BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

ABHANDLUNGEN · NEUE FOLGE, HEFT 154

NOVA KEPLERIANA

Neue Folge – Heft 5

Die Coss von Jost Bürgi in der Redaktion von Johannes Kepler

Ein Beitrag zur frühen Algebra

Bearbeitet von

MARTHA LIST und VOLKER BIALAS

Vorgelegt von Herrn Walther Gerlach
in der Sitzung vom 8. Dezember 1972

MÜNCHEN 1973

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN KOMMISSION BEI DER C.H.BECK'SCHEN VERLAGSBUCHHANDLUNG MÜNCHEN

ISBN 3 7696 2544 7

Bayerische Akademie der Wissenschaften, München, 1973
Druck: Buchdruckerei Gebr. Parcus KG, München
Printed in Germany

INHALT

Vorwort 5

I. Text des Manuskripts 7

II. Anmerkungen zum Text 78

III. Nachbericht

1. Die Situation der Mathematik im 16. Jahrhundert 102
Der Kreis um Wilhelm IV. von Hessen und Tycho Brahe

2. Das Manuskript der „Coss" 110
Inhalt und „Kunstweg"

Zusammenfassung – Summary 124

Zeittafel zu Jost Bürgi 125

Literaturverzeichnis 127

Namenregister 128

VORWORT

Der 5. Band der Pulkowoer Kepler-Manuskripte enthält eine bisher nur in Auszügen veröffentlichte Arbeit mathematischen Inhalts in deutscher Sprache, die als „Arithmetica Bürgii" in der Wissenschaftsgeschichte zwar Beachtung, nicht aber die rechte Bewertung und Auslegung gefunden hat. Den Historikern war die bedeutsame Tatsache entgangen, daß es sich um eine von Kepler geschriebene und auch von ihm redigierte Einleitung zu Jost Bürgis verschollenem „Canon Sinuum" handelt. Ebensowenig enträtselten sie den nur andeutungsweise überlieferten „Kunstweg", eine von Bürgi zur Berechnung seiner Sinustafel entwickelte Methode.

Das Manuskript wird mit Hilfe der modernen Formelsprache erschlossen und seine Bedeutung innerhalb des Fortschritts in der zeitgenössischen Algebra herausgestellt. So fällt Licht auf jene Jahre, in denen die Praxis der Mathematik, ausgehend von den Vorteilen der Prosthaphaerese, zur Erfindung der Logarithmen und zur Verbreitung der Algebra oder Coss beitrug. Dem Schweizer Jost Bürgi gebührt dabei großes Verdienst, das in der vorliegenden Publikation, dank der Mithilfe Keplers, in bisher unbekanntem Umfang zum Ausdruck kommt.

Die folgende wortgetreue Wiedergabe der schwer lesbaren Handschrift berücksichtigt auch solche Ausführungen, die zwar durchgestrichen, aber durchaus beachtenswert sind. Sie sind hier kursiv gedruckt und in eckige Klammern gesetzt. Je eine Seite der Handschrift von Kepler und Bürgi wird faksimiliert wiedergegeben. Dem Originaltext schließt sich ein Kommentarteil an.

Diese Abhandlung ist im Rahmen des Arbeitsprogramms der Kepler-Kommission der Bayerischen Akademie der Wissenschaften und mit Unterstützung der Deutschen Geodätischen Kommission entstanden.

DIE COSS VON BÜRGI

I. TEXT DES MANUSKRIPTS

Günstiger leser, es möcht dich villeicht wunder nemen, warumb vnder einer so grossen 93
anzahl glehrter vnd der Geometrischen kunst erfahrner leütte, eben jch disen Canonem
Sinuum zurechnen fürgenommen vnd jetzo in offnen truckh gebe der jch doch Griechischer
vnd lateinischer spraach vnerfahren vnd derohalben die jenige, wölliche hiervon geschri-
ben in jrer rechten spraach nit vernemen khönde. Derohalben will jch dir kurtzen bericht
thuen, erstlich durch was anlaittung jch hinder dise arbeitt gerathen, fürs ander mit
waserlay behelffen jch sie vollendet, fürs dritte, warzue vnd wie die sinus weittlaufftiger
vnd mit mehrerem vortl zugebrauchen, als bißhero beschehen.

* Belangend das erste, demnach jch durch meine handtierung vnd erlehrnte vhrmacher-
* kunst an des durchleüchtigen fürsten vnd S. H. Willhelm weilend Landgraven zu Hessen
etc. Hochseliger gedächtnus, Hoff befürdert worden, vnd jre fürl. Gnaden als ein hoher
liebhaber diser kunst, dero fürstlichem hohem verstand nach nit allein mir allerlay kunst-
stückhe zuverfertigen anbefohlen, sondern auch für sich selbst der astronomia obgelegen,
vnd glehrte personen bey dero Hoff gehalten, wölliche neben jrer verrichtung im obser-
viren vnd calculiren, auch mir zu verfertigung etlicher werckhe mit vnderricht in astro-
nomia vnd verdolmätschung der authorum die Hand gereicht: Also bin jch durch solliche
arbaitt vnd conversation ermelter personen den Geometrischen speculationibus nach zu-
sinnen, vnd mich drinnen zuyeben, je mehr vnd mehr aufgemuntert worden: vnd weil
mir auß mangel der sprachen die thür zu den authoribus nit alzeitt offen gestanden, wie
andern, hab jch etwas mehr, als etwa die glehrte vnd belesene meinen eigenen gedanckhen
nachhengen vnd newe wege suechen müessen.

* Sonderlich hatt sich da'mahlen begeben das Paulus Witich auch am Casselischen hoff 93v
die weise, (·da man die sinus an statt des Multiplicirens, durch zusetzen vnd wegnemen
* [·griechisch προσϑαφαιρεσιν·] abhandelt·) an tag gegeben: vnd als jme der gmeine Canon
sinuum darzue nit scharpf gnueg sein wolte haben er vnd seine consorten sich mit vleiß,
die sinus auff ein newes zurechnen begeben: alda jch durch vleissiges nachsinnen erstlich
das andere auß den jenigen zweyen Mitteln, so jch volgend erclären will in erfahrung ge-
bracht, wie nämlich der gantze Canon sinuum durch seine differentias zu erheben seye:
* wölliche Invention hernach Nicolaus Reinmarus Ursus vnder meinem Namen publicirt.

Kurtz hernach ist ein buech in teutscher, oder Niderländischer spraach außgangen,
* Ludolffs von Cöllen, drinnen er einen anderen weg, die sinus, ja alle subtensas durch die
Cossam zuerfinden an tag geben, aber nit allein weitte vmschweiff gebraucht, sondern
auch das beste vnd Notwendigiste jn der Cossa (·on wölliches alles yberige nichts vnd
vmb sonst ist·) Nämlich die aequationes verschwigen vnd in sein künfftiges grosses werckh
verschoben. Ditz buech hatt mir anleittung geben der Cossa gleichfals nachzusinnen, vnd
die darzu gehörigen aequationes für mich selbsten zuerforschen: vnd hab also auß folgen-
den zweyen mitteln von den sinibus, das erste, nämlich das Cossische erfunden. Weil dan
vnlaugbar, das nit allein die gmeine Canones sinuum, sondern auch der grosse, vnd auff
* zehen cyphras propagirte Canon Operis Palatini, von Valentino Othone zugericht, sehr
mangelhafft vnd grob angefangen: hab jch in meinen privat rechnungen für nutzlich ge-

achtet, die jenige Mittel so jch zu volkhommener zurichtung des Canonis sinuum eigens
vleisses erfunden zur verbesserung vnd Correction des erwehnten Canonis anzuwenden
vnd zu gebrauchen. Ich hette mich wol mit einem oder anderm, auß den erwehnten mit-
teln allein behelffen khönden, vnd also des yberigen nit darzue bedürfft: aber weil jch'
94 dreyssig mahl sovil sinus zusuechen gehabt, als in den gmeinen Canonibus gefunden werden
(·damit jch auff alle gerade secunda den sinum habe vnd also meinen Canonem zu der
vorgemelten Prosthapheresj recht geschickht mache·) derohalben dan auch die sinus auff
acht figuren zu erstreckhen von nöthen gewest, da andere sich mit fünff, sechs, vnd siben *
figuren betragen: diser vrsachen hab jch kheinen vortl oder behelff von vnderschidlichen
mitteln herfliessend verachten oder in wind schlahen sollen.

So aber einer so grossen durst nach der kunst hette, vnd nur den einen weg gebrauchen wolte: der würt im werckh spüren, das jeder für sich selbsten zur sachen gnuegsam ist: vnd mag jch einem sollichen, ders mir mit rechnung der sinuum nachthuen will die hierzu erforderte arbeitt wol gunnen dan jch sie selber zimlich gecostet.

Weil dan, Günstiger Leser, jch durch Gottes gnad, vnd nit geringe arbeitt zum end
khommen, vnd neben meiner Handtierung, auch disen grossen vnd dreyssigfaltigen Ca-
nonem sinuum auf gegenwürtige form vnd weis vollendet: Hab jch mein Pfund, so mir *
von Gott vertrawt, nit vergraben, sondern der geometrischen kunst zum besten auch
meinem geliebten Vatterland teütscher Nation zu Ehren in teütscher spraach, deren jch
gewohnt in offnen truckh geben wöllen: darzu mir dan etliche der kunst verständige, mit
jrem starckhem vermahnen, nit die wenigiste vrsach gegeben: die mich vertröstet, als
solle diß werckh (·sonderlich auch wegen anhangender viler bißhero vnbekanter schöner
eigenschafften des zirckels vnd der Cossa vnd anderer sehr lieblicher speculationum·) den
Mathematicis in gmein sehr angenem sein, vnd grossen nutzen schaffen.

Wölliches so es geschicht, würdt es meinem Intent ein begnüegen sein: jm widerigen verhoff jch doch, der kunstliebende vnd gütige leser werde meinen gneigten willen, jme vnd meniglichen zudienen für lieb annemen, vnd sich zu der Ehr Gottes vnd befürderung des Nächsten eines ebenmässigen befleissen.'

94v Folgt der andere Punct durch was Mittel vnd auß wöllichen Gründen
diser Canon sinuum gerechnet.

Vnsere vorfahren haben die fürnemste sinus wie bekhant auß folgenden, zwar Geo- *
metrischen, aber zur rechnung vnbequemen vnd sehr schwären gründen erforschet. Erstlich haben sie die seitten diser gleichseittigen vnd gleichwinckligen figuren, nämlich von drey- vier- fünff- sechs- zehen- fünffzehen eckhen, so alle in einem zirckel stehen vnd mit allen eckhen an der krümme anrhüeren mögen, gerechnet, vnd mit des diametrj maaß oder theilung gemessen oder gezehlet. Fürs ander haben sie einen jeden bogen, der von einer sollichen seitten abgeschnitten würt in zwey gleiche theil getheilt, vnd die subtensas der halben bogen gesuecht, das dan vil quadrierens vnd wurtzelsuechens gibt. Fürs dritte, dem Complemento eines jeden vnderzognen halben bogens durch quadrirn vnd wurtzelsuechen seinen sinum gefunden. Weil aber von alters her der zirckel in 360, vnd der quadrant in 90 grad getheilet würt, ein grad aber in 60 minuta: Hatt dise halbirung der vnderzognen bogen vnd jrer Complementorum nit weitter gelangen mögen als auff 45′ Minuta, die lassen sich nun nit mehr ohn einen bruch halbiren. Vnd gibt diser Process in gemein, wan man bey den Minuten pleibt vnd nit auff die secunda khommen will, nit mehr dan vngefahrlich 120 sinus.

Haben derohalben zum vierten achtung geben, wa die sinus anfahen gleich mit den bogen halbirt zu werden, das also zwo subtensae zweyer halben bogen, nichts merckliches mehr länger worden, als die subtensa des gantzen bogens: da sie dan bald alle sinus auff die erste Minuta des Quadrantens, vnd durch mittel des vorigen Processes, hernach andere mehr darauß gesuechet: Entlich die yberigen minuten so hin vnd her im Quadranten noch ledig gestanden, jren gebürenden sinum nach der benachbarten proportion vngefahrlich zugetheilt.

Diser Process wäre mir die sinus auff dise gegenwürtige form zuzurichten, vil zue' weitt 95
auß dem weg, auch wegen der erlängerten zahl des diametrj nit scharff gnueg gewest.

Der Mangel ist an dem, das man in der jenigen kunst, so eigentlich Geometria genennet würt, nit mehr gleichseittige figuren als oben erzehlt, nämlich den drey, vier, fünff, sechs, zehen, fünffzehen eckh, vnd folgends jre gedoppelte, den acht- zwölff- zweintzig- dreyssig eckh, ferners also, den sechzehen- viervndzweinzig- vierzig- sechzig eckh, vnd also fortan, demonstrirn khan: der siben- neün- ailff- dreyzehen eckh aber, vnd so fortan wie jch berichtet würd, für vngeometrisch außgeschätzet, vnd verworffen werden: auß vrsachen, weil man dise figuren zu demonstrirn die Cubos solte brauchen, die rechte Geometria aber kheinen weg hatt, zu einem jeden Cubo zukhommen, oder jme sein latus oder wurtzel zuernennen, alweil nit müglich, zwischen eim jeden par linien zwo mittelproportional linien auff recht geometrisch zufinden. Oder das jch eben das, so jetz gesagt, anderst fürpringe: weil die eigentliche Geometria nit vermag datum angulum sub quacunque ratione data secare einen jeden winckel oder bogen in sovil theil demonstrirlich zutheilen, als man begehrt.

Disem mangel abzuhelffen khompt die Cossa zustatt, wölliche wan man das wort Geo-
* metria weittlaüffig nimmet, auch eins theils darzue, theils aber zur Arithmetica gehört.
Vnd reimet sich zwar sehr wol zu den sinibus. Dan ob wol sinus ein rechte linj ist, so in
eim Circkel stehet, vnd ditz pur Geometrische sachen seind jedoch weil man solliche sinus
in zahlen, so genaw es müglich zu wissen begehret, vnd nit eben durch jre eigentliche
Geometrische demonstration, da jeder sinus nur ein unitet ist (·wölliche auch in dem alten
Process wie gesagt dem maisten theil, nit mehr dan 120 ausgenommen, mangeln thuet·)'
so braucht man auch nit vnbillich eine kunst darzu, wölliche von zahlen handelt. Weil 95v
dan die Cossa nit nur die ebene figuren, oder plana, sondern auch die Cubos in zahlen angreiffet: demnach so ist dem oberzehlten Mangel (·doch auff Cossisch, vnd nit auff guett Geometrisch·) abgeholffen, vnd vermag man jetzo die seitten aller vnd jeder gleichseittiger figuren, es sey von gerader oder vngerader summa der winckel in so langer zahl als man will, der gestalt an tag geben, das auß zwoen zahlen, mit einer einigen vnitet vnderscheiden, die eine grösser, die ander kleiner seye dan das gesuechte latus.

Gleichsfals vermag man durch mittel der Coss einen jeden winckel, oder bogen der mit einer bekhanten linj vnderzogen ist, in sovil theil als man wil, abtheilen, vnd einen jeden derselben stuckhe seine subtensam ernennen, vnd gegen dem maaß der bekhanten linj vergleichen. Ditz nach vnd nach zuerweisen wil vonnöthen sein, das jch anfangs eine kurtze beschreibung der Cossa (·sovil auß derselben zu disem handel von rechnung der subtensen vonnöthen·) vorher gehen lasse: wie folget.

* Was die Cossa sey.

Cossa oder Algebra ist ein art zurechnen da man der jenigen zahl, so man zuwissen begehrt, einen cossischen Namen gibt, vnd hernach mit dem selbigen Namen an statt der

begehrten zahl, procedirt nach jnhalt der fürgab, oder wie man sonsten mit der begehrten
zahl procedirn soll khönden. In wöllichem process dan entlich zwo Cossische zahlen her-
96 auß khommen, die nach jnhalt der fürgab einander gleich sein sollen: wan man dan' sol-
lichen zahlen die yberschüsse vnd abgänge mit gebürender compensation benimmet, so
pleibt letzlich der anfängliche Cossische nam vnd sein werth oder wievil er ledige zahlen
jn sich helt.

Wievil theil die Cossa habe.

Begreifft also die Cossa nach anweisung der jetzgesetzten beschreibung drey theil. Dan erstlich mustu wissen, was die Cossische Namen seyen, vnd waher sie khommen, auch jre bezeichnung oder Characteres kennen lehrnen, vnd also gleichsam das Cossische A B C ergreiffen.

Fürs ander mustu lehrnen mit sollichen Cossischen Namen, nach ausweisung der fürgab zu procediren.

Fürs dritte mustu auch wissen, die khommende zwo gleiche zahlen also zu tractiren, das dir letzlich auff einer seitten der anfängliche cossische Nam, auff der andern ein zahl, wölliche den werth solliches Namens anzeiget, nämlich eben die begehrt vnd gesuechte zahl pleibe. Dis stuckh würt lateinisch Aequatio, oder die vergleichung genennet.

Von Cossischen Namen vnd deren Zeichen.

Wer die Cossam mit frucht betrachten oder lehrnen will, mueß zuvor die gemeine Arith-
meticam theils auch Geometriam ergriffen vnd in yeblichen brauch gebracht haben: vnd
wäre zuwünschen, er hette sich auch in der Astronomischen Logistica versuechet, dan *
solliche nichts anders ist, als ein exempel von dem andern stuckh der Cossa. Ein sollicher
weist gleich anfangs wol, was in der Arithmetica die Geometrische Progression, oder in
Geometria die verknüpffte Proportz (·Proportio continua·) seye, vnd wie die durch Multi-
plicirung der Progressionzahl in sich selbst, hernach in das Product vnd so fort an, jmmer
96v fortgesetzt werde, so weitt man sie haben will.' Nu ist die Cossa nichts anders, dan ein
solliche rechnung, wölliche die proportiones für jre ziffer braucht, aller massen wie sonst
die Arithmetica die gemeine zahlen.

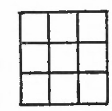
Wie nun in der Logistica astronomica da die progressionalzahl ist 60, auß 60 ledigen zahlen ein sexagena oder schockh würt, vnd heist sexagena prima, so oben auff der zahl mit eim einzelen strichlin bezaichnet würt als $\overset{I}{21}$: bedeüt einvndzweinzig primas, vnd auß 60 sollicher primarum ein secunda mit zwey strichlin bezeichnet, als $\overset{II}{1}$, bedeüttet ein secundam, oder ein vnitet auß dem andern grad der progression, vnd so fort an: Also wär es am besten gewest, die erste Cossische scribenten hettens auch bey disen Namen, Quantitas prima, secunda, tertia vnd ermelten jren zeichen verpleiben lassen, wie dan heütigs tags etliche sich diser Namen allein gebrauchen: weil aber nebens auch andere vnd mehr gebreuchige Namen vnd zeichen auff khommen, khönden wir sie nit außlassen, wöllen wir anderst mit den alten Cossisten reden vnd sie verstehn lehrnen.

So merckhe nun, wan ein Cossisches Exempel fürgeben, vnd nach einer zahl gefragt würdt: als dan macht die Cossa dise noch vnbekante zahl zu jrer progressional zahl, gibt jr den Namen Eins, vnd den zunamen Radix, Wurtzel, oder Latus seitten, dieweil, wan man sie in sich selbst multiplicirt, ein Geviertes, oder Quadratum drauß würt. Jr zeichen

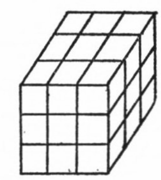
* ist $\varkappa$ vnd stehet also 1$\varkappa$ oder, wie jchs vnderweilen pflege, also $\frac{\varkappa}{1}$. Es wär aber, wie ge- Geometrisch

sagt, besser gewest, man hette sie schlecht Quantitas prima, die erste quantitet (·verstehe der erste grad in der Progression·) genennet. Dan dise Unitet 1$\varkappa$ würt an jrem werth durch den Namen $\varkappa$ für das erste mahl erhöhet, das sie nit schlecht eins, wie sonsten ein ledige Unitet, sondern so vil eins, als die begehrte zahl vermag (·das ist, die begehrte zahl ein mal·) bedeüttet. Also auch von 2$\varkappa$. 15$\varkappa$ und so fort an zuverstehen. Dan so die begehrte zahl wäre 3. würde 1$\varkappa$ sovil gelten als 3. vnd 2$\varkappa$ sovil als 6. vnd 15$\varkappa$ sovil als 45.[1]

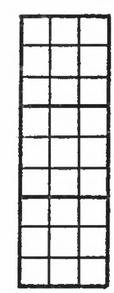
Ferners, wan man die progressional zahl in sich selbst führet oder multiplicirt, so gibt 98
die Cossa dem producto abermahl den Namen eins, den zunamen aber Census, oder Quadratum, besser Quantitas secunda die andere quantitet. Jr zeichen ist z. stehet also 1z oder $\frac{z}{1}$. Etliche machen jr zeichen q. Nach Logistischer art, also $\overset{II}{1}$. Als 1z von 3. gilt 9. Dan 3 mahl 3 ist 9.



Wan dan die proportionzahl noch ein mahl ins Productum multiplicirt würt, das heist ein Cubus, oder tertia quantitas, würt bezeichnet 1$\mathfrak{c}$ oder $\frac{\mathfrak{c}}{1}$ oder 1c. oder $\overset{III}{1}$. als 3 mahl 9 ist 27. Würt Geometrisch durch einen rechten Cubum gemahlet, jch achte aber es seye besser zu erforschung allerhand demonstrationum, das man jne abeinander setze vnd ein abläng drauß mache, wie hieneben zusehen. Dan in zahlen khan es wol geschehen; sonsten in Geometria mag auß kheinem cubo, der nit vnderscheidene theil hatt, ein planum oder ebne gemacht werden.



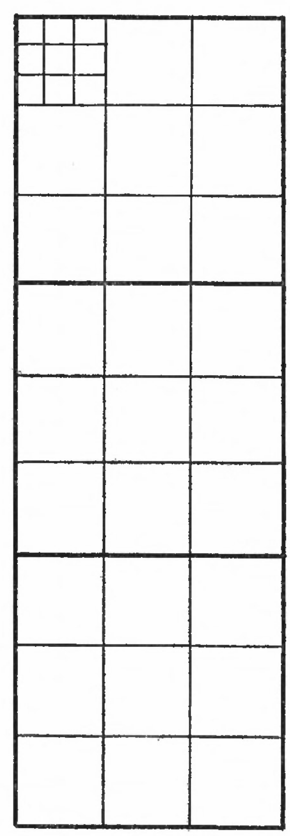
oder

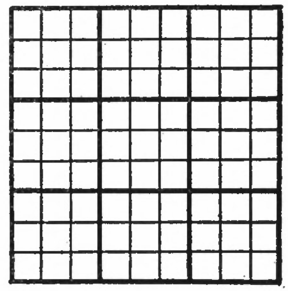


Würt die multiplication ins productum abermahl widerholet, so heist die Cossa das newe productum ein zensizens, lateinisch biquadratum oder quantitas quarta, die vierte quantitet. Jr zeichen ist 1zz oder $\frac{zz}{1}$, oder 1bq oder $\overset{IV}{1}$. Als 3 mahl 27 ist 81. Dise 81 haben den Namen ein zensizens.

So ditz noch einmahl beschicht, khompt ein Sursolidus, oder Solidus, oder quantitas quinta. Sein zeichen ist 1β oder $\frac{\beta}{1}$ oder 1ß oder $\overset{V}{1}$.

Nota. Ich pflege das erste vnd letzte zeichen zusamen zusetzen, also $1\beta_5$ oder $\frac{\beta 5}{1}$. Diß hat nit den verstand, wie bey andern, als solte der sursolidus fünffe gelten.





Auß disen fünffen seind die ybrige leichtlich zuerlehrnen. Vnd merckh in den geometrischen auffreissen, das alwegen die vngerade quantiteten einander ähnlich seind, dan wie eins braitte sich zu des andern braittin helt, also auch eins länge zu des andern länge. Von den geraden verstehet es sich selbs dan es lautter vierungen gibt.

Jch hab dir aber hie ein Täfelin gesetzt darauß du die geschlechte weitt hinauß erkhennen magst, mit jren zeichen.'

98v Wan die Progressional zahl ist *

2.	3.	4.						
1.	1.	1.	Schlechte zahl oder ragna	1. 1ϑ	Numerus	10		
2.	3.	4.	Radix	1ϰ	Latus	1l	Quantitas prima	I 1
4.	9.	16.	Zensus	1z	Quadratum	1q	Secunda	II 1
8.	27.	64.	Cubus	1𝔠	Cubus	1c	Tertia	III 1
16.	81.	256.	Zensizens	1zz	Biquadratum	1bq	Quarta	IV 1
32.	243.	1024.	Sursolidus	1β. $1\beta_5$	Solidus	1ß	Quinta	V 1
64.	729.	4096.	Zensicubus	1z𝔠	Quadraticubus	1qc	Sexta	VI 1
128.	2187.	16384.	Bissursolidus	1ββ. $1\beta_7$	Bissolidus	1bß	Septima	VII 1
256.	6561.	65536.	Zensizensizens	1zzz	Triquadratum	1tq	Octava	VIII 1
512.	19683.	262144.	Cubicubus	1𝔠𝔠	Bicubus	1bc	Nona	IX 1
1024.	59049.	1048576.	Cubicubizens	1𝔠𝔠z	Bicubiquadratum	1bcq	Decima	X 1
2048.	177147.	4194304.	Trisursolidus	1βββ. $1\beta_{11}$	Trisolidus	1tß	Undecima	XI 1
4096.	531541.	16777216.	Cubicubicubus	1𝔠𝔠𝔠	Tricubus	1tc	Duodecima	XII 1

Vom Process.

Es gibt zwar ein jedes Exempel seinen eigenen process, darvon khein gmeine regel khan gemacht werden. Es erfordern aber alle vnd jede Cossische Processe ein oder mehr species Arithmeticae cossicae, die jch nacheinander lehren will.

* Vom Addiern oder summirn, vnd subtrahirn oder abziehen.

Die Cossa verrichtet jre eigene addition vnd subtraction leichtlich durch zwey bande deren eins zum addiren gehört, Nämlich +, bedeütt einen zusatz oder yberschuß, oder plus.

Das ander gehört zum subtrahiren Nämlich —, bedeütt einen abgang oder Mangel, oder minus. Wan nun diser bande eine zwischen zwo zahlen gesetzt würt, so vereinigt es sie das auß baiden ein cossische zahl würt.

[*Wan nun zweyer vnderschidlicher geschlechte zahlen zu summiren seind, so setzet man das zeichen plus darzwischen. Zum exempel jch sol addiren* 2c *zu* 21x. *Würt also verrichtet* 21x + 2c, *oder* 2c + 21x. *Jst sovil als sagt jch zwen cubj vnd einvndzweinzig radices drüber. Also auch wan jch* 25 *ledige zahlen soll zu eim zeichen' addirnt, stehet es also* 1z + 25, *oder* 25 + 1z. 97

Dan zumerckhen, das ein jede cossische oder ledige zahl, so an einer sollichen zusamencupelten cossischen zahl vornen an stehet, sovil vermag, als stüende das zeichen plus vor jr. Nämlich 1z + 25, *ist als stuend es* + 1z + 25.

Jn gleichem gehet die Cossa mit der subtraction vmb. Als wan zwey vnderschidliche geschlechte, eins vom andern zu subtrahirn ist, setzt man das zeichen minus zwischen sie vnd das jenige vornen an, davon man nemen will. Jch soll von 2 Cubis wegnemen 21x *stehet also* 2c — 21x. *Jtem von* 1z *soll jch nemen* 25 *ledige zahlen, stehet also* 1z — 25. *Item von* 3x *soll jch abziehen* 1c *stehet also* 3x — 1c.

Wan aber der geschlechte mehr dan zwey, oder die zahlen von etlichen geschlechten zusamen gepunden sein]

Es ist aber zumerckhen, das ein jede Cossische oder schlechte zahl, so eintweder ledig vnd allein oder aber in einer gepundenen immediatè vornen an stehet, also das gar nichts vorher gehet, sovil gilt als hette sie das Bande plus vorher, vnd magstu solliches Band in der operation von richtigkheit wegen setzen. Als für 1z, allein stehend magstu schreiben + 1z. Für 25 allein stehend schreib + 25. Jtem für 3x — 1c magstu schreiben + 3x — 1c. Dan in allen speciebus würt vleissige achtung auff die Bande gegeben.

Wan nun zwo zahlen sonderlich von vnderscheidenen geschlechten zu summirn seind, setzt man sie schlecht ohn vnderscheid nach einander mit jren banden vnverändert, das
* also ein gebundene einige zahl auß jnen werd. Jch soll addirn 1z. vnd 25. vnd 3x — 1c. Das ist + 1z vnd + 25 vnd + 3x — 1c.

Setz es schlecht zusamen	+ 1z + 25 + 3x — 1c
oder verwechselt	1z + 3x + 25 — 1c.

Dan es gilt gleich, wan nur jedes stuckh sein band behelt.

Wan aber ein zahl von der andern zu subtrahirn ist, setzt man sie gleich wol auch nacheinander vnd macht nur ein zahl darauß aber der jenigen die man will subtrahirn verkehrt man die bande in allen jren glidern' vnd macht minus auß eim plus, vnd plus auß 97v
eim minus. Zum Exempel, sey die zahl deren man nemen will 1c + 4 — 10x. Die andere die man von jener abziehen will sey 4zz — 3z oder + 4zz — 3z. So verkehr jr die bande — 4zz + 3z, vnd setze sie also zu jener, stehet 1c + 4 — 10x — 4zz + 3z vnd ist also ditz der rest, nach abzug der andern.

Wan du aber in der summa deiner addition, oder im rest deiner subtraction zwey glider einerley geschlecht bekhommen würdest, so mustu sie zusamen in ein glid bringen. Setz derohalben gleiche geschlechte vnder einander, jedes mit seinem band, als zahl vnd zahl, Radix vnd radix. Haben sie einerley bande, so summire sie nach gmeiner Arithmetica, vnd laß jnen jr band, wan aber eins plus hette, das ander minus, so nim das kleiner vom grössern vnd laß abermahlen dem rest sein band. Brauch ein wenig dein vernunfft die würt dir den grund zeigen, warum ditz also zuthuen seye.

Addir $+ 6z - 8\varkappa$
zu $+ 4z - 4\varkappa$

Khäme dem gmeinen weg nach $+ 6z - 8\varkappa + 4z - 4\varkappa$.

Weil aber $+ 6z$ und $+ 4z$ ein geschlecht vnd einerlay band hatt, so schreib für sie baide $+ 10z$. Jtem weil $- 8\varkappa$ vnd $- 4\varkappa$ gleichsfals einerlay Namen vnd band haben, so schreib an jrer stat $- 12\varkappa$.

Stehet also $+ 10z - 12\varkappa$
oder $10z - 12\varkappa$.

Ein andert Exempel: Addir $10z + 4\varkappa + 8$
zu $6z - 4\varkappa + 4$

Khäme dem gmeinen weg nach $10z + 4\varkappa + 8 + 6z - 4\varkappa + 4$.

Aber $+ 10z$ vnd $+ 6z$ machen $+ 16z$. $+ 8$ vnd $+ 4$ machen $+ 12$. Aber $+ 4\varkappa$ vnd $- 4\varkappa$ machen nichts, dan 4 von 4 genommen lasst nichts yber. Stehet derohalben also $16z + 12$.

Das drit Exempel: Addir $+ 9\mathfrak{c} + 6z - 8\varkappa + 7$
zu $+ 4\mathfrak{c} - 7z + 6\varkappa - 8$

Khompt $13\mathfrak{c} - 1z - 2\varkappa - 1$.

Hie stehen yberal gleiche geschlecht vndereinander vnd weil die drey letzte glider vn-
gleiche bandt haben, so hab jch das kleiner vom grössern genommen, 7 von 8, 6 von 8,
99 vnd 6 von 7, vnd dem rest' alwegen das bande gelassen das er zuvor in der grössern zahl
gehabt.

Subtrahir $4z - 9\varkappa + 6$
von $8z + 7\varkappa - 7$

Verender dem ersten die bande $- 4z + 9\varkappa - 6$, dan ditz soll subtrahirt werden
stehet also $+ 8z + 7\varkappa - 7$

Khompt $+ 4z + 16\varkappa - 13$.

Weil jch nun hab $- 7$ vnd $- 6$ schmeltz jchs zusamen vnd setz $- 13$, jtem $+ 7\varkappa + 9\varkappa$ macht $+ 16\varkappa$, jtem $- 4z + 8z$ macht $+ 4z$, dan 4 von 8 lasst 4 plus yberig [, *stehet also* $4z + 16\varkappa - 13$. *Kürtzer volget, das plus kleiner von plus grösser pleibe plus, vnd minus kleiner von minus grösser pleibe minus; aber plus grösser von plus kleiner pleibe minus vnd minus grösser von minus kleiner pleibe plus. Item minus kleiner von plus grösser*]. *

Multiplicatio.

Allhie mustu auff drey ding achtung geben, dan nit allein die zahlen an jnen selbst, sondern auch die Namen oder geschlecht sampt jren zeichen vnd die bande sich verändern.

Die zahlen wölliche ein jedes glid machen, werden alle durch ein jedes glid des multiplicanten absonderlich Multiplicirt vnd geben jre eigne producta.

Nim dise zwo zahlen $+ 8z - 9$
$+ 7z - 4$

$+ 56zz - 63z - 32z + 36$.

Hie mustu 7 in 8 multiplicirn vnd in 9, gleichsfals 4 in 8, vnd in 9, vnd alle vier producta jedes absonderlich setzen.

Die geschlecht seind leichtlich auß dem vordern Täfele zuerkennen, nit anderst dan wie in der Logistica. Dan wan du summirest die strichlin, so die quantitet beider zahlen, wölliche ineinander multiplicirt seind, bezeichnen, so hastu die quantitet deß products. Zum Exempel 7 mahl acht ist 56, woltest wissen was 56 für ein geschlecht wäre: so sihestu das 7 seind zensus gewest, 8 gleichsfals. Neben zens im Täfele findestu $\overset{II}{1}$, das hatt zwey strichlin weil es die ander quantitet bezeichnet, zwey zu zwey (·weil beide zahlen Census gewest·) machen vier, dise vier strichlen zeigen mir auff zensizens derohalben seind es
* 56zz. Also weil 9 ein' schlechte zahl, da im Täfelin ein o oben auff stehet, vnd 7 seind 99 v
zensus oder $\overset{II}{7}$, würt 7 mahl 9, das ist 63 auch $\overset{II}{63}$ oder 63z sein, dan ^{II} zu o gethan würt vm nichts vermehrt.

Zu wissen aber ob das product plus oder minus sey merckh dise regel: wan die jenigen zahlen, so jn einander multiplicirt werden, gleiche bande haben, es sey plus oder minus, so würt das product plus. Haben sie vngleiche, eine plus die ander minus, so würt das product alwegen minus. Als 7 mahl 8 baide plus macht 56 plus, vnd 4 mahl 9 baide minus macht 36 plus, vnd gar nit minus. Aber plus siben in minus 9 bringt minus 63. Also auch minus 4 in plus 8 bringt 32 minus.

Divisio.

Die Cossa dividirt gar leichtlich, dan sie nur einen strich vnder den dividendum zeücht vnd den divisorem drunter setzt.

Jch soll dividiren 4z — 1zz mit 2, setz es also $\frac{4z - 1zz}{2}$. Würt also ein bruch darauß. Dividir 3ϰ — 1c mit 4z + 3, setz es also $\frac{3ϰ - 1c}{4z + 3}$. Diß ist der quotiens [*Doch seind etliche zahlen also gegen einander geschaffen, das ein division geschehen vnd der quotiens ein cossische oder ledige zahl sein mag, aber sie müessen ein gar genawe geschickhlichkeitt gegen ein ander haben, erstlich müessen die glider in gleichen staffeln der . . da dan abermahl auff drey ding achtung zu geben, auff die zahlen, Namen, vnd bande. Besihe vnden was hie ein khompt am plat*].

Wie man die brüch Reducirn soll.

Es begibt sich vnderweilen, das sollicher in der divisione gefundenen quotienten oder brüche zehler vnd Nenner gegen einander geschickt seind, vnd der bruch einfaltiger oder gar zu gantzen zahlen werden khan. Darvon geb jch dir dise regel. Wan weder oben noch vnden im bruch khein schlechte zahl ist, so nim der nideresten quantitet iren cossischen Namen das sie zu einer schlechten zahl werde, vnd sovil quantiteten diser Nam zehlet, vm sovil ernidrige ein jedes glid. Ein bruch $\frac{3β - 1c}{4z - 3zc}$ hatt 4z zur nidersten quantitet, die'
heisset secunda. So mach nun auß 4z 4 schlechte zahlen, weil sie dan vmb 2 staffel er- 100
nidriget, müessen auch die andere vmb sovil ernidriget, vnd auß 3β, 3c, auß 1c, 1ϰ, auß 3zc, 3zz werden. Stehet also $\frac{3c - 1ϰ}{4 - 3zz}$.

Fürs ander, wan die zahlen in allen glidern durch ein einige zahl mögen dividirt werden vnd gleich aufgehen, so thue es wie in der gmeinen arithmetica.

Als $\frac{30z + 40\varkappa}{15\varkappa}$ geht mit 5 auff vnd khompt $\frac{6z + 8\varkappa}{3\varkappa}$.

Etwa würt der bruch hiermit aufgehebt als $\frac{30z + 40\varkappa}{5}$, gehet auff mit 5 vnd khompt $\frac{6z + 8\varkappa}{1}$ das ist $6z + 8\varkappa$.

Fürs dritte wan vnden sovil glider seind als oben, vnd jedes vndere gegen dem oberen einerlay proportz helt, auch das vndere vnd das obere gleiche band hatt, so mag der bruch zu schlechten ledigen zahlen reducirt werden.

Als $\frac{12z + 15\varkappa - 6}{8z + 10\varkappa - 4}$ gehet auff mit $4z + 5\varkappa - 2$ vnd würt drauß $\frac{3}{2}$ oder $1\frac{1}{2}$ schlechte uniteten.

Jm yberigen ist die handlung mit den Cossischen brüchen allerdings gleich der gmeinen Arithmetica: allein wan dieselbige heisst addirn subtrahirn multiplicirn dividirn, sollen für dise gmeine, die jetzerklärte cossische species gebraucht werden.'

Extractio Radicis.

Wan auß einer Cossischen zahl die wurtzel soll genommen werden, so setzt der Cossist nur das zeichen $\sqrt{}$ darfür. Als Radix auß $4z - 1zz$ ist $\sqrt{}\,4z - 1zz$. Oder soll es Radix *
cubica sein, so stehet es $\sqrt{}\,\mathfrak{c}\,4z - 1zz$ vnd so fort an.

[Es khompt wol darzue das dise also bezeichnete Cossische zahlen auch durch die vier species *
gehen, vnd jre eigene lehren vnd Reguln haben nach art der jrrational zahlen: aber wir werden
100v *jrer zu vnserm fürhaben nit bedürffen, vnd lassen sie fürohin billich fahren.' Doch seind etliche zahlen also gegen einander beschaffen, das ferrer ein division geschehen mag. Aber sie müessten genaw geschickt gegen ein ander sein vnd erstlich in gemein alweg der divisor das nideriste geschlecht vnd eintweder nur ein glid haben.*

Als $30z + 40\varkappa + 30z + 40\varkappa$ | *Quotient* $6\varkappa + 8$
$+\ 5$

Item $+\ 30z + 40\varkappa$ *Item* $30z + 40\varkappa$ | $30\varkappa + 40$
$+\ 5$

hie ist $1\varkappa$ *der divisor Radices vnd der dividendus hatt auch nit niderere zahlen als Radices.*

Oder, so der Divisor mehr glider hette, müessen solliche in gleicher ordnung der quantiteten gehen mit denen im dividendo, ferners eintweder an der anzahl des dividendj glidern gleich sein vnd je das eine vom divisore zu seinem ybergesetzten im dividendo sich also halten wie das andere, auch einerlay band mit jme haben, oder da der divisor wenigere glider hatt als dividendus, müessen oben vnd vnden an eim ort sovil quantiteten zwischen glidern außgelassen sein, als $25z - 50zz + 35z\mathfrak{c}$

$$\begin{array}{rr} \textit{als} & +\ 12z - 15\varkappa - 6 \\ & +\ \ 4z + \ 5\varkappa - 3 \\ & +\ 12z + 15\varkappa - 9 \\ \hline & 30\varkappa + 3 \end{array}$$

Da dan die Cossische Multiplication dir anleittung gibt, was ein jedes glid im quotienten für ein namen bekhomme. Dan baide Namen, des quotienten vnd des divisoris müessen sampt-

lich dem Namen des dividendj gleichen, sonst würdestu nit khönden den Multiplicirten divisorem vom dividendo abziehen, wan er nit gleiches geschlechts khäme. So nim nun den Namen des divisoris vom Namen des dividendj, pleibt des quotienten nahm. Würde aber des divisoris Nahm jm ersten satz mehr sein dan des dividendj, so magstu nit dividirn, sondern es pleibt ein bruch. Die bande betreffend pleibts wie in der Multiplication, wan divisor vnd dividendus baide ein zeichen haben, so bekhompt der quotiens plus, haben sie vngleiche so bekhompt er minus. Hernach gibt dir die Cossische Multiplication des quotienten in den divisorem anzeigung was ein jedes glid vom multiplicirten divisore für ein zeichen habe. Die Cossische subtraction aber des multiplicirten divisoris vom dividendo, zeigt dir wa du dem dividendo nemen oder geben sollest dan du die bande des multiplicirten divisoris verändern vnd wa gleiche bande seind, addirn, bey vngleichen subtrahirn muest.[1]

Zum Exempel, Jch soll dividirn 101

$$+\overset{\text{VI}}{6}-\overset{\text{IV}}{9}+\overset{\text{III}}{10}+\overset{\text{I}}{3}-\overset{\text{0}}{4}\quad \textit{mit}\quad +\overset{\text{III}}{3}-1.$$

Setz es also

$$\begin{array}{l}
+\overset{\text{VI}}{6}-\overset{\text{V}}{0}-\overset{\text{IV}}{9}+\overset{\text{III}}{10}-\overset{\text{II}}{0}+\overset{\text{I}}{3}-\overset{\text{0}}{4}\qquad +\overset{\text{II}}{2}\\
+\overset{\text{III}}{3}-\overset{\text{II}}{0}-\overset{\text{I}}{0}-\overset{\text{0}}{1}\\
+\overset{\text{VI}}{6}\qquad -\overset{\text{III}}{2}\\
\hline
\qquad -\overset{\text{IV}}{9}+\overset{\text{III}}{12}-\overset{\text{II}}{0}+\overset{\text{I}}{3}-\overset{\text{0}}{4}\\
\qquad +\overset{\text{III}}{3}-\overset{\text{II}}{0}-\overset{\text{I}}{0}-\overset{\text{0}}{1}-4\qquad -\overset{\text{I}}{3}\\
\qquad -\overset{\text{IV}}{9}\qquad +\overset{\text{I}}{3}\\
\hline
\qquad\qquad +\overset{\text{III}}{12}-\overset{\text{II}}{0}+\overset{\text{I}}{0}-\overset{\text{0}}{4}\\
\qquad\qquad +\overset{\text{III}}{3}-\overset{\text{II}}{0}+\overset{\text{I}}{0}-\overset{\text{0}}{1}\qquad +\overset{\text{0}}{4}
\end{array}$$

Sprich $+ 3$ *in* $- 6$ *hab jch* $+ 2$ *mahl, vnd* III *von* VI *pleibt* III, *stehet also im quotienten* $+\overset{\text{III}}{2}$. *Die multiplicir in divisorem, khompt* $+\overset{\text{VI}}{3}-\overset{\text{III}}{2}$.

