes, Doppelelemente. Dies ist bei den weiteren Typen nicht mehr der Fall, dadurch werden deren kanonische Gleichungen etwas umständlicher.

25. Bei den nun folgenden Typen kann man wieder, ähnlich wie in Nr. 11 und 12, die Gleichungen jeder einzelnen Kollineation einfacher gestalten als die kanonischen Gleichungen. Wir geben immer zuerst die kanonischen Gleichungen an.

$$\begin{array}{lll} \text{Typ (6)} & \begin{aligned} \varrho\, x_1' &= x_1 \\ \varrho\, x_2' &= a\, x_2 \\ \varrho\, x_3' &= b\, x_3 \\ \varrho\, x_4' &= c\, x_3 + b\, x_4 \end{aligned} & \begin{aligned} a \cdot b \cdot c &\neq 0 \\ b &\neq 1 \\ a &\neq b \end{aligned} \\ \text{und} & & \\ \text{Typ (7)} & & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} a \neq 1 & \text{Typ (6)} \\ a = 1 & \text{Typ (7)} \end{array}$$

Bei jeder einzelnen Kollineation vom Typ (6) oder (7) wird $c = b$, wenn man den Einheitspunkt in der $x_4 = 0$ entsprechenden Ebene ε_4' wählt.

$$\begin{array}{lll} \text{Typ (8)} & \begin{aligned} \varrho\, x_1' &= x_1 \\ \varrho\, x_2' &= a\, x_2 \\ \varrho\, x_3' &= x_3 \\ \varrho\, x_4' &= c\, x_3 + x_4 \end{aligned} & a \cdot c \neq 0 \\ \text{und} & & \\ \text{Typ (9)} & & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} a \neq 1 & \text{Typ (8)} \\ a = 1 & \text{Typ (9)} \end{array}$$

Bei jeder Kollineation vom Typ (8) oder (9) wird $c = 1$, wenn man wieder den Einheitspunkt in der $x_4 = 0$ entsprechenden Ebene ε_4' wählt. Die Typen (7) bis (9) ergeben sich aus den Gleichungen (6) durch Spezialisierung der Konstanten.

26. Ebenfalls aus den kanonischen Gleichungen der Kollineationen in den Doppelebenen erhält man die kanonischen Gleichungen von

$$\text{Typ (10) und Typ (11)} \quad \begin{aligned} \varrho\, x_1' &= a\, x_1 \\ \varrho\, x_2' &= x_2 \\ \varrho\, x_3' &= b\, x_2 + x_3 \\ \varrho\, x_4' &= c\, x_2 + d\, x_3 + x_4 \end{aligned} \quad a \cdot b \cdot d \neq 0 \quad \begin{aligned} &a \neq 1 \quad \text{Typ (10)} \\ &a = 1 \quad \text{Typ (11)} \end{aligned}$$

Wählt man das Koordinatensystem in der Ebene $x_1 = 0$ nach der Angabe von Nr. 12, dann erhält man die folgenden vereinfachten

$$\text{Gln. jeder Einzelkollineation (10) oder (11)} \quad \begin{aligned} \varrho\, x_1' &= a\, x_1 \\ \varrho\, x_2' &= x_2 \\ \varrho\, x_3' &= x_2 + x_3 \\ \varrho\, x_4' &= x_3 + x_4 \end{aligned} \quad a \neq 0 \quad \begin{aligned} &a \neq 1 \\ &\text{Kollineation (10);} \\ &a = 1 \\ &\text{Kollineation (11).} \end{aligned}$$

27. Die kanonischen Gleichungen in den Doppelebenen ε_1 und ε_3 liefern die folgenden kanonischen Gleichungen für den

$$\text{Typ (12) und Typ (13)} \quad \begin{aligned} \varrho\, x_1' &= x_1 \\ \varrho\, x_2' &= a\, x_1 + x_2 \\ \varrho\, x_3' &= b\, x_3 \\ \varrho\, x_4' &= c\, x_3 + b\, x_4 \end{aligned} \quad a \cdot b \cdot c \neq 0 \quad \begin{aligned} &b \neq 1 \quad \text{Typ (12)} \\ &b = 1 \quad \text{Typ (13)} \end{aligned}$$

Wählt man hier, im Anschluß an Nr. 11, den Einheitspunkt in der Geraden g', welche der Geraden $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ entspricht, dann erhält man die

$$\text{Gln. jeder Einzelkollineation (12) oder (13)} \quad \begin{aligned} \varrho\, x_1' &= x_1 \\ \varrho\, x_2' &= x_1 + x_2 \\ \varrho\, x_3' &= b\, x_3 \\ \varrho\, x_4' &= b\,(x_3 + x_4) \end{aligned} \quad b \neq 0 \quad \begin{aligned} &b \neq 1 \\ &\text{Kollineation (12);} \\ &b = 1 \\ &\text{Kollineation (13)} \end{aligned}$$

Nun erkennt man ohne weiteres bei Typ (13) die in Nr. 20 vermutete Projektivität zwischen der Punktreihe der Doppelpunkte und dem Büschel der Doppelebenen: aus der letzten Gleichungsform berechnet man leicht, daß für den Doppelpunkt $(0; p_2; 0; p_4)$

die Doppelebene $p_4 x_1 - p_2 x_3 = 0$ die Trägerin seines Büschels von Doppelstrahlen ist.

