Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1945/46

München 1947
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission beim Biederstein Verlag München

Published 1947 under Military Government Information Control License No. US-E-178
Druck der C. H Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen
Printed in Germany. Auflage 1000

Spezielle Lösungen des Problems der elastischen Eigenschwingungen beim Quader und Würfel.

Von **Arnold Sommerfeld** in München.

Vorgelegt am 16. März 1945.

Die elastischen Eigenschwingungen des Quaders (rechtwinkligen Parallelepipedons) lassen sich bekanntlich bei kräftefreier[1] Oberfläche nicht allgemein in elementarer Form behandeln.[2] Im Falle rationaler Kantenverhältnisse, also insbesondere beim Würfel, gibt es aber sehr einfache spezielle Serien von Eigenschwingungen, die sich elementar berechnen lassen und im folgenden angegeben werden sollen.

Die Kantenlängen des Quaders seien l_1, l_2, l_3, sie mögen bei den zu betrachtenden Eigenschwingungen in n_1, n_2, n_3 gleiche Abschnitte unterteilt werden. Wir setzen

$$\xi_1 = \pi \frac{x_1}{l_1}, \quad \xi_2 = \pi \frac{x_2}{l_2}, \quad \xi_3 = \pi \frac{x_3}{l_3} \tag{1}$$

und legen den Ursprung der kartesischen Koordinaten x_1, x_2, x_3 in eine Ecke des Quaders. Seine Begrenzungsflächen sind dann

$$\xi_1 = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}, \quad \xi_2 = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}, \quad \xi_3 = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}. \tag{2}$$

[1] Anders bei den sog. „gemischten Randbedingungen", welche das Verschwinden der zur Oberfläche senkrechten Verrückungen und der zu ihr parallelen Spannungen (oder umgekehrt) vorschreiben. Vgl. meine Vorlesungen Bd. II § 44.

[2] Die von R. Bechmann angegebenen Lösungen, Z. Physik. 117, 180 (1940), die sogar für beliebiges anisotropes Material (Quarzplatten) gelten sollen, sind also nur als praktisch ev. nützliche Näherungen zu werten. Im Text beschränken wir uns auf isotropes Material.

Wie schwierig schon das allgemeine Problem des elastischen Gleichgewichts eines isotropen Quaders bei exakter Behandlung wird, zeigen Arbeiten von C. Tolotti (Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo Nr. 82 und 110, Rom 1940 und 1941).

Wir benutzen die Laméschen Elastizitätsmoduln μ und λ und nennen die Verrückung $\vec{\xi} = \xi_1, \xi_2, \xi_3$, die Dilatation $\Theta = \operatorname{div} \vec{\xi}$. Die Spannungen sind dann

$$\sigma_{ik} = \mu \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \right) + \lambda \Theta \delta_{ik} \,, \tag{3}$$

und die elastischen Differentialgleichungen lauten

$$\rho \ddot{\xi}_i = \mu \Delta \xi_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \,. \tag{4}$$

§ 1. Schwingungen eines Quaders von zwei zueinander rationalen Kantenlängen

Die Verrückung stehe senkrecht auf der x_3-Richtung und sei von x_3 unabhängig. Wir machen mit $j = \sqrt{-1}$ den Ansatz:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= A_1 \cos n_1 \mathfrak{x}_1 \sin n_2 \mathfrak{x}_2 \, e^{j\omega t} \\ \xi_2 &= A_2 \sin n_1 \mathfrak{x}_1 \cos n_2 \mathfrak{x}_2 \, e^{j\omega t} \\ \xi_3 &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Zunächst berechnen wir die Dilatation Θ; nach (5) erhalten wir

$$\Theta = -\pi \left(A_1 \frac{n_1}{l_1} + A_2 \frac{n_2}{l_2} \right) \sin n_1 \mathfrak{x}_1 \sin n_2 \mathfrak{x}_2 \, e^{j\omega t} \,. \tag{6}$$

Nun ist wegen (3) und (5) $\sigma_{33} = \lambda \Theta$. Für $\mathfrak{x}_3 = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$, wo σ_{33} verschwinden soll, muß also auch Θ verschwinden. Dazu muß sein

$$A_1 \frac{n_1}{l_1} = -A_2 \frac{n_2}{l_2} \,. \tag{6a}$$

Θ verschwindet dann nicht nur für die eben genannten Grenzflächen, sondern in ganzen Quadern. Unsere Schwingung ist also durchweg d i l a t a t i o n s f r e i.