Nim $+\overset{\text{VI}}{6}$ *von* $+\overset{\text{VI}}{6}$, *pleibt nichts, (also) dan wan du jm sin das vnder band* + *veränderst in ein* —, *so ist oben* +, *vnd muest derwegen subtrahiren. Hingegen die* $-\overset{\text{III}}{2}$ *im sin in* $+\overset{\text{III}}{2}$ *verendert, sollen zu* $+\overset{\text{III}}{10}$, *wegen gleichheitt des bandes addirt werden. Nach diser subtraction pleibt der rest von dividendo* $-\overset{\text{IV}}{9}+\overset{\text{III}}{12}-\overset{\text{II}}{0}+\overset{\text{I}}{3}-\overset{\text{0}}{4}$, *setz den divisorem wider vnder, sprich* $+ 3$ *in* $- 9$ *hab jch* $- 3$ *mahl, vnd weil* III *von* IV *genommen lasset yber* I, *so ist der quotient* $-\overset{\text{I}}{3}$. $-\overset{\text{I}}{3}$ *mahl* $-\overset{\text{0}}{1}$ *ist* $+\overset{\text{I}}{3}$, *machs zu* $-\overset{\text{I}}{3}$. *Dise von* $+\overset{\text{I}}{3}$ *(wegen vngleicher zeichen) last nichts yber. Also* $-\overset{\text{I}}{3}$ *mahl* $+\overset{\text{III}}{3}$ *macht* $-\overset{\text{IV}}{9}$ *(ist im subtrahirn* $+\overset{\text{IV}}{9}$*) so nims wegen vngleicher zeichen von* $-\overset{\text{IV}}{9}$, *pleibt aber nichts. Jst der rest* $+\overset{\text{III}}{12}-\overset{\text{II}}{0}-\overset{\text{I}}{0}-\overset{\text{0}}{0}$, *ybersetz den divisore noch einmahl* $+\overset{\text{II}}{3}$ *in* $+\overset{\text{III}}{12}$ *hastu* $+ 4$ *mahl, vnd* III *von* III *last nichts oder* 0, *derwegen* *der quotient ist* $+\overset{0}{4}.\ +\overset{0}{4}$ *mahl* $-\overset{0}{1}$ *ist* $-\overset{0}{4}$, *von* $-\overset{0}{4}$ *last nichts vnd* $+\overset{0}{4}$ *mahl* $+\overset{\text{III}}{3}$ *ist* $+\overset{\text{III}}{12}$ *von* $+\overset{\text{III}}{12}$ *last nichts. Jst also der völlige quotient* 2𝔷 — 3𝔵 + 4 *vnd pleibt nichts yber.*

Wan aber jn baiden zahlen zwischen je zweien glidern gleich vil quantiteten außgelassen, so darffstu khein statt mit Nulla erfüllen dan es vnnoth ist]

Mitt dem band des quotienten pleibts wie in der Multiplication dan gleiche bande geben plus, vngleiche minus.

Vnd weil du auß anlaittung des gmeinen dividirens waissest, das man zu volführung einer division sich baids der Multiplication vnd subtraction gebrauchen mueß: demnach würstu auch leichtlich verstehen khönden das allhie solliche Multiplication vnd subtraction müesste auff cossisch zugehen, inmassen bishero gelehrt worden. Dannenhero würdt dir bekhandt werden, was für geschlecht vnd bande herauß khommen, wan du den divisorem in ein glid vom quotienten Multiplicierest: Jtem wie du jm thuen sollest, das du den multiplicirten divisorem von dem dividendo recht abziehest. Will den gantzen handel mit eim exempel erclären.

Jch soll dividiren $\overset{\text{VI}}{6}-\overset{\text{IV}}{9}+\overset{\text{III}}{10}+\overset{\text{I}}{3}-\overset{0}{4}$ mit $\overset{\text{III}}{3}-\overset{0}{1}$. Alhie ist im dividendo außgelassen die fünffte vnd andere, jm divisore aber die andere vnd erste quantitet, die ersetze jch mit Nullen, schreibe den divisorem mit seinen siben glidern, zeüch zwen strich, setz den

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & +\overset{\text{III}}{12} & +\overset{\text{II}}{0} & +\overset{\text{I}}{0} & -\overset{0}{4} \\
\cline{2-7}
 & +\overset{\text{V}}{0} & -\overset{\text{IV}}{9} & +\overset{\text{III}}{12} & +\overset{\text{II}}{0} & +\overset{\text{I}}{3} & \\
\hline
+\overset{\text{VI}}{6} & +\overset{\text{V}}{0} & -\overset{\text{IV}}{9} & +\overset{\text{III}}{10} & +\overset{\text{II}}{0} & +\overset{\text{I}}{3} & -\overset{0}{4} \\
\hline
+\overset{\text{III}}{2} & +\overset{\text{II}}{0} & -\overset{\text{I}}{3} & & & & \\
\hline
+\overset{\text{III}}{3} & +\overset{\text{II}}{0} & +\overset{\text{I}}{0} & -\overset{0}{1} & & & \\
+\overset{\text{VI}}{6} & +\overset{\text{V}}{0} & +\overset{\text{IV}}{0} & -\overset{\text{III}}{2} & & & \\
\hline
 & & +\overset{\text{III}}{3} & +\overset{\text{II}}{0} & +\overset{\text{I}}{0} & -\overset{0}{1} & \\
 & & +9 & & & 3 &
\end{array}
$$

divisorem vnder baide gib jedem sein band plus vorn vnd spreche, Plus drey dritte in plus sechs sechsten, hab jch plus zwey dritte mahl, dan des divisoris zeichen hatt drey strichlin weniger dan des dividendi in allen jren glidern, auff dismahl vnd bey disem ersten satz, drum setz jch yber das 2 solliche drey yberschüssige strichlein. Nu multiplicir jch $+\overset{\text{III}}{2}$ in den gantzen divisorem, khompt $+\overset{\text{VI}}{6}+\overset{\text{V}}{0}+\overset{\text{IV}}{0}-\overset{\text{III}}{2}$. Die muestu abziehen von $+\overset{\text{VI}}{6}+\overset{\text{V}}{0}-\overset{\text{IV}}{9}+\overset{\text{III}}{10}$. So verändere jenem seine bande im sin, dan würstu vermüg der subtraction sehen, das 6 von 6 zu nemen, aber 2 zu 10 zu addiren seind.[1]

101 v Dan nach veränderung der bande, hatt der Multiplicirte divisor ein solliche gestalt

$$-\overset{\text{VI}}{6}-\overset{\text{V}}{0}-\overset{\text{IV}}{0}+\overset{\text{III}}{2}$$

Der dividendus aber ist $+\overset{\text{VI}}{6}+\overset{\text{V}}{0}-\overset{\text{IV}}{9}+\overset{\text{III}}{10}$. Nu sagt dir die Reduction im subtrahirn vnd addirn, wan du vngleiche bande habest bey einerlay geschlecht als $-\overset{\text{VI}}{6}$ vnd $+\overset{\text{VI}}{6}$, so soltu das kleiner vom grössern abziehen, vnd was yber pleibt, mit seinem bande setzen. So pleibt alhie nichts, drum darffstu auch nichts darfür setzen. Also auch hastu in erwehnter Reduction gelehrnet, wan einerlay gschlecht gleiche band haben, als hie $+\overset{\text{III}}{2}$ vnd $+\overset{\text{III}}{10}$, so sollen sie summirt werden, vnd die summa das gmeine band behalten, als $+\overset{\text{III}}{12}$. Pleibt derohalben oben $+\overset{\text{V}}{0}-\overset{\text{IV}}{9}+\overset{\text{III}}{12}$. Nu setz jch den divisorem vmb ein stell fürbas, vnd sprech plus sechs dritte in plus Nul fünffte, hab jch pluß Nul ander mahl, dan drey strichlein des divisoris von fünff des dividendj lassen zwey dem quotienten. Setze derohalben $+\overset{\text{III}}{0}$ in quotienten vnd weil Nulla nichts multiplicirt oder dividirt, so fahr jch fort vnd ybersetz den divisorem zum dritten mahl: sprechend plus drey dritte in minus neün vierte hab jch minus drey erste mahl. Setze $-\overset{\text{I}}{3}$ in quotienten vnd multiplicirs in divisorem khompt $-\overset{\text{IV}}{9}-\overset{\text{III}}{0}-\overset{\text{II}}{0}+\overset{\text{I}}{3}$. Verändere die bande

$$+\overset{\text{IV}}{9}+\overset{\text{III}}{0}+\overset{\text{II}}{0}-\overset{\text{I}}{3}$$

drüber stehet $-\overset{\text{IV}}{9}+\overset{\text{III}}{12}+\overset{\text{II}}{0}+\overset{\text{I}}{3}$. Pleibt derohalben $+\overset{\text{III}}{12}+\overset{\text{II}}{0}+\overset{\text{I}}{0}$. Ybersetz den divisorem zum vierten mahl vnd spreche plus $\overset{\text{III}}{3}$ in plus $\overset{\text{III}}{12}$ hab jch plus vier Nul mahl, multiplicir vnd subtrahir so gehet alles auff.[1]

*

Vom Gmeinen dividirn.

Weil aber doch es sich zuweilen zutregt, das man auch Cossisch dividirn vnd wurtzel suechen mueß so will jch dich dasselbig auch lehren.

Doch mueß jch zuvorher melden, das mir jn der gemeinen Arithmetica die jenige weis zu dividirn vnd wurtzel zusuechen am besten gefalle, da man den Quotienten vnd die wurtzel zwischen zwoen linien vnder die zahl setzt, wölliche zu dividiren oder quadrat etc. ist. Das will jch mit Exempeln erclären. Du solt dividiren 6135789000 mit 90416.

Zeüch anfangs zwo linjen vnder den dividendum, hernach setz den divisorem vnder baide linj, vnd ordne in vnder den dividendum, wie in der gmeinen division. Handel wie breüchlich, sprechend, neün in 61 hab ich 6 mahl, dise 6 setze zwischen baide linien,

$$\begin{array}{r}
5\\
16\\
5589\\
7990\\
80145\\
808598\\
7111272\\
6135789000\\
\hline
67861\\
\hline
904166666\\
9041111\\
90444\\
900\\
9
\end{array}$$

zwischen 1 vnd 9. Hernach sprich, sechs mahl 9 ist 54, nims von 61 pleibt 7, die setz yber 61, durchstreich das obere :6: dan es ist aufgehebt. Gleichesfals durchstreich vnden 9, damit du nit jrr werdest. Ferners sechs mal 4 ist 24 von 35 pleibt 11, die setze drüber vnd durchstreich 4. Sechs mal 1 ist 6 von 7 pleibt 1. Sechs mahl 6 ist 36 von 18 oder 118 pleibt 082. Nu setz den divisorem vm ein statt weitter, thue wie vor. Dan 9 in 71 hab ich 7 mahl, die 7 setz jch zwischen die linien, vnd also fortan alle digitos des quotienten, jeden yber den anfang des divisoris.'

102 Vom Gmeinen Wurtzelsuechen. *

Die quadratzahl sey 20000000000 deren thue wie breüchig mit vndersetzung der puncten von der rechten an. Darnach ziech zwo linien drunter, vnd fahe an bey dem ersten Puncten zur linckhen, sprechend Radix von 2 ist 1. Das setz vnder den puncten zwischen

	1	6	8		
1	4	18	14	36	
2	00	00	00	00	00
·	·	·	·	·	·
1	4	1	4	2	
	24	81	24	82	

die linien. Darnach thue wie breüchig, sprechend 1 von 2 pleibt 1 etc. Wan du nun jetzo die Radicem duplirest, als 2 mahl 1 ist 2, so setz sie vnder baide linien, nechst nach dem ersten puncten, wie sonst breüchig, vnd wie offt du sie in der obern zahl haben magst, denselben quotienten setz zwischen vnd vnder die linien, vnd vnder den nechst folgenden puncten, als 2 in 10, hab jch 4 mahl, stehen vier vnder dem andern puncten zwischen den linien vnd vnder der linien 24, die multiplicir in die obere 4, was khompt, subtrahir von oben wie breüchig. Also fort 2 mal 14 ist 28; diese in 40, 1 mahl: vnd 281 einmahl von 400 pleibt 119.'

100 v So es sich nun begäbe, das man Cossisch dividiren solte, zuerlehrnen, ob die zahlen gleich aufgehen, damit man des bruchs abkhomme, so merckh folgende regeln. *

Schreib bande zahlen also, das du alle ausgelassene quantiteten von der grössisten an, biß auff die ledige zahl mit einer nulla ersetzest, vnd jr zeichen drüber, zuvorher aber ein plus oder minus, dan es gleich gilt, vnd bring jedes glid an seiner Natürlichen stell ein, mit seim band. Hernach setz jr ein glid vom divisore vnder eins vom dividendo wie du jetzo im gmeinen dividiren mit den digitis oder ziffern gehandelt hast; doch darffstu dich hie nit abschreckhen lassen, ob etwa die erste obere zahl weniger ist als im dividendo, dan an statt eins gantzen, schreibe einen bruch in quotientem, als 5 in 1, hab ich $\frac{1}{5}$ mahl, vnd multiplicir auch hernach mit demselben (·gleich wie auch sonsten mit eim gantzen digito im quotienten·) des divisoris glider alle, nach ausweisung der division, vnd subtrahir den multiplicirten divisorem vom dividendo vnd setz hernach den divisorem vmb ein glid fort, thue wider also.'

102 Wölliche cossischen Zahlen nit quadrat seyen. Wan alle glider einer Cossischen Zahl jedes von dem andern in gleichem grad abweicht, so hatt die Cossische Zahl ein eigenschafft von einer quadrat Zahl oder Cubic Zahl. Oder alweg zwischen zweyen glidern ein oder zway etc. glider außgelassen – In der quadrat Zahl mueß zwischen zweyen nächsten nur ein glid ausgelassen sein etc.'

* *[Dispositio sequentium* 102 v

3. *Diameter partium quarum*
4. *Peculiaris ratio explorandi dividendi radicem ex –*
5. *Processus secandi angulum a semicirculo –*
6. *Demonstrationes rej*
10. *Processus bisecandj angulum*
15. *Proc*
20. *Processus trisecandj angulum*
22. *Affectio subtensae tribus ad subtensam uni*
30. *Processus quinsecandj angulum*
40. *Tabula aliquoti sectionis, ejusque constructio*
50. *Explicatio tabulae et ejus differentiarum*
53. *ibi de eo, si pari numero membra, ut scitur pervertatur et quid addatur*
60. *Quomodo totus circulus in partes solid – secatur*
67. *Quomodo Aequatio refractionis – per primo cum in trinisectione secandus aequatio extraordinaria*
70. *Omnes hi numeri radices aut 4 aut 6 etc. habent*
80. *Cum sumus in trinisectione minoris, ratio aequandj extraordinaria*
90. *Ratio aequandj universalis*
96. *Mechanicum subsidium*
100. *Defectus fictae aequationis quorsum utilis*
    Nam significat certam subtensam in proportione diametrj, arcus tamen jam incognitj: sic tamen cognitj, ut partem significet circulj divisj una cum incognita parte addita vel ablata
110. *Quomodo ex fictis magis magisque vera radix*
117. *Quomodo subito veniatur ad subtensam 4'' secundorum*
120. *Quomodo ex unius arcus subtensa multarum aliae levj opera, modis varijs*
160. *Negocium differentiarum*]'

So aber auß einer Cossischen zahl die wurtzel soll gesuecht werden, so mueß zwischen zweyen glidern einerlay distantz oder sprung, auch bande zahlen, des ersten vnd letzten glids an vnd für sich selbst quadrat vnd von geraden Namen oder zeichen, die summa aber der glider vngrad sein. Andere mehr eigenschafften werden im wurtzelsuechen ge- 103
* offenbaret. Zum Exempel $\overset{\mathrm{x}}{25} - \overset{\mathrm{viii}}{50} + \overset{\mathrm{vi}}{35} - \overset{\mathrm{iv}}{10} + \overset{\mathrm{ii}}{1}$, alhie seind vngerade nämlich fünff glider, vnd fählet es alwegen nit mehr dan vmb ein gschlecht vnd ist 25 quadrat so wol auch 1. Haben baide gerade Namen, nämlich des zehenden vnd andern geschlechts, derowegen es glaublich, dise zahl sey quadrat.

Sofern nun in der gmeinen Arithmetic das wurtzelsuechen mit dem dividirn gmeinschafft hatt, sofern würdt ditz auch in der Cossa gespüret. Wils mit disem angefangenen exempel erclären. Anfangs setz jch meine Puncten vnder das erste dritte vnd fünffte glid,

$$\begin{array}{l}
+\overset{\mathrm{x}}{25} - \overset{\mathrm{viii}}{50} + \overset{\mathrm{vi}}{35} - \overset{\mathrm{iv}}{10} + \overset{\mathrm{ii}}{1} \\
\hline
+\overset{\mathrm{v}}{5} \qquad - \overset{\mathrm{iii}}{5} \\
\hline
\qquad + \overset{\mathrm{v}}{10} - \overset{\mathrm{iii}}{5} \\
\qquad - \overset{\mathrm{viii}}{50} + \overset{\mathrm{vi}}{25}
\end{array}$$

wie in der gmainen arithmetica vnder den ersten dritten fünfften etc. digitum von der rechten anzufahen. Hernach sprech jch Radix von $+\overset{\text{x}}{25}$ ist $+\overset{\text{v}}{5}$, gehet also der erste punct auff. Hernach sprich jch $+\overset{\text{v}}{5}$ zwey mahl ist $+\overset{\text{v}}{10}$, setz das vnder baide linien, zwischen die puncten, vnd $+\overset{\text{v}}{10}$ in $-\overset{\text{viii}}{50}$ hab jch $-\overset{\text{iii}}{5}$ mahl, das setz jch vnder den andern puncten zwischen vnd vnder die linj, vnd multiplicir $+\overset{\text{v}}{10}-\overset{\text{iii}}{5}$ in $-\overset{\text{iii}}{5}$ khompt $-\overset{\text{viii}}{50}+\overset{\text{vi}}{25}$, subtrahir so pleibt $+\overset{\text{vi}}{10}-\overset{\text{iv}}{10}+\overset{\text{ii}}{1}$. Weitters $+\overset{\text{v}}{5}-\overset{\text{iii}}{5}$ zweimahl ist $+\overset{\text{v}}{10}-\overset{\text{iii}}{10}$. Die in $+\overset{\text{vi}}{10}-\overset{\text{iv}}{10}$ hab jch $+\overset{\text{i}}{1}$ mahl, machs wie zuvor so gehet alles auff vnd ist die zahl warhafftig quadrat, vnd jr wurtzel ist $+\overset{\text{v}}{5}-\overset{\text{iii}}{5}+\overset{\text{i}}{1}$.

So dir aber ein zahl fürkhäme von geraden oder vngeraden glidern, da die sprünge vngleich, magstu sie drum nit gleich für jrrational verwerffen: sondern ersetze die außgelassene stellen mit Nullen, vnd besihe sie dan noch einmahl, ob sie die obgeschribne eigenschafften habe. Zum exempel $\overset{\text{viii}}{25}-\overset{\text{v}}{50}+\overset{\text{iv}}{10}+\overset{\text{ii}}{25}-\overset{\text{i}}{10}+\overset{\text{0}}{1}$. Alhie seind vngleiche sprünge, dan zwischen der achten vnd fünfften werden zwo ausgelassen, zwischen der
103v vierten vnd zweyten eine, zwischen den ybrigen kheine: Jtem' seind der glider nit vngerad sonder gerad sechse, doch ist die erste mit der letzten zahl quadrat vnd haben gerade Namen, achte vnd Null. Wan nun die ausgelasne stellen ersetzt werden, als $\overset{\text{viii}}{25}+\overset{\text{vii}}{0}+\overset{\text{vi}}{0}-\overset{\text{v}}{50}+\overset{\text{iv}}{5}+\overset{\text{iii}}{0}+\overset{\text{ii}}{25}-\overset{\text{i}}{5}+\overset{\text{0}}{1}$, dan so hastu die sprünge gleichgemacht, vnd mueß notwendig folgen das der glider summa vnkrad seye. Besihe das exempel gantz. Dan die zal ist quadrat vnd jr Radix findet sich $+\overset{\text{iv}}{5}+\overset{\text{iii}}{0}+\overset{\text{ii}}{0}-\overset{\text{i}}{5}+\overset{\text{0}}{1}$ oder $\overset{\text{iv}}{5}-\overset{\text{i}}{5}+\overset{\text{0}}{1}$.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\overset{\text{viii}}{\underset{\cdot}{+25}} & \overset{\text{vii}}{+0} & \overset{\text{vi}}{\underset{\cdot}{+0}} & \overset{\text{v}}{-50} & \overset{\text{iv}}{\underset{\cdot}{+10}} & \overset{\text{iii}}{+0} & \overset{\text{ii}}{\underset{\cdot}{+25}} & \overset{\text{i}}{-10} & \overset{\text{0}}{\underset{\cdot}{+1}} \\
\hline
\overset{\text{v}}{+5} & & \overset{\text{iii}}{+0} & & \overset{\text{ii}}{+0} & & \overset{\text{i}}{-5} & & +1 \\
\hline
+25 & & & & \overset{\text{iii}}{+0} & \overset{\text{ii}}{+0} & -5 & & \\
 & & & -50 & & & +25 & & \\
 & & & & \overset{\text{ii}}{+10} & & \overset{\text{ii}}{+0} & \overset{\text{i}}{-10} & +1
\end{array}
$$

Von den speciebus Jrrationalium. *

Wan jch soll zwo zahlen addirn, hab aber sie selber nit, sondern jre quadrata'

104

Von den sinibus.

Es wäre nun zeitt, das jch den lesern in der Aequation vnderrichtete: dieweil aber noch khein Exempel gesetzt worden eines völligen Cossischen Process, durch wöllichen man entlich zu zwoen zahlen khompt wölliche einander gleich seind: vnd jch nit gesinnet bin, allerlay frembde Exempla von der Cossa wegen, dieselbige zuerklären einzuführen, sondern hingegen vnd zum widerspil mir fürgenommen die Cossa zu Erclärung der gerechneten sinuum zugebrauchen: so ist demnach mein eigentlich exempel auff die Cossam nichts anderst, als eben der Handel von den sinibus selber.

Derowegen soll der Leser jme nit einbilden, als wan die grössiste kunst zu Procediren * in der Cossa steckhete: Nein, sondern die Geometria mueß jr maiste kunst erweisen vnd dem Cossisten den rechten Proceß maisterlich fürschreiben. Wan ditz geschehen, ist es dem Cossisten ein gemein vnd leicht ding, sollichem fürgeschribenen Proceß nach zu arbaitten, biß er auff zwo gleiche zahlen khompt.

Alsdan vnd in vergleichung derselben gehet erst sein des Cossisten besonderliche kunst an.

Derohalben will jch nun zu dem Handel von den Sinibus schreitten.

Anfangs ist wol zumerckhen, das jch in disem gantzen werckh dem diameter eines zirckhels wöllicher die grössiste subtensa ist vil einen andern Arithmetischen Namen, * Maaß, vnd Zahl gibe, dan andere Authores. Deren etlichen theilen in in 120, etliche in 2000, 20000, 200000, 2000000, 20000000, oder gar in 20000000000. Vnd ist zwar nit ohn ein jeder mag in theilen wie Er will,' dan es gleich gilt wie er getheilt werde. Jch aber gib dem 104 v diametro den Namen zwey, oder eigentlich gib jch dem halben diametro, oder grössestem sinuj, oder radio, das ist der linj auß dem Centro biß zum Vmkreis, diser sprich jch gib * jch den Namen Eins: vnd hab dessen merckhliche vrsachen vnd grossen Vortl drauß was meinen proceß anlanget.

Wiewol jch im werckh selbsten vnd entlich die sinus, eben in disen (·doch erlengerten·) zahlen an tag gibe, jn wöllichen sie von andern beschriben werden.

* Dan wan ein subtensa oder sinus (·wöllicher ist der halbe theil von seiner subtensa·) kleiner ist, dan ein halber diameter, so verstehestu auß der Arithmetica, das es mueß ein bruch sein. Nun gilt es gleich, was der bruch für ein Nenner habe, wan nur der zehler recht gegen jme proportionirt ist. Derohalben weil es gleich gilt, so nim jch ein runden vnd gebreüchigen Nenner, nämlich wöllicher eine, zwo, drey, fünff, zehen, zwaintzig Nullen hatt, nachdem es die Notdurfft erfordert. Als zum exempel, weil der gantze sinus ist 1, so ist demnach der sinus von 45 gradibus bey mir weniger dan 1, nämlich $\frac{7}{10}$ oder genawer $\frac{7071}{10000}$, oder noch genawer $\frac{7071068}{10000000}$.

Sprichstu, wie khan ein vortheil bey diser rechnung sein, wan man mit sollichen schwären vnd langen brüchen vmbgehen soll: wär es nit besser man würffe den Nenner hinweg, gäbe dem gantzen sinu oder halben diameter den Namen 10000000 vnd brauchete den zehler 7071068 für eine ledige zahl. Antwort, wan jch ja mit disen brüchen als mit brüchen vmbgüenge, hett jch mich eins schlechten gewins zurhüemen. Das thue jch aber nit, sondern würffe' den Nenner hinweg, behalt aber nichts desto weniger mein eigene maß 105 des halben diameters, das er sey Eins. Vnd ditz baids khan jch zumahl thuen durch folgende Mittel.

Dieweil jch alzeitt einen runden Nenner, nämlich der im ersten digito ein Unitet, in den folgenden lautter Nullen hatt, verstanden haben will: so darff jch nit mehr dan nur darauff merckhen, vmb wieviel digitos der Nenner meinen zehler (·oder hingegen diser jenen·) ybertreffen werde. Nu begibt es sich maistentheil, das mir die zahlen kleiner khommen dan 2. Wan dan ditz beschicht, so erfüll jch den defect meiner zahl mit nullen zur linckhen, biß sie sovil digitos bekhompt, als der halbe diameter. Schreibe demnach den sinum von 45 auff folgende weise 07, oder genawer 07071, oder 07071068. Jtem den sinum von einem grad, wöllicher ist 2909, bey andern, bey mir aber $\frac{2909}{10000000}$, den schreib jch also 00002909, dieweil der Nenner vier digitos mehr hatt. Wan dan mein zahl mehr ist als 1, weniger als 2, so hatt sie khein 0 vorn an. Als 1414 ist subtensa von 45 graden, solte bey mir also stehen $1\frac{414}{1000}$, oder $\frac{1414}{1000}$ weil dan oben sovil digitj, als vnden schreib jch sie schlecht 1414, oder 14142136 etc.

Wan aber es sich begibt, das mein zahl mehr digitos bekhommen solle als der Nenner, Nämlich wan sie nit allein mehr ist dan 2, sondern auff 10 vnd mehr meiner mensur laufft, so gibt mir alwegen die stelle zwischen andern zahlen selber ein anzeigung, wöllicher digitus iber des Nenners Vnitet zusetzen wäre. Oder jch mag solliche zahl also schreiben, das jch ein zeichen vnder den selbigen digitum setze als $135\underset{0}{2}$, das wären 135 halbe diametrj *
vnd $\frac{2}{10}$ von dem 136isten oder 02.[1]

105 v Wie jch nun dem diametro meinen besondern Namen gib, also ist auch mein Multiplicirn, dividirn vnd wurtzelsuechen ein wenig vnderscheiden von dem gmeinen.

Drauff geb jch dir dise regel das jch in einer jeden specie dahin sehe, damit die digitj wölliche yber des Nenners Vnitet gehören gerad vnder einander khommen. Wan dis beschehen, dan so gehet vnd wechst mein multiplication mit denen zahlen die kleiner dan 1 seind gegen der rechten, mit den grössern wachset sie gegen der linckhen, wie sonst breüchig. Als

```
01234
12358
-----
01234
 02468
  03702
   06170
    09872
---------
015249772
```

Da dan ditz mein erster vortl, wan jch nit eben die aller kleineste digitos so scharff rechnen darff, so khan jch hie füeglich aufhören an wöllichem jch will.

Zum Exempel sey mir gnueg an fünff ersten digitis, dan würt mein regul also stehen *

```
01234
12358
-----
01234
 0246 8
  037 0
   06 1
    0 9
-------
01525
```

Jtem gleich wie in dem gmeinen multiplicirn wan etlich Nullen zu letzt gegen der rechten stehen, man die selbige alle, sovil man deren im Multiplicante vnd Multiplicando findet, nach einander zu dem quotienten oder facto setzet, also thue jch auch mit meinen Nullen, die mir von anfang der zahl zur linckhen stehen. Als 02 mahl 03 ist 006, vnd 004 mahl 0006 ist 000024. Stehet also

02 0006
03 004
006 000024

Dan jch fünde droben 3 vnden 2 nullen, die machen fünff Nullen, allein das die letzte zahl 24 mit dem ein digito der letzten nullen stell einnimmet.

* Jm dividirn mag jch den kleinern mit dem grössern theilen, wöllichs sonsten widersinnisch ist. Als sey dividendus 01234 divisor 05608

112
01234
022
05608
0568
1422
056
112

* Jm Wurtzelsuechen darff jch nit von der rechten anfahen die puncten zusetzen, sondern mag vnd mueß gleich alweg von der ersten figur zur linckhen, als von einer punctirten anfahen, vnd so offt zwen digitos oder auch zwo nullen nacher setzen, so offt jch von der Radix noch ein digitum haben will.'

Zum exempel sey die wurtzel von 000332. Die fünd jch 005 vnd etwas mehr. Will jch 106
sie genawer haben, so erstreck jch die quadrat zahl mit Nullen vnd fünd 00576.

87 1
000332 000
0 0 5 7 6
25
10 94 6
74 17
1
68

Ein behender vortheil einen jeden bogen, dessen Complementj ad semicirculum subtensa mir bekhandt ist (·oder einen jeden Winckel, der auff einem sollichen bogen stehet·) in zwey gleiche theil zu theilen.

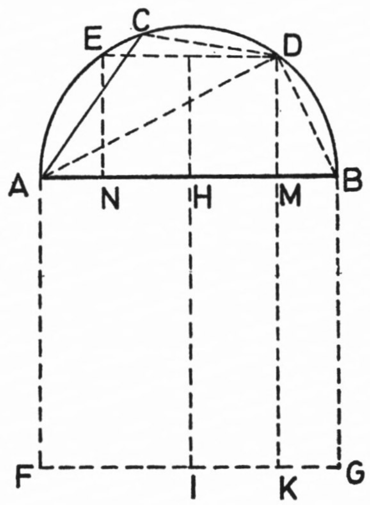
Damit jch aber dem Leser gleich anfangs den glauben jn die Hand gebe, das mir dise einfaltige Mensur des halben diameters trefflich vil nutze, will jch hie zum eingang ein stücklin an tag geben, wölliches zum Principal Process nit gehört, vnd wol möchte hinunter biß dahin gesparet werden, da gelehrt werden soll, wie ein sinus behend auß dem andern khomme. Darvon merckh folgende fürgab.

* Wan der halbe diameter ist ein Unitet, vnd die subtensa eines bogens jn erwehnter mensur bekhandt würdt: wan jch als dan solliche subtensam zu dem gantzen diameter summire, so hab jch in der kommenden summa das quadrat von einer andern subtensâ, wölliche wan sie von eim end des diameters an in den vmkreis des Circuls gezogen würt,

so schneidt sie mir das complementum des bekhanten bogens ad semicirculum, in zwey gleiche stuckh.

Zieh jch dan die bekhante subtensam ab vom gantzen diameter, so pleibt das quadrat einer andern subtensa, wölliche gereichet, ein halbs theil von dem complemento des bogens ad semicirculum zu vnder spannen.

106v Zum exempel, Reisse auff' einen diametrum AB, mit seinem halben zirckel ACB. Vnd wöllen jetzo setzen der bogen AC sey 60° grad. wan dan AB ist 2, so ist AC 1. Das waistu auß der gmeinen Geometria. Setz die zahl der länge AC zu der zahl der länge AB, 1 zu 2, khompt 3. Vnd theil den bogen CB bey dem puncten D in zwey gleiche theil, vnd reiß die linien AD, DB. So ist nun das quadrat von AD sovil als 3.



Nim AC von AB, 1 von 2, pleibt 1. So ist nun das quadrat von DB eins.

(Posito quod AB sit 2, et CD, DB aequales, Numerus CAB est quadratum ipsius AD. Et Numerus CD subtractus ab AB, relinquit quadratum DB. Ut scias quadratum ipsius DB, duplica DB, ut sit BC, et complementi AC subtensam AC aufer ab AB.)

Merckh auch ditz für die lange weil, das AC vnd AB zusamen gesetzt zwey mahl so * lang seind als AM. Ditz zu erweisen, laß von E, D, zwey perpendicul DM, EN auff den diameter AB fallen, so sihestu, das ED, das ist AC vnd NM gleich seind vnd kürtzer dan AM vm das stuckh AN. Nu ist AB lenger dan AM, vmb das stuckh MB, ditz aber ist dem AN gleich, ist derohalben AB sovil lenger als AM, sovil AC kürtzer ist, derohalben AC, AB samptlich zwey mahl so lang seind als AM, der sinus versus von AD. Vnd durch ein * leichte Multiplication BA in AM, bekhom jch das quadratum AD, jtem BA in BM das quadratum DB wie zuvor.

Also gehet es auch zue, wan du dir Analogicè einbildest, dein subtensa sey nichts, der bogen auch nichts, sein complementum aber sey 180. Woltest gern wissen wie groß das quadrat wäre von der linj die 180 in zwey gleiche theil schneidet. So setz jch mein subtensam 0. zum diametro 2. khompt 2. Da waiß jch das das quadrat von der gesuechten linj ist 2. Nu hastu auß der gmeinen Geometria sovil berichts, das es war sey, wan AC 60 vnd dahero CB 120, vnd CD das halbe theil auch 60, vnd AD auch 120, das alsdan die subtensa AD in jrem quadrat halte $\frac{3}{4}$ vom quadrato diametrj, wölliches hie 4 ist, jtem das quadratum DB sey $\frac{1}{4}$ darvon. Jn gleichem das dits quadratum subtensae von 90 sey $\frac{2}{4}$ oder $\frac{1}{2}$ vom quadrato diametrj.

Ditz auff geometrische art zuerweisen so laß AC nit eben 60° sein vnd vom puncten D zieh ein linj herüber, nämlich DE, wölliche der AB parallel seye, auch fahr mir dem diametri AB sein quadrat AB GF, vnd auß dem Centro H laß ein perpendicular herab, nämlich HI, die erstreckhe hinauff in puncten L zur linj DE. Letzlich laß auch auß dem Puncten D ein Perpendicular heraber biß auff die vndere quadratseitten G, nämlich DK. Eucl. 47.
Nun waissestu anfänglich das die feldung AK gleich seye dem quadrato AD, vnd die primj
feldung BK gleich seye dem quadrato DB. Nu ist die feldung AK grösser dan das halbe quadratum diametrj AI, vmb die feldung HK. Jtem so ist die feldung BK kleiner dan das andere halbe quadratum diametrj HG, auch vmb die feldung HK. Dise feldung aber ist so lang als der diameter (.dan AB vnd AF seind gleich wie auch AF vnd HI.) vnd so braitt als LD, Eucl. primj
* dan LD' vnd IK seind parallel vnd derowegen gleich, es ist aber LD das halbe theil von 107
ED, weil auß dem Centro H in ein linj FG, vnd dero parallelas AB vnd ED ein perpendi- Eucl. tertij
cular linj IHL gezogen ist. ED aber ist gleich der linj AC, dan der bogen DB vnd AE seind gleich, aldieweil ED vnd AB parallel seind. Nu seind auch die bogen DB, vnd DC Eucl. tertij
zu anfangs gleich gemacht worden. Derohalben dan auch CD vnd AE gleiche bogen sein müessen, wan jch dan deren vnderscheid EC zu baiden setze, so werden AC vnd ED müessen gleiche bogen sein, vnd derohalben auch gleiche subtensas haben. Hierauß folget, das wan jch auß dem halben AC vnd der gantzen AB ein recht wincklige feldung beschliesse (.oder hingegen auß der gantzen AC vnd halben AB das ist AH.) vnd solliche Eucl. sextj
feldung zum halben quadrato diametrj AI setze, das mir khomme, eine feldung AK gleich dem quadrato von AD, wan jchs darvon neme, so pleib ein feldung KB gleich dem quadrato DB. Bishero auß der Geometria vnd ohne ansehung der jenigen Mensur, die man dem halben diameter gibt.

* Jetzo wöllen wir näher zur sach schreitten. Jn erst gesetzten worten ist bestättiget worden wan jch ein feldung beschliesse von AH vnd AF, nämlich AI, das halbe quadratum diametrj, jtem ein andere von ehebesagter AH vnd AC, (.das ist in der arithmetica, wan jch die Zahl AH multiplicir in die Zahl der leng AF vnd AC.) so khomme das quadrat Eucl.
von AD. septimj

So will jch nun also thuen: vnd will baide zahlen AF vnd AC zusamen setzen, vnd sie in einer summa durch AH multipliciren.

AF, das ist AB, ist	2	
AC laß jch jetzo sein	10598	das sein bogen sey 64° grad.
Summa	30598	
Dise soll jch multiplicirn in AH das ist	1---1	
khompt	30598,	das quadrat AD.

NB. Weil in disen zahlen nindert khein nullen vndergesetzt ist, so gehören die erste an der gantzen statt, vnd ist 10598 kleiner dan zwey.

Dan eins multiplicirt khein zahl, sondern zeigt allein an, das die zahl 30598 nit mehr einer blossen länge, sondern einer feldung zahl seye, wölliche so braitt sein khan als 1, vnd so lang als 30598, wiewol sie auch andere länge vnd breitte haben, vnd also gar in eine vier'ung gebracht werden khan, wölliches auff arithmetisch dan zumahl geschicht, 107v
wan man die wurtzel darauß suechet. Vnd ist die wurtzel 175 etc. Weil dan AC 64°, so ist CB 116° vnd CD 58°, vnd ACD 122°, dessen subtensa ist 175 etc. oder des halben 61° sinus ist 875 etc.

216
30598
---
1 7 5

27
18945
32
17

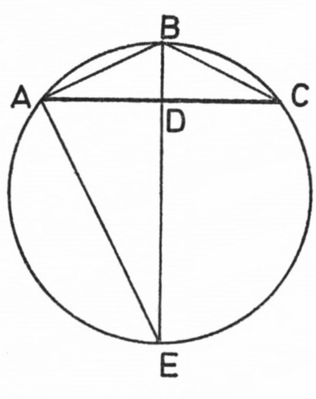
Hierauß hastu zuersehen, das in disem kunstlichen griff durch die einfaltige Mensur des diametrj eine Multiplication vermittelt worden, vnd es bey einer blossen addition zweyer subtensen verpleibet, das man zu dem quadrato der vnbekanten subtensen khompt. Vnd sovil von der Mensur des diametrj.

Interjicit obiter, an hoc artificio possimus quadrare. Dato enim numero quadrando inter subtensas, dabitur arcus DB, et duplum CB, ejusque complementum AC et subtensa AC quae ad AB addita, constituit quadratum AD. *

Ita sit quaerenda radix ex 30598 per canonem sinuum. Subtraho 2 sc: AB, relinquitur 10598, quaesita inter subtensas respondit AEC 64, complementum 116 CB, dein CD 58. Ergo AD 122 cujus subtensa est radix quaesita. Refer inter utilitates sinuum.

Folgt der erste Cossische Proceß, wie man einen jeden bekhanten winckel oder seinen bogen in zwey gleiche theil theilen: das ist Wan eins bogens subtensa bekhant, wie man des halben bogens subtensam Cossisch erkundigen solle.

Mein fürhaben ist, auß der gmeinen Geometria so wenig zuentlehnen als mir jmmer müglich, vnd verhoffe der propositionum sollen an der anzahl nit mehr dan zwo sein: die erste nem jch auß dem 6 buech Euclidis vnd lauttet also: Wan von dem rechten Winckel eins Trianguls ein perpendicular auff die Basin felt, als dan so ist die feldung von der Basi vnd jrem einem stuckh beschlossen, gleich dem quadrato der seitten des trianguls wölliche das selbige stuckh berhüeret. *



Reiß auff einen zirckel dessen diameter BE vnd durch dessen puncten einen, als durch
Eucl. lib. 3 D reiß ein perpendicular AC, vnd zieh AB vnd AE zusamen. Weil dan BAC ein rechter
Eucl. lib. 6 winckel ist vnd BD sich helt zu DA, wie DA zu DE, so würt die feldung von BD, DE
108 gleich sein, dem' quadrato von AD: setz zu baiden stuckhen das quadratum DB: so ist

dan die feldung von EB, BD gleich zweien quadratis DA, DB, das ist, dem einigen quadrato AB. Gleiches von AE zuverstehen das die feldung von DE, EB, gleich seye dem quadrato EA. Eucl. p. 47 primj

* Hierauß lehrnt die Cossa, wan jr ist gegeben der diameter BE, vnd die subtensa AC, wie sie erkundigen solle, wie lang AB seye.

Gibt jr einen Namen, vnd heisset AB 1𝓍 oder ein Radix, handelt nach disem process vnd suecht, wan AB ein radix, wie groß dan AC werden, vnd was sie für einen Cossischen Namen bekhommen soll; dan weil man waist in außtruckenlicher vnd gewisser zahl oder maaß des diametrj, wie gross AC ist, so waist man auch was diser Cossische Nam AC gelte: dahero hernach in der Aequation auch bekhandt würdt, was der erste Cossische Nam 1𝓍 den man der gesuechten subtensa AB gegeben in der Mensur des diametrj gelte.

Weil dan AB ist 1𝓍, vnd jch waiß das sein quadrat sovil ist als die feldung DB, BE, so mach jch dem AB sein quadrat, das beschicht auf Arithmetisch, wan jch 1𝓍 in 1𝓍 multiplicire.

$$\begin{array}{l} 1\varkappa \\ \underline{1\varkappa} \\ 1z \end{array}$$

Ist derohalben das quadrat oder die feldung DB, BE, 1z eins so wol als das ander, weil sie gleich seind. Nu ist mir der feldung DB, BE lenge BE bekhandt, dan sie ist 2. Wan jch dan nun das quadrat 1z nach diser lenge 2 ausdehne, wie groß khompt jr braitte BD? In der arithmetica beschicht ditz ausdehnen, wan jch die feldung 1z in die lenge 2 dividire. Das will jch thuen: $\frac{1z}{2}$ khompt BD $\frac{1z}{2}$.

Ferners sagt mir diser Geometrische proceß das das quadrat AB sovil felds habe als baide quadrata AD, vnd BD. Wan jch dan BD zum quadrat mache, so khompt $\frac{1zz}{4}$. Nu

$$\frac{1z}{2} \quad \frac{1z}{2} \;\Big|\; \frac{1zz}{4}$$

nim jch $\frac{1zz}{4}$ vom quadrat AB 1z, so pleibt das quadrat von AD Nämlich $\frac{4z - 1zz}{4}$. Dan weil $\frac{1zz}{4}$ ein bruch ist, so thue jch wie in der gmeinen Arithmetica, vnd reducir 1z zu eim gleichen Nenner nämlich also $\frac{4z}{4}$, vnd subtrahir dan nach art eins anderen gmeinen bruchs, doch auff die anfangs glehrte Cossische form.'