28. Bei der Aufstellung der kanonischen Gleichungen des Typs (14) hat man, Fig. 3, zu berücksichtigen, daß A_4 Doppelpunkt, weiterhin ε_1 Doppelebene nach Typ (VI) sein soll, und daß im Ebenenbüschel mit der Achse $A_3 A_4$ eine parabolische Projektivität herrschen soll. Daraus erhält man die kanonischen Gleichungen für den

$$\text{Typ (14)} \quad \begin{aligned} \varrho x_1' &= x_1 \\ \varrho x_2' &= a x_1 + x_2 \\ \varrho x_3' &= b x_1 + c x_2 + x_3 \\ \varrho x_4' &= d x_1 + e x_2 + f x_3 + x_4 \end{aligned} \qquad a \cdot c \cdot f \neq 0$$

In engem Zusammenhang mit Nr. 12 findet man auch hier wieder eine besonders einfache und übersichtliche Form der Kollineationsgleichungen, wenn man das Koordinatensystem folgendermaßen annimmt: man wählt A_1 beliebig außerhalb der Doppelebene; $A_1 A_1'$ trifft die Doppelebene in A_2; $A_2 A_2'$ trifft die Doppelgerade in A_3; A_4 ist der Doppelpunkt; der Einheitspunkt wird bestimmt durch die Koordinatenannahmen A_1' (1; 1; 0; 0), A_2' (0; 1; 1; 0), A_3' (0; 0; 1; 1). Dann lauten, wie man sofort berechnet, die

$$\text{Gln. jeder Einzelkollineation (14)} \quad \begin{aligned} \varrho x_1' &= x_1 \\ \varrho x_2' &= x_1 + x_2 \\ \varrho x_3' &= x_2 + x_3 \\ \varrho x_4' &= x_3 + x_4 . \end{aligned}$$

29. Damit ist die Aufstellung der 14 Typen räumlicher Kollineationen und ihrer kanonischen Gleichungen abgeschlossen[1]). Man ist nun in der Lage die entsprechenden Betrachtungen im vierdimensionalen Raume durchzuführen oder im dreidimensionalen Raume weitere Probleme einfach zu behandeln, als Beispiel sei die vollständige Diskussion der automorphen Kollineationen der Flächen 2. Grades genannt.

---

[1]) Da die kanonischen Gleichungen allein durch die Doppelelemente bestimmt sind, haben die aus den kanonischen Gleichungen eines Typs gewonnenen Ausdrücke für die σx_i durch die x_i' wieder die Form der kanonischen Gleichungen des Typs. Bei den Typen (1) bis (5) treten an die Stelle der Konstanten einfach deren reziproke Werte.

Um den Zusammenhang mit den bisher üblichen Ableitungen herzustellen, sei zum Schluß eine Vergleichstabelle gegeben. Dabei sind die ϱ_i in üblicher Weise die Wurzeln der entsprechend Nr. 1 gebildeten charakteristischen Determinante der Kollineation.

Unser Typ	Typ bei v. Staudt [1]	Wurzeln [2]	Rang [3]	Elementarteiler
(1)	4	$\varrho_1;\ \varrho_2;\ \varrho_3;\ \varrho_4$	3; 3; 3; 3	[1111]
(2)	3	$\varrho_1,\ \varrho_1;\ \varrho_2;\ \varrho_3$	2; 3; 3	[(11)11]
(3)	1	$\varrho_1,\ \varrho_1,\ \varrho_1;\ \varrho_2$	1; 3	[(111)1]
(4)	2	$\varrho_1,\ \varrho_1;\ \varrho_2,\ \varrho_2$	2; 2	[(11)(11)]
(5)	fehlt	$\varrho_1,\ \varrho_1,\ \varrho_1,\ \varrho_1$	0	[(1111)]
(6)	8	$\varrho_1,\ \varrho_1;\ \varrho_2;\ \varrho_3$	3; 3; 3	[211]
(7)	6	$\varrho_1,\ \varrho_1;\ \varrho_2,\ \varrho_2$	3; 2	[2(11)]
(8)	7	$\varrho_1,\ \varrho_1,\ \varrho_1;\ \varrho_2$	2; 3	[(21)1]
(9)	5	$\varrho_1,\ \varrho_1,\ \varrho_1,\ \varrho_1$	1	[(211)]
(10)	12	$\varrho_1,\ \varrho_1,\ \varrho_1;\ \varrho_2$	3; 3	[31]
(11)	11	$\varrho_1,\ \varrho_1,\ \varrho_1,\ \varrho_1$	2	[(31)]
(12)	10	$\varrho_1,\ \varrho_1;\ \varrho_2,\ \varrho_2$	3; 3	[22]
(13)	9	$\varrho_1,\ \varrho_1,\ \varrho_1,\ \varrho_1$	2	[(22)]
(14)	13	$\varrho_1,\ \varrho_1,\ \varrho_1,\ \varrho_1$	3	[4]

Bei den Typen (11) und (13) hat die charakteristische Determinante die gleichen Wurzelmultiplizitäten und die gleichen zugehörigen Rangzahlen.

Karlsruhe i. B., im Oktober 1928.

[1]) Bei v. Staudt sind a. a. O. die Typen nicht numeriert, haben aber diese Reihenfolge.

[2]) Gleiche (verschiedene) Indizes bezeichnen gleiche (verschiedene) Wurzeln.

[3]) Die Rangzahlen beziehen sich auf die charakteristische Determinante für die durch Strichpunkte getrennten Wurzelgruppen.

(1)
(2)
(3)
Zentrale Kollineation
(4)
Gescharte Kollineation
(5)
Identische Kollineation
(6)
(7)
(8)
(9)
Zentrale Kollineation
(10)
(11)
(12)
(13)
(14)

Fig. 3