Sodann berechnen wir aus (3) und (5)

$$\sigma_{12} = \mu\pi\left(A_1\frac{n_2}{l_2} + A_2\frac{n_1}{l_1}\right)\cos n_1 x_1 \cos n_2 x_2\, e^{j\omega t}. \tag{7}$$

Wir brauchen auch hier nur zu verlangen, daß σ_{12} oder, was dasselbe ist, σ_{21} auf den Grenzflächen des Quaders senkrecht zur x_1- und x_2-Achse verschwinde. Das führt aber wieder auf das Nullsetzen der Klammer, bewirkt also, daß σ_{12} überall im Quader verschwindet. Aus $\sigma_{12} = 0$ für die genannten Grenzflächen folgt nämlich allgemein:

$$A_1\frac{n_2}{l_2} = -A_2\frac{n_1}{l_1}. \tag{7a}$$

Kreuzweise Multiplikation von (6a) und (7a) liefert

$$\left(\frac{n_1}{l_1}\right)^2 = \left(\frac{n_2}{l_2}\right)^2$$

also, da es sich um lauter positive Größen handelt,

$$\frac{n_1}{l_1} = \frac{n_2}{l_2}, \tag{8}$$

woraus man nach Einsetzen in (6a) oder (7a) auch auf

$$A_2 = -A_1 \tag{8a}$$

schließt. Gl. (8) zeigt, daß l_1/l_2 gleich dem Verhältnis der beiden ganzen Zahlen n_1/n_2, also rational sein muß. Wir setzen:

$$\begin{aligned} l_1 &= a\nu_1, \quad l_2 = a\nu_2 \\ n_1 &= n\nu_1, \quad n_2 = n\nu_2, \end{aligned} \tag{9}$$

indem wir unter n den größten gemeinsamen Teiler von n_1 und n_2, unter a eine den Kanten 1 und 2 gemeinsame Einheitslänge verstehen. Wir haben dann

$$\frac{n_1}{l_1} = \frac{n_2}{l_2} = \frac{n}{a}. \tag{9a}$$

Die Diff.Gln. (4) verlangen nunmehr wegen $\Theta = 0$ einfach

$$\omega^2 = \frac{2\mu}{\rho}\frac{n^2}{a^2}, \quad \omega = \frac{\sqrt{2}\, c\, n}{a}, \tag{10}$$

wo c die transversale Schallgeschwindigkeit bedeutet.

Ebenso wie $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ und σ_{33} verschwinden auch $\sigma_{31} = \sigma_{13}$ und $\sigma_{23} = \sigma_{32}$ identisch (wegen $\xi_3 = 0$ und wegen der Unabhängigkeit des Zustandes von x_3). Es bleiben also nur noch die Grenzbedingungen übrig

$$\sigma_{11} = 0 \text{ für } x_1 = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \text{ und } \sigma_{22} = 0 \text{ für } x_2 = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}.$$

Da sich diese nach (3) wegen $\Theta = 0$ auf

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = 0 \text{ bezw. } \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} = 0$$

reduzieren, sind sie durch unseren Ansatz (5) ebenfalls erfüllt.

Einsetzen aus (8a) und (9) führt (5) über in

$$\begin{aligned} \xi_1 &= A_1 \cos n\pi \frac{x_1}{a} \sin n\pi \frac{x_2}{a} e^{j\omega t}, \\ \xi_2 &= -A_1 \sin n\pi \frac{x_1}{a} \cos n\pi \frac{x_2}{a} e^{j\omega t}, \\ \xi_3 &= 0, \qquad \omega = \frac{\sqrt{2}\, c\, n}{a}. \end{aligned} \tag{11}$$

Da n eine beliebige ganze Zahl bedeutet, haben wir in (11) eine einfach unendliche Serie von Eigenschwingungen gefunden; der Amplitudenfaktor A_1 bleibt natürlich in jedem Gliede der Serie frei wählbar.