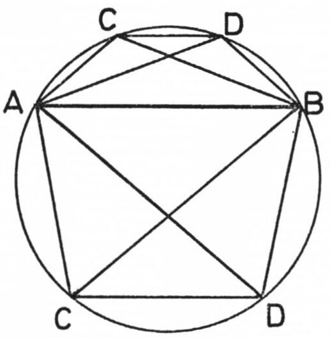
Hab also das quadrat von AD. Weil aber AC zweymahl so lang, demnach vnd weil zweymahl 2 ist 4, so würt (·vermüg der lehr von den jrrationalibus·) das quadrat von AC viermahl sovil sein. Multiplicir $\frac{4z - 1zz}{4}$ mit 4, nach ausweis der gmeinen brüch, so khompt $\frac{16z - 4zz}{4}$, das ist in der Reduction 4zz — 1zz. vnd ist also ditz das quadrat von AC, das ist nun jrrational. Derowegen, so gilt die leng AC $\sqrt{}$ 4z — 1zz. Vnd dise Cossische zahl ist gleich der jenigen zahl in deren (Mensur?) anfangs gesagt worden, das mir AC bekhant seye. Wie nun hierauß zuerlehrnen, was 1𝓍 gelte in der bekhanten Mensur, das gehört hinunter vnder die lehr von der Aequation. 108v

So merckh nun hierauß, das die subtensa eins bogens zu der subtensa des duppelten bogens: nämlich AB zu AC, alwegen sich verhalte wie 1𝓍 zu $\sqrt{}$ 4z — 1zz, oder mercklicher, das alwegen das quadrat AC sey viermahl so groß als das quadrat AB oder AE, weniger eins biquadratj von AB oder AE. Vnd ditz dan zumahl, wan der diameter ist 2.

Der andere Proceß.

Wan eins bogens subtensa bekhandt, wie man des dritten theils von selbigem bogen subtensam Cossisch erkundigen solle.

Hierzue entlehne jch auß Ptolemaeo mein andere Proposition, die da beweiset, das wan in eine zirckelrunde ein vierung von was seitten vnd winckel man will, eingesetzt stehe, alsdan die feldung der zweyen diametern sollicher vierung sovil begreiffe als baide feldungen von zwey vnd zweyen gegeneinander yberstehenden seitten. *



Demnach so sey ein bogen AB, dessen subtensa AB in der Mensur des diametrj bekhandt ist. Den theil in 3 gleiche stuckh mit C. D. Vnd sey AC, CD, DB jedes 1ϰ. So waiß jch auß dem ersten proceß das das quadratum AD, oder CB sey 4z — 1zz. Weil aber in der vierung ACDB, die zwen diametrj AD, CB gleich seind (·weil jre bogen gleich·) demnach ist jre feldung eben das quadrat der einen oder der andern. Nämlich 4z — 1zz.[1]

109 Nu sagt Ptolemaeus, das die feldung von AD, CB sovil begreiff als baide feldungen von AC, DB, vnd von CD, AB. Seind derohalben baide feldungen AC, vnd DB, jtem CD vnd AB samptlich 4z — 1zz. Es würt mir aber die feldung AC, DB absonderlich bekhandt, wan jch AC in DB multiplicire. Nämlich 1ϰ in ϰ. Vnd ist 1z. So nim jch nun die veldung AC, DB, nämlich 1z von der summa jrer baider, nämlich von 4z — 1zz, pleibt 3z — 1zz, wölliches ist die feldung CD AB, absonderlich. Wan jch dan diser feldung die braitte gebe von CD oder 1ϰ, wie khompt dan die lenge AB. Dividir 3z — 1zz mit CD 1ϰ, khompt $\frac{3z - 1zz}{1\varkappa}$ die leng AB oder durch die reduction $\frac{3\varkappa - 1\mathfrak{c}}{1}$, sovil als 3ϰ — 1𝔠 cossisch. Die ist mir aber auch bekhandt in der Mensur des diametrj. Derowegen würdt mir auch 1ϰ oder AC, durch die Aequation bekhandt werden khönden, in der Mensur des diametrj. *

So merckh nun fürs ander, das AC sich helt gegen der subtensa AB, eins bogens der dreymahl sovil ist als der vorige, wie 1ϰ gegen 3ϰ — 1𝔠. Oder mercklicher das alwegen die lenge AB sey dreymahl so lang als die leng AC, so ein dritten theil desselbigen bogens vnderspannet, weniger eins cubj von AC. Doch ditz abermahl allein dan zumahl, wan der diameter ist 2.

Hie möcht ein Geometra dem Cossisten fürwerffen vnd sagen, wie soll jch das verstehen das allhie gesagt würdt, die leng AB sey gleich dreyen längen von AC, weniger eins cubj von AC? Wie khan ein läng oder ein linj vmb ein Cubum oder ein Cörperliche quantitet gemindert werden? Ist es nit eben als wan jch sagte drey elen weniger ein seidl? Antwort disem fürwurff ist gleich zu eingang begegnet vnd angezeigt worden, das der Cubus auff geometrisch khönde ab einander gesetzt, vnd zu einer ablänge werden. Dan alhie AB nit ein schlechte länge zuverstehen ist, sondern ein länge in etlich gleiche stuckh getheilt:
109 v Also auch der cubus AC' ist nit ein gmeiner Geometrischer sondern ein Arithmetischer cubus, vnd ist also baids die leng vnd der Cubus, jedes ein zahl, derohalben zahl gegen zahl gar wol khönden verglichen werden.

Das jch dirs noch deüttlicher mache. Wan im ersten proceß die zahl 4z — 1zz gebraucht würt: So macht man hiermit auß einer jeden ledigen Unitet ein gevierte feldung, vnd sovil Uniteten in einer ledigen zahl stehen, sovil sollicher gevierten feldungen sollen verstanden werden. Wär aber die zahl ein bruch, so bedeüttet sie auch nur ein stuckh von einer sollichen gevierten feldung. Ein Radix setzt vnd ordnet diser quadrat sovil nach einander, sovil Uniteten sie gilt. Ein Census aber helt sich in der figur, werth vnd zahl der gevierten vnitet ehnlich. Dan gleich wie die vnitet vmb Eins lang vnd braitt ist, also würdt jetzo ein Census vmb ein radix lang vnd braitt. Jngleichen ein Cubus helt sich der Radix ehnlich, dan wie die Radix in der braitte ein Unitet, in der länge aber etliche vniteten hatt, also ist der Cubus so braitt als ein quadrat, in der leng aber hatt er sovil quadrat leng, sovil die Radix uniteten lenge in jrer lenge begreifft. Ein biquadrat aber nimpt eben sovil quadrat lenge in jre lenge vnd braitte, sovil der Cubus quadrat lenge nur in der lenge hatt. Vnd also begibt es sich, das yberal lautter kleine quadrata stehen, die vmb ein vnitet lang vnd braitt seind: derohalben man wol biquadrat vnd quadrat nemen khan. Sonsten, vnd wa ditz nit wäre, vermag die natur nit mehr dan ein linj ein feld vnd ein Cubum, dieweil nit mehr dan drey geometrische quantiteten seind, die länge braitte vnd dickhe, vnd da man wolte zum biquadrato gehen, würde man doch darmit in der dickhe pleiben, vnd durch zusamensetzung etlicher Cuborum ein form einer seül machen, die auch ein dickhe vnd cörperliche quan'titet ist. 110

Jch möchte aber die ledige Unitet gleichsowol zu einem Cubo machen, der ein unitet in der lenge eine in der braitte, vnd eine in der Höche hette. Zum exempel im andern Proceß da die zahl 3𝔵 — 1𝔠 gebraucht würdt, da khöndt jch ein cubum, zum exempel von pley formirn so lang braitt vnd hoch als der halbe diameter, hernach deren Cuborum etlich * zusamen setzen, das ein radix drauß würde, zum exempel die radix vermöge $1\frac{1}{2}$, das wären $1\frac{1}{2}$ Cubj. Nims drey mahl so hab jch den werth von dreyen Radicibus, nämlich $4\frac{1}{2}$ Cubj. Nu will jch auß der radix ein quadrat machen, das würt haben $2\frac{1}{4}$ Cubos, vnd ein Cubum, der würt ein figurat, oder Cossischer Cubus sein, vnd $3\frac{3}{8}$ lediger cuborum in sich halten. So würde nun die cossische zahl 3𝔵 — 1𝔠 sovil bedeütten, als $4\frac{1}{2}$ lediger Cuborum, weniger $3\frac{3}{8}$ ledige Cubj, das ist mit eim wort $1\frac{1}{8}$ ledige cubj des halben diameters, vnd müeste derohalben die subtensa des trippelten bogens $1\frac{1}{8}$ halten, wan des einfachen subtensa hette $1\frac{1}{2}$ vom diametro. Wie du dan sichest in sinibus, das halb $1\frac{1}{2}$ das ist halb 150000 nämlich 75000, zeigt den bogen 48°. 35′ plus, derowegen 150000 vnderspannet 97°. 10′ plus. Nims drey mahl so hastu 291°. 30′ plus. Den drippelten bogen, oder sein Complement zum gantzen zirckel 68°. 30′ minus, sein halb theil 34°. 15′ minus zeigt den sinum 56280 minus vnd die subtensam 112560 minus. Nu ist $1\frac{1}{8}$ sovil als 112500.

* Interjicio hanc considerationem.

Cum fuerint quatuor continuè proportionales, quarum prima radius, secunda verò alicujus circumferentiae subtensa, quod sub prima et secunda parallelogrammum ter sumptum, et diminutum eo quod sub tertia et quartâ, aequale est parallelogrammo quod sub prima et ea, quae triplum subtendit ejus circumferentiae. Hinc. Data subtensa datj arcus, Geometrice invenire subtensam triplj arcus. Et data subtensa datj arcus Cossicè invenire subtensam tertiae partj arcus: inventis 2 medijs.

Cum sex etc. quod sub prima et secunda quinquies, et quod sub quinta et sexta semel sumpta, rursum vero diminuta ejus quod sub tertia et quartâ, quintuplo, relinquunt parallelogrammum aequale eo quod sub radio et subtensa quintuplo arcus.

* [*Cum fuerint continuè proportionales, quarum prima radius, secunda vero alicujus circumferentiae subtensa; quadruplum tertiae, diminutum quintâ, est subtensa duplj arcus, ut tertia ad primam. Ut radius 1. Subtensa 60, 1. tertia 1. Quarta 1. Quinta 1. Quadruplum tertiae 4, residuum supra quintam 3. hoc est ad 3, ut 1. ad 1. Ergo 3 est*]

Cum fuerint tres continuè proportionales, quarum prima radius secundae verò circumferentiae alicujus subtensa, dupli secundae quadratum, diminutum quadrato tertiae, est quadratum subtensae duplj arcus Radius.

Subtensa 60°.				Subtensa 180°.			
Quadratum	1.	4.	1.	Quadratum	1.	2.	4.
	1.	1.	1.		1.	4.	16.

quadratum 4 adime 1, manent
3 quadratum subtensae 120°.

$$\begin{array}{r} 4 \\ \hline 16 \\ 16 \\ \hline \end{array}$$

quadratum duplj 0 sc. 360.[1]

110v

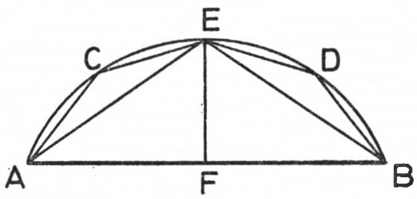
Der dritte, vierte vnd alle folgende proceß. *

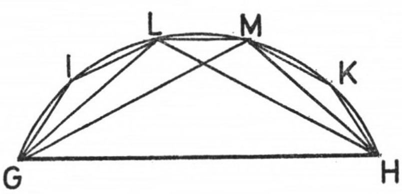
Wan eins bogens subtensa bekhandt, wie man des vierten fünfften sechsten sibenden etc. theils von dem selbigen bogen, subtensam Cossisch erkundigen soll.

Alle yberige processe, deren dan vnentlich vil sein khönden, folgen auß den zwey erst gesetzten, nit weniger dan der andere auß dem ersten, vnd bedarff nit mehr dan eins exempels oder zweyer. Wiltu den bogen in vier theilen als AB in AC, CE, ED, DB, so theil erstlich den halben AE in zwey, da waissestu nun auß dem ersten proceß, wan AC ist 1ϰ, das das quadratum der subtensa AE oder EB sey 4z — 1zz. Thue wie zuvor im

$$\begin{array}{llll} \overset{\mathrm{II}}{4z} & -\overset{\mathrm{IV}}{1zz} & & \\ \hline +16zz & -4zzz & & \\ & -4zzz & +1zzzz & \\ \hline 16zz & -8zzz & +1zzzz & \\ \hline \end{array}$$

ersten proceß, vnd dividir 4z — 1zz mit 2. khompt die leng von EF, nämlich $\frac{4z-1zz}{2}$.
Deren quadrat ist $\frac{\overset{\mathrm{IV}}{16}-\overset{\mathrm{VI}}{8}+\overset{\mathrm{VIII}}{1}}{4}$, das nim jch von dem quadrat AE 4z — 1zz, oder $\frac{\overset{\mathrm{II}}{16z}-\overset{\mathrm{IV}}{4zz}}{4}$,
pleibt $\frac{\overset{\mathrm{VI}}{8}+\overset{\mathrm{II}}{16}-\overset{\mathrm{IV}}{20}-\overset{\mathrm{VIII}}{1}}{4}$ das quadrat AF, vnd viermahl sovil nämlich $\overset{\mathrm{II}}{16}-\overset{\mathrm{IV}}{20}+\overset{\mathrm{VI}}{8}-\overset{\mathrm{VIII}}{1}$ ist das quadratum AB darnach gefragt ist worden.





Wiltu den bogen in fünff theilen, so sey GH der bogen, vnd seine gleiche stuckhe heissen GI, IL, LM, MK, KH. Ziech die lini GL, vnd HM, GM vnd HL. Wan dan GI, oder

IL ist 1ϰ, so weiß jch auß dem ersten proceß, das GL oder MH jede sey $\sqrt{}$ 4z — 1zz. Derowegen die feldung zwischen GL vnd HM, das ist eben das quadratum der einen oder der andern, würt sein 4z — 1zz. Jtem waiß jch das GM sey 3ϰ — 1𝔠, also auch LH, multiplicir sie zusamen so khompt die feldung GM, HL $\overset{\text{II}}{9} - \overset{\text{IV}}{6} + \overset{\text{VI}}{1}$. Wan jch nun die feldung GL, HM von diser weg nimme, so pleibt mir $\overset{\text{II}}{5} - \overset{\text{IV}}{5} + \overset{\text{VI}}{1}$ die feldung LM, GH, dividir sie in LM 1ϰ, so khompt GH $\overset{\text{I}}{5} - \overset{\text{III}}{5} + \overset{\text{V}}{1}$ die gesuechte subtensa.

So offt du nun in gerad theiln wilt, so gehestu dem ersten proceß nach, so offt aber vnkrad so bistu im andern proceß. Wiltu in 6 theiln, so brauch die subtensa von 3, jn 8 die subtensa von 4, in 10 die subtensa von 5 etc. Also wiltu in 7 theiln brauch die subtensa von 3 vnd von 4, in 9, die subtensa von 4 vnd von 5 vnd so fort an.

* Folgt ein behende Tafel, wie die subtensen mit blossem addirn zufinden.

Sprichstu so hör jch wol wan jch diser gestalt wolt ein subtensam von einem vilfachen
bogen, |als von 360 bogen haben, so müeste jch zuvor die subtensam von 180, von 90, 111
von 45, 23, 22, 12, 11, 6, 5, 3, 2, haben vnd khöndte also nit schlechts wegs hindurch vnd darzue khommen, sondern müeste die Cossische processe offt widerholen. Antwort Ja. Wiewol aber die sach so gar weitlaüffig nit ist, jedoch wan es dich verdriesset so offt zu multiplicirn vnd dividirn, will jch dich lehren eine Tafel zurichten, darin du ohn alle mühe, durch ein blosses vnd gmeines addirn die subtensas aller stuckhe eins bogens von gerad oder vngerader summa, biß vnentlich hinauß, auff Cossisch leichtlich fündest. Ziech so vil linj als du kanst oder wilt den langen weg, vnd gleich sovil Creützweise, damit du ein geviertes gegitter habest, setz oben drauff per frontem je zwischen zwoen linien den namen oder zal einer quantitet, vnd der ordnung nach, also das khein spacium ybergangen werd, als ϰ z 𝔠 zz etc. Hernach fahe an von oben zur linckhen vnd setz im ersten gevierten feld vnder ϰ ein unitet, vnder z im andern auch ein vnitet, vnderm 𝔠 im dritten auch eine vnd so fort an hinab gegen der rechten durch vnd durch. Zur linckhen aber vnder der Radix im dritten feld setz 3, im fünfften 5 vnd so fort an, alle vngerade zahlen in jre vngerade felder, vnd yberhupff die gerade das sie lähr pleiben. Zum dritten wie du mit der schlimmen zeil von der linckhen oben zur rechten vnden gethan da du lautter uniteten gesetzt, also muestu auch mit der nechsten zeil thuen, welliche mit der spitzen jrer ge-
vierter feldungen| ybersich an die spitzen der vorigen gevierten feldungen stosset, näm- 111v
lich muestu sie mit zahlen füllen, den der anfang schon ist gemacht vnder dem Titul Radix im dritten feld da ein 3 stehet. Von da an muestu jetzo vnder z im vierten feld sovil setzen, sovil die vndersten zahlen vnder ϰ vnd z samptlich machen, als 3 vnder ϰ vnd 1 vnder z macht 4, gehört ins vierte feld vnder z. Auß 4 vnder z vnd 1 vnder 𝔠 macht 5 im fünfften feld vnder 𝔠 zusetzen vnd sofort an. Gleiches soll geschehen in der dritten schlimmen zeil, deren anfang ist im fünfften vnder ϰ mit 5. Dan 5 vnd 4 ist 9, 9 vnd 5 ist 14, 14 vnd 6 ist 20, 20 vnd 7 ist 27, 27 vnd 8 ist 35 vnd also fortan mit allen schlimmen zeilen. Wan nun also der vndere halb theil von deinem gewürffelten feld durcharbaittet ist, würt je ein feld vmb das ander ledig vnd zwischen den gefüllten stehen, gleich wie im schachspil die weisse plätze vnder den schwartzen. Die muestu nun zum vierten mit den banden ersetzen der gstalt, was vnder dem Titul Radix lähr stehet, das pleibt lähr, oder setze drein das zeichen $\sqrt{}$, hernach setze vnder dem Titul z vnd 𝔠, lautter Minus in die lähre felder, vnder zz vnd β_5 lautter plus, abermahls vnder VI VII lautter Minus, vnder VIII IX lautter plus vnd so fort an, allweg zwey vmb zwey, wie du hie für augen sihest.

$\varkappa$	z	$\mathfrak{c}$	zz	β_5	z$\mathfrak{c}$	β_7	zzz	$\mathfrak{cc}$	zβ_5	β_{11}	zz$\mathfrak{c}$	β_{13}	zβ_7	$\mathfrak{c}\beta_5$	zzzz	β_{17}	z$\mathfrak{cc}$	β_{19}	zzβ_5
1																			
√	1																		
3	—	1																	
√	4	—	1																
5	—	5	+	1															
√	9	—	6	+	1														
7	—	14	+	7	—	1													
√	16	—	20	+	8	—	1												
9	—	30	+	27	—	9	+	1											
√	25	—	50	+	35	—	10	+	1										
11	—	55	+	77	—	44	+	11	—	1									
√	36	—	105	+	112	—	54	+	12	—	1								
13	—	91	+	182	—	156	+	65	—	13	+	1							
√	49	—	196	+	294	—	210	+	77	—	14	+	1						
15	—	140	+	378	—	450	+	275	—	90	+	15	—	1					
√	64	—	336	+	672	—	660	+	352	—	104	+	16	—	1				
17	—	204	+	714	—	1122	+	935	—	442	+	119	—	17	+	1			
√	81	—	540	+	1386	—	1782	+	1287	—	546	+	135	—	18	+	1		
19	—	285	+	1254	—	2508	+	2717	—	1729	+	665	—	152	+	19	—	1	
√	100	—	825	+	2640	—	4290	+	4004	—	2275	+	800	—	170	+	20	—	1

Wiltu nun wissen wie sich halten zwo subtensen, eine vnder eim einfachen, die ander vnder einem von vngeraden mahlen (·zum exempel·) vnder einen neünmahl so langen arcu gespannet, so suech 9 zur linckhen vnder $\varkappa$ da findestu, das wan der kürtzere arcus hatt $1\varkappa$ zur subtensa (·wölliches alwegen zuverstehen·) so gilt die subtensa des neünfachen arcus $9\varkappa - 30\mathfrak{c} + 27\beta_5 - 9\beta_7 + 1\mathfrak{cc}$.

Wiltu aber wissen wie lang das quadratum des jenigen bogens der dir dein arcum in gerade oder vngerade theil theilt, so quadrir die zahl der begehrten theil vnd suech sie vnder z. Zum Exempel jch will wissen wan jch hab ein subtensam, wie groß das quadrat der jenigen subtensa sein möge, wölliche den sechsten theil meines bogens vnderspannet, so quadrir 6, macht 36, die suech vnder z, so khompt das, wan das quadrat der begehrten subtensa ist 1z, so sey das quadrat der zuvor bekhanten subtensa

$$\overset{\text{II}}{36} - \overset{\text{IV}}{105} + \overset{\text{VI}}{112} - \overset{\text{VIII}}{54} + \overset{\text{X}}{12} - \overset{\text{XII}}{1}.$$

Ein anders. Jch will wissen wie groß sey das quadrat von der subtensa des neünten theils. Weil nun 9 mahl 9 ist 81, so würdt das begehrte quadrat sein 1z (·wie alwegen·). Die bekhante subtensa aber würt sich halten wie $\overset{\text{II}}{81} - \overset{\text{IV}}{540} + \overset{\text{VI}}{1386} - \overset{\text{VIII}}{1782} + \overset{\text{X}}{1287} - \overset{\text{XII}}{546} + \overset{\text{XIV}}{135} - \overset{\text{XVI}}{18} + \overset{\text{XVIII}}{1}$. Suechstu Radicem die würt sein wie oben $\overset{\text{I}}{9} - \overset{\text{III}}{30} + \overset{\text{V}}{27} - \overset{\text{VII}}{9} + \overset{\text{IX}}{1}$. Gibt also dise Tabula die gerade nur ein mahl in jren quadratis, die vngerade aber zweimahl, nämlich die subtensas selbsten zusampt' jren quadratis. Doch würstu hiervon vnten an 112
seinem ort berichtet werden, das auch die gerade etlicher massen zweymahl gegeben werden.

Wiltu nit glauben, das dich dise Tafel recht berichte so brauch die vorgehende processe, da würstu nit allein einerlay facit, sondern auch vrsachen fünden, warumb es mit diser Tabula nit khönde fählen.

Vnd hast also hiermit abermahl einen Vortheil der auß der zahl 2, die jch dem diameter gegeben jren vrsprung hatt. Dan wan du dem diameter ein andere zahl zueignest, so gibt es wol auch ein solliche Tafel, aber nit in so schöner ordnung auch nit so leicht zumachen.

Wie lang Cossisch ein seitten sey von einer jeden regularischen figur, es sey von gerader oder vngerader zahl der seitten, so in einen Circul eingeschriben würdt?

Ditz muestu dir auß der Geometria wol einbilden das wan der zirckel von einer rechten linj entzwey geschnitten ist, was davon innerhalb der Circumferenten ist, heist subtensa, vnd würt so wol nach dem grössern als nach dem kleinern stuckh genennet, als ein subtensa von 60 graden ist auch die subtensa von 300, vnd die subtensa von 10 grad ist auch die subtensa von 350 grad. Derohalben Analogicè folgt, das die subtensa von 360 grad sey auch die subtensa (·so zu reden·) von 0 grad. Ist derohalben die subtensa eins gantzen zirckels sovil als 0.

Nu ligt es nit daran, ob der bogen, den wir bißhero fürgehabt zu theilen, groß oder klein seye, dan seins fünfften, sibenden, oder neünten theils subtensa behelt jederzeitt nur einen Cossischen Namen. Es khompt dennoch entlich jedem bogen sein rechte vnd eigene subtensa, wan man durch die aequation handelt, dan zum exempel 3ϰ — 1𝔠, vergleicht sich in eim bogen der dem halben zirckel nah ist, einer langen subtensa, in einem bogen der weit vom halben Cirkel abweicht, vnd vil mehr oder minder hatt dan ein halber Circkel, vergleicht sie sich einer kurtzen subtensa. Hierauß folget, wan mein bogen ist 360 (·nämlich wan jch will den gantzen Circul in etliche gleiche stuckh theilen·) das alsdan die auß der Tabula im Process gefundene Cossische zahl sich mit einer subtensa 0 vergleiche; wie nun als dan in der aequation zuhandeln, das würt hernach folgen.

Das dise Cossische zahlen in der Aequation notwendig auff mehr dan einerlay weise aufgelöset, vnd 1ϰ mehr dan einen werth haben.

Wan dise Cossische zahlen gegen einer subtensa, mit einer ledigen zahl bezeichnet ver-
glichen werden, alsdan vnd weil die Cossische argumentation so wol war ist von denen
112v theilen die im kleinern bogen' gemacht werden, als von denen, die im grössern, vnd aber
die vernunfft gibt, das ein halb, dritt, oder viertes theil etc. von eim grössern bogen ein
längere subtensam habe, dan von eim kleinern: so folgt, das alsdan die Radix zwo vnder- *
schidliche subtensas, ein grössere vnd ein kleinere bedeütte, vnd also in der aequation
zwo zahlen müessen gefunden werden, deren jede das jenige thuett was der Process auß-
weiset; dessen hastu bey erclärung des ersten vnd andern process exempla vnd mit zweyen
worten andeüttung gehabt.

Jch soll theilen den bogen vnd seinen grössern theil jeden in zwen gleiche theil, ist die frag wie groß eins jeden theils subtensa seye, da sagt mir die Cossa wan die subtensa von 120 die jch für bekhant anneme (·sie sey $\sqrt{3}$·) auff Cossisch sey sovil als $\sqrt{4z - 1zz}$ so sey die subtensa der stuckhe 1ϰ. Was ist dan der werth von 1ϰ, der macht das 4z — 1zz sovil sey als 3? Antwort der werth seind zwen. Erstlich gilt 1ϰ sovil als 1. Dan 1z von 1 ist 1 vnd das 4 mahl macht 4. Vnd 1zz von 1 ist ditz von 4 lasst 3 yberig: wie sichs dan gebüret, nach der fürgab. Zum andern gilt 1ϰ sovil als $\sqrt{3}$, dessen z ist 3, viermahl in 12, sein zz ist 9, von 12 pleibt auch 3, wie dan sein sollen.'

113 Ferners, vnd weil erst angezeigt, das eines gantzen Circuls subtensa sey 0, vnd aber *
dise 0 nit gar nichts sondern einen puncten bedeüttet, der in des Circuls vmbkreys stehet,
so folgt, weil ein jede subtensa mit einem puncten in des Circuls vmbkreis stehet, das sie
gleichsam zwen theil hatt (·also analogice zureden·) der ein ist 0, vnd vnderziehet einen
gantzen Circulum, der ander ist die subtensa selbst, vnd vnderziehet jren bogen.

Weil es aber nur ein subtensa oder rechte linj, so mag sie demnach gleichsowol gehalten werden für die subtensam eines bogens, der von eim gantzen Circulo vnd dem abgeschnittenen grössern oder kleinern bogen zusamen gesetzt ist.

Wan dan dem also, so würt mein argumentation gleichsowol lautten von theilung eins
gantzen Circuls vnd des bekhanten bogens als für einen bogen gerechnet, vnd würdt also
mein radix auch jetzo etwa den dritten, vnd vierten werth haben. Zum exempel sey der
bogen 120, dessen subtensa ist mir bekhant das sie sey $\sqrt{3}$. Nu setz jch 120 zu 360 summa
ist 480, die soll in zwen gleiche theile gehen, das jeder theil halte 240°, da würt nun ge-
fragt nach der subtensa von 240, oder jres kleinern bogens 120. Weil aber dises bogens
subtensa schon anfangs für bekhandt angenommen, darff es kheins suechesn. Nu will jch
den grössern bogen von der bekhanten subtensa, nämlich 240 zum gantzen Circulo 360
setzen khompt 600; diser duppelte bogen soll in zwen gleicher theil gehen, das jeder halte
300, würt nun gefragt nach der subtensa von 300, oder dem kleinern bogen 60; ist aber-
113v mahl zuvor gefunden worden, vnd darff kheins suechens.' Das also in diser Cossischen
aequation, da 4z — 1zz gegen 1 oder jrgend einer andern zahl verglichen werden, diser
vrsachen halben die Radix kheinen werth mehr bekhompt.

[*Die vrsach ist, weil der bogen von der angenommenen subtensa ein so geschickte proportion
hatt gegen dem yberigen grössern bogen, das er gerad das halbe theil auß demselbigen ist*]
Nim aber die subtensam von 40 vnd 320. Die bringt dir durch den Cossischen Proces, der *
da lehrt in vier theilen, erstlich zwen werth der radix, wie vor gemeldet, dan vnder der
radix würt verstanden die subtensa sowol von 80, 280 als von 10, 350. Nu setz baide
stuckhe des Circuls zum gantzen Circulo, khommen dir die summen 400 vnd 680, da würdt

nun die Radix den dritten vnd vierten werth, nämlich von 100, 260, vnd von 340, 20 bekhommen.

Vnd weil, wie gleich folgen soll, ein subtensa o gleich so lang ist als zehen oder hundert subtensae o, derohalben so guett recht man hatt einen gantzen Circulum zum gantzen bogen zusetzen, eben sollich recht hatt man auch 2, 3, 10, 100, 1000 gantze Circulos hinzuezusetzen, so ist demnach dise Regula zu merckhen, das ein jede theilung sovil Circulos zum bogen nemen mag, sovilerlay sie subtensen macht, wan der gantze Circul durch sie getheilt würdt (·den diametrum in den geraden theilungen darvon geschätzt·). Als die bisectio bringt im gantzen Circulo nichts als den diametrum, drum mag sie khein Circulum zum bogen setzen, die quadrisectio bringt neben dem diametro nur einerlay subtensam, drum mag sie nur einen Circulum zum bogen setzen. Die Trisectio hatt nur einerlay subtensam, vnd setzt nur einen Circulum zum bogen, die quinisectio hatt zweyerlay subtensen vnd setzt so wol zwen als ein Circulum zum bogen, der in fünff soll getheilt werden. Vnd so fort an.

Vnd wie in den geraden theilungen die lengst subtensa oder diameter außgeschätzt würt, vnd hergegen ein jede subtensa zwen werth auff die Radices bringt, nach dem jr grösserer oder kleinerer bogen zun gantzen Circulis gesetzt werden: also vnd im Widerspil in den vngeraden theilungen, da kheine' subtensa außgeschätzt würt, begibt sich al- 114
wegen in des letzten Circulj zusetzung, das baide bogen, der grössere vnd der kleinere mit den gantzen Circulis vereiniget, nur in eine taillung fallen, vnd also dißfals auff die Radicem nur einen werth bringen.

* Zum exempel, den kleinen bogen 60, oder grossen 300 soll man in 5 theiln, das also des kleinern jedes stuckh sey 12 vnd sein grösserer 348, des grössern stuckh sey 60 vnd sein grösserer 300. Das wären zwo subtensae, durch den Namen Radix bedeüttet. Nun sprich jch das noch drey subtensae zufinden seyen. Dan weil man in 5 theilt, vnd aber der fünffeckh zweyerlay subtensen haben khan, nämlich die subtensam von $\frac{1}{5}$ $\frac{4}{5}$, vnd die subtensam von $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{5}$ des Circulis, demnach so khan jch zu jedem meiner stuckhe ein oder zwen gantze Circulos setzen, vnd die summen auch in 5 theilen. Nim den kleinern bogen 60, vnd setz jne zu 360, khompt 420. Dessen fünffter theil 84 oder sein grösserer bogen 276, hatt die dritte subtensam.

Nim den grössern bogen 300, setz jne zu 360 khompt 660, dessen fünffter theil 132 oder sein grösserer bogen 228, hatt die vierte subtensam.

Ferners setz zwen gantze Circulos oder 720 grad zum kleinern bogen 60 summa 780, deren fünffter theil 156 oder sein grösserer bogen 204 hatt die fünffte subtensam. So du aber schon dise 720 auch zum grössern bogen 300 setzest vnd die summen 1020 in fünffe theilest, würt dir drumb khein besondere subtensa khommen, dan der fünffte theil ist 204, der ist schon zuvor da gewest.

Hierauß entlich dise kurtze regel volgt wan die im vorgesetzten Täfele, oder durch einen proceß gefundene Cossische zahl gegen einer ledigen zahl oder subtensa soll verglichen werden das alsdan die Radix auffs höchste sovil werth habe, sovil theil man anfangs zumachen begehrt.'

* Wan aber dise Cossische zahlen gegen einer subtensa mit o bezeichnet, verglichen wer- 112v
den sollen, das ist, wan man den gantzen Circulum in etliche stuckh theilen soll, da stehet zwar (·analogicè zureden·) der bogen von 360 nur auff einer seitten der subtensa o. vnd auff der andern seitten stehet der bogen o. das also desthalben nur ein theilung geschehen solte: es khompt aber jetzo ein andere vrsach zur Hand, die da erzwinget, das ein Radix im fünffeckh zwo subtensas bedeüttet, im sibeneckh drey, jm Neüneckh vier, jm Ailffeckh fünff, vnd so fort an, wie nit weniger im viereckh zwo, jm sechseckh drey, jm achteckh

vier, vnd so fort an. Vrsach ist dise, dan weil die subtensa ist o, vnd aber auff der subtensa o (·analogicè zureden·) so wol zwo drey vier etc. gantzer Circulj stehen khönden, als aber nur einer, vnd als zuvor auf einer subtensa ein zirckel vnd ein bogen, derohalben, so bedeüttet die radix nit nur die subtensam, zum exempel eins eilfften theils von einem Circulo, sondern auch die subtensam eins eilfften theils von zweyen, eins eilfften theils von dreyen, von vieren, von fünffen etc. das ist zweyer, dreyer, vierer, fünffer, eilffter theil von einem einzehlen Circulo. Wills mit eim Exempel erweisen. Wan der Circul in vier theil gehen soll, so gibt die Tafel ein cossische zahl $\overset{\text{II}}{16} - \overset{\text{IV}}{20} + \overset{\text{VI}}{8} - \overset{\text{VIII}}{1}$, soll sovil sein als Nichts oder als die subtensa o. Würt nun gefragt, was ditz für ein Radix sein müesse, darauß ein solliche cossische zahl folge, Antwort, die Radix gilt zwo zahlen, dan wan jch einen einigen Circulum in 4 theile, so gibt es ein subtensam von 90 grad, wan jch aber 2 Circulos in 4 theile, so gibt es ein subtensam von 180 grad, wan jch aber schon weitter güenge, vnd drey Circulos in 4 theilen wolte, so gäb es khein newe subtensam, dan der vierte theil von 3 circkeln ist 270 grad, deren subtensa ist einerlay mit der subtensa von 90 grad.'

115 So laß nun den ersten werth von der Radice sein $\sqrt{2}$ sein quadratum ist 2, vnd deren + 16 macht + 32 ledige zahl, sein zz ist 4, vnd deren — 20 ist — 80, sein zc ist 8, vnd deren + 8 ist + 64, sein zzz ist 16 vnd der einmahl ist — 16. Nun hab jch in ledigen zahlen

$$\begin{array}{l} +\,32 - 80 \\ \underline{+\,64 - 16} \\ +\,96 - 96. \end{array}$$

Werden also der minus sovil als der plus; derowegen so gilt die Radix für ditz erste mahl warhafftig sovil als die wurtzel auß 2.

Zum andern versuech auch ob der werth einer Radix möge sein 2 ledige zahlen. Deren z ist 4, in + 16 bringt + 64, der zz 16, in — 20 bringt — 320, der zc ist 64, in + 8 bringt + 512, der zzz ist 256, in — 1 bringt — 256. Nu hab jch in ledigen zahlen

$$\begin{array}{l} +\;\;64 - 320 \\ \underline{+\,512 - 256} \\ +\,576 - 576. \end{array}$$

Wan nun Minus vnd plus gegen einander aufgehoben werden, so pleibt Nichts wie dan ditz anfangs vnser merckzeichen sein sollen, das die Radix in jrem werth just vnd gerecht genommen seye, haben sich also in diser Cossischen zahl zwen werth der Radix gefunden. Nun gehe hin vnd versuech ausser diser zweyer noch einen andern werth, da würstu mit der thatt erfahren, das sonst kheiner mehr seye.

[*De aequatione ex me*

Figuratj numeri omnes significant plana, et unitas absoluta planum quadratum. Inde sunt *
alternis oblonga et quadrata. Quot oblonga tot lineae proportionales post primam, ab unitate *
significatam. Hinc tabula

	Quantitates	Proportionales
*	0	1
	I	1 · 2
	II	2
	III	2 · 3
	IV	3
	V	3 · 4
	VI	4
	VII	4 · 5
	VIII	5
	IX	5 · 6
	X	6
	XI	6 · 7
	XII	7
	XIII	7 · 8
	XIV	8
	XV	8 · 9
	XVI	9
	XVII	9 · 10
	XVIII	10
	XIX	10 · 11
	XX	11
	XX	1 · 11 · 12

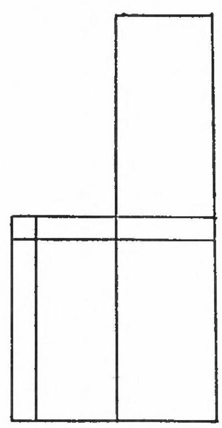
Binae proximae communicant uno latere, dissimiles componuntur sine gnomone in unum dissimile utrisque. At si cum gnomone, gnomon vel quasi aequalis ipsi, hoc est latera ut prima, vel secunda ad compositam ex utraque, utuntur duabus ex tribus lineis rationem facientibus. Quadratae binae una intermissa similes, non communicant latere, implentur vero gnomone, quod est duplum intermissae, et composita fit similis: duabus prop: Oblongae binae communicant latere et componentur latere, compositio latera, ut prima tertia ad secundam. Sin implentur, ut prima secunda ad secundam tertiam, significant igitur tres proport: caetera ut quadratae. Binae duabus intermissis dissimiles nec communicant latere. Compositae implentur intermissis compositum fit dissimile. Tres proportionales habent. Latera ut composita ex prima et secunda proportionalium, ad compositam ex prima et tertia, vel ut composita ex tertia et secunda, ad compositam ex tertia et prima. Binae quadratae tribus intermissis similes, non communicant latere, implentur vero gnomone, quod est duplum mediae intermissarum, et composita similis: tribus proportionalibus constant.'

Binae oblongae tribus intermissis, similes non communicant latere, implentur ut primus; quatuor proportionalibus constant, latera compositae, ut prima tertiae ad secundam quartam. 115v

Binae quatuor intermissis dissimiles non communicant latere, implentur duabus medijs intermissarum in dissimilem utrisque quatuor proportionalibus utuntur, latera ut prima tertia ad primam quartam, vel ut quarta prima ad quartam secundam.

Binae quinque intermissis, similes, implentur duplo mediae intermissarum.

Binae sex intermissis implentur medijs intermissarum.



Quando jam aequantur		4z — 1zz	*et*	0
Ex 1zz + 2 *fit quadratum*	*Id est*	4z	*et*	1zz
addendo √8z + 2	*vel*	4	*et*	1z
8ꝛ + 2		*Radix est* 2.		

At si aequantur		4z — 1zz	*et*	2
	Id est	4z	*et*	1zz + 2
	Tunc addo	2z		2z
et iterum	1zz + 2z			1zz + 2z
	1zz + 8z		*et*	2zz + 4z + 2
dimidia	½zz + 4z		*et*	1zz + 2z + 1.

Tunc posterior est quadratus, cujus radix $1z + 1$.
[*Quam vis facilior forsan aequatio sit*]

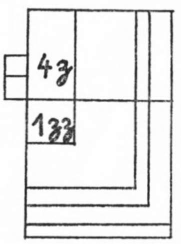
$$\begin{array}{lll} \textit{divide} & \frac{1}{2}zz + 4z & \frac{1}{2}z & & 1zz + 8z \\ & \underline{1z \;+ 1} & & \textit{et} & 1z \;+ 1 \\ & \underline{3\frac{1}{2}z} & & & 2z \;+ 2 \\ & & 1z + 1 & & \end{array}$$

Scio jam quod $2zz + 4z + 2$ *sint duo quadrata, si jam ex* $zz + 8z$ *possem oblongum facere, non communicant latere sed tamen ex* $8z$ *potest fierj oblongum, latera aptum ad* $1zz$. *Nam latus de* $1zz$ *est* $1z$. *hoc potest dividj* $8z$, *prodit* 8. *Ergo si* $1z$ *in* $1z + 8$ *multiplicetur, prodit* $1zz + 8z$. *Et si* $\frac{1}{2}z$ *in* $1z + 8$ *multiplicetur, prodit* $\frac{1}{2}zz + 4z$ *quantum si* $1z + 1$ *in sese ducatur.* [*Sunt ergo proportionales* $\frac{1}{2}z$, $1z + 1$, $1z + 8$. *Multiplica* $1z + 1$ *in se prodit* $1zz + 2z + 1$, *divide in* $\frac{1}{2}z$, *prodit* $2zz + 4z + 2$ *hoc a* .. $1z + 8$. *Nihil novi.*] *Aufer*
116 *utrinque* $\frac{1}{2}zz$. *Tunc ergo si* $\frac{1}{2}z$ *in* $+ 8$ *multiplicetur, prodit* [$\frac{1}{2}z + 1$] $\frac{1}{2}zz + 2z + 1$' *et si* $1z$ *in* 4 *multiplices, prodit tantundem*

scilicet	$\frac{1}{2}zz + 2z + 1$.	*Quod est*	$4z$
Aufer	$+ 2z$		$+ 2z$
Ergo	$\frac{1}{2}zz + 1$	*aequat*	$2z$
Et	$1zz + 2$	*aequat*	$4z$.

Jam est usitata aequatio	*Med*	4
	dim	2
	quadra	4
	Min	2
	summa	6
	radix	$\sqrt{6}$
	aufer dim	2

2	
600 00	246
46	2
17	
24 00	8
4 8	
19 3	
24 25	



Rursum igitur $1zz$ *et* 1 *implentur per* $2z$ [*censibus*]

	$1zz + 2z + 1$	*et*	$6z \;- 1$	
	[$2zz + 4z + 2$	*et*	$1zz + 8z$	*ut prius nil novj*]
Et	$1zz + 4z + 2$	*et*	$7z$	

Sed Hoc [*compositum*] *multiplicatur ex* $1z + 2$, *et* $1z + 1$, *illud ex* 7, *et* $1z$.

Si $1z$ *in se multiplicarem, prodiret* $1zz$, *et* $2\varkappa$ *in se prodiret* $4z$. *Sed* $1zz$ *est minor quam* $4z$, *ergo et* $1z$ *est minor quam* $2\varkappa$. *Quare, sive* $1\varkappa$ *non valet integra* 2.

$$\begin{array}{llll} \textit{Si} & 1zz + \;2 & \textit{aequantur} & 4z \\ \textit{Ergo} & 1z \;+ \sqrt{\sqrt{2}} & \textit{aequantur} & 4. \end{array}$$

Oportet operam dare, ut ex binis aequalibus addendo vel subtrahendo fiant similes, et vel quadrantae vel oblongae summibus. Ut $4z$ *et* $1zz + 2$. *Est autem* $4z$ *quadrata cujus radix* $2\varkappa$.

