Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

Jahrgang 1945/46

München 1947
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission beim Biederstein Verlag München

Published 1947 under Military Government Information Control License No. US-E-178
Druck der C. H Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen
Printed in Germany. Auflage 1000

Der Satz von Rolle als Sonderfall differentialgeometrischer Existenzprobleme.

Von **Heinrich Tietze** in München.

Vorgelegt am 16. März 1945.

1. Es ist eine gewisse Klasse von Fragestellungen, auf die im Folgenden hingewiesen wird.

In der xy-Ebene sei K ein konvexes Flächenstück (worunter eine beschränkte abgeschlossene konvexe Punktmenge verstanden werde, die nicht ganz auf einer Geraden liegt), R seine Randlinie, $J = K - R$ die Menge der Innenpunkte von K, $f(x, y)$ eine in allen Punkten von K definierte und stetige Funktion, die auf R verschwindet und in allen Punkten x_0, y_0 von J total differenzierbar, d. h. für ein geeignetes $\rho = \rho\,(x_0, y_0)$ in $|x - x_0|$, $|y - y_0| < \rho$ durch

$$f(x,y) = f(x_0, y_0) + f_x'(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y'(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + \\ + \varepsilon\,(x, y, x_0, y_0) \cdot (|x - x_0| + |y - y_0|)$$

mit

$$\lim_{x,\,y \to x_0,\,y_0} \varepsilon\,(x, y, x_0, y_0) = 0$$

darstellbar ist. Dann gibt es in J wenigstens einen Punkt (ξ, η), so daß die Fläche $z = f(x, y)$ im Punkt (ξ, η) eine horizontale Tangentialebene hat, d. h. daß $f_x'(\xi, \eta) = 0$, $f_y'(\xi, \eta) = 0$ ist.

Ganz das Entsprechende gilt in n Dimensionen für Funktionen $f(x_1, \ldots, x_n)$, die in einem konvexen Körper K definiert und stetig, im Innern total differenzierbar sind und am Rand verschwinden, worin für $n = 1$ der Satz von Rolle[1] enthalten ist, nach dessen Muster (durch Betrachtung extremer Werte von f) auch der Beweis zu führen ist. Auf die Konvexheit von K, die

[1] An die Merkwürdigkeit, daß diese Benennung sich allgemein eingebürgert hat für einen Satz der Differentialrechnung, deren Prinzipien Michel Rolle (1703) abgelehnt hat, wurde im Rahmen einiger kleiner historischer Notizen erinnert (diese Sitz.-Ber., Jahrg. 1935, S. 358, 359).

nur einer gewissen Abgrenzung der späteren Fragen wegen vorausgesetzt wurde, kommt es dabei gar nicht an, und man könnte für K irgend eine beschränkte abgeschlossene Punktmenge mit inneren Punkten nehmen.

2. Ein differentialgeometrisches Existenzproblem, das im Falle $n = 1$ durch den Mittelwertsatz der Differentialrechnung gelöst wird, ergibt sich, wenn man – unter Beibehaltung aller übrigen Voraussetzungen über $f(x, y)$ – die Voraussetzung des Verschwindens am Rand R wegläßt und die Frage aufwirft nach allen jenen Ebenen, zu denen es bei fest vorgegebenen Werten von f am Rand stets, wie immer die Fläche durch die gegebene Randkurve gelegt werde, eine parallele Tangentialebene der Fläche $z = f(x, y)$ gibt. Auf den Rolleschen Fall ist diese Frage natürlich unmittelbar zurückführbar, wenn $f(x, y)$ auf R gleich einer linearen Funktion $g(x, y) = Ax + By + C$ ist, somit $h(x, y) = f(x, y) - g(x, y)$ dem Rolleschen Satz genügt und $z = f(x, y)$ somit eine zu $z = g(x, y)$ parallele Tangentialebene haben muß. Es handelt sich also darum, inwieweit für nichtlineare Randwerte Existenzaussagen über Tangentialebenen bestimmter Lage gemacht werden können.

3. Allgemeinere Fragen ergeben sich, wenn man unter R irgend eine räumliche Jordansche Kurve (topologisches Abbild des Kreises im $x_1 x_2 x_3$-Raum – analog ein topologisches Abbild von $t_1^2 + \ldots + t_n^2 = 1$ im $x_1 \ldots x_n x_{n+1}$-Raum) versteht. Man betrachtet dann im $x_1 x_2 x_3$-Raum alle in die Randlinie R eingespannten Flächenstücke M von folgender Art: M ist eindeutiges stetiges Bild der durch $t_1^2 + t_2^2 \leqq 1$ gegebenen Punktmenge vermöge einer etwa durch

$$x_1 = \varphi_1(t_1, t_2), \quad x_2 = \varphi_2(t_1, t_2), \quad x_3 = \varphi_3(t_1, t_2) \tag{1}$$

dargestellten Abbildung T, durch welche $t_1^2 + t_2^2 = 1$ topologisch auf R abgebildet wird[2]; T ist in $t_1^2 + t_2^2 < 1$ lokal-topologisch und total-differenzierbar, d. h. zu jedem Punkt τ_1, τ_2 mit $\tau_1^2 + \tau_2^2 < 1$ gibt es ein ρ, so daß in $|t_1 - \tau_1|, |t_2 - \tau_2| < \rho$ die Abbildung (1)

[2] Natürlich könnte man die Fragestellung vorerst enger abgrenzen und T durchwegs topologisch voraussetzen, müßte dann aber auf verknotete Linien R verzichten, die im Text zugelassen sind.

topologisch ist und für jede der Funktionen φ_ν eine Darstellung

$$\varphi_\nu(t_1, t_2) = \varphi_\nu(\tau_1, \tau_2) + \varphi_{\nu 1}(\tau_1, \tau_2)(t_1 - \tau_1) + \varphi_{\nu 2}(\tau_1, \tau_2)(t_2 - \tau_2) + \\ + \varepsilon(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2)(|t_1 - \tau_1| + |t_2 - \tau_2|)$$

mit $\lim \varepsilon = 0$ für $(t_1, t_2) \to (\tau_1, \tau_2)$ gilt, wobei nicht alle Determinanten

$$A_{\lambda\mu} = \begin{vmatrix} \varphi_{\lambda 1}(\tau_1, \tau_2), & \varphi_{\lambda 2}(\tau_1, \tau_2) \\ \varphi_{\mu 1}(\tau_1, \tau_2), & \varphi_{\mu 2}(\tau_1, \tau_2) \end{vmatrix}$$

verschwinden, so daß M im Punkt $x_\nu = \xi_\nu = \varphi_\nu(\tau_1, \tau_2)$ die Tangentialebene

$$A_{23}(x_1 - \xi_1) + A_{31}(x_2 - \xi_2) + A_{12}(x_3 - \xi_3) = 0 \tag{2}$$

hat. Gefragt wird dann, ob zu gebenener Randlinie R solche Lagen von Ebenen

$$C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 = 0 \tag{3}$$

existieren (und wie bejahendenfalls ihre Gesamtheit charakterisiert ist), derart, daß für alle Flächen M mit R als Rand stets wenigstens eine zu (3) parallele Tangentialebene (2) (also mit $A_{23} : A_{31} : A_{12} = C_1 : C_2 : C_3$) existiert. Das entsprechende n-dimensionale Problem führt im Falle $n = 1$ auf die bekannte Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes für beliebige (nicht notwendig einfache) stetige, für $0 < t < 1$ mit einer Tangente versehene Verbindungskurven $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ zweier Punkte A, B.