Wir können den Zustand (11) als kombinierte Dehnungs-Kürzungs-Schwingung nach den Achsen 1 und 2 bezeichnen. Dehnung und Kürzung wechseln sich gegenseitig ab und sind so zueinander abgestimmt, daß das Volumen des Quaders erhalten bleibt ($\Theta = 0$) und daß alle Schubspannungen parallel zu den Quaderflächen nicht nur auf der Oberfläche, sondern auch im Innern verschwinden. Dagegen werden die Normalspannungen (zugleich Hauptspannungen) zwar an der Oberfläche, aber nicht im Innern des Quaders Null, sie sind vielmehr einander entgegengesetzt gleich. Ein Blick auf die Gln. (11) zeigt übrigens, daß bei diesen Schwingungen die Grenzflächen senkrecht zur x_1- und x_2-Richtung nicht eben bleiben, sondern sich sinusförmig aufwölben. Nur die zur x_3-Richtung parallelen Kanten dieser

Flächen bleiben fest, und die ursprünglich rechten Kantenwinkel bleiben rechte (wegen $\sigma_{ik} = 0$).

Fragt man allgemein nach den festbleibenden „Knotenlinien", so kommen als solche, wie man leicht erkennt, nur gewisse zur x_3-Achse parallele Gerade in Betracht. Ihre Fußpunkte in der Ebene $x_3 = 0$ bilden zwei ineinandergestellte quadratische Gitter mit den Koordinaten

$\frac{n x_1}{a} = 0, 1, 2, \ldots n_1,$	$\frac{n x_1}{a} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots n_1 - \frac{1}{2}$
$\frac{n x_2}{a} = 0, 1, 2, \ldots n_2,$	$\frac{n x_2}{a} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots n_2 - \frac{1}{2}$

Man erhält das eine oder andere dieser beiden Gitter, je nachdem man in (11) entweder die beiden Sinus oder die beiden Cosinus gleich Null setzt.

Der Fundamentalbereich dieses Fußpunktsystems ist ein Quadrat, bestehend aus zwei Punktepaaren des einen und anderen Gitters, von der Seitenlänge $a/2n$. Alle übrigen Punkte dieser und der dazu parallelen Ebenen führen lineare Schwingungen senkrecht zur x_3-Achse aus nach Richtungen, die sich beim Übergange von einem zu einem anderen Fundamentalbereich periodisch wiederholen.

Unser Deformationszustand (11) erinnert mit seinen beiden entgegengesetzt gleichen Hauptspannungen $\sigma_{11} = -\sigma_{22}$ an den in der technischen Elastostatik oft behandelten Fall der „reinen Schubbeanspruchung". Ebenso wie dort haben wir auch hier in den unter 45^0 gegen 1 und 2, parallel zu x_3 gelegten Schnitten reine Schubspannungen. Diese sind aber bei uns von Ort zu Ort variabel, ebenso die ihnen entsprechenden Hauptspannungen σ_{11} und σ_{22}, während sie in dem elementaren statischen Falle konstant sind. Wegen dieser (teilweisen) Analogie könnten wir unsere Schwingungen auch statt als Dehnungs-Kürzungs-Schwingungen als reine Schubschwingungen bezeichnen.

§ 2. Dehnungs-Kürzungs-Schwingungen des Würfels

Wenn alle drei Kantenlängen des Quaders zueinander in rationalem Verhältnis stehen, haben wir drei Serien solcher elementar darstellbarer Eigenschwingungen. Wir wollen dies der kürzeren Ausdrucksweise wegen nur im Falle des Würfels

$$l_1 = l_2 = l_3 = a$$

verfolgen. Nach den entsprechend erweiterten Gleichungen (9) ist dann auch (wegen $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 1$)

$$n_1 = n_2 = n_3 = n;$$

der ganze Würfel von der Kante a zerlegt sich also in Unterwürfel der Kante a/n, die ebenso schwingen wie der ganze Würfel bei der Grundschwingung $n = 1$.