Et $1zz$ *est quadratum minus, cujus radix* $1z$ *cum gnomone quod valet* 2 $\quad 1z$ () $2\varkappa$
Excessus ergo $2\varkappa$ *super* $1z$ *multiplicatus in sese et in* $2z$ *valet* 2

Is est 2ϰ — 1z *in* 2ϰ + 1z
2ϰ — 1z
4ϰ + 2𝔯 — 1 zz
— 2𝔯
4z — 1zz *valet* 2. *Nihil novj*

Radix de 4z *est* 2ϰ, *de* 1zz + 2 *vel* 1zz + 0z + 2 / 1z + 0
2z 0
+2

[*Ergo aequatur* 2ϰ *et* 1z + $\sqrt{2}$
2z *et* 1𝔯 + 2]

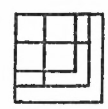
Perpendo quod 2ϰ *in* 2ϰ *facit totum* 4z. *Jam quantum est in quadratura de* 1z, *tantum planitiej est in latere de* 1zz. *Et sicut se habet* [1z] 4z — 2 *hoc est* 1zz *ad* 1z, *sic se habet*

4ϰ — $\sqrt{2}$ *hoc est* 1z *ad* 1ϰ.
272
2 000 000 000 | 1
12 | 2
618
1 119 64
2 000 000
1 4 1 4
968126
289
112

4z — 2 *valet* 1zz
4ϰ — $\sqrt{2}$ *valet* 1𝔯
4 — $\sqrt{2}$ *valet* 1z

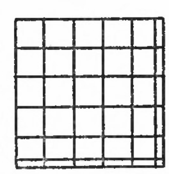
1 4 1 4
2 5 8 6

Quando 4z — 2 *aequat* 1zz, *ratio non est alia quam si* 4ϰ — 2 *aequaret* 1z, *quia hic tantum respicitur ut media ab extremis distet aequaliter. Cum autem* 1z *sit figura quadrata, oportet etiam ex priorj facere figuram quadratam. Et jam non respicio ad nomen* z, *sed tantum ad numerum* 4 *et proportionem.* 116v

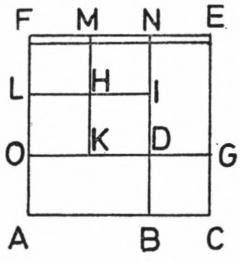


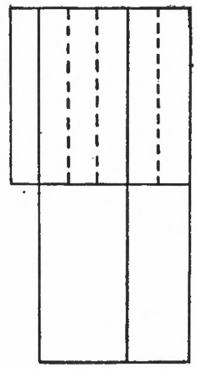
Quando quadratum et res aequantur numero Tunc additur utrinque numerus, ut fiant utrinque rursum aequalia. Nam primo 1z *habet latus* 1ϰ, *huic excessus* ϰ *in* 2 *rectangula divisus circumjicitur, ut autem compleatur hoc quadratum, numerus accedet. Is sic. Rectangula adjecta habent longitudinem* 1ϰ, *latitudinem junctam signet numerus* ϰ, *puta cujuslibet seorsim latitudo est dimidius numerus rerum. Itaque parvum quadratum est numerorum, ex dimidio numerj* ϰ. *Jam plenum est hoc quadratum sed excedit alterum Numerum nostrum, numero quadrato accedente. Adde igitur et ad numerum hoc quadratum numerorum, rursum igitur hoc numerale quadratum (·in quadratam formam dispositum·) est aequale quadrato illi composito, et radix radicj, sed illic radix est composita ex* ϰ *et non aufer utrinque numerum, manet valor radicis.*

Sint 8z



Sit jam FC 1z, *aequale* 6ϰ *et* 16. *Erit igitur AC* 1ϰ. *Et quia* 6ϰ, *pone BC* 3, *erunt BE* 3ϰ *et AD, DH* 3ϰ *ut AD, et DC sint aequales, quare OH et LN* 16. *Et quia DB* 3, *et DG* 3, *quare DC est* 9, *et sic etiam DH. Adde DH ad OH, LN prodit* 25. *OH quadratum. Sed hujus radix est* 5 *FN, quaesita vero radix est FE, Ergo NC addita facit FE quaesitam* 8.





Jam sit FD quadratum, et Numerus 16 *aequalis* 6ϰ. *Radix de* 16 *est* 4. *Sit DG, DB* 4.
Sit FD 1z *cum non* 16 *aequalis* 6ϰ, *Quia OD* 1ϰ, *et DN, sit OA vel DB* 3, *erit AD* 3ϰ, *DE* 3
et DC 9. *et sic FC* 1z + 6ϰ + 9, *ponitur rectangula aequalia ipsi FD, et DC, ergo quadratum*
FC duplum ipsius FD, DC hoc est duplum ipsius 1z + 9.]'

117 Von der vergleichung oder Aequatione. *

Die vergleichung oder Aequatio in der Cossa ist die maiste kunst, vnd lehret, wan mir
ein quantitet oder subtensa in vnserm fürhaben in einer ledigen zahl bekhandt vnd her-
nach durch den Cossischen Proceß, auch mit einem Cossischen Namen benennet würt,
wie alsdan durch allerhand mittel baide zahlen gegen einander aufzuheben, das letzlich
auff der einen seitten ein radix oder census, auf der andern aber ein ledige zahl stehen
pleib. Von dergleichen bißhero bekhanten vnd gebreüchigen aequationibus will jch jetzo
nit vil reden weil die nit vniversal auch zu meinem fürhaben nit alle dienstlich seind. Als
zum exempel, wan im Proceß etliche Radices einer ledigen zahl gleich werden, soll die
ledige zahl mit der zahl der Radicum dividirt werden so khompt was ein einige radix gelte.

Jtem wan etliche z sich zu einer ledigen zahl vergleichen, soll abermahl dividirt, vnd
hernach des quotienten wurtzel gesuecht werden.

Seind es ȼ, soll die cubische wurtzel gesuecht werden: vnd so fort an. Jtem wie alsdan
zuhandlen wan ein gebundene Cossische zahl sich zu einer ledigen oder zu einer andern
Cossischen vergleiche da es bey einem jeden fahl sein besondere regel gibt, vnd (·weil in
meinen processen vnentlich vil fälle sich begeben·) auch vnentliche regulae müesten für-
geschrieben werden, weil man noch der zeitt nit ybern Cubum hinauff geschritten, (·es *
sey dan gewest in gleichen fällen·) jn den höhern quantiteten aber sofern sie besondere
fälle machen sich niemand versuecht hatt.

Es hatt zwar Ludolff von Cöllen in seinem rechenbuch die vertröstung gethan, er wöll *
seine aequationes einmahl ans liecht khommen lassen. Mir zweiffelt aber nit, er khomme
herfür wan er wölle, werd er dise gmeine regeln in seiner generalaequation gleich sowol
als jch auff ein seitten setzen: jn betrachtung das kurtz zuvor erwisen, das ein jede radix
auß vnsern fürhabenden Cossischen zahlen mehr dan einen werth hatt, dahero nit müg-
lich, das sollicher zahlen aequationes auff guett Geometrisch khönden verrichtet werden.'

117v Vnd ob wol einer meine folgende generalen formam aequationis als ein grobe Mecha-
nisch vnd gar nit künstliche verwerffen wolte, weil sie sich rathens, vnd etlicher Mecha-
nischer griffe gebraucht, so soll aber derselbige wissen, das ich eben in diser Mechani-

schen vnd rätherschen abhandlung ja sovil speculationes vnd subtiliteten finde, als ein Geometra in den gebreüchigen (·vnd zwar sehr scharffsinnigen vnd wunderbarlichen·) aequationibus jmmer mehr finden würt; auch andere Hochgelehrte leütte, so sich vmb die aequationes angenommen, des rathens nit allerdings müessig gegangen, sondern dessen sich an statt eines wegweisers, zu erfünden jrer viler regularum, gebraucht, vnd es noch mehr würden gethan haben, wan sie ein vniversal aequationem hetten erforschen sollen. So ist auch ditz nit ein geringes, das jch mit warheitt sagen khan, das mich alle meine aequationes yberhaupt nit sovil mühe costen, als andere etliche wenige particular regeln. Dessen geb jch dem lesern in fürhabendem Canone sinuum den augenschein an die hand, wan jch dise weitläuffige arbaitt durch mittelung diser meiner Cossischen aequation verrichtet vnd gotlob zuend gebracht habe.

* Vnd lauttet mein general aequation auffs kürtzest also. Wan dir zwo zahlen fürkhomen, ein Cossische vnd ein ledige, die da sollen einander im werth gleich sein, so nim dir für, du wissest den werth von einer radice, vnd sprich also, jch setze ein Radix gelte ein so oder so grosse ledige zahl. Mit disem vermeinten werth multiplicir ein jedes gegebene glid der Cossischen zahlen, so lang biß auß allen sollichen glidern nichts dan lautter ledige zahlen oder lautter quadrata werden, nachdem die anfengliche, vnd der Cossischen gleichende ledige zahl, für ein latus oder quadratum etc. fürgegeben würt: das geschicht also. Wan du den werth von einer radice in das höchste geschlecht multiplicirest, so hastu in der summa, wievil sollicher geschlecht der nechsten geschlechte vnder jr gelte oder in sich halte, dan so du multiplicirest Cubos mit dem werth von einer radix, so khommen zensus, so du Census damit multiplicirest, so khommen radices, so du radices multiplicirest, so khommen ledige zahlen. So jch aber ein quantitet mit quadrato radicis multiplicir, so ernidrige jch sie vm zwo staffel.' Jtem wan die Cossische zahl also stüende √4z, 118
so suech an stat des multiplicirens die radicem von 4z, was khompt setze so hastu die zahl auch ernidriget, vnd khompt 2ϰ. In weerender operation aber besihe, was jede quantitet für ein band habe, nach dem selben band muestu etwa zwo gleiche geschlechte zuvor addirn oder subtrahirn, so nun letzlich die Cossische zahl in ein ledige durch ditz multiplicirn (·Addirn·) verwandelt, gerad sovil thuet als die jenige ledige zahl wölliche der Cossischen gleich gesagt worden, so hastu die Radicem errathen, vnd recht genommen, vnd hast also das jenige, was man begehrt hatt zuwissen. Zum Exempel. Mein subtensa sey √3, deren bogen 120 wolt jch gern in zwey gleiche stuckh theilen vnd des einen subtensam wissen, da heist mich der process der begehrten subtensa von 60 den namen geben 1ϰ. Vnd nach verrichtem process, khompt das die subtensa von 120° sey √4z — 1zz. Nu hatt dise subtensa zuvor den Namen gehabt das sie sey ein radix von 3. Also das jetzo das quadratum der subtensa von 120° zwen Namen hat. Einmahl haisset es 3, das ander mahl 4z — 1zz. Dise zwo zahlen sollen gleich sein. Ist die frag, wievil ein radix gelte. Nu will jch rathen 1ϰ gelt 1. Vnd will anfahen von der höchsten quantitet — 1zz, die will jch in den werth von 1ϰ, nämlich in 1 multiplicirn so khompt — 1c. Will auch — 1c in 1 multiplicirn so khompt — 1z. Nu hab jch auch + 4z. Weil es dan einerlay quantiteten seind, so addire jch — 1z vnd + 4z, khompt + 3z. Allhie darffstu nit tüeffer hinab multiplicirn dan + 3z, bedeüttet + 3 quadrata, dan z ist quadratum. Nu ist aber die andere zahl auch 3 vnd bedeüttet auch ein quadratum, [*wan du schon jetzo mit 1 zu baiden theilen vnder sich multiplicirst so khommen 3ϰ gleich 3ϰ vnd noch einmal 3 gleich 3 ledig, so folgt nun das 1 vnd 1 weil dan jetzo auff baiden seitten 1 Census stehet*] so hab jch nun die radicem recht errathen. Ein anders. Mein subtensa sey 192. Vnd sey also √4z — 1zz gleich
* 192: Wolt gern wissen, was 1ϰ gelten würde. Nu will jch rathen sie gelte 12.'

118v*

Die höchste	— 1zz
Der Radix werth	12
	— 12ɛ
	12
	12
	24
	— 144z
Setz hinzue	+ 4 z
suech die radicem an	+ √256z
statt des multiplicirens	16ϰ
weil 192 die ledige,	12
nit quadrat, sondern	16
ein latus ist.	32
	192

Fünde also das √4z — 1zz sey nach meinem rathen, sovil als √256z. Suech sein radicem, so hastu 16ϰ. Die multiplicir noch einmahl in den werth $\underset{\circ}{12}$, so khompt 192 allermassen wie zuvor die subtensa genennet worden, derohalben vnd wan die subtensa ist 192 so ist des halben bogens subtensa recht genennet, das sie sey $\underset{\circ}{12}$.

Laß die subtensa sein 0593, vnd rathe des halben bogens subtensa sey 03.

	— 1zz
	03
	— 03ɛ
	03
	— 009z
	+ 4 z
	+ 391z
	198ϰ —
	03
ledige	0594 —

Khompt das radix von 4z — 1zz gelte sovil als 0594 weniger. Nu hab jch gesagt die subtensa sey 0593, bin also mit disem rathen auch nach hinzukhommen.

* Blatt 118v ist im Faksimile wiedergegeben.

[illegible] — 188
[illegible] — 12
— 12 [illegible]
12
12
24
— 144 [illegible]
[illegible] + 4 [illegible]
+ 12563 [illegible]
[illegible]
16 [illegible]
12
16
32
192

Seind also 9 √48 — 188 [illegible] meinen [illegible] sonst also √256 [illegible] [illegible] den radicem, so [illegible] 16 [illegible] die Multiplicir [illegible] in den [illegible] 12 so [illegible] 192 [illegible] [illegible] subtraction gemacht [illegible] und wan die subtraction ist 192 so ist das selben [illegible] subtr[illegible] recht gekommen, [illegible] 12

[illegible] auch da [illegible] multiplicieren [illegible] 192 [illegible] [illegible] ein [illegible] ist

[illegible] die subtraction [illegible] 0593, und [illegible] das selb[illegible] [illegible] subtraction [illegible] 03

— 188
03
— 03 [illegible]
03
— 009 [illegible]
+ [illegible]
+ [illegible]
[illegible]
[illegible]
03
endiger 0594 —

[illegible] radix von 48 — 188 [illegible] also 0594 [illegible] [illegible] die subtraction [illegible] 0593, [illegible] also [illegible]

[illegible] ander exempel, Mein subtraction [illegible] welt wissen wie [illegible] lange subtraction [illegible] Theil von [illegible] [illegible] will [illegible] radix gelten 031, so würt — 1 [illegible] gelt — 0096 [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible] + 3 [illegible] + 290392 [illegible] [illegible] in den [illegible] Radix [illegible] 09, [illegible] aber [illegible]

[illegible] ist [illegible] subtraction [illegible] 3 [illegible] — 1 [illegible]

— 1 [illegible]
031
— 031 [illegible]
031
0093
31
— 009617
+ 290392
031
087117
29039
0900209

[illegible] ander exempel Mein subtraction [illegible] [illegible] [illegible] ist [illegible] [illegible] [illegible] in 6 [illegible] wie groß würde dan ein subtraction [illegible] Theil [illegible] ist 12 [illegible] und [illegible] mein subtraction 0 gleich der cossischen [illegible] hon: √ 36 — 105 + 112 — 54 + 12 — 1. [illegible] die [illegible] Radix [illegible] subtraction [illegible] 2: und [illegible] [illegible] mir diese lange cossische zahl, [illegible] also √ [illegible] [illegible] die radix ist 09, und die 2 multiplicirt [illegible] endiger zahl 0, [illegible] [illegible] dan mein subtraction ist [illegible] 09 ist also diese subtraction 2 gemacht, und theilt [illegible] [illegible] in 6 selben circulos.

Ein ander exempel. Mein subtensa sey 09, wolt wissen wie ein lange subtensa den dritten theil von jrem bogen vnderspannete, dan so ist mein subtensa Cossisch 3ϰ — 1𝓬. Will

— 1𝓬
031

— 031z
031

0093
31

— 00961ϰ
+ 29039ϰ
031

087117
29039

0900209

rathen die radix gelte 031, so würt — 1𝓬 gelten — 00961ϰ, die addir jch zu + 3ϰ, so würt + 29039ϰ, vnd ditz noch einmahl in den werth der Radix khompt 09, habs also abermahl zimlich errathen.

Ein ander exempel. Mein subtensa sey 0 vnd soll deren bogen, das ist den gantzen zirckel (·oder 2 oder 3 gantzer Circkel·) in 6 theilen. Wie groß würdt dan ein Subtensa sein von eim sechsten theil. Antwort sie ist 1ϰ. Vnd drumb ist mein subtensa 0 gleich der Cossischen denomination $\sqrt{\ 36^{\mathrm{II}} - 105^{\mathrm{IV}} + 112^{\mathrm{VI}} - 54^{\mathrm{VIII}} + 12^{\mathrm{X}} - 1^{\mathrm{XII}}}$. Nu rathe jch die begehrte Radix oder subtensa sey 2. Vnd find letzlich das mir dise lange Cossische zahl sovil gelt als $\sqrt{\ }$oz derowegen ir radix ist 0ϰ, vnd ditz in 2 multiplicirt khompt lediger zahl 0, wie dan geschehen sollen, dan mein subtensa ist auch 0 gewest. Ist also dise subtensa 2 gerecht, vnd theilt drey circulos in 6 halber circulos.[1]

119

$$\begin{array}{rl}
\overset{\mathrm{XII}}{-\ 1} & \\
\underline{2} & \\
\overset{\mathrm{XI}}{-\ 2} & \\
\underline{2} & \\
\left.\begin{array}{r}\overset{\mathrm{X}}{-\ 4}\\ \overset{\mathrm{X}}{+\ 12}\end{array}\right\} & \text{Addir}\\
\overset{\mathrm{X}}{+\ 8} & \\
\underline{2} & \\
\overset{\mathrm{IX}}{+\ 16} & \\
\underline{2} & \\
\left.\begin{array}{r}\overset{\mathrm{VIII}}{+\ 32}\\ \overset{\mathrm{VIII}}{-\ 54}\end{array}\right\} & \text{adde}\\
\overset{\mathrm{VIII}}{-\ 22} & \\
\underline{2} & \\
\overset{\mathrm{VII}}{-\ 44} & \\
\underline{2} & \\
\left.\begin{array}{r}\overset{\mathrm{VI}}{-\ 88}\\ \overset{\mathrm{VI}}{+\ 112}\end{array}\right\} & \text{adde}\\
\overset{\mathrm{VI}}{+\ 24} & \\
\underline{2} & \\
\overset{\mathrm{V}}{+\ 48} & \\
\underline{2} & \\
\left.\begin{array}{r}\overset{\mathrm{IV}}{+\ 96}\\ \overset{\mathrm{IV}}{-\ 105}\end{array}\right\} & \text{adde}\\
\overset{\mathrm{IV}}{-\ 9} & \\
\underline{2} & \\
\overset{\mathrm{III}}{-\ 18} & \\
\underline{2} & \\
\left.\begin{array}{r}\overset{\mathrm{II}}{-\ 36}\\ \overset{\mathrm{II}}{+\ 36}\end{array}\right\} & \text{adde}\\
\surd\ \overset{\mathrm{II}}{0} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\overset{\mathrm{XII}}{-\ 1} & \\
\underline{3} & \\
\left.\begin{array}{r}\overset{\mathrm{X}}{-\ 3}\\ \overset{\mathrm{X}}{+\ 12}\end{array}\right\} & \text{Ad.}\\
\overset{\mathrm{X}}{+\ 9} & \\
\underline{3} & \\
\left.\begin{array}{r}\overset{\mathrm{VIII}}{+\ 27}\\ \overset{\mathrm{VIII}}{-\ 54}\end{array}\right\} & \text{Ad.}\\
\overset{\mathrm{VIII}}{-\ 27} & \\
\underline{3} & \\
\left.\begin{array}{r}\overset{\mathrm{VI}}{-\ 81}\\ \overset{\mathrm{VI}}{+\ 112}\end{array}\right\} & \text{Ad.}\\
\overset{\mathrm{VI}}{+\ 31} & \\
\underline{3} & \\
\overset{\mathrm{IV}}{+\ 93} & \\
\overset{\mathrm{IV}}{-\ 105} & \\
\overset{\mathrm{IV}}{-\ 12} & \\
\underline{3} & \\
\overset{\mathrm{II}}{-\ 36} & \\
\overset{\mathrm{II}}{+\ 36} & \\
\overset{\mathrm{II}}{0} &
\end{array}$$

Zum andern wil jch rathen die radix gelt $\surd 3$, so würt jr quadrat sein 3, vnd durch die Multiplication alwegen die quantitet vm 2 grad ernidrigen, vnd also abermahl vnten oz yberpleiben, das also auch dise radix recht errathen ist, vnd theilt 2 Circulos in 6 stuckh, deren jedes helt 120°. *

Zum dritten will jch rathen, die radix gelt 1. Das verendert die zahl nichts im Multiplicirn, derohalben $\overset{\mathrm{XII}}{-1}$ ist sovil als $\overset{\mathrm{X}}{-1}$ ditz mit $\overset{\mathrm{X}}{+12}$ macht $\overset{\mathrm{X}}{+11}$, das ist sovil als $\overset{\mathrm{VIII}}{+11}$ ditz mit $\overset{\mathrm{VIII}}{-54}$, bringt $\overset{\mathrm{VIII}}{-43}$ ist sovil als $\overset{\mathrm{VI}}{-43}$ ditz mit $\overset{\mathrm{VI}}{+112}$ bringt $\overset{\mathrm{VI}}{+69}$, ist sovil als $\overset{\mathrm{IV}}{+69}$ ditz mit $\overset{\mathrm{IV}}{-105}$, bringt $\overset{\mathrm{IV}}{-36}$, ist sovil als $\overset{\mathrm{II}}{-36}$ ditz mit $\overset{\mathrm{II}}{+36}$ bringt $\overset{\mathrm{II}}{0}$.

Jst also auch ditz 1 einer Radicis werth vnd gerechte subtensa, vnd theilt einen zirckel in 6 stuckh deren jedes helt 60°.

Wan aber der rechte werth der Radix nit errathen, vnd zu letzt ein ledige zahl auff der Cossischen seitten stehet, die da kleiner oder grösser ist, als die fürgegebne subtensa, als dan so merckh erstlich das zu nit gar nichts erhalten, sondern, was bey deiner Cossischen zahl für eine ledige oder quadrat zahl herauß khompt, dieselbige zeigt dir, wie groß die anfengliche subtensa sein müesse, wan die Radix den gerathenen werth halten vnd behalten solle.

Zum exempel, jch hab zuvor genommen die subtensam 09 vnd gerathen, die subtensa des dritten theils sey 031, derowegen 3ϰ — 1✱ hat sollen gleich werden der subtensa 09 oder 0900000. Es hatt sich aber in der vergleichung befunden' das nit 0900000 sondern 119v
ein lengere nämlich 0900209 gepliben. Jst derohalben hierdurch angezeigt worden, das wan die subtensa sey 0900209, alsdan so khönd die subtensa des dritten theils gewißlich sein 031, wie ein grosses stuckh aber auß dem Circkel dise subtensae hinweg nemen, ist biß daher noch verporgen.

Das will jch auch im letzten exempel erclären, da haben wir gefunden drey gerechte werth der Radicis, nämlich 2. $\sqrt{}$ 3, vnd 1. Nu will jch zum vierten vnd fünfften setzen oder rathen mein radix sey 09.'

xii
* 1
* 081
x
081
x
12
x
1119
081
8952
1119
viii
+ 90639
— 54
viii
449361
081
3594888
1449361
vi
36398241
112
vi
75601759
081
604814072
75601759
iv
6123742479
105
iv
4376257521
081
35010060168
4376257521
— 354476859201

Hie find jch das Radix 09 zuletzt yberlasset 354476859201z, 120
solte $3\underset{\circ}{6}$ gelassen haben, fählt + 055231407992, vnd ditz ist jetzo der werth von der Cossischen zahl. Nu soll $\sqrt{}$ davon genommen werden das ist 074318ϰ, vnd diß mit 09 macht + 066886, solt o sein. So würt mir nun angezeigt, wan jch die subtensam + 066886 näme, so würde mir 09 den yberigen bogen in 6 theilen. Das magstu durch die sinus probirn, dan halb 066886 ist 033443 ist der sinus von 19°. 32'. 17'', sein duppelbogen 39°. 4'. 34'' von 360 genommen lasst 320°. 55'. 26''. Vnd diser in 6 getheilt, gibt 53°. 29'. 14'', dessen subtensa soll sein 090000, oder des halben 26°. 44'. 37'', sinus halb 09, das ist 045000, wie dan der Canon zeigt.
Gleichsfals find jch das Radix $\underset{\circ}{11}$ zuletzt yberlasset 3560577074012, solte $3\underset{\circ}{6}$ gelassen haben, fählt + 03942292599, vnd ist ditz jetzo der werth der Cossischen quadrat zahl, jr radix ist 0627872ϰ, das vernidrige jch nocheinmahl mit $\underset{\circ}{11}$, so hab jch 0690662 lediger zahl, solte o sein. So würt mir nun angezeigt, wan jch die subtensam + 0690662 näme, so würde mir $\underset{\circ}{11}$ den gantzen zirckel zusampt diser subtensae bogen in 6 theiln.

Probiers auch durch die sinus. Dan 110000 halb, das ist 55000 zeigt 32°. 22', dessen duplum 66°. 44', nämlich der bogen von der subtensa 110000, sechs mahl genommen bringt yber einen gantzen Circulum noch 40°. 24', diser halb, nämlich 20°. 12' zeigt sinum 034530, der zweimahl gnommen macht 069060, sovil mir dan ybergepliben.

Warumb aber hie der yberschuß zum Circulo gezogen, dorten darvon genommen werden mueß, ist die vrsach, weil 09 weniger ist als die rechte subtensa von 60 gradibus vnd hingegen 11 mehr. Drum würt sie auch dorten zum sechsten mahl nit den gantzen Circulum ergreiffen allhie aber mehr dan den gantzen.

[Vnd scheinet, als geschehe ditz nur in den figuren von gerader zahl der seitten, das nämlich vor vnd nach der rechten Radix ein subtensa von gleichem bande yberpleibt.

Dan in den figuren von vngerader zahl der seitten, als zum exempel im Neüneckh, helt es seinen wechsel, Nämlich was nach der subtensa von $\frac{1}{9}$ der cossischen zahlen yberpleibt, vm
120v *sovil theilt die' Radix mehr dan den gantzen zirckul vnd was vor diser subtensa von $\frac{1}{9}$ der cossischen zahl abgehet, vmb sovil weniger dan einen gantzen zirckel theilt die Radix in neün stuckh. warumb aber einerlay bande khommen sowol wan mehr, als wan weniger dan ein gantzer circulus zertheilt würt, soll vnden bey der Operation mit dem neüneckh angezeigt werden.*

Hingegen bey der subtensa von $\frac{2}{9}$ helt es sich also, wan du ein radicem errathen hast, die mehr ist als subtensa von $\frac{2}{9}$, die würt dir zwar auß natürlichem verstand, auch mehr dan zwen gantzer Circulos in 9 theilen, aber die differentz zwischen der cossischen Zahl vnd der werth von Radix, würt ein Minus haben, das ist die cossische Zahl würt letzlich den werth von der Radix nit erreichen: vnd ein kürtzere radix als die subtensa von $\frac{2}{9}$ würt zwar weniger als 2 gantze Circulos in 9 theilen, aber die differentz wölliche mir von den $\frac{18}{9}$ theil eines, oder von $\frac{9}{9}$ theil zweyer Circulorum den yberigen bogen abschneidet, die würt ein zeichen plus haben vnd würt also die Cossische zahl den werth der Radix hie ybertreffen.

Bey der subtensa von $\frac{3}{9}$ helt es den wechsel wie bey $\frac{1}{9}$, vnd bey deren von $\frac{4}{9}$ helt es sich wie bey deren von $\frac{2}{9}$, das also die subtensae von vngerader zahl der theile, einerlay weis behalten, vnd die von gerader, auch jre weise vnd also in kheinerlay arth der figuren auff die bande sondern allein dahin zusehen, ob der gerathene werth der Radix kleiner oder grösser seye dan der warhafftige werth. Vrsach diser abwechslung zeigt dir vnden die operation mit dem neüneckh.]

Das nun ein kürtzere subtensa gerad den grössern bogen wöllichen das ybergeplibene vnderscheidet, in die begehrte theil theiln solle, ist gnuegsamlich zuerweisen auß den vorgesetzten fundamentis, dan wan jch ein subtensam so groß als das ybergeplibene ist, gleich anfangs für bekhant annäme, vnd jren grössern bogen theiln wolte, so würde mir ja der angenommene werth der Radix wie alberait durch die aequation erwisen, sollichen grössern bogen in die begehrte theil zertheilen.

Gleiches ist auch von der lengeren subtensa zuverstehen, dan droben vermeldet worden, wan man einen bogen in etlich stuckh theiln wölle (·es sey jetzo der bogen der auff der geplibenen differentz stehen mag·) so fünde sich alwegen vnder andern auch ein werth der Radix der da den gantzen Circulum zusampt denselben bogen in die begehrte theil zertheile.'

Folgen etliche vörtl vnd Mechanische Handgriffe, den werth einer Radicis genaw zuerrathen, jtem zuerkhennen zwischen wöllichen zahlen ein jede Radix falle, vnd entlichen, was vngefahrlich für ein bogen von einem jeden auß den gefundenen werthen der Radicis oder yberpleibenden differentijs gezeiget werde. 121

Damit aber der Cossist gleichwol nit allerdings auff ein vngewisses rathe, sondern nach dem zil schiesse, vnd zum wenigisten die Mauren treffe, vnd also die entliche differentien nit gar zu groß khommen, sondern wie volgen solle, zu erlehrnung des warhafftigen werths einer radix, wol geschickht werden: sol er sich anfangs erinneren, das je kleiner der bogen
* von einem zirckel, je näher er sich mit seiner subtensa vergleiche; die grössiste differentz aber zwischen dem bogen vnd subtensa sey im halben Circulo, dessen subtensa ist der
* diameter: da vns Archimedes lehret, das der halbe Circulus sich zum diametro halte wie vngefahrlich drey gegen zwey, oder wie 22 gegen 14. Das bilde dir also ein, dan drey seitten von eim gerechten sechseckh begreiffen just einen halben Circulum. Nu ist jede seitte ein halber diameter, wie auß der Geometria, vnd auch droben auß meiner Cossa Kund worden. Derowegen drey seitten von eim sechseckh sich gegen diametro halten wie 3 gegen 2 oder 21 gegen 14. Nu ist der bogen 60 alwegen grösser dan sein subtensa 1. wie dirs die vernunfft sagt, das ein rechte linj an ein krumpe stossend alwegen die kürtzeste seye. Vnd ist doch nit mehr grösser dan vngefahrlich sovil 22 grösser dan 14. Derohalben der bogen 60 gegen seiner subtensa 1 vngefahrlich ist, wie 22 gegen 21.' Derohalben, so 121 v
du mehr dan 6 theil auß dem Circulo machen wilt, so weissestu schon anfangs vngefahrlich die kleineste subtensam. Zum exempel, jch soll den Circulum in 9 theilen, wie groß mag vngefahrlich die subtensa eins neünten theils sein? Ein Neüntheil ist zwey drittheil von eim sechsteil, vnd kleiner dan 60, so würdt nun die subtensa auch ein wenig grösser sein dan $\frac{2}{3}$ von der subtensa 60, oder von 1. Nämlich vngefahrlich 068, dan 0666 etc. ist zwey drittheil.

Jn gleichem, wan dir fürkhommet der bogen 20°, in fünff zu theilen, vnd dir würt sein subtensa gegeben, das sie sey 0684 da nim darvon den fünfften theil 0137 da waistu abermahl, das die warhafftige subtensa vmb ein kleins mehr haben würt weil der gantze pogen 20° ist kleiner dan 60.

Wan aber nach den längern subtensis gefragt würdt, da ist nit so leicht zurathen dan sie gegen dem diameter gar vmb ein kleins zuemen. Derohalben auch dise vngefahrlich zuerrathen, halt jchs für das beste mittel du brauchest disen Mechanischen handgriff wie der dir in hiebeygefüegtem Neüneckh zuerkhennen gegeben würt: vnd sich also helt: theil den diameter AF in 20 oder 200, oder 2000 theil nach dem du jne lang haben magst, den Circulum aber in Neün oder sovil theil man haben will (·fahe baide theilung an von dem Puncten A·) vnd brauch vleiß, damit die theilung scharff seye, vnd werden allhie sollich theil bezeichnet mit AB, BC, CD, DE, EE etc. Wiltu nun vngefahrlich wissen, wie lang die kürtzeste subtensa AB sey, so setz den einen spitzen des Circkels in den Puncten A, vnd begreiff AB, reiß ein bogen BG durch den diameter, der würt zwischen 068 vnd 069 fallen. Gleichsfals die subtensa AC ist zwischen 128 vnd 129, die subtensa AD vmb 173, 174 die subtensa AE vmb 196, 197. Dise zahlen magstu jetzunder erclärter massen examiniren, ob sie der rechte werth von der Radice seyen vnd wieweit sie davon abweichen. Jngleichen auch mit allerhand fürkhommenden subtensis vnd bogen zu handlen: sonderlich zu erkundigen, wan ein bogen zusampt ein oder mehr Circulis in etliche stuckh getheilt werde.'

122 [*Auf disse 9. Eck in einen Circel zuo schreiben als vorgerisne figur wil ich setzen Ein Cossische vergleichung in welcher sind 4 verendrete z. als* AB. AC AD *vnd* AE *ihn welchen der Diameter* AF *ist* 200. *

die (Rechte) Linck seiten *die Rechte seiten*

ϰ '√5 cœ œ √7

9 + 27 + 1 *ist* ,G · 30 + 9

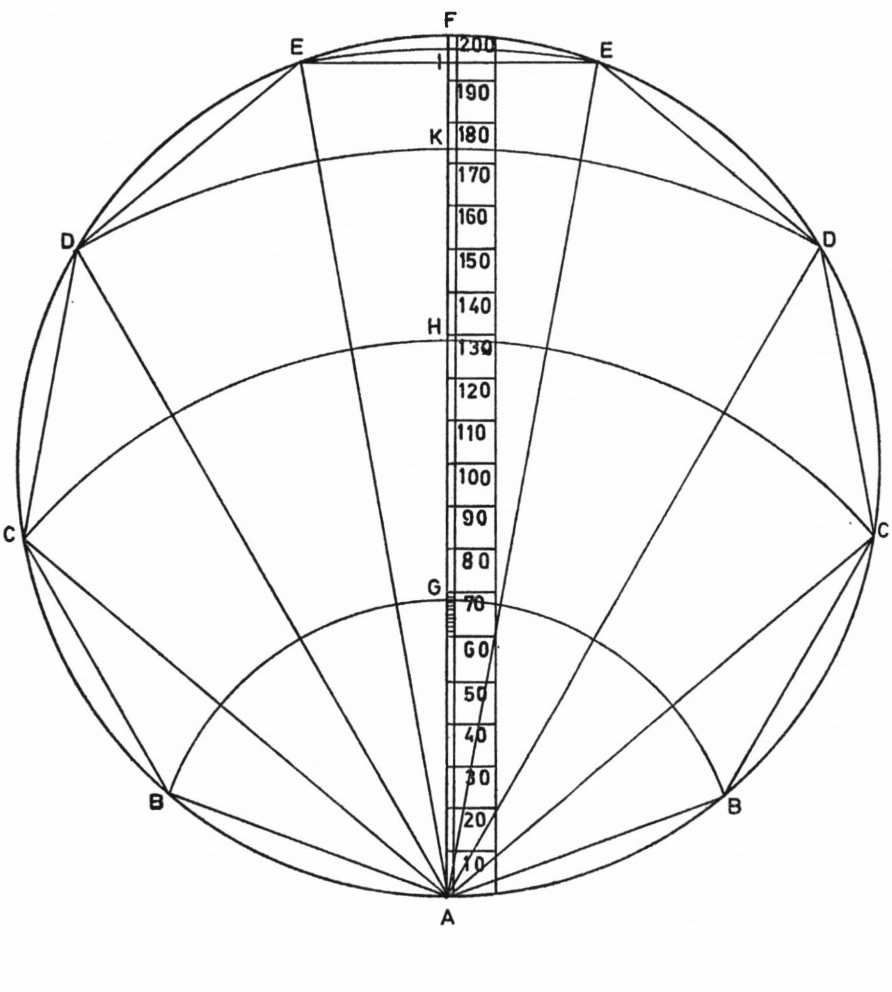
Aus disser Aequatio kan gefunden werden die obgedachten 4 vnderschidliche ϰ *wollen wir beweisen vnd zum Ersten vornemen das* ϰ AB *vnd zuo hilfnemen den Circel ris* BGB *vnd durchschneit den diameter im puncten* G *vnd felt das* ϰ AB *in* G *zwischen* 68 *vnd* 69. *so folget die Aequatio*

Ut AB *ad* AD *ita superficies* FCB *erga superficiem* ACD, *

ut AC *erga* AE *ita* ADC *erga* ADE

ut AD *erga* AE *ita* ADE *erga* AEE.

*



1	rce
68 ...	ϰ
68 ...	zzz
68 ...	ϰ
544	
408	
4624 ...	√7
90000 ...	ϰ
85376	√7
68 ...	ϰ
683008	
512256	
5805568 ...	zce
68 ...	ϰ
46444544	
34833408	
394778624 ...	√5
2700000000 ...	√5
2305221376 ...	√5
68 ...	ϰ
18441771008	
13831328256	
156755053568 ...	zz
68 ...	ϰ
1254040428544	
940530321408	
10659343642624	ce
30000000000000	ce
19340656357376 ...	ce
68 ...	ϰ
154725250859008	
116043938144256	
1315164632301568	z
68	ϰ
10521317058412544	
7890987793809408	
89431194996506624 ...	ϰ
90000000000000000 ...	ϰ
zuo klein 568805003493376	

	1	rce
	069 ...	ϰ
	69 ...	zzz
	69 ...	ϰ
	621	
	414	
137 +	4761 ...	√7
000	90000 ...	ϰ
137 —	85239	√7
	69 ...	ϰ
	767151	
	511434	
75923 +	5881491 ...	zce
	69 ...	ϰ
	52933419	
	35288946	
11044255 +	405822879 ...	√5
	2700000000 ...	√5
11044255 —	2294177121 ...	√5
	69 ...	ϰ
	20647594089	
	13765062726	
1543167781 +	158298221349 ...	zz
	69 ...	ϰ
	1424683992141	
	949789328094	
263233630457 +	10922577273081	ce
	30000000000000	ce
263233630457 —	19077422726919 ...	ce
	69 ...	ϰ
	171696804542271	
	114464536361514	
	1316342168157411	z
	1716468004542269	ϰ
	11847079513416699	
	7898053008944466	
	90827609602861359	ϰ
	90000000000000000	ϰ
zuo gros	827609602861359	

568805003493376
827609602861359
Differentia 1396414606354735 *der* ϰ]

122 v	068	39. 45. 14			*
	034000	19. 52. 37			
		357. 47. 6			
	003866	2. 12. 54		069	40. 21. 50
	001933	1. 6. 27		034500	20. 10. 55
Relictum	005688	. . . .		005716	3. 16. 30
Dimidium	002844	1. 37. 48		002858	1. 38. 15
			Relictum	008276	4. 44. 54
				004138	2. 22. 27

Qui fit quod hic non respondet relictum subtensae relicto arcus? Forsan non correcta est computatio.

Sit 3x — 1z		aequale 0	
Et 1x 174		iterum 173	
— 174z		173z	
174		173	
174		173	
1218		1211	
696		519	
— 30276x		— 29929x	
+ 3 x		+ 3	
— 00276x		+ 00071x	
174		173	
276		00071	
1932		497	
1104		213	
— 0048024*		+ 0012283*	
174	120. 55	173	119. 46
87000	60. 27. 30	86500	59. 53
	2. 45		359. 18
	1. 22. 30		42
			21
	002400		001222*
	4800*		000611

Hic omnino respondent.
Vide nonangulum alibj computatum.

$\frac{1}{9}$	07	40. 58. 28		06	34. 54. 54
	035000	20. 29. 14		030000	17. 27. 27
		9			9
	015292	368. 46. 12		077768	314. 14. 6
	007646	4. 23. 6		038884	45. 45. 54
Excess.	015294		Defect.	077765	22. 52. 57

$\frac{2}{9}$	13	81. 5. 0		12	73. 44. 24
	65000	40. 32. 30		060000	36. 52. 12
		9			663. 39. 36
	016998	729. 45			720
	008499	4. 52. 30		094418	56. 20. 24
Defect.	16994			047209	28. 10. 12
			Excess.	094420	

$\frac{3}{9}$	17	116. 25. 42		18	128. 19. 4
	85000	58. 12. 51		90000	64. 9. 32
		1047. 51. 18			9
		1080			1154. 51. 36
	055370	32. 8. 42		121548	102
	027685	16. 4. 21		060774	74. 51. 36
Defect.	055446		Excess.	121538	37. 25. 48

Wiltu, so khanstu an statt diser Mechanischen figur den Canonem sinuum selber hier- 124
umben zurath fragen, dan wan der schon nit allerdings gerecht, khan er dich doch neher
zum zil führen als ein Mechanische figur. Allein den rechten grund würt er dir nit also für
augen stellen wie ein guette wolgerissene sichtbare Geometrische figur.

Damit du aber augenscheinlich wissen mögest, das von o biß auff die lengiste subten-
sam 2, nicht mehr oder weniger werth einer Radix folgen, dan sovilerlay du subtensas im
Circulo sihest, nämlich im Neüneckh vier: so brauch disen hie entworffenen Process, vnd
* laß dichs nit verdriessen, alle zehende theil von o biß auff 2 zuversuechen. Da du nun die
Radix genommen hast 01, seind dir khommen — 29ϰ. solte gewest sein sovil als — 900ϰ,
damit minus vnd plus einander hette aufgehebt ist dir derohalben gepliben + 87ϰ. Bey
radice 02 ist gepliben + 784ϰ, bey 03 gepliben 651ϰ, bey 04 gepliben + 485ϰ, bey 05
gepliben + 305ϰ, bey 06 gepliben + 129ϰ. Aber bey 07 seind khomen — 921ϰ an stat
+ 900ϰ. Derohalben jetzo auß dem plus ein minus würdt, vnd pleiben — 021ϰ. Hierauß
ist zuverstehen (·in den vngeraden figuren·) das zwischen 06 vnd 07 ein werth der Radix
falle. Ferners sihestu bey 08 — 133ϰ, bey 09 — 193ϰ, bey 1 oder 10 — 200ϰ, bey 11
wider weniger, nämlich — 157ϰ, bey 12 — 078ϰ, bey 13 khompt es wider auff ein plus,
vnd pleibt + 013ϰ, ist derowegen der ander werth der Radix zwischen 12 vnd 13. Bey 14
ist + 091ϰ, bey 15 ist + 132ϰ, bey 16 fahet es wider an abzusteigen vnd ist + 110ϰ. Bey
17 ist + 032: bey 18 würt abermahl auß einem plus ein minus, Nämlich — 067, drum ist
der dritte werth der radix zwischen 17 vnd 18. Bey 19 ist noch — 101, aber bey 20 ist
100 plus, vnd falt derowegen abermahl der vierte werth der radix zwischen 19. 20. Haben
also nit mehr dan vier stette gefunden, da die Radix gelten solle nit weniger, dan in der
figur selbsten 4 subtensae gezeigt werden.

Sihest also darneben auch, was die vrsach seye warumb ein solliche abwechslung der
plus et minus, vnd mehr oder minder theilung des Circulj sich begebe, darvon droben ge-
sagt. Dan sollen mehr dan ein radix sein, so mueß nottwendig das plus, wan es auffs
höchst gestigen wider abnemen vnd ein minus drauß werden, vnd hingegen auß dem
minus ein plus, vnd geschicht also, das einmahl vmbs ander die differenz vor dem waren
werth, jetz plus' jetz minus hatt, da doch solliche vorgehende differentz oder kürtzere 124v
subtensa alwegen weniger dan gantze Circulos vnderspannet.