Da die Gln. (11) Schwingungen senkrecht zur x_3-Achse darstellen, empfiehlt es sich, den Amplitudenfaktor A_1 weiterhin durch C_3 zu ersetzen. Die Gln. (11) gelten dann auch bei zyklischer Vertauschung der Indizes für die entsprechenden Schwingungen senkrecht zur x_1-Achse und x_2-Achse mit Amplituden C_1 und C_2. Überlagert man zwei oder drei zu gleichem n (gleichem ω) gehörige Eigenschwingungen, so erhält man wieder Eigenschwingungen des Würfels. Der allgemeinste so entstehende Schwingungstypus läßt sich am übersichtlichsten in der Determinantenform darstellen:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \cos n\pi \frac{x_1}{a} \cdot \begin{vmatrix} \sin n\pi \frac{x_2}{a} & \sin n\pi \frac{x_3}{a} \\ C_2 & C_3 \end{vmatrix} e^{j\omega t}, \\
\xi_2 &= \cos n\pi \frac{x_2}{a} \begin{vmatrix} \sin n\pi \frac{x_3}{a} & \sin n\pi \frac{x_1}{a} \\ C_3 & C_1 \end{vmatrix} e^{j\omega t}, \\
\xi_3 &= \cos n\pi \frac{x_3}{a} \begin{vmatrix} \sin n\pi \frac{x_1}{a} & \sin n\pi \frac{x_2}{a} \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix} e^{j\omega t}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Setzt man hierin $C_1 = C_2 = 0$, so fällt man genau auf die Darstellung (11) zurück. Mit $C_1 = 0$ und C_2, C_3 beliebig entsteht eine Schar von Lösungen, innerhalb deren die Schwingung senkrecht zur x_3-Achse ($C_2 = 0$) in eine solche senkrecht zur x_2-Achse ($C_3 = 0$) übergeht. Lassen wir auch C_1 beliebig, so haben wir die Superposition von drei Dehnungs-Kürzungs-Schwingungen senkrecht zu den drei Achsen x_1, x_2, x_3 von gleicher durch (10) gegebener Frequenz ω, aber beliebigen durch C_1, C_2, C_3 gegebenen Amplituden. Der Eigenwert ω ist dann ein dreifacher, der Schwingungszustand ist, wie man in der Wellenmechanik zu sagen pflegt, entartet und je nach der Wahl der $C_1 : C_2 : C_3$ sehr mannigfacher Formen fähig. Ein vereinfachtes Analogon dazu bilden die Schwingungen einer quadratischen Membran (vgl. z. B. Fig. 21 meines Buches Atombau II S. 349).

Offenbar geben die Gln. (12) nur einen Ausschnitt aus dem Eigenschwingungsspektrum des Würfels wieder; andere elementar darstellbare kräftefreie Schwingungsformen zu finden, z. B. rotationsfreie Dilatationsschwingungen,[1] ist mir nicht gelungen.

Man könnte einen Augenblick daran denken, unsere Lösung auf eine quadratische Platte zu übertragen, als auf einen Quader, dessen eine Kante n-mal kleiner ist als die beiden anderen. (n = große ganze Zahl). Wir hätten dann $l_1 = l_2 = a$, $l_3 = a/n$ und mit Rücksicht auf die erweiterte Gl. (9a) $n_1 = n_2 = n$, $n_3 = 1$. Die dritte Gl. (12) würde nunmehr lauten

$$\xi_3 = \cos \pi \frac{x_3}{a} \begin{vmatrix} \sin n\pi \dfrac{x_1}{a} & \sin n\pi \dfrac{x_2}{a} \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix} e^{j\omega t} ;$$

sie würde zwar eine mögliche Transversalschwingung der Platte darstellen, aber eine solche, bei der wegen des Cosinusfaktors die Platte auch in ihrer Dickenrichtung periodische Veränderungen erleiden würde. Das wäre natürlich ein ganz anderer, vielmals höherfrequenter Zustand als die bei den Plattenschwingungen physikalisch realisierten Schwingungen. Zu dem schwierigen Kapitel dieser wirklichen Plattenschwingungen, das von

[1] In der Enzykl. d. Math. Wiss. IV 4 S. 156/57 Art. Tedone-Timpe werden unter dem Namen „Potentialdeformationen" rotationsfreie Dilatationen und als Gegenstücke dazu „dilatationsfreie Drillungsdeformationen" besprochen, aber beide nur für statische Beanspruchungen und ohne Spezifizierung der Körperform. Die letzteren entsprechen, auf den Schwingungsfall erweitert, den von uns betrachteten Zuständen. Der a. a. O. empfohlene Weg zur allgemeinen Behandlung solcher Probleme scheint aber für unseren Fall ungeeignet.

Ritz so erfolgreich behandelt ist (Ann. d. Phys. **28**, 737, 1909) liefert also unsere ziemlich triviale Lösung der Dehnungs-Kürzungs-Schwingungen keinen Beitrag.

Meinem Kollegen F. Sauter, der das Manuskript dieser Note freundlichst durchgesehen hat, danke ich für einige nützliche Bemerkungen dazu.