* Nu fahr fort vnd vergleich dise Cossische zahl gegen einer subtensa wölliche du wilt,
den diameter außgenommen, arbaitte gleich wie in diser Tabula, oder noch mit mehrern

zahlen, da würstu von 0 biß 2, Neün andere radices finden, nit weniger noch mehr. Zum exempel nim den bogen 81°. 279°, dessen subtensa ist 1298896. Dise subtensam halte gegen den vnderisten ledigen zahlen, dan die gantze Cossische zal durch den angenommenen werth der Radix resolvirt gilt nit mehr dan sovil vnden pleibt. Pleiben nur die ledige zahlen, wie jch dir dieselbige auß der Tafel von kürtze wegen hieher ybersetzt.

Bey dem angenommenen werth der Radix	Pleibt	Soll
01	+ 087	
01569182	. . . . .	. 129
02	+ 156	
03	+ 196	
04	+ 194	
05	+ 152	
05344762	. . . . .	. 129
06	+ 077	
07	— 015	
08	— 106	
08293864	. . . . .	. 129
09	— 174	
1	— 2	
11	— 172	
11614060	. . . . .	. 129
12	— 094	
13	+ 016	
14	+ 128	
14018186	. . . . .	. 129
15	+ 198	
16	+ 176	
16482524	. . . . .	. 129
17	+ 055	
18	— 121	
18051706	. . . . .	. 129
19	— 192	
19362952	. . . . .	. 129
19907924	. . . . .	. 129
2	+ 2	

Hie sihestu das der erste werth der radix sey zwischen 01, vnd 02, weil 129 zwischen 087 vnd 156 stehen mag vnd bedeüttet die subtensam von 9°, 351°, oder dem neünten theil vom kleinern bogen 81°.

Der ander werth ist zwischen 05 vnd 06, dan abermahl 129 zwischen 152 vnd 077 stehen mag, vnd bedeüttet die subtensam von 329°, 31°, das ist das neünte theil vom grössern bogen vnserer subtensa 1298 etc. wöllicher ist 279°.

Der dritte zwischen 08 vnd 09 bedeüttet die subtensam von 49°, 311° wöllicher bogen ist zusamen gesetzet von 40° eim neünten theil des gantzen Circkels, vnd 9° eim neünten theil vnsers kleinern bogens.

Der vierte zwischen 11 vnd 12 bedeüttet den bogen 71°, 289° wöllicher ist zusamen gesetzt auß 40°, eim neünten theil eins gantzen Circkels, vnd 31° eim neünten theil vnsers grössern bogens.

Der fünffte zwischen 14, 15, deüttet auff 89°, 271°, das seind drey stuckhe: Nämlich 40°. 40°. vnd 9°.

Der sechste zwischen 16, 17 deüttet auff 111°, 249°, seind auch drey stuckhe: Nämlich 40°. 40°. vnd 31°.

Der sibende zwischen 18, 19 deüttet auff 129°, 231°, das seind vier stuckh, 40°. 40°. 40°. 9°.

Biß hieher ist der sprung von eim plus in ein minus, oder von disem in jenes alwegen kleiner gewest, dan vnsere subtensa 129.[1]

Jetzo aber von dem werth der Radix 19 in 20 springt es von — 192, in + 200, ist baides 125
mehr dan 129. Da du leichtlich sihest, wan auß — 192 ein plus werden soll, so mueß es algemach abnemen. Das würde geschehen wan du den werth der Radix subtiler nämest, nämlich 190, 191, 192, 193 etc. Zwar khanstu auch ohne dise weitlauffigkhaitt sehen das zwischen 19 vnd 20 noch zwen werth der Radix fallen. Dan weil auß — 192 soll ein plus werden, so mueß — 192 zuvor nichts werden, vnd ehe es 0 würt, mueß es zuvor durch 129 (·vnsere subtensam·) absteigen. Jst derohalben der achte werth bald nach 19, bedeüttet die subtensam von dem bogen 151°, 209°, wöllicher abermahl vier stuckh hatt, nämlich dreyer gantzer Circkel neünte theil 40°. 40°. 40°. vnd vnsers grössern bogens neünte theil 31°.

Gleichsfals, soll das ybergeplibene wachsen von + 0 biß + 2, so mueß es abermahl durch vnsere subtensam 129 wölliche weniger ist dan 2 durchpassirn, vnd würt also den neünten werth der radix zeigen wöllicher bringt die subtensam von 169°. 191°. wölliche baide bogen jeder fünff stuckh hatt, erstlich vierer gantzer Circkeln neünte theil 40°. 40°. 40°. 40°, vnd dan das neünte theil jener 9° von vnserm kleinern bogen, diser 31° vom grössern.

[*Vnd hie geschicht es bey etlichen fürgenommenen subtensen, wölliche sollen mit der Cossischen zahl verglichen, vnd jre bogen getheilt werden, das die bogen zusamen fallen vnd wenigere werth der Radix geben. Als wan der bogen 72° solte getheilt werden in 9 stuckh, vnd sein grösserer bogen 288° vergleiche.*

Du khanst auch auß diser tafel leichtlich abnemen das zuvor zwischen 0 vnd 2 nit mehr dan 9 werth der Radix zu finden (·wan die Cossische zahl gegen einer ledigen verglichen würt ein stuckh Circkels solle getheilt werden·) aber grössere dan 3 durchaus kheine mehr auch khein grösserer dan 2. Dan obwol das ybergeplibene nirgends yber 2 gestigen weder mit plus noch mit Minus so lang der werth der radix vnder 2 gepliben, sondern wan es die 2 erreicht hernach wider vmbkehret jedoch wan der werth mer dan 2 ist, khompt vnder numerus plus vnder vnentlich hoch. Derohalben wan jch sagen wolte, dise Cossische zahl vergleiche sich mit 3, so wär es ein vnmügliche fürgab, aber mit weniger dan 2 verglichen, gibt sie vnendtlich vil werth der Radix wölliche zwar ausser der erzehlten neünen, im Circulo auch vnmüglich werden. Dan weil jch waiß das mein subtensa nit khan lenger sein dan 2, vnd der diameter als die lengiste subtensa nur 2 ist, so schneid jch hiermit ab alle andere mügliche werth, grösser dan 2.][1]

Hie ist in ansehung diser Tafel auch ditz zu melden, das in diser Cossischen zahl, wan 125v
sie gegen einer ledigen verglichen würt kheins wegs mehr werthe der Radix mögen gefunden werden, als jetzo angezeigt, ja nit alwegen mehr dan einer. Dan so lang der werth vnder 2 gepliben ist das ybergeplibene nirgend vnder — 2 oder yber + 2 gestigen, son-

dern wan es die 2 erreichet hatt es wider vmbgekehret. Wan derohalben dise Cossische zahl gegen minder dan 2 verglichen würt, so mueß die Radix auch minder dan 2 gelten, vnd hingegen, ist die Radix minder dan 2, so ist auch das ybergeplibene minder dan 2, vnd khan kheiner grössern gleich sein dan sie selber ist. Vnd biß dahero, weil das ybergeplibene ab vnd zunimpt, so khönden mehr dan ein werth der Radix bey jeder vergleichung werden. Wan aber nun der werth der radix mehr dan 2 genommen würt (·wölliches im Circulo zwar nichts nutzet, weil dessen lengiste subtensa, das ist der diameter, nur 2 ist·) alsdan würdt das ybergeplibene auch mehr dan + 2, vnd steigt nimmermehr herunter zu eim minus, sondern wechst in ein vnentliches, so lang der werth der radix wechst: vnd als dan ists nit müglich, das ein vergleichung mehr dan einen werth der radix mit sich bringe oder die ledige zahl der vergleichung ein 0, oder weniger dan 2 seye.

So gar haben dise Cossische zahlen durch mittelung der gebrauchten Processe die Natur des Circkels an sich gezogen, das sie gleichsam des Circkels eigen worden seind.' *

126 Wie auß den zweyen falschen werthen deren einer zu groß der ander zu klein ist, der rechte werth der Radix zuerkundigen, auch die Resolutiones abzukürtzen. *

Wan baide yberrest in ledige zahlen resolvirt seind so bring sie in eine sum, vnd sprich, dise sum gibt die differentz der zwey falschen werthe, der soll alwegen 01, oder 001, oder 0001 sein. Was für ein differentz gibt mir der eine yberrest allein. Als dan khompt dir, wievil du zu dem kleinern werth hinzuesetzen, oder von dem grössern hinwegnemen sollest, damit dein angenommener werth genawer vnd gerechter werde. Sprichstu, ja wan der circkulbogen seiner subtensa gleich wäre, so ließ er sich also proportionirlich erforschen? Antwort, war ists, wie klein auch jmmer dein bogen ist, so ist doch ein vnderscheid zwischen jme vnd seiner subtensa, dan krump vnd gerad ist ewig vngleich. Derohalben so merckh das dich diser process zum wenigisten vmb zweymahl so vil digitos gegen der rechten versichert, als dein angenommener werth hat. Drüber hinauß soltu nit trawen, sondern wan du jetzo deinen werth mit zweymahl sovil figuren, so dir in der regel detrj khommen, gegen der rechten erlengert vnd corrigirt so widerhol jetzo mit disem corrigirten werth die anfängliche Resolution, da würstu bey dem ybergeplibenen sehen ob er noch zu klein oder groß seye, dan so nim jne vmb 01, oder 001, oder 0001 etc. grösser oder kleiner vnd geselle zu der vorigen noch eine Resolution, biß dir vnden wider etwas yberpleibt: Setz abermahl baide yberreste zusamen, vnd brauch die Regel detrj vmb ferere Correction des zuvor erlengerten werths, da du dan abermahl biß auff zweymahl sovil digitos gegen der rechten trawen darffest, als du letzlich in deinem gebrauchten werth gehabt. Du khanst durch mittel des Mechanischen handgriffs gleich anfänglich auff zwen digitos zurathen, vnd nach beschehener doppelter Resolution vnd gebrauchter Regel detrj deinen errathenen werth in 4 digitis gegen der rechten just bekhommen, so du zum andernmahl mit disem 4 digitos langen werth operirest, so hastu jne in 8 digitis
126v gerecht. Was wiltu dan mehr? oder hastu lust' so operire zum dritten mahl, da würstu 16 digitos gegen der rechten gerecht bekhommen. Wiltu dich dan des alten Canonis sinuum gebrauchen, so findestu eine begehrte subtensam so genaw, das es hernach nur einer operation bedarff dieselbige zu corrigirn.

Sprichstu, ja der anfang wär wol leicht, alweil nur 2 oder 3 digitj im werth stehen, wan jrer aber mehr werden so gibt es yberauß schwäre lange vnd verdrießliche Resolutiones. Antwort, dan laß mich fürsorgen, wie jch dir den Canonem sinuum zurechnen, bald her-

1 ꝛꝛ	10000ꝛꝛ
068	069
068zzz	06900zzz
068	069
0408	00069
544	04830
04624β_7	04761β_7
90000β_7	90000β_7
85376β_7	85239β_7
068	069
51226	852
6830	59667
58056zꝛ	58819zꝛ
068	069
34833	588
4645	41170
39478β_5	40582β_5
270000β_5	270000β_5
230522β_5	229417β_5
068	069
138313	02294
18442	160592
156755zz	158298zz
068	069
94053	1583
12540	110808
106593ꝛ	109225ꝛ
300000ꝛ	300000ꝛ
193407ꝛ	190774ꝛ
068	069
116044	1907
15472	133542
131516z	131634z
068	069
138300	1316
10521	92143
89431ϰ	90827ϰ
9 ϰ	9 ϰ
00568ϰ	00827ϰ
068	069
003413	000083
455	4066
003868	004883 [1]

nach den leichtesten weg erwehlen vnd zeigen solle für eins. Darnach vnd zum andern weil du nit ferrers trawen darffest, alß jetzo angezeigt worden, so werden dir auch die vil figuren zur rechten nichts nutzen, magst dich derohalben in der Resolution der jenigen behendigkheitt gebrauchen die jch dir gleich zu eingang ditz vnderrichts entdeckhet, vnd ausser zwey mahl sovil digitos oder stette, als dein werth hatt, die yberige gegen der rechten ybergehen.

Nim ein exempel im Neüneckh, da zeigt mir der Mechanische Handgriff das die kürtzere subtensa AB zwischen 068 vnd 069 falle. Ditz seind 2 digitj gegen der rechten, dan die erste stell mit 0 ersetzt, würt gehalten für die mittere stelle zwischen den rechten vnd linckhen. Nu will jch mit baiden die cossische zahl resolviren, vnd nit yber 4 digitos multiplicirn gegen der rechten, dan gegen der linckhen. Erhelt es seine weise.

127v* Vnderricht von disser folgenden Aequatio hat 2ϰ als 3ϰ — 1𝔠 ist G. 1. oder 3ϰ ist G. 1𝔠 + 1 *

```
              ϑ            ϰ            z        𝔠
              1            3            0        1
         ---------------------------------------------
              2            1            1
             ---          ---   sub
Exces ——      1  Complem.  2            1
                                       ---
                                        1

                          293
                          0696397
                        347924126444
                       225
zuo suochen die ϑ in den z  1000000000000
                       -------------
                        1 5 3 2 0 8 8
                       -------------
                        33006064016
                         3 33064

            1    ——  1𝔠 multiplitie in die ϰ
           15    ——  ist 15 gibt z
           ---
           15    ——  1ϰ
           ---
           75
           15
           ---
          225    sind ϰ.  subtraier von 300. ϰ
          300             bleibt 75
          ---
           75    Complement
           15
           ---
          375         450  ——
           75          30  ——
          ====        ---
         1125         480          35
         1000  sub     75        1250  Exces
         ----         ---        ----
Exces ——  125         405           3
                                 ----
                                  405  diuisser
```

* Blatt 127v ist im Faksimile wiedergegeben.

Vnderricht von diser folgenden Equation hat 2 ℨ als 3 ℨ — 1 𝒸 ist G · 1 · oder 3 ℨ ist G · 1 𝒸 + 1

Exces — 1 · Complem · 2 · sub

in diser operatio finden ich das ist im ℨ · 1 zuo klein vnd 2 zuo gros dan der 1 𝒸 vnd 1 ist G 3 ℨ setzen ich das ℨ sei 2 so hat der 𝒸 · 28 vnd 1 𝔷 · 2 ℨ sind also im 𝒸 · 4 ℨ so were der 𝒸 alein grosser den die · 3 ℨ vnd sagt die aufgab das 1 𝒸 + 1 ℨ sei gleich · 3 ℨ
darum setzen ich das ℨ sei 1 so sind im 𝒸 · 1 𝔷 im 𝔷 · 1 ℨ das subtrahier ich von den 3 ℨ bleiben noch 2 ℨ die multiplicier ich mit 1 ℨ komen 2 ℨ sub 1 ℨ so bleibt 1 ℨ das nenen ich der Exces darum suochen ich den folgenden bruch geschicht also
die duplaten ℨ im 𝔷 sind — 1/2 quo
darzuo add: ich das duplate ℨ ist — 2
kombt dis — 4
dar von subtrahieren ich das Complement ist — 2
Kombt 2 — 2
das ist der divisor des Excessus so dividiere · 1 · in 2 komen 5/10 das thuon ich zum vorrigen ℨ kombt 15 zum ℨ

zuo suochen die ℨ im den 𝔷

1 — 1 𝒸 multiplicirn
15 — die ℨ ist 15 gibt 𝔷
15 — 3 ℨ
225 · sind ℨ subtrahier von 300 · ℨ bleibt 75
300
Exces — 75 · Complement
1125
1000 sub
Exces — 125

4 x 3 5 Exces
3
4 0 5 divisor

2 3 4 0 9 — sind ℨ sub von 30000
3 0 0 0 0 — · 3 ℨ ·
Complem — 6 5 9 1 — sub

Exces — 0 0 0 8 4 2 1

Exces · — 0 0 0 0 3 5 9 2 3 2

hie hab ich gefunden die 3 zalen als 088 thuon ich zuo dem forgefunden ℨ ist 1532 so macht es 1532088

4 6 9 0 4 8 3 0 6 4 add.
4 6 9 7 1 1 2
6 5 2 9 7 6
4 0 4 4 1 1 6 divisor

0 8 8 add. zum ℨ

4 6 9 4 5 · 9 7 2 7 9 4 8 8 uchier
4 6 2 4 5 9 0 3 4 3 6 8 8
6 6 2 7 0 6 7 6 0 2 5 6 subt
4 8 4 1 3 8 3 9 8 3 4 0 8 divisor

1 0 0 0 0 0 3 5 8 2 0 7 1 8 9 4 6 2 8

hie finden ich diser zal fort zum ℨ
so hab ich im ℨ 1 5 3 2 0 8 8 8 6 2 3 / 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 zuo klein vnd zuo kurtz sind zuo lang

8 8 6 2

oder 1 5 3 2 0 8 8 8 6 2 3 5 6 9 / 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 in disser operatio finden ich das ist im ϰ. 1 zuo klein vnd 2 zuo gros dan der .1✻ vnd 1 ist G 3ϰ setzen ich das ϰ seige 2 so hat der ✻. 2z vnd 1z. 2ϰ sind also im ✻. 4ϰ so werre der ✻ alein grosser den die .3ϰ vnd sagt die aufgab das 1✻ + 1ϑ seige gleich .3ϰ.

darum setzen ich das ϰ seige 1 so sind im ✻. 1z im z. 1ϰ das subtrier ich von den 3ϰ bleiben noch 2ϰ die multiplitier ich in 1ϰ komen 2ϑ sub 1ϑ so bleibt 1ϑ das nenen ich der Exces daraus suochen ich den folgenden bruch geschicht also

die dupleten ϑ im z sind	2 quadrat
darzuo add. ich das duplete ϰ ist	2
kombt dis	4
darvon subtrieren ich das Complement ist	2
kombt 2	2

das ist der divisser des Excessus so diuidier .1. in 2 komen $\frac{5}{10}$
das duon ich zum vorrigen ϰ kombt $1\frac{5}{10}$ zum ϰ.

23409 —— sind ϰ sub von 30000 . .
30000 —— 3ϰ
Complem. —— 6591
153
19773
32955
6591
1008423
1000000
Exces —— 0008423

sub
6
3174
84230
2
40533

23409
46818
306
47124
6591
40533

3000000
2347024
652976
1532
1305952
1958928
3264880
652976
1000359232
1000000000
Exces —— 0000359232

80
348933
450118
35984622
3592320
088 add. zum ϰ
4054136
4054136
4054136

4694048
3064 add.
4697112
652976
4044136 diuisser

hie hab ich gefunden die 3 zallen als 088
duon ich zuo dem forgefunden ϰ ist 1532
so machts 1532088

3064176
4694587279488 adier
—— 4694590343664
—— 652706360256 subt.
4041883983408 diuisser

3000000000000
2347293639744
652706360256
1532088
5221650882048
5221650882048
130541272051
1958119080768
3263531801280
652706360256
1000035820718945 28

15484
977175
1713981
253740994
485843654
96657188699
3502374701016
358207189452806
8862
4041883983408
4041883983408
4041883983408
404188

hie finden ich disse zal hort zum ϰ . . . .

so hab ich im ϰ $\frac{153208888623}{100000000000}$ zuon end zuo kurtz vnd 4 zuo lang

oder $1\frac{5320888886235697}{10000000000000000}$

128 das $\overset{\frown}{\text{II}}$. ϰ aus disser Aequatio zuo finden 3ϰ sind G 1 + 1𝔯

ϑ		ϰ 9	z 3	1𝔯
1000		300	00	1𝔯
873	sub	291 Complement		
Exces —— 127		3		

das kleiner ϰ ist $\frac{3}{10}$ vnd ist zuo klein so ist $\frac{4}{10}$ zuo gros

6
2 5145
1104473116
95609844116
000000000000000
3 4 7 2 9 6
668944458
66994
6

die folgende zal zuo finden nach den	3
sub vom Complement ist	291
das duplete □ ist	18
bleibt disse zal darvon sub	273
das duplete ϰ ist	6
diuisser	267

	3000000
	120409
Complement	2879591
	347
	20157137
	11518364
	8638773
	999218077
	1000000000
der Exces	781923

	3000000000000
das □	120614511616
Complement	2879385488384
	347296
	17276312930304
	25914469395456
	5758770976768
	20155698418688
	11517541953536
	8638156465152
	3333422333
	999999062573809664
	1000000000000000000
Exces	937426190336

Also finden ich in disser vergleichung das 3472963553 / 10000000000 ein ϰ ist am End ist 3 zuo klein vnd 4 zuo gros

Also hab ich das ϰ auf beide art aufgelost vnd gefunden das grosser 15320888862
das kleiner aber 3472963553
so die subtensa ist 10000000000
vnd ist das grosser ϰ gleich AF. FE oder EB
das kleiner aber ist gleich AD. DC oder CB.

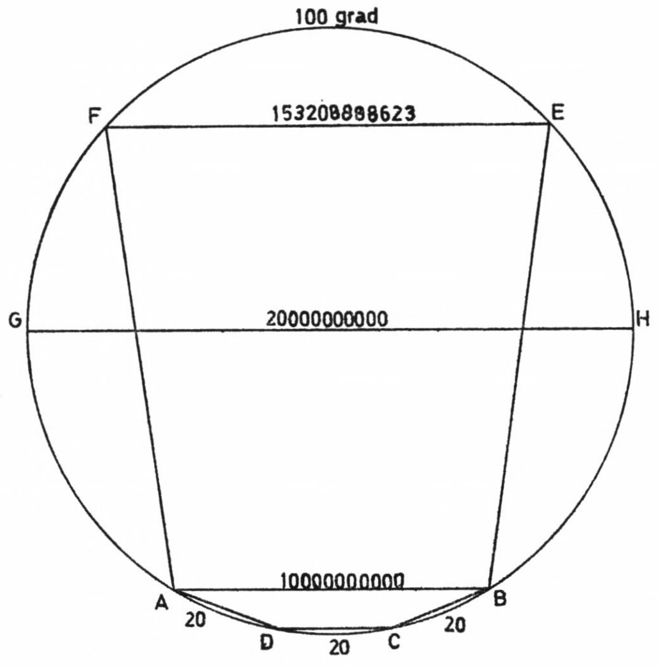
1
3
65
200
4321
12700
47 dis gehort zuo vorgehenden ϰ
26717
266
2

Complement	2879591
sub das duplete □ ist .	240818
	2638773
sub auch das duplete ϰ ist	694
das ist der diuisser	2638079

40
16251
278026
25468791
365309276
Exces 781923090
296 dis gehort zuo dem vorgefunden ϰ
263807999
2638077
26380

Complement	2879385488384
duplete □ sub	241229023232
	2638156465152
sub auch das dup. ϰ . .	694592
das ist der diuisser . .	2638155770560

18 445
299866
80100105
198062227
14021775786
5474900197
1469894546400
6323
3580916891885 52
937426190336000
3553 dis gehort zuo dem vorgefunden ϰ
2638155770560000
263815577056
26381557705^{6}
26381557705^{6}



128v 360
60
420 | 140. 18793852
3 | 70. 09396926

— 1𝔠
Sit 1ϰ — 188z
188
188
1504
1504
— 35344ϰ
+ 3 ϰ
— 05344ϰ
188
05344
42752
42752
1004672
1000000

360
300 140
660 220
3 110
70

Ergo cum 3ϰ — 1𝔠 aequantur 1 vel cuicunque numero, Radix habet etiam tertium Valorem: dividit nempe non tantum minorem et majorem arcum, sed etiam totum circulum una cum minore arcu, vel quod idem est, totum cum majore. *
An verò in imparibus idem semper sit, probabo in quinquangulo.

	72 . .	S. 288		
R	24	R 96		
	336	264		
	360	360		
	432	648	Idem et hic cum	
R	144	216	quinquangulaterum	
	216	144	in 3 dividit	

Adde alterum
504 1068
168 dimid. 336
192 24

Imo in quinisectione proba

60	300	
R_1 112	R_2 60	
348	300	quasi
420	660	
5	5	
R 84	R 132	
276	228	
780	1020	
5	5	
156	204	
204	156	

Hic quoque post duos additos circulos quot sunt subtensae.

60	60		
10.	360		
5. 0871557	420	290	
	6	70	
		35. 5735764.	Radius
		$\sqrt{\frac{1}{3}}$	inscripti cubo

300	50			
6	25. 4226183	300		
		360	250	
		660	110	
		6	55. 8191520	
			$\sqrt{\frac{2}{3}}$	

60		60	
720	230	1080	
780	130	1140	190
6	65. 9063078	6	
300		300	
720	190	1080	
1020	170	1380	230
6	85. 9961947	6	

Weil nun mit 068 vnten + 00569x gepliben 129
vnd mit 069 . . — 00828x also zu baiden orten Radix, wölliche stuckhe gegen einander einerlay proportz behalten, sie pleiben jetzo gleich Radix oder sie werden durch Multiplicirung in ledige zahlen Resolvirt, demnach mag jch bey den Radicibus pleiben das khönte jch nit, wan die Cossische gegen einer waren subtensa oder zahl verglichen würde. Demnach vnd weil an einem ort ein +, am andern ein —, so falt der rechte werth zwischen 068 vnd 069.

Setze derowegen baide yberrest zusamen. Summa 01396. Hernach setz es in die regel detrj, also *

01396½ gibt 001, was + 00569 — vnd dividir biß auff 6 figuren khompt 00040 vnd drüber. *

001
0000569
013965
000139
558
104
97

So soll nun diß stuckh 00040 vnd drüber
zu 408 gesetzt werden.
Jst der corrigirte werth 06840 vnd drüber.

+ 1 ce
+ 06840zzz
06840
041040
54720
273600
+ 046785600β_7
— 9 β_7
853214400β_7
046785600
374284800
23392800
1403568
093571
04679
1871
187
— 399181476β_5
+ 27........
+ 2300818524
046785600
0935712000
140356800
. 374285
. 04679
. 3743
. 234
. 09
. 2

Wills Probiren mit 06840 vnd auff 8 figuren gegen der rechten Multipliciren vnd von kürtze wegen mit quadrato radicis alwegen 2 grad herunter steigen, jtem das vndergesetzte quadrat mit dem obern Multiplicirn durch hülff eins Täfelins damit es leicht zugehe.

Täfelin wie offt		
	0467856	1
	0935712	2
	1403568	3
	1871424	4
	2339280	5
	2807136	6
	3274992	7
	3742848	8
	4210704	9

Hie sihestu das warhafftig 06840 noch zu klein sey.
Nun will jchs auch Probirn mit 06841 ob diser zu groß werden wölle.

+ 1076451752𝔠
— 30 𝔠
— 1923548248𝔠
046785600

0467856000
421070400
09357120
1403568
233928
18714
3743
094
19
4

— 899943590x
+ 9
+ 00056410

+ 1ce
+ 06841zzz
06841

041046
54728
27364
06841

+ 046799281β_7
— 9 β_7
— 853200719β_7
* 046799281

374394248
23399641
1403978
093599
328
09
4

— 399291807β_5
+ 27 β_5
+ 2300708193β_5
046799281

0935985620
140397843
327595
3744
047
42
1

+ 1076714892𝔠
— 30 𝔠
— 1923285108𝔠
046799281

046799281	1
093598562	2
140397843	3
187197124	4
233996405	5
280795686	6
327594967	7
374394248	8
421193529	9

Weil nun abermahl mit 06840, ist vnten + 56410 yberpliben vnd mit 06841 vnten — 83602, so felt der rechte werth zwischen 06840 vnd 06841. 129v
Wolt gern wissen wie groß der zusatz sein müeste in 8 digitis gegen der rechten. Weil hie zuvor 4 digitj gegen der rechten stehen thue jme wie zuvor

+ 56410
— 83602

140012 gibt 00001, was 56410
56410
00001

000056410
140012
56..5

405
280

125
112

13

Khompt 000040289 plus der zusatz
zuvor 06840

068440289 plus jst der gewisse werth in 8 figuren zur rechten.

467992810
421193529
09359856
1403978
093599
37439
2340
047
4
— 900083602x
+ 9
— 00083602

Das magstu probiren mit 068440289
vnd mit 068440290.
Da würstu finden, das der wahre werth zwischen hinein falle. Weil dan die subtensa von 40 gradibus ist 068440290, demnach ist der sinus von 20 gradibus
034220145
den hatt Landsberg 03420201 *

Ob nun wol ditz noch nit der kürtzeste weg ist, ein sinum zurechnen, dannoch verhoff jch er werd dir leichter vnd richtiger fürkhommen, auch kürtzer sein dan der gmeine weg, den sinum von 20° zu rechnen.'

130 Wie der Gantze Canon sinuum auff alle gerade secunda auffs kürtzest vnd schärffest zurechnen seye.

Hie mueß anfangs widerholt vnd bedacht werden, das ein subtensa eins bogens sey * zweimahl solang als der sinus des selbigen halben bogens. Weil dan begehrt würt der sinus auff jede gerade secunda, das ist der sinus des bogens 0°. 0'. 2''. so wöllen wir verstehen die subtensam des bogens 0°. 0'. 4''. Dan es ist hernach bald halbirt.

Jst derohalb ferner vonnöthen das du wissest, wievil sollicher bogen im gantzen Circulo stehen. Das khanstu leichtlich also erforschen. Der Circul hat 360 grad, nach der gebreüchigen vnd von meniglich sovil hundert Jahr angenommenen teilung. *

Ein grad hatt 60 Prima. Multiplicirs

Sovil prima seind im circulo 21600.

Nu würt ein primum getheilt in 60 secunda, weil aber 4'' secunda vns einen bogen geben, so müessen wir ein jedes primum in 15 stuckh theilen

21600
15
108000
216
324000 sovil vnserer stuckh hatt der circulus.

Wiltu nun so magstu die regularische figur von dreymalhundert tausent, vnd vierundzweinzig tausent gleicher seitten in Circulum schreiben, vnd den selbigen auff Cossisch, oder durch erlengerung der obgesetzten Tafel, in sovil stuckh theilen, so würt dir ein * Cossische zahl herauß khommen, wöllicher Radix einmahlhundert tausent, vnd zweyvndsechzig tausent werthe hatt, nämlich alle subtensas des halben Circuls, oder die dupla von allen sinibus des quadranten: die selbige werthe magstu deiner glegenheitt nach algemach suechen. Jch will dirs aber nit rathen, dan zubesorgen, du möchtest das Nachtmahl drüber *

versaumen. Sondern meld es darum, das ein jeder sehe, was von der jenigen fürgeben zuhalten, die da vermeinen man solte die Geometriam dahin bringen, das man des Canonis sinuum oder einiger Tafeln nichts mehr bederffe, sondern alles auff einmahl auß dem kopff rechne' dan hie hastu den selbigen weg, wie ein jeder sinus nur auß dem kopff (·wan er lang gnueg 130v
lebete·) herzunemen seye, es hab gleich der Circulus die gebreüchige theilung von 360°. 60′. 60″, oder ein vngebreüchige, als da ist des Eratosthenis in 83, oder wie dir es der zirckel gibt.

* Dan Eratosthenes hatt einen grossen Circulum gehabt, darinnen hatt er mit einem spitz zirckel begriffen die observirte Obliquitatem Eclipticae: mit disem also aufgesperten zirckel ist er in seinem Circulo herumb gefahren, vnd hat sovil stüpffe gethon, biß entlich ein stupff wider in den ersten eingetroffen, vnd ditz ist nach dem ersten der dreyvndachzigiste gewest, hernach hatt er gesehen wie offt er durch den Circulum herumb passirt, da hatt er gefunden ailfmahl. Wiltu nun wissen die subtensam von $\frac{11}{83}$ theil des Circuls, Nämlich der observirten obliquitatis Eclipticae, so machs wie erst gesagt, theil den Circulum in 83, vnd, weil der khommenden Cossischen zahl Radix 41 werthe haben würt, so nim den ailfften in der ordnung. Jst also die antwort wol so hoch als das Begehren.

Damit man aber auffs kürzeste zur sach khom, so müessen erstlich diser zahl 324000
* kleineste theiler alle kund werden, das lehrt Ramus also

1	324000
2	162000
2	81000
2	40500
2	20250
2	10125
3	3375
3	1125
3	375
3	125
5	25
5	5

Hie sichstu, wan du fünffmahl in 2, viermahl in 3, vnd dreymahl in 5 theilest, also zwölfmahl operirest, das du alsdan der sachen gnueg gethon. Das ist leichter zuthuen, als nur einmahl in 32 theilen, an stat 5 mahl in 2.

* Nu theil anfangs den Circulum in 2 mahl 180, das geschicht durch den diameter 2, fürs ander theil den bogen 180, wöllicher stehet auff der subtensa 2, in drey stuckh, weil die subtensa von 60° grad gerad eins ist.' Das ist auß der Geometria bekhant, vnd zwar auch 131
droben erwisen auß der Cossa. Nim die Cossische zahl auff die trisectionem die heisst 3ϰ — 1ꞓ. soll gleich sein der subtensa 2. Setz 1ϰ sey 1, vnd 3ϰ seyen 3. so würt 1z auch sein 1, vnd 1ꞓ gleichsfals 1. Nim 1 von 3, dan es heist 3ϰ — 1ꞓ so pleibt 2, das ist sovil als die subtensa 2. vnd der werth von 1ϰ recht genommen.

Zum dritten, hastu jetzo einen bogen 60, vnd dessen subtensam 1. wölliches gar ein behende zahl ist. Nu theil disen bogen in 3. dan würt dir khommen die subtensa von 20° grad.

Zum vierten den bogen 20°, wöllicher stehet auff der ietz errechneten subtensa theil in 5, also khompt dir die subtensa von 4 grad.

Zum fünfften theil den bogen 4 in 2 stuckh so khompt die subtensa von 2 grad vnd also der sinus von 1 grad.

Hab dir also den kürzesten weg zu eim grad gezeigt.

Zum sechsten, so theil 2 grad wider in 5, khompt die subtensa von 24′.

Zum sibenden theil 24′ in 3, so khompt die subtensa von 8′.

Zum achten theil 8 in 2 khompt die subtensa von 4 primis.

Zum neünten theil 4 in 2 khompt die subtensa von 2 primis oder sinus von 1 primo.

Zum zehenden theil 2 prima in 5, khompt subtensa von 24″.

Zum ailfften theil 24″ in 3. khompt die subtensa von 8″.

Zum zwölfften vnd letzten theil 8″ in 2 khompt die begehrte kleineste subtensa von 4″.

Ditz ist der kürzeste weg zu den sinibus von 1 grad 1 Minuten vnd 2 secunden zu khommen. Wan du aber nur allein nach 2″ secunden strebest, vnd gerad eins grads vnd einer Minuten nit achtest, so ists besser du brauchest die wenigere teillung alle zu ersten, die vilfaltige zu letzt, da du vil oo gegen der linckhen hast, vnd derohalben in der längern operation quinisectionis desto weniger beschwärden haben würst. Werden dir als dan diser bogen subtensae khommen

180°. | 90°. | 45°. | 22°. 30′. | 11°. 15′. | 3°. 45′. | 1°. 15′. | 25′. | 8′. 20″.
1′. 40″. | 20″. | 4″. |

131 v Folgen etliche particular vörtl in der Aequation.

Ob wol der richtige weg zun sinibus zu khommen jetzo angezeigt, jedoch weil jch bißweilen von lusts wegen ausser der Landtstrassen gegangen, vnd zu etlichen schönen lustwälden khommen, will jch dir dieselbigen wege auch zeigen, dan der Circulus ists würdig, das man seinen geheimnussen nachforsche. So hab jch auch bißweilen einen sinum von sicherheitt wegen auff mehrerlay art rechnen sollen: Hatt sich auch je einmahl begeben, das jch bey sollichen abwegen vmb ein sprünglein neher khommen bin.

Anfangs vnd weil die Cossische zahlen wölliche eine gerade theilung bedeütten in obgesetztem Täfele mit dem zeichen $\surd$ bezeichnet seind, vnd ein quadrat vertretten, hab jch mich bemühet, derselbigen Cossischer zahlen Cossische Radices zusuechen.

Nu hastu sovil berichts, auß dem ersten theil, das dise zahlen für sich selber nit tauglich seyen, ein Cossische wurtzel drauß zunemen: dan ob wol zwischen jren glidern einerlay distantz vnd die geschlechter gerade namen haben, auch die zahlen im ersten vnd letzten glid für sich selber quadrat seind, so mangelt es doch an dem, das die zahl der glider nit vngerad ist. *

[*Hab derowegen bedacht, das solliche zahlen khein glid von ledigen zahlen haben, vnd derowegen eine ledige zahl zu jhnen möchte entlehnet werden, der gestalt, wan* $\surd$ 4z — 1zz *sol gleich sein einer subtensa* o: *so khan man wol zu baiden orten gleich ledige zahlen anhengen, sovil man bedarff als*

	$\surd$ 4z — 1zz	*vnd*	o
oder	4z — 1zz	*vnd*	oz
setz hinzue	4		4
so ist	4z — 1zz + 4	*gleich*	4

vnd Radix von 4z — 1zz + 4 *würt gleich sein der Radici von* 4, *das ist* 2. *Wan dan*
132 *hernach*' *die cossische radix von diser cossischen zahl die aequation zwischen disen zwoen zahlen auch ein glid von ledigen zahlen bekhompt mag man zu baiden orten wider gleiches, nämlich* 2, *hinweg nemen, das also nichts desto weniger mein gegebne subtensa sovil als* o *pleibt, vnd also entlich dem angeben nach in die aequation gesetzt würdt.*]

Jedoch hab jchs versuecht, wievil einer jeden möchte abgehen. Vnd weil es natürlich, das die grössiste quantitet vorn an stehe, hab jch sie herumb gekehrt. Nämlich an statt 4z — 1zz, hab jch geschriben — 1zz + 4z. Vnd damit die zahl der glider vngerad werde, hab jchs also geschriben — 1zz + 4z + 0ϑ. Das hab jch wol khöndt, weil von ϑ auff z ein geschlecht ausgelassen ist, gleich wie von z auff zz auch eins. Hie hat sich abermahl ein difficultet gefunden. Dan wie jch meine düpflin vnder das erste vnd letzte glid gesetzt vnd von — 1zz die wurtzel genommen nämlich + 1z, oder — 1z. dan + 1z mahl + 1z ist + 1zz, vnd — 1z mahl — 1z ist auch + 1zz, das jch also von baiden radicibus + 1zz bekhommen, die sollte jch subtrahirn von — 1zz. So wüste jch aber vermüg der subtraction, das jchs anderst nit khönde dan durch eine addition, solte mir also ybergepliben sein — 2zz. vnd wurde also ditz erste geschlecht nit aufgehebt. Da merckhte jch das jch auff die bande nicht sehen solte. Hab sie derowegen fahren lassen vnd weil 1z mahl 1z ist 1zz, so nim jchs von 1zz pleibt nichts yber. Nu fahr jch fort zweymahl 1z ist 2z, die hab jch in 4z, 2ϑ mahl, setze 2ϑ zwischen die linien vnder das letzt düpflin, vnd multiplicir $\overset{\text{o}}{2}$ mahl 2z ist 4z, ditz von den obern 4z genommen lasst nichts yber. Nu soll jch auch multiplicirn 2 in sich selbst, gibt $\overset{\text{o}}{4}$, die solt jch von $\overset{\text{o}}{0}$ hinweg nemen, da sihe jch das mir 4 abgehen mit wöllichen 4 die Cossische zahl zu einer quadrat würt. Vnd sovil nit weniger oder mehr gehet einer jeden cossischen quadrat zahl ab so in der obgesetzten Tafel gefunden würt. Jst also die radix von — 1zz + 4z + 4 sovil als 1z vnd 2. [*Vnd weil das quadratum* — 1zz + 4z + 4 *sich verglichen mit dem quadrato* 4 *so würt jezo die wurtzel* 1z + 2 *sich mit der wurtzel* 2 *vergleichen. Wan dan zu baiden orten wider* 2 *hinweg genomen würt, dan so vergleicht sich* 1z *mit der subtensa* 0: *Oder was man sonsten für eine subtensam zu anfangs gebraucht hette.*]' Wan nun 4z — 1zz gleich ist dem quadrato der subtensae von 0, 132v
vnd derohalben 4z — 1zz + 4 gleich dem quadrato 4, so werden die wurtzeln auch gleich nämlich 1z + 2 vnd 2 etc. vnd nach abziehung gleicher zahlen, würt 1z gleich sein dem quadrat der subtensae von 0.

Gehe nun jetzo in die obgesetzte Tafel der Cossischen zahlen, da würstu zwischen den zeilen 1. vnd 3. fünden √1z.

* Sihe da, die gleiche teillungen stehen nit nur mit jren quadratis (·wie sie auß den Cossischen Processen gefunden werden·) sondern auch mit jren radicibus, so wol als die vngerade, in diser wunderbarlichen Tafel jede an jrem rechten ort vnd thuet also dise Tafel mehr, als sie von den Cossischen Processen gelehrnet hat.

Dan wan du auff angezeigte weise suechest die radix von $4 + \overset{\text{II}}{16} — \overset{\text{IV}}{20} + \overset{\text{VI}}{8} — \overset{\text{VIII}}{1}$ würt dir herauß khommen 2 + 4z — 1zz. Item Radix von $4 + \overset{\text{II}}{36} — \overset{\text{IV}}{105} + \overset{\text{VI}}{112} — \overset{\text{VIII}}{54} + \overset{\text{X}}{12} — \overset{\text{XII}}{1}$, ist $2 + \overset{\text{II}}{9} — \overset{\text{IV}}{6} + \overset{\text{VI}}{1}$. Item radix von $\overset{\text{o}}{4} + \overset{\text{II}}{64} — \overset{\text{IV}}{336} + \overset{\text{VI}}{672} — \overset{\text{VIII}}{660} + \overset{\text{IX}}{352} — \overset{\text{X}}{104} + \overset{\text{XI}}{16} — \overset{\text{XII}}{1}$ ist $\overset{\text{o}}{2} + \overset{\text{II}}{16} — \overset{\text{IV}}{20} + \overset{\text{VI}}{8} — \overset{\text{VIII}}{1}$, wölliche zahlen alle (·das glid von ledigen zahlen hinweg geworffen·) in der Tafel zufinden.

Doch mag ein solliche gesuechte Cossische Radix nit alle die werthe von jrer Radice herfür pringen, wölliche gefunden werden in jrem Cossischen quadrat: sondern nur den andern vierten sechsten etc. nit aber den ersten dritten fünfften etc.

Wie du dan jetzo gesehen hast, das die Cossische zahl √4z hatt sollen gleich sein einer 0. derowegen auch Radix sovil gilt als Nichts, dan das Cossische quadratum 4z — 1zz hat nur einen oder nur den ersten oder vnkraden werth gehabt, da sie gegen 0 ist verglichen worden.

Also wan $\surd\,\overset{\text{II}}{9} - \overset{\text{IV}}{6} + \overset{\text{VI}}{1}$ in sechs stuckhe theilen soll (·weil sie zwischen 5 vnd 7 in der sechsten stelle gefunden worden, vnd die verkürtzte radix ist auch $\overset{\text{II}}{36} - \overset{\text{IV}}{105} + \overset{\text{VI}}{112} - \overset{\text{VIII}}{54} + \overset{\text{X}}{12} - \overset{\text{XII}}{1}$·) gibt sie nur den werth der subtensa von $\frac{2}{6}$ oder $\frac{1}{3}$, vnd gar nit von $\frac{1}{6}$ oder $\frac{3}{6}$.

Also wan $\surd\,\overset{\text{II}}{16} - \overset{\text{IV}}{20} + \overset{\text{VI}}{8} - \overset{\text{VIII}}{1}$ in 8 theiln soll gibt sie nur die subtensam von $\frac{2}{8}$ vnd $\frac{4}{8}$. Nit aber von $\frac{1}{8}$ vnd $\frac{3}{8}$. Die vrsach bein impariter paribus ist leicht zu errathen. Dan wan
133 ein Cossische zahl von' vngerader theillung in sich selbst Multiplicirt würt, fündet sich das khommende quadratum in einer stelle zweymahl so weit vom anfang. Als nim in der Tafel die erste zahl 1ϰ aus der ersten stell quadriers, khompt 1z, das fündestu in der zweyten stelle, nu ist 2 zweymahl sovil als 1. Also quadrir 3ϰ — 1✱, auß der dritten stelle, khompt 9z — 6zz + 1z✱. stehet in der sechsten, vnd drey zweymahl ist 6. Also ist das quadratum auß der 5ten stelle zufinden in der zehnden, vnd so fortan. So offt du nun an stat des quadratj die radicem brauchest in eim geraden feld stehend, so ists eben als wöllestu an statt einer geraden section ein vngrade durch ein Cossisches quadrat brauchen, die nur den halben theil der werthe einer Radix geben khan: in ansehung das die subtensa o vnd jr quadrat o eines sovil ist als das ander.

Will noch ein gantzes völliges Exempel geben. Nim auß der 12ten stelle die zahl $\surd\,\overset{\text{II}}{36} - \overset{\text{IV}}{105} + \overset{\text{VI}}{112} - \overset{\text{VIII}}{54} + \overset{\text{X}}{12} - \overset{\text{XII}}{1}$. Mit diser zahl, solte jch nach längstbeschribner anweisung den zirckel in 6 theilen, vnd sie gegen dem quadrato o subtensae o vergleichen, weil die erste zahl 36, das quadratum von 6 ist. Weil aber das quadrat sehr vil glider hatt, vnd schwär ist zuhandlen, daher mich ein lust ankhommen, jre radicem Cossicam mit meiner subtensa o zuvergleichen so suech jch jr radicem. Kehre sie vmb.

Entlehn 4 4

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & 18 & & 4 & & 24 & & & & \\
1 & \cdot & 12 & \cdot & 54 & \cdot & 112 & \cdot & 105 & \cdot & 36 & \cdot & 0 \\
\cdot & & & & \cdot & & & & \cdot & & & & \cdot \\
\hline
\text{VI} & & & & \text{IV} & & & & \text{II} & & & & \text{o} \\
1 & & & & 6 & & & & 9 & & & & 2 \\
\hline
 & & 2 & & 2 & & 12 & & 81 & & 18 & & 4 \\
 & & & & & & 2 & & 12 & & & &
\end{array}
\qquad \text{gleich } \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix}\,.
$$

So ist $\overset{\text{VI}}{1}\ \ \overset{\text{IV}}{6}\ \ \overset{\text{II}}{9}$ gleich einer o. Die bande mögen sein wie sie wöllen, allein das sie im wechsel stehen, Nämlich eintweder $+\overset{\text{VI}}{1} - \overset{\text{IV}}{6} + \overset{\text{II}}{9}$ oder $-\overset{\text{VI}}{1} + \overset{\text{IV}}{6} - \overset{\text{II}}{9}$. Dan eine mit einem band mueß entlich sovil machen, als andere zwo mit einem gegengesetzten bande. Nu find jch dise $\overset{\text{II}}{9}.\ \overset{\text{IV}}{6}.\ \overset{\text{VI}}{1}$ zwar in der sechsten zeil sihe aber das es ist das quadratum von der trisection 3ϰ — 1✱, derowegen werd jch nur allein derselben section subtensas bekhommen, Nämlich die geraden subtensas von der sexsectione, dan $\frac{1}{3}$ ist $\frac{2}{6}$. Das magstu probirn, versuech erstlich den werth 2.'

*

		Jtem mit	Jtem mit $\sqrt{3}$
	VI	VI	
	1	1	1
	2	1	$\sqrt{3}$
	V	V	IV
	2	1	3
			IV
	2	1	6
	IV	IV	IV
	4	1	3
	IV	IV	
	6	6	3
	IV	IV	II
	2	5	9
			II
	2	1	9
	III	III	
	4	5	0
	2	1	Recht
sol gleich sein	II	II	
	8	5	
	II	II	
	9	9	
	II	II	
	1	4	
	falsch	falsch	

Dise 3 subtensae oder werthe der Radix haben sich zuvor gefunden. Jetzo findet sich nur die andere nidere ordnung.

Ein gleiches khanstu dir auch einbilden von denen geraden theillungen die da pariter pares heissen. 133v Sintemahl die selbige Cossische zahlen gleichsfals jre Radicem (·vel quasi·) an jr halbirte stelle einbringen als $\overset{\text{II}}{16} - \overset{\text{IV}}{20} + \overset{\text{VI}}{8} - \overset{\text{VIII}}{1}$, stehet an der 8ten stelle sein radix (·vel quasi·) $\overset{\text{II}}{4} - \overset{\text{IV}}{1}$ stehet an der 4ten stelle vnd 8 ist zweymahl 4. Wan nun ein theilung des Circulj in 4 geschehen soll vnd jch neme an statt $\overset{\text{II}}{16} - \overset{\text{IV}}{20} + \overset{\text{VI}}{8} - \overset{\text{VIII}}{1}$ vnd quadratj o: jre radices 4z — 1zz vnd o: so khom jch wider meinen willen auß der quadrisectione in die bisectionem, vnd bekhomme auch nit mehr dan die selbige werthe einer radix.

Aliud est comparare excessum vel defectum quadratorum, aliud laterum, aliud Numerorum. Nam formae excessuum fiunt aliae coincidunt tamen in o. quare et numerus radicum alius pro quadratis, alius pro subtensis.

Videntur excessus numerorum in paribus figuris assurgere ad 4, quadratum rerum, et tunc plures quinione sunt radices etiam infra 2, excessum superante 2.

Hast also fürs erst auß gesetztem discurs disen vortl, das du in dem halben theil der werthe einer Radix (·wan die theil in gerader anzahl sein sollen·) nit darffest mit den langen Cossischen zahlen Procedirn, sondern solliche in den verkürtzeten zahlen suechen magst. Nämlich an statt $\frac{2}{10}$ suechestu $\frac{1}{5}$ vnd so fort an.

Zum andern weil in dem Handel die sinus auff meine weise zurechnen, man zum offtermahl in zwey vnd in drey theilen mueß, hab jch mich beflissen, bey den selbigen auch andere aequationes zufinden, die mich gerad zu dem zweckh führen, vnd mir zu end der
134 operation kheinen Abgang oder yberschuß geben. Wiewol jch im werckh ge'spüret, das vnderweilen dise processe mehr hindernus als befürderung mit bringen.

Es werden aber baide aequationes fast auff die weise verrichtet, wie sonsten die gmeine wurtzel suechungen des quadratj vnd Cubj, vnd haben einerlay fundament, in dem bedacht würt, das ein jede wurtzel oder Latus in so vil theil gehe, so vil digitj in jrer zahl stehen: dahero auch jr quadrat in sovil gnomones (·eins weniger: an dessen statt das grössiste quadrat selber stehet·) getheilt würt.

Vnd ob wol solliche weise die zwo kürtzeste Cossische theillungszahlen zu aequirn in gemein bey allen vnd jeden werthen der Radix zugebrauchen, sie seyen groß oder klein, jedoch gehen sie füeglicher auff die jenige bögen wölliche kleiner seind als ein halber Circkel, da die subtensa des gantzen bogens nit mehr vmb vil kürtzer ist als die gesampte subtensae jrer erforderten theile, wie bey dem bogen 60° vnd allen hernachfolgenden kleinern bögen beschicht.

Weil es dan langweilig vnd der mühe nit werth dise weise auch auff grössere bögen zu ziehen, (·sonderlich wa ein einige subtensa eins stuckhs gleich oder länger ist, als die subtensa des gantzen bogens·) will jch solliche grössere bögen fahren lassen, vnd den folgenden vnderricht allein von den jenigen verstanden haben, die 60° grad vnd drunter halten.

Der beste vnderricht aber beschicht mit erclärung der Exempeln. So sey nun mir fürgeben der bogen 60°, dessen subtensa 1. Disen soll jch anfänglich in 2 gleiche stuckh theiln, vnd also die subtensam des halben theils erkundigen. Da sagt mir der Cossische Process oder die obere Tafel, das die subtensa des halben theils sey 1ϰ, oder jr quadrat 1z, vnd der subtensae des gantzen quadratum sey 4z — 1zz. Weil aber 4z — 1zz sovil ist als *
das quadratum von 1, das ist 1 (·dan die subtensa von 60° hab jch für bekhant angenommen das sie sey 1·) [*so folgt, das* 4z *sovil machen als das quadratum von* 1ϑ *ist* 1 *zusampt* 1zz. *Also würt* 1z *ein wenig mehr sein müessen dan der vierte theil von* 1.] so folgt das 4z mehr seyen dan 1. Dan die Cossische zahl sagt, wan ich 1zz von 4z wegneme, so pleib 1. [*Derohalben würt auch* 1z *mehr sein dan das vierte theil von* 1 *oder* 025, *nämlich vmb* $\frac{1}{4}$ *eins* zz. *Wan jch nun sag* 1z *sey* 025] Wan jch nun sag 4z machen 1, oder 1z mach 025, so gib jch dem z die zahl zu klein; damit sie aber gebürlich vermehrt werde, vnd weil jch jetzo gesagt, das 1z seye 025, so multiplicir jch 025 mit sich selbst, so khompt das 1zz seye 00625.
134v Jst derhalben jetzo der warheitt näher, wan jch sag, 4z machen 10625, aber noch' nit gar war, dan weil 1z mehr ist dan 025, so ist auch 1zz mehr dan 00625. Nim derohalben abermahl das vierte theil von 10625, das ist 0265625, da weiß jch abermahl das 1z vmb ein kleins grösser, jedoch quadrir jchs, das drauß werde ein zz, nämlich 007056640625, setz *
in zu 1, so ist demnach abermahl der warheit neher das 4z sovil machen als 107056640625 vnd ein wenig mehr. Derohalben abermahl 1z würt machen 0267641601 vnd ein wenig mehr. Also möchtestu immerzu fort operirn vnd den z verpessern, biß er lang gnueg gegen der rechten erlengert würde.

Da du dan, von kürtze wegen, merckhen solt, das du anfangs (·da du gesetzt hast der z sey 025·) die erste zahl, nämlich 2 guett gehabt hast, die andere zahl aber oder digitum 5 falsch. Jm andern satz hastu zwo zahlen 26 guett gehabt, die dritte 5 ist falsch gewest, derowegen vnvonnöthen gewest, das anfangs 025, darnach 0265625 quadrirt hast. Wär gnueg gewest, du hettest anfangs nur 02, hernach nur 026 quadrirt. Folgt derohalben dise Operation jetzo verkürtzt vnd in eim Compendio. *

3
111
3570
62268
2378941
02476568436
10000000000
0267949
444442
53
427
53343
319957
276568436
0267949
004
0012
156
12
36
1596
266
266
1
2136
2136
64
2670
2670
107160
107176

Jch setz die zahl 1 wölliche soll gleichen 4z — 1zz. erstreckhe sie mit nullen gegen der rechten drunter zieh jch zwen strich vnd vnter baiden vnd 1 setz jch 4 sprechend 4 in 1, hab jch o mahl, ditz o setz jch zwischen die Linien vnder 1, setz die 4 hernach, sprechend 4 in 10, 2 mahl, die 2 setz jch zwischen die linien vnd sprich 2 mahl vier ist 8, diese von den obern 10 pleibt 2, die setz jchdrüber vnd durchstreich die 10. Nu quadrir jch 02 besser vnden absonderlich, khompt 004, die mueß jch zu den obgeplibenen 02 hinzue setzen, dan 4z ist mehr dan 1000 etc. vmb das quadratum von 1z. stehen derohalben oben jetzo 0.024, so setz jch meine 4 weitter vnd sprech 4 in 24 hab jch 6 mahl, dise zwischen die lineas, vnd weil 4 mahl 6 ist 24, so durchstreich jch sie pleibt nichts. Weil dan abermahl 4z grösser seind dan 1000, vmb das quadrat von 026, vnd aber das quadrat von 02 schon droben darzue gesetzt, so mueß jch jetzo den gnomonem von 006, der vmb das quadrat 020 gehöret, auch droben hinzue setzen. Multiplicir derohalben vnten 02 in 006, khompt 0012, ferner 006 in 026, khompt 00156 (·aber nit 02 in 02 dan ditz ist zuvor geschehen·) summa ist 0000276, die gehören hinauff yber die operation. Setz meine 4 wider vmb ein stett für pas, vnd sprech 4 in 27 hab jch 6 mahl, pleibt 3. Nu soll abermahl der Gnomon' von 0006 vmb das quadrat 0260 gesuecht vnd droben hin- 135
zue gesetzt werden. Der macht 0003156, vnd der mit dem oberen 0003600, macht 0006756. Die werden oben gesetzt vnd das yberige außgelöschet. Solt abermahl meine 4 fort setzen so sich jch aber, das jch jetzo 4 in 6, das oben yber ime stehet, noch einmahl haben khan, pleibt 2 an stat 6, derohalben der quotiens nit 0266, sondern 0267 sein solle. Weil dan jetzo noch 0001 hinzue khompt, so suech jch den gnomonem 0001 vmb das quadratum 0266, der ist 0000533, setz jn zu dem oben yberplibenen 0002756 so khompt oben 0003289. Setz abermahl meine 4 fürpaß vnd sprech 4 in 32, hab jch 8 mahl, 4 mahl acht ist 32, von 32 gehet auff, vnd der gnomon 00008 vmb das quadratum 02670 ist 000042784, das macht mit den vorigen 000008900 sovil als 000051684. Hie khan jch abermahl 4 in 5 noch einmahl haben ehe jch 4 fürpaß setze, pleibt 1, derohalben der quotiens nit 02678, sondern 02679 sein sollen. Multiplicir 00001 in 02678 vnd 02679, summa 000005357, mit den obern 000011684, macht 000017041. Jetzo setz 4 fürpaß vnder 17, das hab jch 4 mahl, pleibt 1, multiplicir 000004 in 026790, vnd in 026794, khompt 00000214336, mit 00000104100, macht 00000318436. Setz abermahl 4 fürpaß, das hastu in 31 sibenmahl, etc. wie vor. Du würsts wol 9 mahl haben khönden, wegen des Gnomonis der herzue wechselt. Machs für dich selber weitter fürpaß biß du müed würdest, dan es vnentlich hinauß gehet. Derohalben so würt 1z sein 0267949, vnd demnach 1ϰ würt sein radix auß diser zahl, nämlich 05176 etc. Das versuech mit den sinibus. Dan halb 60 ist 30 vnd dessen halb theil 15 hatt ein sinum 2588190 sein duplum, das ist die subtensa von 30° ist 5176380.

Gleichergestallt soll auch mit der trisectione gehandelt werden, allein das jetzo auß dem quotienten mueß ein Cubus, vnd Cubische Gnomones drumb her gesuecht werden, derowegen es etwas mühesamer zugehet.

Zum exempel sey mir abermahl fürgegeben der bogen 60, dessen subtensa ist bekhandt,
nämlich 1. Disen bogen soll jch in 3 gleiche stuckh theiln vnd also die subtensam des
dritten theils erkundigen. Da sagt mir der Cossische process oder die Obere Tafel, das die
135 v subtensa des dritten' theils sich halte zu 1, der subtensa des gantzen bogens wie 1ϰ zu
3ϰ — 1ꝶ. Das ist sovil geredt wan jch die 3 subtensas aller dreyer stuckhe zusamen setze, *
so seyen sie lenger dan die subtensa vom gantzen bogen vmb den cubum von jrer einer,
vnd wan jch den cubum von jrer einer zu der bekhanten subtensa 1 hinzue setze, vnd das
dritte theil von diser summa neme so habe jch die rechte lenge der begehrten subtensa.
[*Si fuerint quatuor continuè proportionales quarum prima radius secunda vero subtendat* *
aliquem arcum: Ejus subtensa triplum, diminutum quartâ proportionalium, subtendit triplum
arcus.] So will jch nun nemen das dritte theil von 1, nämlich 0333 etc. dise zahl ist zu
klein für den werth einer radix, will derohalben den cubum von 0333 suechen vnd zu 1
setzen. Da fündt sich erstlich das quadratum von 033 etc. 01111 etc. vnd wan 033 in 011
noch einmahl multiplicirt würt, so khompt der Cubus 0037037 etc. Die setz jch zu 1, vnd
nim das dritte theil 0345679, ditz ist der warheitt näher doch nit gar war, dan, weil zuvor die radix 033 zu klein gewest, ist auch der cubus 0037 zu klein, vnd derohalben die
summa 1037, wie dan auch ditz jr dritte theil 0345 etc. noch zu klein.

N. von verkürtzung.'

136 Ob nu bey diser blinden vnd falsechten strassen ein vortl sey oder nit, will jch dir mit
der bisection erclären, da jch zuvor nur drey Operationes gebraucht. So versuech nu jetzo
den gmeinen weg, der ist zwar Geometrisch richtig vnd hell, da einer gar mit kheinem *
zweiffel behafft, aber etwas weitter vmb: dan da muestu erstlich die bekhante halbe subtensam quadrirn vnd sollich quadrat von dem quadrat des halben diameters wegnemen. Des yberigen Radicem muestu fürs ander suechen, vnd dieselbige vom Radio abziehen. Fürs dritt diß yberige quadriren, vnd zu dem vorigen quadrat der bekanten halben subtensa zusetzen: fürs vierte diser summa radicem suechen.'

136 v

Wie ein subtensa kürtzlich auß der andern zufinden.

Hiervon haben die Authores vor disem allerlay griffe an tag gegeben, deren kheiner zuverachten oder zuybergehen. Weil die arbeitt eben schwär vnd weittläuffig, So hab auch jch schon droben angezeigt wan ein subtensa bekhant, wie jres bogens halbirten Complementj ad semicirculum subtensa durch ein einige Operation zufinden, jtem durch noch eine Operation die subtensa des jenigen bogens der von dem anfenglich bekhanten vnd sollichem halben theil seins Complementj ad semicirculum zusamen gesetzt sey.

NB* Dise vnd dergleichen andere mehr seind nur particular vörtl, deren jch wol vil setzen
khönte, vnd hernach auch setzen will. An jetzo aber ists zeitt, das jch die jenige einbringe,
wölliche mir zu ergäntzung des Canonis sinuum durch auß vnd am maisten verholffen haben. *

* Wahrscheinlich von späterer Hand.

* Anfenglich vnd wan dir also wie kurtz zuvor gelehrt worden, die subtensa von 4″ bekhant worden, so lehrt dich jetzo die Cossa oder obengesetzte Tafel vil richtiger, als bißhero, wie du die subtensas vom dupelten tripelten viertopelten fünfftopelten etc. bogen erlehrnen sollest. Zum exempel, weil die subtensa eins jeden bogens sich helt gegen der subtensa des doppelten bogens wie $1\varkappa$ gegen $\surd\, 4z - 1zz$, oder wie $1z$ gegen $4z - 1zz$: demnach so quadrir deine gefundene kleineste subtensam von dem bogen 4″, so hastu jren zens, quadrir auch ditz quadrat, so hastu jren zensizens. Nu multiplicir den zens mit vier, vnd subtrahir darvon den zensizens, was yberpleibt, ist das quadrat der subtensa von 8″ vnd muest drauß die radicem suechen. Gleichergestalt vnd weil die subtensa von 4″ sich helt gegen der subtensa von 12″, jres tripelten bogens, wie $1\varkappa$ gegen $3\varkappa - 1\mathfrak{c}$: so Multiplicir dein kleineste subtensam noch einmahl in jren zensicens, damit du jren Cubum habest, dan so triplir solliche kleineste subtensam vnd zieh jren Cubum darvon ab, so hastu die subtensam von 12″.

Widerumb, weil du droben gefunden das quadrat von 8″, so multiplicir es erstlich in 4, dan in sich selbst, vnd dise letzte summa subtrahir von jenen so pleibt ein quadrat, drauß radix ist die subtensa von 16″.

Ferners zuerkundigen die subtensam von 20″ (·wan du sie nit zuvor vnder den zwölff ersten Operationibus gefunden·) weil die subtensa von 4″ vermüg der Tafel sich helt gegen der subtensa von 20″, wie $1\varkappa$ gegen $5\varkappa - 5\mathfrak{c} + 1\beta_5$. So multiplicir den zens von deiner kleinisten subtensa, in jren Cubum; da würstu den sursolidum bekhommen, zu disem setz die subtensam mit 5 multiplicirt, vnd von diser summa nim weg jren Cubum mit fünff multiplicirt, so pleibt dir die subtensa von 20″. Mit 24″ handel auß 12″, vnd mit 40″ auß 20″, wie zuvor mit 8″ auß 4″. Also auch mit 32″ auß 16″, vnd mit 48″ auß 24″, wie zuvor mit 16″ auß 8″. Mit 36″ aber handel auß 12″, vnd mit 60″ auß 20″, wie zuvor mit 12″ auß 4″. Noch seind yberig 28″. 44″. 52″. 56″. da zwar 56″ auß 28″ folgen würt. Mit den yberigen dreyen handel auß der Tafel, nach ausweisung der zahln auff 7. 11. vnd diß magstu also fort treiben, biß du sein müed würst.[1]

Gleiches ist auch zu verstehen, wan dise jetz gemeldete bögen nit secunden, sondern 137
halb sovil primen, oder auch gantze grad wären. Vnd weil du von jetzerzehlten Processes wegen, die quadraten von allen anfenglichen subtensis haben muest, so gehet es mit einer mühe hin, wan du gleich zumahl solliche quadrata von dem quadrato diametrj weg nimmest, vnd des yberigen wurtzeln suechest, da dir also die letzte subtensen im halben
* zirckel herauß khommen.

Du magst auch hie gar füeglich den erst widerholten vortl mit vnter mischen, Nämlich also. Nim das quadrat der subtensa auff 4″ vom quadrato diametrj, so pleibt dir ein
* quadrat drauß radix ist die subtensa auff 189°. 59′. 56″. Nim eben dis quadrat auff 4″, von dem diametro selbst, so pleibt dir die subtensa auff 189°. 59′. 52″ selbst, ohne wurtzelsuechung. Das also diser vortl dich der wurtzelsuechung yberhebt auff dise letzte subtensas.

179	59. 52
	59. 44
	59. 36
	59. 28
	59. 20
	59. 12
	59. 4
	58. 56
	58. 48
	58. 40
	58. 32
	58. 24
	58. 16
	58. 8
	58. 0

Auff die yberige subtensas aber so zwischen dise einfallen pleibt es bey der wurtzelsuechung.

Hastu nu vil der kleinesten subtensen, so würstu auch so vil der lengesten bekhommen, vnd so du aller subtensen biß auff 60°. quadrata hettest, wäre hiermit auch der halbe theil aller yberigen subtensen von 60 biß auff 180 gefunden: je eine vmb die andere außgelassen.

Eben diser vortl gibt dir auch durch mittel der wurtzelsuechung gleich anfangs die subtensas so im Mitteln des halben Circulj stehen. Dan die subtensa auff 8″ zum diametro * selbst gesetzt, macht das quadrat von der subtensa 90°. 0′. 4″. Eben dise subtensa auff 8″ genommen von dem diametro selbst, lasset das quadrat von der subtensa auff 89°. 59′. 56″. Auff dise weise, vnd vermittelst der subtensen auff 8″. 16″. 24″. 32″. 40″. 48″. 56″. khommen dir alle subtensen von 89°. 59′. 32″, biß 90°. 0′. 28″. Vnd so du hettest den halben theil aller subtensarum biß auff 60, je eine vmb die andere außgelassen: so hettestu zumahl die quadrata aller subtensen von 60 biß auff 120 kheine außgelassen.

Hast also hiermit vnd durch die halbirte subtensas den anfang, Mittel, vnd End des Canonis sinuum, in etlichen vilen nacheinander folgenden sinubus.

Wie der gantze Canon sinuum durch die blosse differentias je zweyer sinuum von anfang bis zum ende zuerheben seye. *

Hievor erörterte weise, die sinus zurechnen sey so kurtz vnd behende als sie jmmer mag so wär es doch ein sehr langweilige arbaitt, mit quadriren vnd wurtzelsuechen, oder mit deren nur einem einen jeden sinum in sonderheitt zuerforschen. Derowegen jch mich auch wie andere Authores vor mir, hin vnd wider mit den differentijs beholffen, doch nit, wie sie, auff einen vnsicheren, sondern gar lauttern vnd gewissen weg den jch dir gleichsfals
137v zur nachfolg (·so dichs gelustete·) entwerffen, vnd als mit fingern weisen will:' Weil aber wie zu anfang dises vnterrichts vermeldet, diser weg eine schöne vnd zumahl verwunterliche eigenschafft des Circulj entdeckhet, so will jch, das jenige so zu ergäntzung des * Canonis sinuum am nutzlichisten, vorher gehen lassen, vnd mir hernach zu erclärung des jenigen so von Kunst wegen zusagen sein würt, recht der weil nemen.

Suech auß vor erörterter lehr die sinus auff alle gantze grad des Quadranten auß dem grund vnd jn einer figuren mehr, als du sie in den Canonem abschreiben wilt. Setz dar- *

neben je zweyer sinuum differentias, in die andere Columnam, differentiarum differentias in die dritte, vnd abermahl diser letzten differentiarum differentias in die vierte. Hernach besihe die erste differentias je zweyer benachbarter sinuum, so nun solliche differentiae einander gleich sein so werden auch die differentiae auff die prima vnd secunda, einander gleich sein, vnd weil jch in einem jeden grad 900 sinus hab, so khöndte jch demnach solliche 900. sinus alle nur durch eine blosse Addition vndertheilen. Dan jch die differentiam mit 900 theiln vnd den khommenden 900ten theil, so offt zu dem kleinern sinu addirn wolte.

Wan aber die differentiae auß der andern Column zweyer benachbarter sinuum in sovil figuren als vonnöthen, nit gleich, sondern noch ein grosser vnderscheid darzwischen ist, so werden doch die [*dritte*] differentiae auß der vierten Column fast gleich sein. Theil derohalben die differentiam auß der vierten Column [*mit* 90] in 900, vnd setze disen 900ten theil, 900 mahl zu der [*mittern*] kleineren differentz in der dritten Column. [*Die mitteren auß der dritten column auch* 90 *mahl zu d*] Dise 900 in die dritte Column gehörig auch zu der kleinern auß der andern Column, eine nach der andern, setz entlich solliche 900 in die andere Column gehörig zu dem kleinern sinum eine nach der andern, so würstu die 900 sinus in einen grad gehörig, (·sonderlich, wan du die letzte figur oder digitum zur rechten abschneidest, vnd was yber 5, darfür ein vnitet im nechsten digito mehr setzest·) gar gerecht vnd gewiß haben.

Wiewol nun der 900te theil zum dritten mahl sehr klein, vnd seine addition für khein addition zuschätzen, jedoch, wan es dich verdriessen wolte dreymahl zu addirn, so will * jch dich auch ein wenig einen andern weg weisen. Wan du hast die subtensam auff 0°. 0′ 4″, oder den sinum auff 0°. 0′. 2″ so scharff du jne haben wilt, dan theil die nächste differenz zwischen 0° vnd 1° mit 900, diser 900te theil würt ein wenig grösser sein dan sinus auff 0°. 0′. 2″. vnd bedeüttet die differentz der sinuum auf 0°. 0′. 28″. | 0°. 0′. 30″. | 0°. 0′. 32″. Ferners theil die differentz zwischen 1°, vnd 2°. mit 900, würt khommen die differentz der sinuum 1°. 59′. 28″. | 1°. 59′. 30″. | 1°. 59′. 32″. Sollichen 900ten theil thue zu jenem 90ten theil, halbir die summam, so hastu die ware differentz zwischen 0°. 59′. 58″. | 1°. 0′. 0″. | 1°. 0′. 2″. beinahe. Vnd also fort durch den gantzen quadranten. Wan du dan hast die jenige differentias, so alwegen nach[1] 450 sinubus stehen, vnd hast die sinus 138 auff jede gradus, nämlich alwegen nach 900 sinubus gewiß vnd scharff da würstu auch die 450 differentias zwischen jnen leichtlich ordnen khönden: vnd nach 900 additionibus wol sehen ob dir der jenige sinus herauß khomme, den du zuvor auß dem grund gesuecht, wölliches dir in diser langweiligen arbeitt anstatt einer prob gelten würt.

* Caetera desiderantur: ex quibus erant etiam ista.

Differentiae sinuum sunt in principio ut differentiae arcuum, seu sinus sunt ut arcus. In fine si deficiens arcus est deficientis duplum, defectus sinus a toto est defectus alîus quadruplum, si triplum, noncuplum. Ita proportio differentiarum ab aequale ad duplam crescit, estque circa 45°, semidupla.

Differentiae sinuum initiales sunt in proportione sinuum ipsorum finalium. Nam ut initio differentiae sunt penè aequales, paulatim tamen minores, sic in fine sinus ipsi sunt penè aequales, paulatim tamen minores.

In principio igitur cum semper sequens sinus constet ex antecedenti et differentia, colligentur ex sinibus complementj summae ferè in proportione sinuum sub arcubus primis. In fine verò sunt differentiae sinuum parvae, ut sinus ipsi complementorum(?) longj respectu illorum.

II. ANMERKUNGEN ZUM TEXT

7. 1. Jost Bürgi (1552–1632) stand ab 1579 in Diensten des Landgrafen Wilhelm IV. von Hessen in Kassel, zunächst als Uhrmacher und Mechaniker, später auch als astronomischer Beobachter. 1604 ging er nach Prag an den Hof Rudolphs II., wo er mit Kepler zusammenarbeitete.

7. 2. Wilhelm IV. starb am 25. August 1592. Er richtete bereits 1561 einen Turm für astronomische Beobachtungen in Kassel ein und begann, durch den Besuch Tycho Brahes von 1575 angeregt, ab 1577 systematisch Fixsterne und Planeten zu beobachten, um die vorhandenen Verzeichnisse zu verbessern und die Planetentheorien zu überprüfen. Es gelang ihm, Christoph Rothmann nach Kassel zu holen, der in Bürgi einen vortrefflichen Gehilfen erhielt.

7. 3. Paul Wittich hielt sich von 1580 bis 1581 bei Tycho Brahe auf der Insel Hven auf und kam um 1584 an den Hof des Landgrafen Wilhelm. Wittich brachte von Hven die prosthaphaeretische Methode nach Kassel mit, die er gemeinsam mit Tycho bereits 1580 ausgearbeitet hatte. Als Erfinder dieser Rechenmethode gilt jedoch nicht Wittich, sondern Werner (1468–1528), obgleich sich bereits bei den Arabern derartige Rechnungen nachweisen lassen [36, S. 347].

7. 4. Die Prosthaphaerese ersetzt Multiplikationen und Divisionen durch Additionen und Subtraktionen trigonometrischer Funktionen. Das Wort ist gebildet aus πρόσθεσις (Addition) und ἀφαίρεσις (Subtraktion). Zunächst ging es darum, die trigonometrischen Rechnungen der Astronomie zu erleichtern. So lehrte Wittich in Kassel die Formel $\sin a = \sin c \cdot \sin A$ zu ersetzen durch die Formel $\sin a = \frac{1}{2}\,[\sin(90^\circ - c + A) - \sin(90^\circ - c - A)]$. Bald wurde sie aber auf beliebige Aufgaben erweitert. Die wichtigsten Formeln lauten:

$$(1)\ \sin\alpha \cdot \sin\beta = \tfrac{1}{2}\,\{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\}$$
$$(2)\ \cos\alpha \cdot \cos\beta = \tfrac{1}{2}\,\{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\}$$

Es sei an Formel (1) erläutert, wie Multiplikationen und Divisionen ausgeführt werden konnten.

I Multiplikation $A \cdot B$

$$A \cdot B = 10^n \cdot a \cdot b \qquad a = \sin\alpha$$
$$= 10^n \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \qquad b = \sin\beta$$

Beispiel: $50{,}8791 \cdot 207{,}343$
mit einer 6stelligen Sinus-Tafel auszuführen

$A = 50{,}8791 \qquad n = 5$

$B = 207{,}343 \qquad a = 0{,}508791 = \sin\alpha$

$b = 0{,}207343 = \sin\beta$

$$\begin{aligned} \alpha &= 30^\circ\,35' \\ \beta &= 11^\circ\,58' \\ \hline \alpha - \beta &= 18^\circ\,37' \\ \alpha + \beta &= 43^\circ\,33' \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} \cos(\alpha - \beta) = & 0{,}947676 \\ \cos(\alpha + \beta) = & 0{,}736687 \\ \hline \text{Differenz} & 0{,}210989 \\ \sin\alpha \cdot \sin\beta = & 0{,}105494 \\ A \cdot B = & 10549{,}4 \\ \text{genauer Wert} & 10549{,}425. \end{array}$$

II Division $\frac{A}{B}$

$$\frac{A}{B} = 10^n \frac{a}{b} \qquad a = \sin\alpha$$

$$= 10^n \sin\alpha \cdot \sin\beta \qquad b = \operatorname{cosec}\beta$$

Beispiel: $\dfrac{207{,}343}{51{,}7886}$

mit einer 6stelligen Sinus-Tafel auszuführen

$$\begin{aligned} A &= 207{,}343 \qquad & n &= 2 \\ B &= 51{,}7886 & a &= 0{,}207343 = \sin\alpha \\ & & b &= 5{,}17886 = \operatorname{cosec}\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 11^\circ\,58' \\ \beta &= 11^\circ\,8' \\ \hline \alpha - \beta &= 0^\circ\,50' \\ \alpha + \beta &= 23^\circ\,6' \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} \cos(\alpha - \beta) = & 0{,}999894 \\ \cos(\alpha + \beta) = & 0{,}919821 \\ \hline \text{Differenz} & 0{,}080073 \\ \sin\alpha \cdot \sin\beta = & 0{,}040036 \\ \dfrac{A}{B} = & 4{,}0036 \\ \text{genauer Wert} & 4{,}003641. \end{array}$$

Bei der Vielzahl der Rechnungen, die erforderlich waren, um aus den Beobachtungen die Sternörter zu erhalten, wurde die prosthaphaeretische Methode vor der Erfindung der Logarithmen gerne angewandt. Die Genauigkeit der Methode war in erster Linie von der Güte der benutzten Funktionstafeln abhängig. Vorhandene Sinus-Tafeln konnten den Ansprüchen der rechnenden Astronomen nur schlecht genügen, so daß auch Bürgi daran ging, einen neuen „Canon Sinuum" zu berechnen.

7. 5. Nikolaus Reymers wuchs in ärmlichen Verhältnissen in Norddeutschland (Dithmarschen) auf, war zunächst Autodidakt und gewann später im Landesstatthalter Heinrich Ranzow einen wichtigen Protektor. Im Herbst 1584 weilte er bei Brahe, im Frühjahr 1586 reiste er nach Kassel, wo er sich längere Zeit bei Landgraf Wilhelm aufhielt und sich mit Jost Bürgi, den er fortan als seinen Lehrer bezeichnete, befreundete.

Über die Differenzenmethode Bürgis, den „Kunstweg" (vgl. Nachbericht), berichtet Ursus in dem 1588 in Straßburg erschienenen Buch „Fundamentum astronomicum". Es ist dies eines seiner Hauptwerke, in dem er auch sein an Brahe erinnerndes Weltsystem darstellt, das Anlaß gab zu dem berühmten Streit zwischen ihm und dem Dänen.

7. 6. Ludolff von Cöllen oder Ludolph van Ceulen (1540–1610) ist vor allem durch die Berechnung der Zahl π („Ludolphische Zahl") auf 32 Stellen berühmt geworden. Seine bedeutendsten Werke sind „Van den Circkel" (1596) und „Fundamenta arithmetica et geometrica" (1615). Bürgis Bemerkung ist auf das erstgenannte Werk gemünzt. Das „große Werk" sind die „Fundamenta".

7. 7. Der volle Titel lautet: „Opus Palatinum de triangulis, a Georgio Joachimo Rhetico coeptum: L. Valentinus Otho, Principis Palatini Friderici IV. Electoris Mathematicus consummavit. 1596. Neostadii". Der Titel „Opus Palatinum" ist nach dem Gönner Othos, dem Kurfürst Friedrich IV. von der Pfalz, bezeichnet. Das von Rheticus begonnene Werk wurde nach dessen Tod 1576 von seinem Schüler Valentin Otho fertiggestellt und 1596 veröffentlicht.

Das Urteil Bürgis bezieht sich auf die große Funktionstafel, da für $r = 10^{10}$ genommen wurde. Es wird bestätigt durch eine Untersuchung von A. Gernerth (Zeitschrift f. d. österr. Gymnasien Jg. 14, 1863), der diesen „Magnus Canon doctrinae triangulorum" untersuchte und nicht weniger als 465 Fehler gefunden hat [7, Bd. 1, S. 212ff.].

8. 1. Gemeint sind 8 Stellen.

8. 2. Hier findet sich der Hinweis, daß die von 2″ zu 2″ fortschreitende Sinus-Tafel, deren Herstellung das Ziel der Bürgischen Arithmetik ist, auch tatsächlich fertiggestellt wurde. Sie ist aber nie im Druck erschienen. Aus dieser Bemerkung geht auch hervor, daß Bürgi erst nach Berechnung seiner Sinus-Tafel darauf verfallen ist, eine Arithmetik zu schreiben bzw. sie mit Hilfe von Kepler schreiben zu lassen.

8. 3. Bürgi bezieht sich hier auf die Sehnenrechnung des Ptolemäus und seiner Nachfolger. Es werden nach den Sätzen Euklids die Seiten der genannten Vielecke gerechnet und im Maß des Kreisdurchmessers ausgedrückt. Die Sinus-Funktion wurde erstmals von den Indern in die Trigonometrie eingeführt [7, Bd. 1, S. 32].

9. 1. Die Cossa, die Lehre von den Gleichungen, ist die Bezeichnungsweise für die beginnende Symbolisierung der Algebra am Anfang der Neuzeit [vgl. 16]. Bestimmte Gleichungstypen, die bei Euklid in geometrischer Form auftreten, hat schon Alchwarazmi (um 820) algebraisch überliefert. Der Name Cossa (Coss) leitet sich her von „cosa" (cossa), dem italienischen Wort für die Unbekannte einer Gleichung.

9. 2. Mit der folgenden Darstellung der Coss beginnt der Hauptteil der Arithmetik. Vor Bürgi haben im deutschsprachigen Raum u. a. Christoff Rudolff (1525), Michael Stifel (1544 u. 1545), Heinrich Schreiber (Grammateus, 1518–21), Adam Riese (1524) über die Coss geschrieben. Die Unbekannte erhielt einen cossischen Namen, d. h. sie wird x (ϰ) genannt.

10. Die astronomische Logistica ist die Rechnung mit Graden, Minuten, Sekunden, wobei 60 die Grundzahl (Progressionalzahl) ist (vgl. den folgenden Absatz).

11. An dieser Stelle führt Bürgi die Zeichen für die cossischen Größen ein (x, x^2, x^3 ...). Das Zeichen ϰ könnte aus einer allmählichen Abschleifung von res für die Unbekannte entstanden sein [16, S. 304]. Hinweise auf cossische Größen enthalten die algebraischen Fragmente von Frater Fridericus Gerhart (1461). Der Vergleich der cossischen mit geometrischen Größen findet sich auch bei Michael Stifel, im 3. Buch seiner „Arithmetica integra" von 1544. Nach Stifel sei die algebraische Rechnung mit x, x^2, x^3 eine Rechnung mit Linien, Flächen und Körpern.

12. Die Bezeichnungsweise für die Potenzen von x ist in jener Zeit noch nicht vereinheitlicht. Bürgi verwendet mit Vorliebe die Bezeichnungen der letzten Spalte, die nach Gerhardt [11, S. 77] den Übergang von der cossischen Schreibweise (Spalte 2) zu der heute üblichen Bezeichnungsweise der Potenzen gebildet haben. Bei Kepler, der die cossische

Schreibweise nur gelegentlich verwendet, findet sich sowohl die Bezeichnungsweise der Spalte 1 (Weltharmonik, 1. Buch), als auch die der letzten Spalte [20, Bd. 13].

13. 1. Die hier mit Bande bezeichneten Rechenzeichen + und — sind bereits im Rechenbuch von Johannes Widmann „Behende und hubsche Rechnung auf allen kauffmannschafft" (1489) enthalten. Ihre Herkunft ist umstritten [9, S. 230ff.].

13. 2. Bürgi spricht mit dem nachfolgenden Beispiel das kommutative Gesetz der Addition aus.

14. Die Differenz a — b wird nach den 4 möglichen Fällen unterschieden:

1. $a, b > 0$
2. $a, b < 0$
3. $|a| > |b|$
4. $|a| < |b|$.

15. Bereits Archimedes (3. Jh. v. Chr.) bemerkte, daß bei der Multiplikation von Gliedern einer geometrischen Reihe ($1, a, a^2, a^3 \ldots$) die obenstehenden Rangzahlen einfach zu addieren seien [29, Bd. 2, S. 207]. – Im ausgehenden Mittelalter finden sich höhere Potenzen, mit denen auch gerechnet wird, in der Dresdner Handschrift C 80 um 1480. Eine einfache Vorschrift regelt das Rechnen mit Hochzahlen.

16. 1. Während das Wort „Wurzel" bereits um 1400 in der „Geometria Culmensis" (ed. H. Mendthal, Leipzig 1886) auftaucht, ist der hier verwendete Haken als Wurzelzeichen in Verbindung mit der cossischen Potenzbezeichnung erst im 16. Jahrhundert („Initias Algebras", deutsche Bearbeitung durch Andreas Alexander) nachzuweisen [29, Bd. 2, S. 148ff.].

16. 2. Die Reihenfolge der verschiedenen Rechenarten in der „Coss" geht etwas durcheinander. So folgt dem Radizieren von Zahlen (dem „Gmeinen Wurtzelsuechen") das cossische Dividieren, also das Dividieren von Polynomen, ohne Zwischenüberschrift. Dann erst kommt das Radizieren von cossischen Zahlen (Polynomen). In dem 1. Entwurf folgen der begonnenen Erläuterung des Radizierens einer cossischen Zahl Anmerkungen zum cossischen Dividieren und Multiplizieren. Der Entwurf ist zum großen Teil im Haupttext verarbeitet und bringt inhaltlich keine Ergänzung.

$$
\begin{array}{c}
5 \\
1\cancel{6} \\
\cancel{5}\cancel{5}\cancel{8}9 \\
\cancel{7}\cancel{9}\cancel{9}0 \\
\cancel{8}\cancel{0}\cancel{1}\cancel{4}5 \\
\cancel{8}\cancel{0}\cancel{8}\cancel{5}\cancel{9}\cancel{8} \\
\cancel{7}\cancel{1}\cancel{1}\cancel{1}\cancel{2}\cancel{7}\cancel{2} \\
\cancel{6}\cancel{1}\cancel{3}\cancel{5}\cancel{7}\cancel{8}\cancel{9}\cancel{0}\cancel{0}0 \\
\hline
67861 \\
\hline
\cancel{9}\cancel{0}\cancel{4}\cancel{1}\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}6 \\
\cancel{9}\cancel{0}\cancel{4}\cancel{1}\cancel{1}\cancel{1}1 \\
\cancel{9}\cancel{0}\cancel{4}\cancel{4}4 \\
\cancel{9}\cancel{0}0 \\
9
\end{array}
$$

19. Im folgenden wird das Überwärtsdividieren erläutert, ein bei den Arabern und im Mittelalter gebräuchliches Rechenverfahren. Bürgi gibt eine besondere Form an, bei der zwar auch der Divisor unter den Dividend geschrieben wird, aber zusätzlich 2 Striche unter den Dividend gezogen werden, so daß im Verlauf der Division der Quotient in das entstandene Feld eingetragen werden kann. Bei jeder neuen Teildivision wird der Divisor darunter wiederholt, aber um eine Stelle nach rechts gerückt.

Dagegen wird jedes Teilprodukt vom Dividend abgezogen, die verbleibende Differenz darunter gesetzt. Die zuvor benutzten Ziffern des Dividend und des Divisors werden ausgestrichen, wie aus dem hier angeführten Beispiel ersichtlich ist. Auf die Wiedergabe der Ausstreichungen in den übrigen Rechnungen wird aus technischen Gründen verzichtet.

Das moderne Dividieren erscheint zum erstenmal in einem italienischen Manuskript von 1491 [29, Bd. 1, S. 82ff.].

20. 1. Bürgi verwendet den heute gebräuchlichen Algorithmus mit Bildung von $(a + b)^2$, allerdings mit anderer Anordnung der einzelnen Zwischengrößen durch das Überwärtsdividieren (vgl. Anm. 19). Gemma Frisius (1508–1555) verwendet dieses Verfahren – Verdoppelung des jeweiligen Teilresultats als neuer Divisor, Multiplikation unter Berücksichtigung der neu gewonnenen Ergebnisziffer – als erster (in seinem Buch „Arithmeticae practicae methodus facilis“ von 1540).

20. 2. Die sich anschließende Division zweier Polynome (cossische Division) geht ähnlich wie die gemeine Division vor sich. Die Glieder werden so angeordnet, daß die Polynome mit den höchsten Potenzen beginnen. Fehlende Potenzen erhalten die Vorzahl 0. Bürgi verwendet die auf f. 98v in der letzten Spalte des Täfelchens angegebene Schreibweise. Dividend und Divisor werden wieder untereinander geschrieben mit dem durch Striche eingegrenzten Feld für den Quotienten dazwischen.

Die Reduktion wird ausführlich ausgeführt: die Zwischenprodukte werden unter den Divisor, die Restdifferenzen über den Dividend geschrieben. Der Divisor wird vor jeder Teildivision neu hingeschrieben. Ausstreichungen unterbleiben.

Die Ausführung einer Division von Polynomen ist erst bei Michael Stifel (1544), noch nicht bei den älteren Cossisten (Schreiber, Rudolff) nachweisbar [29, Bd. 2, S. 128].

21. 1. Für dieses Inhaltsverzeichnis vgl. Nachbericht S. 111 f.

21. 2. Bei Michael Stifel finden sich (in der „Arithmetica integra“ von 1544) zum erstenmal in der neueren Mathematik Wurzeln aus algebraischen Summen. Einfache Beispiele wurden bereits vom arabischen Mathematiker Alkarhi (um 1010) angegeben [29, Bd. 2, S. 142].

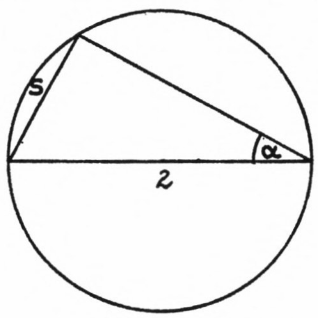
22. Dieser Text ist unvollständig geblieben, offenbar weil die irrationalen Zahlen für die weitere Verfahrensweise Bürgis bei der Berechnung der Sinus-Werte ohne Bedeutung sind. Die Irrationalitäten werden schon von den Griechen behandelt, so von Euklid, der nur jene erörtert, die mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind. Über die Araber und Leonardo von Pisa drang die Kunde von den irrationalen Zahlen ins späte Mittelalter und in die Neuzeit.

23. 1. An dieser Stelle spricht Bürgi den Gedanken aus, daß an der Trigonometrie Algebra und Geometrie teilhaben, diese als Cossa zur Erklärung der Funktionswerte (Sinus), jene in der Veranschaulichung und Vorschrift für das Rechnen. Unter Beachtung der Geometrie stellt der Rechner die Gleichungen auf, deren Auflösung erst die Kunst der Cossa ausmacht.

23. 2. Bei den Mathematikern des späten Mittelalters und der frühen Neuzeit finden sich u. a. folgende Werte für den Durchmesser des Kreises:

bei Johann von Gmunden 1200000, ebenso bei Peurbach,
Bianchini (um 1463) 120000,
Regiomontan 120000, 12000000 und bereits $2 \cdot 10^7$,
Peter Apian (1533) $2 \cdot 10^5$,
Copernicus (1543) $2 \cdot 10^5$,
Rheticus (1551) $2 \cdot 10^7$,
Viète (1571) $2 \cdot 10^5$ und $2 \cdot 10^3$,
Otho (1596) $2 \cdot 10^{10}$.

23. 3. Durch diesen Kunstgriff führt Bürgi Dezimalbrüche ein, wie aus den folgenden Darlegungen hervorgeht. Freilich war er darin nicht der erste, wie Kepler in der „Messekunst Archimedis“ meinte [19, Bd. 9, S. 194]. Vor ihm hatte bereits Viète in dem „Canon mathematicus“ (1579) die erste Stelle deutlich von den übrigen Ziffern abgehoben, und Stevin gab 1585 eine systematische Abhandlung über die Dezimalbrüche.



Figur 1

23. 4. Bezeichnet s die Sehne in einem Halbkreis (subtensa), ist α der gegenüberliegende Winkel und ist in dem rechtwinkligen Dreieck der Durchmesser (= 2) die Hypotenuse, so ist

$$\sin \alpha = \frac{s}{2},$$

d. h. der Sinus ist der halbe Teil einer Sehne (subtensa).

24. 1. Das Trennungszeichen zwischen den Ganzen und dem Dezimalbruch in einer Dezimalzahl, das heute übliche Komma oder der Dezimalpunkt, war am Anfang recht uneinheitlich. Viète benutzte einen senkrechten Trennungsstrich, Stevin bezeichnete die einzelnen Stellen des Dezimalbruchs durch entsprechende Zahlen in einem Kreis und Kepler gebrauchte einen runden Haken – einer geöffneten Klammer nicht unähnlich –, der mit seiner Öffnung zu den Dezimalstellen zeigte. Das Dezimalkomma benutzte Neper als erster (1617), den Dezimalpunkt Clavius (1593).

24. 2. Der Zweck dieser Erläuterung ist nicht so sehr, eine verkürzte Multiplikation vorzuführen [29, Bd. 1, S. 113; 9, Bd. 2, S. 618], als vielmehr 2 Dezimalzahlen miteinander zu multiplizieren und für das Ergebnis eine gleich große Stellenzahl zu erhalten. Gekürzt ist die Multiplikation insofern, als nacheinander bei den Teilprodukten Stellen unterdrückt werden, wobei eine Auf- oder Abrundung der letzten noch mitgenommenen Stelle nicht erfolgt. Bei Kepler finden sich in seinem handschriftlichen Nachlaß viele Beispiele für diese Art der Multiplikation [so z. B. in 20, Bd. 13, Bl. 241]; hier geht es um die Multiplikation zweier 5stelliger Funktionswerte:

```
0.25180 · 0.09189
 0226620
     25180
     201440
       226620
0.0231379020
```

Bei Kepler, der ein fünfstelliges Ergebnis erhalten möchte, sieht die Rechnung so aus:

25180	
9189	
2266	2
25	2
20	1
2	3
2314	

25. 1. Auch das Divisionsbeispiel bezieht sich auf zwei Dezimalzahlen, wobei der Quotient ebenfalls eine Dezimalzahl (< 1) sein soll. Das Trennungszeichen wird von Bürgi meistens weggelassen. Als Beispiel einer Division bei Kepler sei angegeben [20, Bd. 13, Bl. 241v]:

138 938	
102 940	1
35 998	
30 882	3
5 116	
4 118	4
998	
926	9
72	7
	0

Kepler schreibt die Teilprodukte jeweils hin, verwendet aber bereits das Unterwärtsdividieren. Der Quotient wird rechts herausgeschrieben. Die Gemeinsamkeit mit Bürgi ist auf das Unterdrücken unnötiger Ziffern beschränkt.

25. 2. Es werden also, wie auch heute noch, die Dezimalstellen in Gruppen von je 2 Ziffern eingeteilt, vom Trennungszeichen an nach rechts gerechnet.

Mit dem Radizieren einer Dezimalzahl sind die algebraischen Operationen abgeschlossen.

25. 3. Es sei im Kreis mit dem Durchmesser $AB = 2$ die Sehne $AC = a$ gegeben. Dann soll das Quadrat der Sehne zur Mitte des Komplementbogens gleich der Summe des Durchmessers und der bekannten Sehne sein, also:

$2 + a = y^2$. Es ist (Fig.)

im Δ ABC: $z^2 = 4 - a^2$, ferner

$\sin \alpha = \frac{a}{2}$. Nach dem Cos-Satz ist

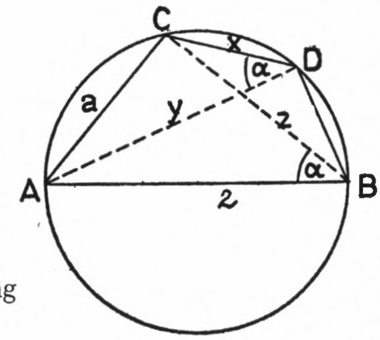
im Δ BDC: $z^2 = 2x^2 + 2x^2 \sin \alpha$

$= x^2 (2 + a) = 4 - a^2$.

Also (1) $x^2 = 2 - a$. Da außerdem

im Δ ABD: $y^2 = 4 - x^2$, ergibt sich die gesuchte Gleichung

(2) $y^2 = 2 + a$.



Figur 2

Gleichung (1) bezieht sich auf den 2. Teil dieser Behauptung: wird die bekannte Sehne vom Durchmesser abgezogen, so bleibt das Quadrat der Sehne, welche zur Hälfte des Komplementbogens gehört.

Eine Übertragung der Gleichungen (1) und (2) in unsere Schreibweise ist mit Hilfe der nebenstehenden Figur möglich [7, Bd. 1, S. 206]. Es ist, wenn noch für Sehne die Schreibweise crd eingeführt wird:

$$a = \text{crd}\,(2\,\alpha) = 2\sin\alpha$$

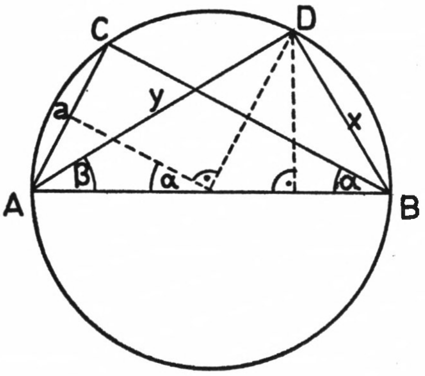
$$y = \text{crd}\,(90^\circ + \alpha) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} + 45^\circ\right)$$

$$x = \text{crd}\,(180^\circ - (90^\circ + \alpha))$$

$$= \text{crd}\,(90^\circ - \alpha) = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2} + 45^\circ\right)$$

$$(1)\quad 1 - \sin\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2} + 45^\circ\right)$$

$$(2)\quad 1 + \sin\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2} + 45^\circ\right)$$



Figur 3

Eine Kontrolle ergibt sich, wenn beide Gleichungen addiert werden.

26. 1. Es soll sein

$$AC + AB = 2 \cdot AM.$$

Mit

$$AB = 2$$

$$AC = a = 2\sin\alpha$$

$$AM = y\cos\beta$$

$$= 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} + 45^\circ\right)\cos\left(90 - \left(\frac{\alpha}{2} + 45^\circ\right)\right)$$

$$= 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2} + 45^\circ\right)$$

geht die Gleichung über in

$$2\sin\alpha + 2 = 4\sin^2\left(\frac{\alpha}{2} + 45^\circ\right).$$

Die Identität dieser Gleichung ist oben unter Anmerkung 25.3 bei Gleichung (2) $y^2 = 2 + a$ gezeigt.

Oder noch einfacher:

In dem rechtwinkligen Dreieck ABD ist das Quadrat über der Kathete (y^2) gleich dem Produkt aus der Hypotenuse und dem entsprechenden Kathetenabschnitt ($2 \cdot AM$).

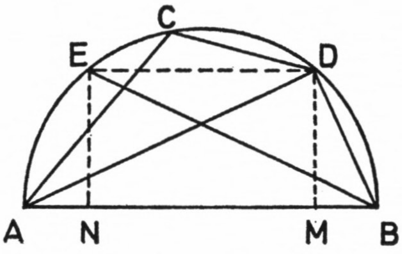
Der von Bürgi angegebene Beweis beruht auf einem Streckenvergleich. Er zieht zunächst durch D die Parallele zu AB. Sie schneidet den Kreis in E. Dadurch sind, wie man sich leicht überzeugen kann, die kongruenten Dreiecke ADC und EBD entstanden. Denn es sind

$$BD = DC = x$$
$$EB = AD = y$$
$$\sphericalangle\, DEB = \sphericalangle\, CAD$$

(Peripheriewinkel über der gleichen Sehne x).
Dann ist auch

$$AC = ED\,.$$

AB läßt sich aufgliedern in



Figur 4

$$AB = NM + AN + MB\,.$$

Nun ist $ED = NM$ und

$AN = MB$. Folglich ist, wenn das Stück MB zu ED hinzugefügt wird,

$ED + AB = 2\,AM$, d. h. es ist tatsächlich

$$AC + AB = 2\,AM\,.$$

26. 2. Es soll sein

$$AM = \text{sin vers } (AD)\,.$$

Dann ist $AM = 1 - \cos (AD)$

$= 1 - \cos (\alpha + 90)$ nach Fig. 3 von Anm. 25.3

$= 1 + \sin \alpha$,

ein Zusammenhang, der sich aus der Figur leicht ablesen läßt.

27. 1. Bürgi bezieht sich nacheinander auf einige Sätze von Euklids Elementen, zunächst

mit „LD vnd IK seind parallel vnd derowegen gleich"
auf Satz 33 und 34 des 1. Buches;
mit „LD das halbe theil von ED, weil ..."
auf Satz 3 des 3. Buches;
mit „ED aber ist gleich der linj AC, ..."
auf Satz 29 des 3. Buches; weiter
mit „hieraus folget, das ..."
auf Satz 6 des 2. Buches; und
mit „das ist in der arithmetica ..."
auf Definition 16 von Buch 7.

Der auf S. 27 enthaltene Hinweis auf Euklid bezieht sich auf den Vergleich der Rechtecke unter den Hypotenusenabschnitten mit den Kathetenquadraten. In Buch 1, Satz 47 wird der Satz des Pythagoras bewiesen.

27. 2. Der zuvor anhand der Geometrie Euklids bewiesene Satz

$$(AB + AC) \cdot AH = AD^2 \text{ (vgl. Fig. S. 26)}$$

wird im folgenden in der Praxis erprobt. Er besagt, da er am Einheitskreis ($r = 1$) abgeleitet ist und angewandt wird, daß sich das Quadrat der unbekannten Sehne $AD = y$ einfach durch die Addition der bekannten Sehne $AC = a$ zum Kreisdurchmesser $= 2$ ergibt: $y^2 = a + 2$.

Der Beweis dieses Satzes ist auch auf anderem Weg leicht möglich, wie in Anm. 25.3 gezeigt wurde. Im Beispiel des Textes ist $a = 1{,}0598$, also $y^2 = 3{,}0598$.

Nach $a = 2 \sin \alpha = \sin \beta$ (β = Zentriwinkel) wird β = Winkel AHC 64°, damit wird der Bogen über CB = 116°. Bogen CD ist die Hälfte davon = 58°, und Bogen AD ergibt sich als Summe von AC und CD zu 122°. Die Sehne dieses Bogens, AD, beträgt rund 1,75, d. i. gerade $\sqrt{3{,}0598} = y$.

Auch hieraus ist ersichtlich – und das ist der Zweck dieser ausführlichen Darstellung –, daß der Kunstgriff mit $y^2 = a + 2$ zu einer wesentlichen Vereinfachung bei der Neuberechnung von Sehnen und damit von Sinus-Werten führt.

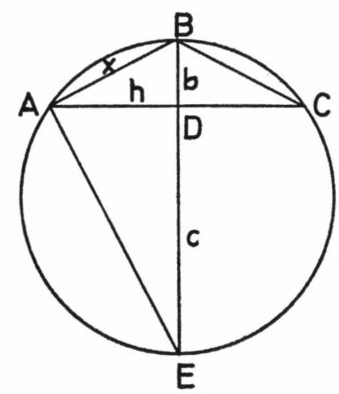
28. 1. Der lateinische Text bringt eine kurze Zusammenfassung des Vorangegangenen. Auch er erhellt, daß Bürgi, der des Lateinischen unkundig war, als Schreiber der „Coss" nicht in Frage kommt.

28. 2. Der folgende Text bezieht sich wieder mehrfach auf die Elemente Euklids, nämlich

mit „Wan von dem rechten Winckel ..."
auf Buch 6, 8. Satz, Zusatz;
mit „weil dann BAE ein rechter Winkel ist"
auf Buch 3, 31. Satz;
mit „vnd BD sich helt zu DA, wie DA zu DE"
auf Buch 6, 8. Satz, Zusatz und Buch 6, 13. Satz;
mit „so ist dann die feldung von EB, BD ..."
auf Buch 1, 47. Satz.

Es wird also im 1. Teil dieses „ersten Cossischen Processes" die Länge der Sehne (und damit die des Bogens), die halb so groß sein soll wie eine gegebene, nach der Geometrie von Euklid bestimmt. Formelmäßig ausgedrückt wird folgendermaßen vorgegangen (vgl. Fig.):

$$\begin{aligned} h^2 &= b \cdot c \\ h^2 + b^2 &= b \cdot c + b^2 \\ x^2 &= b\,(c + b) \\ &= 2 \cdot b\,. \end{aligned}$$



Figur 5

29. Was zuvor geometrisch, wird jetzt arithmetisch abgeleitet. Es wird AB = x gesetzt und dann die Verbindung zu AC und BE hergestellt. Der Gang der Rechnung ist:

$$\begin{aligned} b &= \frac{x^2}{2} \\ h^2 &= x^2 - b^2 \\ h^2 &= \frac{4\,x^2 - x^4}{4} \\ AC^2 &= 4\,x^2 - x^4 \\ AC &= \sqrt{4\,x^2 - x^4}. \end{aligned}$$

Hieraus ist x zu berechnen, denn AC ist im Maß des Kreisradius bekannt. Es verhält sich also die Sehne eines Bogens zur Sehne des doppelten Bogens wie $x : \sqrt{4\,x^2 - x^4}$.

30. 1. Der Satz des Ptolemäus, daß nämlich in einem Sehnenviereck die Summe der Rechtecke aus je zwei Gegenseiten gleich dem Rechteck aus den beiden Diagonalen ist, findet sich im Almagest [25, 36–39]. Mit seiner Hilfe werden bei Ptolemäus die Additionsformeln der trigonometrischen Funktionen gegeben [7, Bd. 1, S. 20].

30. 2. Es soll mit Hilfe des Satzes von Ptolemäus die gegebene Sehne AB in 3 gleiche Teile geteilt werden. Wird AC = CD = DB in der Figur gleich x gesetzt, so ist

$$
\begin{array}{lll}
 & AD \cdot BC = \begin{cases} AD^2 = 4x^2 - x^4 \\ BC^2 = 4x^2 - x^4, \end{cases} & \text{nach dem ersten Cossischen Prozeß} \\
\text{ferner} & \underline{AC \cdot BD = x^2} & \\
\text{Differenz} & CD \cdot AB = 3x^2 - x^4. & \\
\text{Damit} & AB = 3x - x^3, & \text{die gesuchte Beziehung.}
\end{array}
$$

Die Aufgabe, den Bogen über der Sehne a in 3 gleiche Teile zu teilen, könnte auch so gelöst werden:

Es seien x die Länge der gesuchten Sehne, α der Zentriwinkel dieser Sehne, β der Zentriwinkel zu a.

Dann bestehen die Beziehungen

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{x}{2}$$

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{a}{2}$$

$$\beta = 360 - 3\alpha$$

$$\frac{\beta}{2} = 180 - 3\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{a}{2} = \sin\left(180 - 3\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\frac{a}{2} = \sin 3\frac{\alpha}{2}$$

Additionstheorem:

$$\sin 3\frac{\alpha}{2} = 3\sin\frac{\alpha}{2} - 4\sin^3\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2}$$

Also, wenn für $\sin\frac{\alpha}{2}$ wieder $\frac{x}{2}$ gesetzt wird:

$$a = 3x - x^3.$$

Vor Bürgi hat bereits Viète in seiner Schrift über die Winkelteilung „Ad angulares sectiones theoremata in tres partes distributa" (bereits 1591 erwähnt, aber erst 1615 mit 10 Hauptsätzen veröffentlicht) das Problem der Bogenteilung untersucht. Die Aufgabe, einen gegebenen Winkel in 3 gleiche Teile zu teilen, führt nach Viète zu der Gleichung

Xq in E3 — Ec aequetur Xq in B;

oder in heutiger Schreibweise:

$$3Ex^2 - E^3 = Bx^2.$$

Setzt man hierin x (den Radius des Kreises) gleich 1, B (die Sehne des zu teilenden Winkels) gleich a, und E (die Sehne des Teilwinkels) gleich x, ergibt sich wie bei Bürgi die Gleichung

$$3x - x^3 = a.$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind:

$$x_1 = \text{crd}\,\frac{\alpha}{3}$$
$$x_2 = \text{crd}\,\frac{\alpha + 360}{3}$$
x_3 existiert nicht, da > 180°.

Bürgi behält sich die Auflösung der Gleichung für die Gleichungslehre vor (vgl. S. 74).

31. 1. Die Gleichung $a = 3x - x^3$ ergibt, wenn für $x = 1{,}5$ gesetzt wird, für $a = 1{,}25$. Der x entsprechende Bogen, $\alpha = 2 \arcsin \frac{x}{2}$, beträgt 97° 10′, so daß für den Komplementbogen β der Winkelbetrag $360 - 3 \cdot 97^\circ\, 10' = 68^\circ\, 30'$ übrig bleibt. In der Tat ist auch $2 \cdot \sin \frac{68^\circ\, 30'}{2} = 1{,}125 = a$.

31. 2. Diese Zwischenbetrachtung ist ein typisches Beispiel für die Denkweise Keplers. Die Gleichung für die Sehne eines vielfachen Bogens (oder für den bestimmten Teil eines Bogens), also:

(1) $a^2 = 4x^2 - x^4$ bei der 2-Teilung
(2) $a = 3x - x^3$ bei der 3-Teilung usw.

wird nun unter dem Gesichtspunkt der „numeri continuè proportionales" gesehen und in Verhältnisgleichungen aufgelöst. Derartige „fortgesetzt vervielfachte Proportionen" – sie finden sich bei Kepler auch im 3. Buch der „Weltharmonik" im Zusammenhang mit der Untersuchung der musikalischen Intervalle – sind dadurch gekennzeichnet, daß sie jeweils gleiche Verhältnisse zwischen 2 benachbarten Zahlen ergeben. So bildet z. B. die Zahlenreihe

2, 6, 18, 54, 162

eine derartige Proportion, weil sich

$2 : 6 = 6 : 18 = 18 : 54 = 54 : 162$ verhalten.

Jedes folgende Glied ist das 3fache des voranstehenden. Im Text Keplers werden zunächst 4, dann 6 und schließlich 3 derartige Proportionale betrachtet der Form

$1, x, x^2 \ldots,$

daraus werden dann die Teilungsgleichungen gebildet. „Parallelogrammum" ist als Rechteck, Produkt zu verstehen.

So ist im 1. Beispiel das Produkt der 1. und 2. Zahl 3mal zu nehmen und um die 4. Zahl zu vermindern. Diese Differenz ist dann gleich dem Produkt aus der ersten Zahl und der Sehne, die das Dreifache des Kreisbogens der angenommenen Sehne (x) umspannt, nämlich a.

Es ist also:

$$3 \cdot 1 \cdot x - x^3 = 1 \cdot a$$
$$3x - x^3 = a.$$

Die Beispiele am Schluß dieser Betrachtung beziehen sich auf die Verdoppelung des Bogens nach Gleichung (1) von oben.

31. 3. Dieser Versuch galt der Darstellung der Teilungsgleichung $4x^2 - x^4 = a^2$ durch 5 „numeri continuè proportionales".

32. Die Teilung eines Bogens in 4 gleiche Teile macht sich die Ergebnisse des ersten Prozesses zunutze. Das Verfahren ist ansonsten wie früher: es wird ein Teilstück x gesetzt und die Beziehung zwischen x und der Sehne des ganzen Bogens gesucht. Zunächst ist (vgl. Fig. auf Bl. 110v)

$$AE^2 = 4x^2 - x^4 \quad \text{nach Prozeß 1,}$$

hieraus

$$EF = \frac{4x^2 - x^4}{2} \quad \text{nach Prozeß 1, S. 29}$$

$$EF^2 = \frac{16x^4 - 8x^6 + x^8}{4}$$

$$AF^2 = \frac{8x^6 + 16x^2 - 20x^4 - x^8}{4} \quad \text{nach Pythagoras.}$$

Schließlich

$$AB^2 = 16x^2 - 20x^4 + 8x^6 - x^8.$$

Die 5-Teilung eines Bogens erfolgt wieder über die 2-Teilung und außerdem über die 3-Teilung. Es werden die Sehnen GL, GM, HM, HL in bekannter Weise berechnet, dann wird der Satz des Ptolemäus auf das Viereck GHML angewandt.

Die Endgleichung $GH = 5x - 5x^3 + x^5$ läßt sich wiederum über Funktionen von Winkelvielfachen herleiten.

Es sei $GH = a$, der dazugehörige Zentriwinkel α, dann ist

$$\sin\left(5\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{a}{2}.$$

Es ist aber

$$\sin\left(5\frac{\alpha}{2}\right) = 5\cos^4\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2} - 10\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^3\frac{\alpha}{2} + \sin^5\frac{\alpha}{2}.$$

Werden gesetzt:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{x}{2}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}},$$

erhält man:

$$\frac{a}{2} = 5\frac{x}{2}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^2 - 10\frac{x^3}{8}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) + \frac{x^2}{32},$$

und schließlich

$$a = 5x - 5x^3 + x^5.$$

Legt man diese Beweisführung zugrunde, so wird auch der Zusammenhang zu den Moivreschen Formeln ersichtlich. Allgemein ist für die n-fache Teilung eines Bogens der Sinus des n-fachen Winkels von $\frac{\alpha}{2}$ zu bilden.

33. Die Tafel, in der Form einer Dreiecksmatrix angeordnet, gestattet, für die beliebige Teilung oder Vervielfachung eines Bogens die entsprechende Sehnengleichung zu entnehmen. So steht z. B. in Zeile 5 die Gleichung für die 5-Teilung eines Bogens:

$$5\,x - 5\,x^3 + x^5 = a$$

und in Zeile 6 die Gleichung für die 6-Teilung:

$$\sqrt{9\,x^2 - 6\,x^4 + x^6 = a}\,.$$

Die Tafel ist entstanden aus einer Extrapolation der ersten abgeleiteten Gleichungen. Die Koeffizienten leiten sich rein schematisch folgendermaßen her:

in der 1. Spalte unter x werden nur die ungeraden Zahlen hingeschrieben, jedes 2. Feld erhält ein Wurzelzeichen; die Hauptdiagonale („schlimme zeil von der linckhen oben zur rechten vnden") besteht aus Einsen; die darauffolgende Diagonale, beginnend oben links mit 3, enthält die Zahlen 3 bis 20; die Zahlen der dritten Diagonalen (der „dritten schlimmen zeil") haben, wenn sie fortlaufend durchnumeriert werden und die Zahl 5 die Zahl der Nummer 1 = Z (1) ist, folgendes Bildungsgesetz:

$$Z(n) = 5 + \sum_{i=0}^{n-2} (4 + i) \quad \text{für } 2 \leq n \leq 16\,, \quad n \text{ ganzzahlig.}$$

Für die weiteren Diagonalen ergeben sich ähnliche Bildungsgesetze. Ebenso schematisch werden die Vorzeichen in die Leerfelder gesetzt.

Ein einfaches Bildungsgesetz besteht zwischen 2 jeweils untereinander stehenden Gliedern. Bezeichnet der Index i die Nummer der Zeile, Index k die Nummer der Spalte, so lautet das Bildungsgesetz der Koeffizienten:

$$a_{i+1,k} = a_{i-1,k} + a_{i,k-1} \quad \text{für } 3 \leq i \leq 19\,, \quad 2 \leq k \leq 18$$
$$\text{i, k ganze Zahlen.}$$

Dabei existieren nur solche Koeffizienten $a_{i,k}$, für die bei

$$\begin{aligned} & i = 2\,n \\ & k = 2, 4, \ldots\, i-2,\ i = 2\,n \quad \text{wird} \\ \text{und bei } & i = 2\,n - 1 \\ & k = 1, 3, \ldots\, i-2,\ i = 2\,n - 1 \quad \text{wird;} \\ \text{mit } & 1 \leq n \leq 10,\ n \text{ ganzzahlig.} \end{aligned}$$

Je nachdem, ob x gegeben ist oder gesucht wird, handelt es sich um eine Vervielfältigungs- oder Teilungsaufgabe.

Viète kam in dem unter Anm. 30.2 erwähnten Werk zu ganz ähnlichen Gleichungen. Das Bildungsgesetz für die auftretenden Koeffizienten wurde von ihm richtig erkannt und angegeben, allerdings beweislos. Der französische Mathematiklehrer A. Anderson fügte später den Vièteschen Sätzen die Beweise hinzu. Wie bei Bürgi, werden sie zumeist über den Ptolemäischen Satz ausgeführt.

Mit ähnlichen Fragen beschäftigte sich auch der Niederländer Adriaen van Roomen (1593). Berühmt geworden ist seine Gleichung 45. Grades, hinter der sich die 45-Teilung eines Bogens verbirgt. Sie ist von Viète 1595 kritisch untersucht worden.

36. 1. Der Sinn dieser Zeilen ist: soll ein Bogen über einer gegebenen Sehne geteilt werden, so lassen sich immer 2 verschiedene Teilbögen angeben; denn durch eine Sehne im Kreis sind 2 zueinander komplementäre Bögen gegeben.

36. 2. An dieser Stelle erläutert Bürgi anhand des Bildes von der Sehne im Kreis, daß bei der Kreisteilung sowohl vom Bogen über der Sehne, als auch von diesem, vermehrt um den Vollkreis, auszugehen ist (später kommen weitere Vollkreise hinzu). Dies folgt aus der Analogie des Punktes zur Sehne. Durch diese Überlegung wird die Mehrdeutigkeit der Lösungen von Gleichungen höheren Grades plausibel gemacht.

36. 3. Die Aufgabe lautet: es ist die Sehne gegeben, die von dem Kreisbogen 40° bzw. von seinem Komplement 320° überspannt wird. Es ist der 4. Teil des Bogens gesucht (später: die Sehne, die von dem 4. Teil des Bogens überspannt wird). Da jeder gesuchte Teilbogen sogleich den Komplementbogen mitbestimmt, besteht das Ergebnis aus 4 Doppellösungen:

1. Der Bogen 320° wird in 4 Teile geteilt. Ergebnis: 80° und sein Komplement 280°.
2. Der Bogen 40° wird in 4 Teile geteilt. Ergebnis: 10° und sein Komplement 350°.
3. Entsprechend den Ausführungen auf Bl. 113 wird ein Vollkreis hinzugenommen: $40° + 360° = 400°$. Der vierte Teil von 400° ist 100°, das Komplement 260°.
4. $320° + 360° = 680°$. Der vierte Teil davon ist 170°, das Komplement 190° (und nicht, wie im Manuskript angegeben, 340° und 20°).

Wird der Ausgangsbogen mit α bezeichnet, so lauten die Lösungen allgemein:

$$x_1 = 2 \sin \frac{\alpha}{8}$$
$$x_2 = 2 \sin \frac{360 - \alpha}{8} = 2 \sin \left(45 - \frac{\alpha}{8}\right)$$
$$x_3 = 2 \sin \frac{360 + \alpha}{8} = 2 \sin \left(45 + \frac{\alpha}{8}\right)$$
$$x_4 = 2 \sin \frac{720 - \alpha}{8} = 2 \sin \left(90 - \frac{\alpha}{8}\right)$$

Für $\alpha = 320°$ erhält man für die Länge der Sehnen nacheinander: 1,28; 0,17; 1,53; 1,99.

37. 1. An der 5-Teilung des Bogens 60 bzw. 300° wird nochmals erläutert, daß es gerade so viele Lösungen einer Teilungsaufgabe gibt, wie die Zahl der Teilung angibt. Diese Regel entspricht dem Sachverhalt, daß der Grad der Gleichung (des Polynoms) mit der Anzahl der Lösungen übereinstimmt.

37. 2. Die Reihenfolge der Absätze ist durch Angaben im Text festgelegt. Hier wird nochmals ausgeführt, daß eine Gleichung nicht nur die Seite eines Vielecks, sondern auch die Diagonalen bestimmt. In der „Harmonice Mundi" [19, Bd. 6, S. 47ff.] geht Kepler unter ausdrücklicher Bezugnahme auf Bürgi auf diesen Sachverhalt näher ein und gibt hier u. a. die Gleichung für die Seiten des Siebenecks an.

38. 1. Der Begriff „numeri figurati" stammt (nach Tropfke) aus der Arithmetik des Boëthius. Sie sind Zahlen der Form

$$s_n^{(m)} = n + \frac{n(n-1)}{2}(m-2) \quad \text{(n-te Zahl der m-ten Ordnung).}$$

Für $m = 3$ ergeben sich die Dreieckszahlen

$$s_n^{(3)} = \tfrac{1}{2}\, n\,(n+1)\,,$$

für m = 4 die Viereckszahlen

$$s_n^{(4)} = n^2,$$

für m = 5 die Fünfeckszahlen

$$s_n^{(5)} = \tfrac{1}{2}\, n\,(3\,n - 1) \quad \text{usw.}$$

Kepler geht in der 2. Auflage seines „Mysterium Cosmographicum" in der Vorrede an den Leser unter Anm. 7 auf die figurierten Zahlen kurz ein, die er hier mit „Numeri numerati" bezeichnet. Vom Begriff her stehen die „numeri numerati" für eine Menge existierender Dinge im Gegensatz zu den „numeri numerantes", der Menge der abstrakten Zahlen. In dem vorliegenden Einleitungssatz werden die figurierten Zahlen direkt als Flächen (Produkte) vorgestellt.

38. 2. Proportional-Linien sind Linien, die, wie entsprechende Zahlen, in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen. Mit diesem Begriff ist der Zusammenhang zur Geometrie hergestellt. In der nachfolgenden kleinen Tabelle sind abwechselnd alleinstehende Zahlen und die Produkte der 2 umliegenden Zahlen aufgeführt. Die Produkte stellen Rechtecke dar, die Zahlen Quadrate.

39. Es sollen nachfolgend Verhältnisgleichungen als geometrische Beziehungen gedeutet und Gleichungen 2. bis 4. Grades an Flächen veranschaulicht werden. Dieser Versuch ist charakteristisch für Kepler, sich mit der Algebra im Sinne einer verkürzten Schreibweise geometrischer Zusammenhänge auseinanderzusetzen.

42. 1. „Aequatio" für „Gleichung" läßt sich bereits bei Leonardo von Pisa (1228, „Liber Abaci") nachweisen. Die Verdeutschung von „Aequatio" führte zunächst zu „vergleichung" (Grammateus 1518, Ch. Rudolff 1525). Erst um 1700 wurde die Bezeichnung „Gleichung" eingeführt.

42. 2. Hier täuscht sich Bürgi. Luigi Ferrari, ein Schüler Cardanos, hat die biquadratische Gleichung für den allgemeinen Fall gelöst, indem er sie in eine Gleichung 4. Grades überführt. Von dieser Entdeckung berichtet Cardano in seiner „Ars magna" (Nürnberg 1545). Die Klärung der Diskussion um die Auflösung von Gleichungen höheren Grades blieb dem 19. Jahrhundert vorbehalten.

42. 3. Gemeint ist das bereits in der Einleitung (Bl. 93^v) erwähnte Werk „Van den Circkel" (1596).

43. 1. Das Ziel dieses Abschnittes der „Coss" „Von der Vergleichung oder Aequatione" liegt in der Auflösung der durch die Teilung der Kreisbögen vorgegebenen Gleichungen nach x. Da es bisher an subtilen algebraischen Verfahren fehlt, gibt Bürgi im Folgenden einige Regeln zur näherungsweisen Lösung an, deren erste die „general aequation" ist. Sie besteht darin, daß in einer Gleichung der Wert für die Unbekannte geraten und dann approximativ verbessert wird, solange, bis der verbleibende Rest kleiner als eine vorgegebene Zahl wird. In der Rechnung wird die höchste Potenz von x durch Einsetzen der geratenen Zahl jeweils um 1 Grad erniedrigt, Glieder mit gleichen Exponenten werden zusammengefaßt.

43. 2. An diesem Beispiel sei der Vorgang „general aequation" erläutert. Es soll sein

$$\sqrt{4\,x^2 - x^4} = 1{,}92\,.$$

Bürgi setzt $x = 1{,}2$. Damit geht die Gleichung über in

$$\begin{aligned} \sqrt{2{,}56\,x^2} &= 1{,}92 \\ 1{,}6\,x &= 1{,}92 \\ x &= 1{,}2 \quad \text{wie angenommen.} \end{aligned}$$

46. Die linke Zahlenkolonne bezieht sich auf das letzte Beispiel von Bl. 118^v mit $x = 2$, die rechte Kolonne auf das erste Beispiel von Bl. 119 mit $x = \sqrt{3}$.

47. 1. Erfüllt der geratene Wert, wie hier 0,9 bei der 6-Teilung des Kreises, nicht die Teilungsgleichung, so verbleibt ein Rest R. R läßt sich als Sehne deuten, die von 2 Bögen überspannt wird: von einem kleineren, dem übrigbleibenden Bogen (hier: $\alpha = 39^\circ\,4'\,34''$), und dem Komplementbogen, der in 6 gleiche Teile geteilt wurde (hier: $320^\circ\,55'\,26''$). Wird bezeichnet:

$$\frac{360 - \alpha}{6} = \beta\,,$$

so besteht eine Kontrolle darin, daß das anfangs gewählte x gleich

$$x = 2 \sin \frac{\beta}{2} \text{ sein muß.}$$

Das vorliegende Beispiel stimmt bis in die Sekunden. Das Ziel der Überlegungen müßte darin bestehen, ein geeignetes Verfahren zu finden, durch das

$$R \to 0 \quad \text{wird.}$$

47. 2. Hier verwendet Bürgi wieder seine Dezimalbruchschreibweise. Die Zahl heißt 36 oder 36,0 (vgl. Anm. 23.3).

49. 1. Bürgi will sagen, daß die Differenz $\alpha - 2 \sin \frac{\alpha}{2}$ um so näher dem Wert 0 kommt, je kleiner α ist. Für $\alpha = 60^\circ$ wird das Verhältnis

$$\alpha : 2 \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{3} : 1\,.$$

Setzt man für π den Wert $\frac{22}{7}$, so wird

$$\alpha : 2 \sin \frac{\alpha}{2} = 22 : 21\,, \quad \text{wie Bürgi angegeben hat.}$$

49. 2. In der „Kreismessung" schreibt Archimedes: „Der Umfang eines Kreises ist dreimal so groß wie der Durchmesser und noch um etwas größer, nämlich um weniger als $\frac{1}{7}$, aber um mehr als $\frac{10}{71}$ desselben."

50. 1. Blatt 122 ist von Bürgi geschrieben. Die Gleichung für die Neuneckseite lautet:

$$9\,\varkappa - 30\,\mathfrak{c} + 27\,\beta_5 - 9\,\beta_7 + 1\,\mathfrak{cc} = 0\,.$$

Bürgi ordnet die positiven Glieder auf die linke Seite, die anderen ebenfalls als positive Glieder auf die rechte Seite der Gleichung an. Diese Gleichung hat nach der Skizze und laut Bürgi 4 reelle Wurzeln > 0.

50. 2. Die Verhältnisgleichungen sind von Kepler geschrieben. In den nachfolgenden Rechnungen werden die aus der Skizze entnommenen Werte 0,68 und 0,69 für x in die Ausgangsgleichung eingesetzt und die Abweichungen von 0 ermittelt.

50. 3. Die Figur soll ein „Mechanischer handgriff" sein, also eine grobe Methode zur Auffindung der Lösungen einer Teilungsgleichung. Ausgehend vom Punkt A wird das Vieleck als Sehnenpolygon in dem Kreis gezeichnet, am besten wohl über die Zentriwinkel. Die Genauigkeit der Ablesung ist auf 2 Dezimalstellen beschränkt.

52. Die Rechnungen erläutern, wie genau die 9-Teilung des Kreises nach der groben Methode gelungen ist. Zunächst wird für den abgegriffenen Wert 0,68 ... 0,69 der Restbogen bestimmt, dann für den Wert, der zwischen 1,73 und 1,74 liegt. Hier genügt es zu prüfen, ob der dreifache Bogen den ganzen Kreis ausfüllt, da die einfache Sehne x bereits vom Dreifachen des ersten Bogens überspannt wird. In den restlichen 3 Rechnungen wird nur noch jeweils die 1. Dezimalstelle angehalten. Eine Kontrolle für die Rechnung besteht insofern, als der Restbogen auf zweierlei Wegen sich ergibt: einmal als Differenz des neunfachen Ausgangsbogens zu 360°, zum anderen als Bogen der Sehne, die sich ergibt, wenn der grobe Wert (0,68 ... 0,69 usw.) in die Teilungsgleichung

$$9x - 30x^3 + 27x^5 - 9x^7 + x^9 = 0$$

eingesetzt wird.

Die Übereinstimmung durch die Kontrolle ist für 0,68 ... 0,69 schlecht, für 1,74 ... 1,73 über die Gleichung $3x - x^3 = 0$ gut.

53. 1. Es wird also für die Gleichung des Neunecks

$$f(x) = 9x - 30x^3 + 27x^5 - 9x^7 + x^9$$

eine Wertetabelle für $0 < x < 2$ aufgestellt und daran gezeigt, daß nicht mehr als 4 Nullstellen existieren. Wenn nämlich für aufeinanderfolgende x-Werte f (x) (bei Bürgi in Anzahl der x ausgedrückt) alternierendes Vorzeichen besitzt, muß dazwischen der Wert 0 erreicht werden. Stillschweigend vorausgesetzt wird die Stetigkeit der Funktion, daß also zwischen den betrachteten Funktionswerten keine Sprungstellen auftreten.

53. 2. Wird die Neunecksgleichung nicht 0, sondern einer beliebigen Zahl $a < 2$ gleich gesetzt, z. B. $= 1{,}29$, so lautet die Gleichung:

$$f(x) = 9x - 30x^3 + 27x^5 - 9x^7 + x^9 \pm 1{,}29 = 0\,.$$

Hierbei gibt das Doppelvorzeichen durchaus einen Sinn. Ein negativer Wert für die 9-Eck-Seite bestimmt einen Bogen > 180°, dessen Komplement < 180° ist. Zwischen 1,9 ... 2 variiert f (x) sehr rasch, so daß nur noch 2 Lösungen auftreten. Der zur Sehne 1,29 ... gehörende Bogen beträgt 81° bzw. 279°. Die 9 Teilbögen sind:

1. $81/9 = 9°$
2. $279/9 = 31°$
3. $(360 + 81)/9 = 40 + 9 = 49°$
4. $(360 + 279)/9 = 40 + 31 = 71°$
5. $(360 + 360 + 81)/9 = 40 + 40 + 9 = 89°$
6. $(360 + 360 + 279)/9 = 40 + 40 + 31 = 111°$
7. $(360 + 360 + 360 + 81)/9 = 40 + 40 + 40 + 9 = 129°$
8. $(360 + 360 + 360 + 279)/9 = 40 + 40 + 40 + 31 = 151°$
9. $(360 + 360 + 360 + 360 + 81)/9 = 40 + 40 + 40 + 40 + 9 = 169°$.

56. 1. f (x) ist hier nur für $0 < x < 2$ definiert, also gerade für den Bereich des Kreises mit dem Durchmesser = 2.

56. 2. Dieses Kapitel behandelt die Regula falsorum duorum, wie also aus 2 bekannten, aber noch nicht richtigen Werten die Wurzel berechnet werden kann.
Es seien gegeben

an der Stelle x_1 $f(x_1) > 0$,
an der Stelle x_2 $f(x_2) < 0$.

Gesucht ist die Stützstelle x mit $x_1 < x < x_2$, für die $f(x) = 0$ wird.
Setzt man $x_2 - x_1 = 10$ (Einheiten), so ist

$$x = \frac{(x_2 - x_1) \cdot f(x_1)}{f(x_1) + f(x_2)} = \frac{10\, f(x_1)}{f(x_1) + f(x_2)}\,.$$

Es wird also linear, d. h. längs der Sehne zwischen beiden Punkten, interpoliert. Der Schnitt mit der x-Achse gibt einen Näherungswert für die Nullstelle, mit dem das Verfahren zu wiederholen ist. Die Anzahl der Dezimalstellen wird nach jeder Interpolation verdoppelt.

58. Die folgenden Rechnungen und Erläuterungen sind von Bürgi selbst geschrieben. Vielleicht haben sich diese Blätter als einzige von jenen erhalten, die Kepler als Vorlage zur Verfügung standen. Sie stehen mit den umliegenden Blättern inhaltlich nicht in direktem Zusammenhang. Die Gleichung behandelt die Dreiteilung des Bogens. Bürgi gibt für $3x - x^3 - 1 = 0$ zwei Lösungen an:

$x_1 = 1.5320\ 8888\ 62$
$x_2 = 0.3472\ 9635\ 53$.

62. Kepler weist in seiner Ergänzung in lateinischer Sprache darauf hin, daß die Teilungsgleichung $3x - x^3 = 3$ ($a = 1$ oder andere Zahl ≤ 2) noch eine dritte Lösung hat, die durch Addition eines ganzen Kreises zum kleineren oder größeren Ausgangsbogen vorbereitet wird. An dieser Stelle knüpft Kepler an die Ausführungen von Bl. 112^v ff. an.

64. 1. Muß heißen: 01397.

64. 2. Bürgi setzt also folgende Proportion an:

$$\begin{aligned}(f(x_1) + f(x_2)) : f(x_1) &= (x_2 - x_1) : \Delta_1 x\\ 0{,}1397 : 0{,}0569 &= 0{,}01 \quad : \Delta_1 x\\ \Delta_1 x &= 0{,}0040\,.\end{aligned}$$

Hierin ist $\Delta_1 x$ die 1. Verbesserung von x_1.

65. Die Proportion in der Wiederholung lautet:

$0{,}001\ 400\ 12 : 0{,}000\ 564\ 10 = 0{,}000\ 1 : \Delta_2 x$.
Hieraus $\Delta_2 x = 0{,}000\ 040\ 289$
$\Delta_2 x$ ist die 2. Verbesserung von x_1.

Bürgi hat sich bei $\Delta_2 x$ um eine Dezimalstelle vertan, so daß für x_1 nicht

0,684 402 89 , sondern
0,684 040 29 herauskommt.

Das ist die Länge der Sehne zum Bogen 40°, so daß der sin 20° 0,342020145 beträgt, in guter Übereinstimmung mit Lansberg.

66. 1. Philipp Lansberg (1561–1632) veröffentlichte 1591 ein Buch über Trigonometrie unter dem Titel „Triangulorum geometriae libri quatuor“. Das Werk enthält auch siebenstellige Tafeln der trigonometrischen Funktionen, die der „Geometria rotundi“ von Thomas Fink (1583) entnommen sind.

66. 2. Es ist $x = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$ (x = subtensa oder Sehne, α Bogen über der Sehne). Das ist hier die Grundgleichung für die Berechnung von Sinus-Tafeln.

66. 3. Dieser Satz lautet in heutiger Sprechweise: Der Kreis hat 360° nach der gebräuchlichen und von jedermann seit vielen hundert Jahren angenommenen Teilung.

Aufgrund von Keilschrifttexten auf Tontäfelchen weiß man, daß die Einteilung des Kreises in 360° aus Babylon kommt. Über Ägypten ist dann die Sexagesimalteilung nach Griechenland gelangt [29, Bd. 1, S. 36ff.].

66. 4. Gemeint ist die Tafel der Koeffizienten auf Bl. 111.

66. 5. Diese Redewendung: „Ich will dirs aber nit rathen, dan zubesorgen, du möchtest das Nachtmahl drüber versaumen“ ist charakteristisch für die humorvolle Ausdrucksweise Keplers.

67. 1. Eratosthenes soll 220 v. Chr. unter dem Portikus des Akademiegebäudes in Alexandrien mit großen Armillen den Abstand der Wendekreise zu 11/83 des ganzen Kreises bestimmt haben [36, S. 130]. Im Almagest (I, 12) des Ptolemäus [25] heißt es hierzu: „Der Bogen zwischen den Wendepunkten beträgt ... 11 solcher Teile, wie der Meridian 83 enthält“.

Es verhält sich also $11 : 83 = x : 360°$

$$x = 47° \, 42' \, 40''.$$

Der Wert x ist der doppelte Wert der beobachteten Ekliptikschiefe. R. Wolf weist noch auf eine andere als die hier angegebene Erklärung hin, daß nämlich Eratosthenes die Distanz über die Kreisteilung der Armille zu 47° 40′ fand und sie, wie es offenbar damals üblich war, über $47\frac{2}{3} : 360$ zu dem Wert 11/83 vereinfachte. Allerdings erscheint die Richtigkeit dieser 2. Deutung fraglich.

67. 2. Die Algebra des französischen Mathematikers Petrus Ramus (1515–1572) wurde 1592 gedruckt.

67. 3. Da 2″ das kleinste Tafelargument sein soll, genügt es, die Sehne für den Bogen 4″ zu berechnen. Dies geschieht durch fortlaufende Teilung des Halbkreises in 2, 3 oder 5 gleiche Teile, entsprechend der vorangegangenen Zerlegung der Zahl 324000 in Primfaktoren.

68. Das gilt nur für die Hälfte aller Polynome.

69. Hierin wird der für die Koeffiziententafel gültige Satz angesprochen, daß, abgesehen vom Absolutglied, jedes Polynom unter dem Wurzelzeichen die Quadratwurzel eines anderen in der Tafel aufgeführten Polynoms darstellt. Diese Wurzel, da selbst Quadrat eines anderen Polynoms, wird nicht alle Lösungen der Teilungsaufgabe geben können.

71. Das Beispiel zeigt die Begrenztheit des beschriebenen Verfahrens. Es wird praktisch die halbe Teilung ausgeführt. Man kommt also von der 6-Teilung in die 3-Teilung, eine ungerade Teilung (impariter pares) und von der 4-Teilung in die 2-Teilung, eine gerade Teilung (pariter pares).

72. 1. Die Teilungsaufgaben sollen also im folgenden so eingeschränkt sein, daß nur noch Bögen $\leq 60°$, d. h. Sehnen ≤ 1 betrachtet werden. Das folgende Beispiel, den Bogen 60° in 2 gleiche Stücke zu teilen, führt zu der Teilungsgleichung

$$4\,x^2 - x^4 = 1\,.$$

Diese Gleichung wird so gelöst, daß in der Form

$$4\,x^2 = 1 + x^4$$

x^4 zunächst 0 gesetzt wird und dann iterativ die Größen x^2 und $1 + x^4$ bestimmt werden. Dieser Prozeß läuft so ab:

$$x_1^2 = \tfrac{1}{4} \qquad = 0{,}25$$

$$x_2^2 = \frac{1 + (\frac{1}{4})^2}{4} \qquad = 0{,}265\,625$$

$$x_3^2 = \frac{1 + \left(\frac{1 + (\frac{1}{4})^2}{4}\right)^2}{4} = 0{,}267\,639 \quad \text{usf.}$$

Die Lösung der Aufgabe wird also durch eine Darstellung in Kettenbrüchen angegeben. Allerdings konvergiert die Reihe $x_1^2, x_2^2, x_3^2 \ldots$ nur schlecht. Es hätte genügt, nur jeweils wenige Stellen zu berücksichtigen, wie Bürgi auch auf Bl. 134 feststellt.

Die Gleichung $x^4 - 4\,x^2 + 1 = 0$ hat für x^2 die im Manuskript durch die Kettenbrüche approximierte Lösung

$$x^2 = 2 - \sqrt{3}$$

$$x^2 = 0{,}267\,949\,.$$

72. 2. Hier wurde eine Ziffer, vielleicht beim Abschreiben, ausgelassen. Die richtige Ziffernfolge lautet:

0070 556 640 625 .

Entsprechendes gilt für die um 1 vergrößerte Zahl. Der vierte Teil ist dann

0267 639 1601 „vnd ein wenig mehr".

72. 3. Das im folgenden erklärte Schema ist die Anwendung des zuvor erläuterten Algorithmus. Es wird jeweils für die Bestimmung der einzelnen Ziffern durch 4 dividiert. Dabei ist zu beachten, daß zur zuletzt erhaltenen Differenz jeweils x^4 zuvor zu addieren ist. Der Wert für x^4 ergibt sich aus dem Quadrat der Zahl, wobei bei der Bildung des Quadrates das früher gewonnene Quadrat zu berücksichtigen ist. Es sei die erste Ziffer a, die zweite Ziffer b, die Zahl also $10\,a + b$, dann ist von dem Quadrat dieser Zahl für x^4

$$100\,a^2 + 2 \cdot 10\,a \cdot b + b^2$$

nur noch $2 \cdot 10\,a \cdot b + b^2$ zu berücksichtigen, in der vorliegenden Rechnung in der Weise

$$b \cdot 10\,a + b \cdot (10\,a + b)\,.$$

74. 1. Bürgi will hier die Gleichung $3x - x^3 = 1$ nach dem Prinzip des vorangegangenen Beispiels lösen. Er setzt in

$$3x = 1 + x^3 \quad \text{für } x < 1$$

nacheinander

$$x_1 = \tfrac{1}{3} = 0{,}333\ldots$$

$$x_2 = \frac{1 + (\frac{1}{3})^3}{3} = \tfrac{28}{81} = 0{,}345\ldots \quad \text{usf.}$$

Die Rechnung ist wegen x^3 etwas mühsam. Er hätte nach der früheren Methode von Bl. 110 diese Lösung sogleich angeben können:

$$\begin{aligned} x &= 2 \sin \frac{60°}{6} \\ &= 0{,}347\,296\,. \end{aligned}$$

Die verkürzte Rechnung ist nicht ausgeführt.

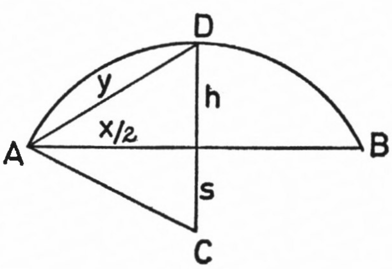
74. 2. An dieser Stelle wollte Kepler an seine Betrachtungen über „fortgesetzt vervielfachte Proportionen" von Bl. 110 anknüpfen. Der durchgestrichene Text gibt die entsprechende Formulierung für die Gleichung $3x - x^3 = a$ an.

74. 3. Es soll die Sehne $AB = x$ in 2 gleiche Teile geteilt werden. Der Text auf Bl. 136 läßt sich in 3 Gleichungen wiedergeben:

$$(1) \quad s^2 = r^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$(2) \quad h = r - s$$

$$(3) \quad y = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2}\,.$$



Figur 6

74. 4. Auch aus dieser Stelle geht hervor, daß der „Canon" fertiggestellt wurde.

75. 1. Bürgi ist also hiernach von der Sehne 4″ ausgegangen. Die dann folgenden Schritte sind:

(1) Verdoppelung der Sehne über $\sqrt{4x^2 - x^4}$ → 8″
(2) Verdreifachung der Sehne über $3x - x^3$ → 12″
(3) Verdoppelung von (1) → 16″
(4) Verfünffachung der Sehne über $5x - 5x^3 + x^5$ → 20″.

Die Sehne des Bogens 20″ ergibt sich auch bei der Berechnung der Ausgangssehne (4″) als Zwischenergebnis.

So können fortlaufend in Schritten von 4 zu 4″ die Sehnen der Bögen bis 60″ und darüber hinaus berechnet werden. Nur bei den Werten 28, 44, 52 ist an eine Vervielfachung mit 7 bzw. 11 zu denken.

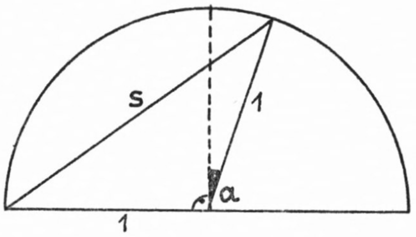
75. 2. Dieses Verfahren ist besonders für kleine Sehnen bequem. Es beruht auf dem Satz, daß der Winkel in einem Halbkreis über dem Durchmesser als Sehne ein rechter ist.

75. 3. Es muß heißen: 179° …

76. 1. Hier wird eine einfache Regel aufgestellt, wie die Sehnen zwischen 60° und 120° einfach über dem Durchmesser zu berechnen sind. Es soll sein:

$$s^2 = 2 \pm 2 \sin \alpha.$$

s bezieht sich auf den Winkel ($90 \pm \alpha$), 2 ist der Kreisdurchmesser und $2 \sin \alpha$ die Länge der Sehne über dem Bogen $2\,\alpha$. Die Formel ergibt sich direkt aus dem Kosinus-Satz. Im vorliegenden Beispiel beträgt $\alpha = 4''$. Es ist aber die Sehnenlänge das Doppelte des Sinus vom halben Winkel. Durch die obige Gleichung werden also leicht die Sinus-Werte um 45° bestimmt.



Figur 7

76. 2. Das Schlußkapitel der „Coss“ ist unvollständig geblieben. Die in der Überschrift angekündigte Differenzenmethode wurde nur zum Teil ausgeführt. Nach den hier und anderwärts (Ursus, Kepler) vorliegenden Andeutungen kann aber kaum ein Zweifel darüber bestehen, daß Bürgi die Differenzenmethode in einer besonderen Form, die „Kunstweg“ (artificium) genannt wurde, zur Berechnung der Sinus-Tafeln mit herangezogen hat (vgl. Nachbericht).

Der Grund, warum das Schlußkapitel nicht fertiggestellt wurde, dürfte vielleicht in folgendem liegen: das Differenzenverfahren sollte solange nicht an die Öffentlichkeit gelangen, ehe nicht der Druck der „Coss“ gesichert war. Daher erging sich Bürgi Kepler gegenüber nur in Andeutungen, wie der lateinische Text am Ende zeigt. Möglicherweise spielte hierbei auch die Feindschaft zwischen Ursus, dem Schüler Bürgis, und Tycho Brahe eine Rolle. Später wandten sich dann Bürgi und Kepler anderen Arbeiten zu. Als dann die Logarithmen aufkamen und die prosthaphäretische Methode überflüssig machten, bestand keine unmittelbare Notwendigkeit mehr, die Sinus-Tafeln herauszugeben. So geriet auch die „Coss“ in Vergessenheit, und das Schlußkapitel, das allein Bürgi hätte vollenden können, blieb unvollständig. Sicher ist auch der Dreißigjährige Krieg daran schuld, daß die fast fertiggestellte Schrift Bürgis nicht zu seinen Lebzeiten erschienen ist.

76. 3. Auch hierüber wird nichts mehr gesagt. Allenfalls kann die lateinische Ergänzung Keplers am Ende der „Coss“ weiterhelfen. Hierin wird ein Zusammenhang zwischen den Sinus- und Arcus-Differenzen an den verschiedenen Kreisstellen hergestellt.

76. 4. Diese Einführung in die höheren Differenzen dient offenbar der Vorbereitung des späteren, nicht mehr beschriebenen Verfahrens. Hierfür spricht auch der Briefwechsel zwischen Fabricius und Kepler im Jahre 1603, als Kepler auf eine entsprechende Anfrage des Fabricius mitteilt, daß der Kunstweg („Byrgii artificium“) höchstwahrscheinlich von der Bildung höherer Differenzen ausgegangen sei (vgl. Nachbericht).

77. 1. Den folgenden Weg hat Bürgi anhand von Sinus-Werten und nicht über die Coss gefunden. Das Verfahren basiert darauf, daß eine kleine Änderung von $\sin \alpha$ gleich dem mittleren Betrag der Änderungen von $\sin(\alpha - A)$ und $\sin(\alpha + A)$ sein soll:

$$\begin{aligned} d(\sin \alpha) &= \tfrac{1}{2}\{d[\sin(\alpha - A)] + d[\sin(\alpha + A)]\} \\ \cos \alpha \, d\alpha &= \tfrac{1}{2}\, d\alpha \{\cos(\alpha - A) + \cos(\alpha + A)\} \\ &= \cos \alpha \cos A \, d\alpha\,. \end{aligned}$$

Die Beziehung stimmt um so besser, je kleiner A gewählt wurde. Bürgi hat die jeweiligen Änderungen wahrscheinlich der fertigen Sinus-Tafel entnommen.

77. 2. In der Übersetzung lautet der Beginn des Schlußtextes: „Das übrige wird vermißt. Darunter war auch folgendes: Die Differenzen der Sinus-Werte verhalten sich am Anfang wie die Differenzen der Bögen, oder die Sinus-Werte verhalten sich wie die Bögen. Der am Ende auslaufende Bogen ist das Doppelte des Fehlenden ..."

III. NACHBERICHT

1. DIE SITUATION DER MATHEMATIK IM 16. JAHRHUNDERT DER KREIS UM WILHELM IV. VON HESSEN UND TYCHO BRAHE

Aufschwung der mathematischen Wissenschaften

Die mathematischen Wissenschaften Europas, im 15. Jahrhundert von der Aufnahme und Verarbeitung des von den Griechen und Völkern des Orients überlieferten Materials bestimmt, überschritten am Ende des Mittelalters den Bereich bisherigen Wissens. Begünstigt von der Entwicklung in Seefahrt und Handel, nahmen sie einen bis dahin noch nicht erlebten Aufschwung: in der Astronomie setzte eine systematischere und sorgfältigere Beobachtungstätigkeit ein, im Kalenderwesen wurde die Inkraftsetzung eines neuen Kalenders anstelle des alten, immer ungenauer sich erweisenden julianischen Kalenders ernsthaft diskutiert, und schließlich zeigten sich auch in anderen Gebieten, wie Gleichgewichtslehre, Feldmeßkunst und Perspektivlehre, Tendenzen, mehr als bisher Erkenntnisse der Mathematik anzuwenden. Mit der Hinwendung der Mathematik zur Praxis wurde bei den Handwerkern, Künstlern, beim tätigen Menschen überhaupt, ein Bewußtsein dafür geweckt, in der Wissenschaft, speziell in der Mathematik, wenn nicht Grundlage und Voraussetzung, so doch Hilfsmittel für die menschliche Arbeit zu sehen. Bemerkenswert ist nun zu beobachten, wie zu gleicher Zeit, in der sich Praxis und Wissenschaft kennen und schätzen lernen, in der Mathematik, und hier in der Arithmetik und Algebra, mit der Symbolik eine mehr abstrahierende Schreib- und Denkweise vorbereitet wird. Mathematiker der italienischen Schule entdeckten mit den Radikalen Lösungen von algebraischen Gleichungen dritten und vierten Grades und verließen damit den Bereich der linearen Algebra. Zu ihnen gehören Tartaglia (1539), Cardano mit seiner „Ars magna" (1545) und Bombelli mit seiner um 1560 entstandenen, aber erst 1572 gedruckten Algebra. Nicht nur werden Gleichungen höheren Grades behandelt, sondern die Lösungen auch schon auf komplexe Zahlen ausgedehnt, die Cardano „wahrhaft sophistische" Größen nennt, mit denen man „die Rechenoperationen nicht so wie bei einem reinen minus, auch nicht wie bei anderen Ausdrücken ausführen" könne, und bei denen man „auch nicht erjagen" könne, was sie seien [12, S. 58].

Coss

Die Coss, wie die frühe Algebra nach dem italienischen Wort cosa = res für die Unbekannte genannt wurde, war bereits in der 2. Hälfte des 15. Jahrhunderts in einer Aufwärtsentwicklung begriffen. Das Wissen der italienischen Schule breitete sich im mittleren und westlichen Europa aus und leitete um die Mitte des 16. Jahrhunderts und in den nachfolgenden Jahrzehnten in einem Aufschwung, der, um nur einige Namen zu nennen, mit Recorde in England, Stevin und van Roomen in den Niederlanden und Viète in Frankreich verbunden war, einen ersten Höhepunkt der neuzeitlichen Mathematik ein. Insbesondere Viètes Leistungen am Ende des Jahrhunderts in der Weiterführung der Buchstabenrechnung und der Verknüpfung von Algebra und Geometrie, aber auch in der Logistik (Rechenkunst) und Entwicklung der Trigonometrie, gehören zu dem Größten, was die Mathematik des 16. Jahrhunderts überhaupt hervorgebracht hat. Ihm vor allem ist die Weiterentwicklung des Gedankens zu verdanken, unbekannte Größen durch Symbole zu bezeichnen und auf bekannte Größen zu beziehen. Ihm gelang die Lösung einer von van Roomen gestellten Gleichung 45. Grades, die er als Winkelteilungsgleichung erkannte.

Ebenso konnte er die Anzahl der positiven Wurzeln der Gleichung angeben. Die erste algebraische Schrift von Viète erschien 1591 unter dem Titel „In artem analyticam isagoge" (Einleitung in die analytische Kunst).

Algebra in Deutschland

Auch in Deutschland machten sich die Einflüsse der Cossisten bemerkbar. Etwa um die Mitte des 15. Jahrhunderts waren erste Kenntnisse über die Gleichungslehre nach Deutschland gelangt; sie wurden hier ebenso neu durchdacht und selbständig weiterentwickelt wie in anderen europäischen Ländern. Zunächst führte die Algebra in den Lehrbüchern der Zeit noch kein eigenständiges Dasein, sondern wurde gemeinsam mit der Rechenkunst dargestellt. Die erste gedruckte algebraische Darstellung in Deutschland stammt aus dem Jahr 1521 und ist von H. Schreiber (Grammateus) verfaßt. Sie ist Teil eines umfangreichen Rechenbuches, in dem er seine aus der Kunst der Arithmetik und Geometrie zusammengetragenen Regeln veröffentlichen wollte. Es wurden u. a. behandelt: Rechenarten (Species), Linienrechnen, Bruchrechnen, Regula detri, Regula falsi, cossische Schreibweise, Gleichungslehre, Musiktheorie, Buchführung, Faß- und Visierrechnung [17]. Wurde hier die Coss neben der Darstellung der tradierten arithmetischen Verfahren nur am Rande behandelt, so setzte sich die Verfahrensweise der neuen Algebra bald immer stärker durch, wie in der Coss von A. Riese (1524), in der Coss von Chr. Rudolff (1525) und in der Deutschen Arithmetica von M. Stifel (1545). Besonders in der Bearbeitung von Rudolff findet die Coss als Lehre von den Potenzen der Unbekannten und Lehre von den Gleichungen eine systematische und didaktisch wertvolle Darstellung.

Einflüsse der Astronomie

Während in den theoretischen Erörterungen der Coss und Arithmetik die Mathematiker weitgehend unter sich blieben, sind in der 2. Hälfte des 16. Jahrhunderts Einflüsse der Astronomie auf die praktische Mathematik und Trigonometrie nachweisbar. Eine gewisse Wechselbeziehung zwischen Astronomie und Mathematik läßt sich zwar auch für frühere und spätere Zeiträume feststellen. Hier aber tritt dieser Zusammenhang zwischen beiden Wissenschaften zu einer Zeit auf, in der immer stärker das Verlangen spürbar wird, von der rein qualitativen Betrachtungsweise der Phänomene zu einer mehr quantitativen Behandlung vorzudringen. Demgemäß versucht die sich verändernde Wissenschaft, entsprechende numerische Verfahren zur Bearbeitung und Auswertung der Messungen bereitzustellen. Dieser Prozeß wird in den letzten Jahrzehnten des 16. Jarhunderts vorbereitet, ehe er im 17. Jahrhundert die Wende zur neuen Naturwissenschaft herbeiführt.

Die Astronomie macht in dieser Entwicklung einen Anfang. Nach dem neuen Weltentwurf von Copernicus, der nicht durch Beobachtungstatsachen belegt werden konnte, sondern eher auf naturphilosophischen Prinzipien, wie dem der Einfachheit, basierte, sah sich die Astronomie herausgefordert, den Aufbau der Welt, d. h. hier die Beschaffenheit des Planetensystems, aus der Beobachtung der Natur selbst zu erschließen. Insbesondere ging es zunächst darum, wie mit verfeinerten und vergrößerten Instrumenten die Genauigkeit der Beobachtungen zu verbessern wäre, und wie aus der sorgfältigen und systematischen Beobachtung der Fixsterne ein zuverlässiger Katalog der Sterne als Grundlage für die Untersuchung der Planetenbewegung aufgestellt werden könnte.

Brahe und Wilhelm IV.

Um 1575 bildeten sich zwei astronomische Beobachtungszentren heraus: das eine um Landgraf Wilhelm IV. von Hessen in Kassel, das andere um Tycho Brahe auf der Insel Hven vor Kopenhagen. Der kurze Aufenthalt von Brahe beim Landgrafen hatte genügt, um nicht nur dessen Eigeninitiative zur Fortsetzung begonnener Beobachtungen zu wecken, sondern auch Tycho Brahe anzuregen, sich ganz der astronomischen Wissenschaft zu widmen. Nach dem Bau seiner Großsternwarte Uraniborg begann um 1580 auf Hven eine systematische Beobachtungstätigkeit mit Unterstützung etlicher, aus verschiedenen Ländern vorsprechender junger Leute, die bei ihm studierten oder sich als seine Assistenten betätigten. Als einer der ersten Mitarbeiter Brahes hielt sich ab Sommer 1580 der Mathematiker P. Wittich in Uraniborg auf, den Brahe auf der Rückreise von Kassel in Breslau kennen und dann wegen seiner erfinderischen Geschicklichkeit in der Geometrie und der numerischen Berechnung der Dreiecke schätzen gelernt hatte [4, Bd. 6, S. 89 und 37]. Während der gemeinsamen Arbeit mit Brahe fand in der Rechenpraxis das neue Verfahren der Prosthaphaerese (vgl. unten) Eingang, von dem Ch. Longomontanus, ein anderer langjähriger Assistent Brahes, berichtet, er kenne niemand, der diese Methode zuvor angewandt habe.

Nach der Abreise Brahes intensivierte Landgraf Wilhelm, ebenfalls unter Mithilfe von Assistenten, die Arbeit auf seiner Sternwarte in Kassel. 1577 nahm er den auch in Mathematik und Astronomie ausgebildeten Theologen Ch. Rothmann in seine Dienste, ein „ingeniosus und feiner gelehrter Gesell" [4, Bd. 6, S. 212]. Seine Stärke lag mehr in der Bearbeitung theoretischer Aufgaben als im Beobachten und in der Wartung astronomischer Instrumente. Dafür empfahl sich 2 Jahre später der 27jährige Schweizer Uhrmacher Jost Bürgi [34]. Vom Landgrafen als Hofuhrmacher angestellt, zeichnete er sich nicht nur durch seine ungewöhnliche Kunstfertigkeit aus, sondern offenbarte auch eine erstaunliche mathematische Begabung, die ihm den Ehrentitel eines „zweiten Archimedes" eintrug [4, Bd. 6, S. 49]. Bürgi, zunächst für den Bau und die Instandhaltung der Uhren am Hof zuständig, wurde bald für weiterreichende Aufgaben, insbesondere zu astronomischen Beobachtungen und Rechnungen für den Sternkatalog eingesetzt, während Rothmann die redaktionelle Arbeit am Katalog zufiel. Was Bürgi wohl eine gewisse Zurückhaltung auferlegte, war die mangelnde Kenntnis der lateinischen und griechischen Sprache.

Bald drang die Kunde von den Zielen beider Observatorien, den Mitteln und Wegen ihrer Forschungen und ihrer ersten Ergebnisse, auf deren Grundlage die Astronomie erneuert werden sollte, über die Grenzen Dänemarks und des Reichs hinaus nach Italien, Frankreich und England. Der umfangreiche Briefwechsel, in dem sich Brahe und Wilhelm IV. über Einzelheiten ihrer wissenschaftlichen Tätigkeit befragten oder unterrichteten, fand in Abschriften Verbreitung. Zudem brachten die häufig in Hven und Kassel zu Gast weilenden Besucher dort aufgenommene Informationen in Umlauf, die die Fachkundigen vielerorts zu eigenem Nachdenken über derartige Forschungen anregten. Genau das aber ließ ein Klima aufkommen, in dem Prioritätsansprüche wachsen, Verdächtigungen und Geheimniskrämerei entstehen konnten.

Obwohl Wittich in Aussicht gestellt hatte, für immer bei Brahe bleiben zu wollen, verließ er Dänemark nach wenig mehr als einem Vierteljahr; er kehrte nie wieder zurück. 1584 fand er sich in Kassel mit Berichten über die wissenschaftliche Tätigkeit auf der Uraniborg ein. Diese veranlaßten den Landgrafen, seine Instrumente durch Bürgi verbessern zu lassen, der dabei nicht nur die Vorteile der Tychonischen Instrumente berücksichtigte, sondern seinerseits Verbesserungen hinzufügte. Als Brahe davon hörte, verdächtigte er Wittich – wohl in unzutreffender Weise –, als eigene Erfindung ausgegeben zu haben, was auf Brahes Einfälle zurückgehe.

Prosthaphaerese

Eine andere Neuerung, mit der Wittich die Kasseler Astronomen bekannt machte, war das Rechenverfahren der Prosthaphaerese (vgl. Anm. 7.4). War Wittich auch nicht der erste, der auf diese Rechenmethode hinwies, so bleibt jedoch sein alleiniges Verdienst, die prosthaphaeretischen Formeln in praktischen Rechnungen erstmals augewendet zu haben. In diesem Sinn spricht Kepler mehrmals von der „Prosthaphaeresis Wittichiana" [19, Bd. 2, S. 336 und Bd. 16, S. 189]. Frischer Arbeitseifer spornte Rothmann und Bürgi im Verein mit Wittich während der nächsten Jahre zur Weiterentwicklung der erst in ihren Ansätzen erkannten Methode an. Doch dabei blieben Eifersüchteleien nicht aus. So gab

Rothmann vor, schon in seiner vor 1577 zu Wittenberg abgefaßten „Doctrina triangulorum" das abgekürzte Rechenverfahren mitgeteilt zu haben, während sich in dem von R. Wolf im Manuskript durchmusterten Werk, das nie im Druck erschien, nichts dergleichen findet [35, S. 64ff.; 14, Bd. 2, S. 374f.]. Dagegen schreiben zeitgenössische Berichte die Entdeckung der Prosthaphaerese allein Wittich und Bürgi zu [s. S. 7; ferner 30, Bl. 5v und 31, Bogen I.3]. Sie bezeugen, daß Wittich den sog. ersten Fall der Prosthaphaerese in Kassel eingeführt habe, während Bürgi den Beweis dafür fand, aus dem sich ein zweiter Fall und dessen Beweis ableiten ließ. In der Einleitung (S. 7f.) wird auch dargelegt, wie der talentierte Uhrmacher zu diesen Erfolgen kam: am Hof weilende Gelehrte waren ihm zur Verfertigung etlicher Werke mit Unterricht in der Astronomie und Übersetzung der Autoren behilflich, was ihn wiederum dazu ermunterte, geometrischen Problemen nachzusinnen und ihre Lösungen zu suchen. Und weil ihm wegen mangelnder Sprachkenntnisse die Tür zu den Autoren nicht immer offen stand, war er, mehr als andere belesene Gelehrte, auf eigenes Nachdenken und Suchen nach neuen Wegen angewiesen. Dabei brachte er es so weit, daß er, nach Keplers Urteil [19, Bd. 1, S. 307], in der Mathematik viele Professoren dieser Disziplin leicht übertraf. Es blieb nicht bei dem vorgenannten Beitrag zur Begründung der Prosthaphaerese; Bürgi erweiterte die Methode, die er bei seinen Berechnungen auch mehrmals anwandte. Insgesamt aber hat sie im numerischen Rechnen keinen entscheidenden Durchbruch erzielt, zumal sie wenige Jahrzehnte später vom logarithmischen Rechnen verdrängt wurde, zu dem auch Bürgi einen bedeutenden Beitrag geleistet hatte. Kepler hat sich nur selten der Prosthaphaerese bedient, er verwendete lieber die abgekürzte Multiplikation und Division.

Ursus

Im Frühjahr 1586 traf in der Kasseler Sternwarte ein Besuch zu längerem Aufenthalt ein, der viele Jahre von sich reden machen sollte: Nikolaus Raimarus Ursus aus Dithmarschen [38]. Er war als Schweinehirt aufgewachsen, eignete sich dann im Selbstunterricht neben Sprachkenntnissen auch mathematisches wie astronomisches Wissen an und trat im Alter von 30 Jahren als Landmesser mit einer Schrift erstmals an die Öffentlichkeit. Im Gefolge eines Edelmannes weilte er im September 1584 acht Tage bei Brahe auf Hven, wo man möglicherweise auch über Einwände gegen das kopernikanische Weltsystem diskutierte, was Ursus in der Folge zu weiterem Nachdenken und schließlich zur Aufstellung eines eigenen Weltsystems veranlaßt haben könnte.

Rothmann und Bürgi

Während seines Aufenthalts an der landgräflichen Sternwarte befreundete sich Ursus mit Wittich und Bürgi. Wittich verließ Kassel zwar bald nach Ankunft des neuen Gastes; doch machte er diesen zuvor noch mit seiner prosthaphaeretischen Erfindung bekannt. Gewinn für beide Teile brachte die Zusammenarbeit des Hofuhrmachers Bürgi mit dem Autodidakten Ursus. Dieser nennt Bürgi seinen Lehrer, der ihm Einblick in seine mathematischen Entdeckungen – Prosthaphaerese und Differenzenmethode zur Berechnung des „Canon Sinuum" – gewährte, während jener nicht nur von der Sprachkenntnis des Ursus profitierte, sondern auch von dessen Gewandtheit in der Federführung. Das Verhältnis zu dem zu Überheblichkeit neigenden Rothmann artete in dem Augenblick zu offener Feindschaft aus, als Ursus die von ihm ersonnene Hypothese der Planetenbewegungen dem Landgrafen unterbreitete, die Bürgi dann im Modell darstellte. Rothmann glaubte, darin das fehlerhafte Werk zweier Dilettanten zu sehen, die nicht einmal verdienten, beim Namen genannt zu werden. Immerhin bewogen ihn die mathematischen Erfolge beider, eilends einen kaiserlichen Autorenschutz für nicht weniger als 12 mathematische Traktate zu erwirken (6. Mai 1588), darunter auch die oben erwähnte „Doctrina triangulorum" sowie eine „Regula Coss, seu Algebraica, logica methodo redacta" [27, Bd. 12, S. 125]. Doch

Ursus kam ihm noch vor Gebrauch des Privilegs mit einer Aufsehen erregenden Publikation zuvor.

Fundamentum astronomicum

Um welche Zeit des Jahres 1587 sich der Dithmarsche von Kassel aus nach Straßburg begab, ist unbekannt. Dort widmete er sich, gefördert von den Professoren der Hohen Schule, dem Studium der Mathematik und veröffentlichte 1588 (mit Widmung vom 22. Juli) das erste seiner Hauptwerke: „Fundamentum astronomicum". Seine Bedeutung sehen die Historiker weniger in einem eigenen Beitrag des Autors als vielmehr in der Kompilation von damals gebräuchlichen Methoden der Goniometrie und Trigonometrie [38, S. 314; 7, Bd. 1, S. 204]. Damit erfuhren die Zeitgenossen erstmals aus einer gedruckten Schrift von der Anwendbarkeit der Prosthaphaerese in dem ersten, auf Wittich zurückgehenden Fall [30, Bl. 16v]. Außerdem enthält die Schrift den bedeutsamen, weil einzigen Hinweis auf eine der beiden von Bürgi angewandten Methoden zur Berechnung der Sinustafeln [30, Bl. 8v–9r], seinen „Kunstweg", von dem in unserem Manuskript wiederholt die Rede ist. Die von Ursus überlieferte Regel ist jedoch mit Absicht so undurchsichtig und verklausuliert in Worte gefaßt – auch das beigefügte Diagramm (vgl. S. 118) geht über Andeutungen nicht hinaus –, daß die Zeitgenossen nichts damit anfangen konnten. Mündlich wie in Briefen (u. a. von dem mit Kepler korrespondierenden Brengger und dem Italiener Rubeus, hinter dem Clavius stand) immer wieder um Auflösung der verschlüsselten Angaben gedrängt, gab Ursus jedoch nie eine Aufklärung; im Gegenteil: in dem zweiten seiner Hauptwerke ging er nochmals auf die Bürgische Methode ein [31, Bl. H3–H4], fügte aber zu den alten neue Rätsel hinzu. Nur soviel fanden Historiker heraus, daß es sich dabei um die Bildung höherer Differenzen handeln müsse. Neue Überlegungen werden in der vorliegenden Arbeit angeboten (S. 116ff.). Eindeutige Motive für das Verhalten des Ursus zu nennen, bleibt uns versagt; sie verbergen sich in folgenden Darlegungen.

Ohne Zweifel darf dem von Standesbewußtsein mitbestimmten Verhalten Rothmanns, dessen Name im „Fundamentum" nicht erwähnt wird, Mitschuld an dem Vorgehen des verärgerten Ursus gegeben werden ebenso wie dem bald einsetzenden Streit mit Tycho Brahe. Offen bleibt die Frage, wie sich Bürgi dazu stellte. Leider besitzen wir von ihm, dem Ruhe und Bescheidenheit nachgerühmt werden, keine schriftliche Äußerung darüber, auch nicht über die Art seiner Beziehungen zu Ursus. Gewiß hatte er mit ihm über seine mathematischen Entdeckungen gesprochen, aber wieweit ihn dabei in Einzelheiten eingeweiht? War Bürgi nicht nur einverstanden mit der Verschlüsselung, sondern hatte dieselbe sogar gewünscht? Ein solcher Wunsch entspräche einer Äußerung Keplers, der im Hinblick auf Bürgis Hinauszögern der Veröffentlichung seiner Logarithmen von ihm schrieb, er sei ein „Zauderer und Geheimniskrämer" [19, Bd. 10, S. 48]. Darauf spielt auch die von Ursus im „Fundamentum" [30, Bl. 19v] gebrauchte Wortbildung „Byrgianum myrothecium" an. Zu denken gibt ferner die Tatsache, daß Bürgi den seinen „Kunstweg" auszeichnenden Trick niemals preisgab. Aus der von Brahe weitergegebenen Behauptung, Bürgi habe sich oft beklagt, daß Ursus im „Fundamentum" sich mit fremden Federn geschmückt habe [24, S. 377], darf man nur mit Vorsicht Schlüsse ziehen. Die Zusammenstellung von mathematischen Problemen mit Namensangaben der sie behandelnden Gelehrten und der verbindende Text bezeugen dem Ursus eigene wissenschaftliche Qualitäten. Sowohl Kepler billigt ihm solche zu [19, Bd. 13, S. 345], wie auch Adrianus Romanus [26, S. 85].

Weltsystem

Am Schluß des „Fundamentum" stellte Ursus auch seine neue Planetentheorie vor. Sobald Brahe durch Rothmann davon erfuhr, beschuldigte er den Ursus, sich während seines Aufenthalts in Hven 1584 unerlaubten Einblick in die Unterlagen zu dem von Brahe ersonnenen Weltsystem verschafft, mit anderen Worten, ihm seine neue Idee gestohlen zu haben. Wir können hier weder auf den historischen Ablauf der Ereignisse, die zu diesem Vorwurf Anlaß gaben, noch auf seine wissenschaftliche Berechtigung eingehen; nur soviel sei angedeutet, daß R. Wolf eine nach allen Seiten gerecht werdende Ehrenrettung für den viel geschmähten Ursus schrieb [38, S. 311–325]. Zunächst gewann Ursus dank seiner Schrift die Gunst des Reichsvizekanzlers Jakob Curtius, der ihn Rudolph II. empfahl. Der Kaiser beschäftigte ihn als Mathematiker gegen ein geringes Stipendium. Im Sommer 1591 übersiedelte Ursus nach Prag. Um diese Zeit nahm Bürgi in Kassel bereits die Stelle Rothmanns ein, der nach einem Besuch bei Brahe im Herbst 1590 nicht mehr dorthin zurückgekehrt war. Die unrühmliche Haltung beider kam ans Tageslicht, als Brahe 1596 seinen Briefwechsel mit Landgraf Wilhelm und Rothmann veröffentlichte, ohne darin die schlimmen Ausdrücke zu streichen, mit denen er und Rothmann den Ursus als Plagiator beschimpft hatten. Mit gleicher Münze zahlte nun der gereizte „Bär" diese Beleidigung heim in seiner 1597 zu Prag herausgegebenen Schrift „De astronomicis hypothesibus" [31]. Von da an sann der in seinem Ehrgefühl getroffene Däne auf Rache gegen seinen Feind. Zu Hilfe kam ihm dabei die einschneidende Umstellung in seinen Lebensverhältnissen. Brahe verließ nämlich im Frühjahr 1597 Hven und alles, was er dort aufgebaut hatte, für immer, wechselte in den folgenden Jahren wiederholt seinen Wohnsitz, bis er schließlich im Juni 1599 seinen Einzug in Prag hielt mit der Aussicht, kaiserlicher Mathematiker zu werden.

Streit Ursus-Brahe

Ein Jahr nach dem Amtsantritt des Ursus in Prag kam Bürgi erstmals für wenige Wochen in die Kaiserstadt. Er überreichte Rudolph II. eine von ihm verfertigte Himmelskugel mit Triebwerk und den von ihm erfundenen Proportionalzirkel. Anläßlich eines zweiten kurzen Besuchs am Kaiserhof Ende 1596 entwarf er für Ursus eine Zeichnung der Planetenbewegungen nach Copernicus, wobei er für die Planetenabstände Maßzahlen ansetzte, die von jenen in Keplers Konzeption im „Mysterium Cosmographicum" nicht weit abwichen [19, Bd. 13, S. 124].

Van Ceulen

Möglicherweise besprach Ursus aber noch etwas anderes mit Bürgi. In eben dem Jahr 1596 veröffentlichte Ludolph van Ceulen sein Werk „Van den Circkel" (s. Anm. 7.6), in dessen Vorrede an den Leser neben E. Reinhold auch Nikolaus Reymers genannt wird. Ursus war vielleicht schon im Besitz des Buches und konnte dann Bürgi darauf hinweisen mit dem Ergebnis, daß beide sich jetzt intensiv mit der Coss befaßten. Mit Widmung vom 16. Oktober 1597 überreichte Ursus dem Kaiser als Manuskript den 1. Teil einer „Tractatiuncula von der allerkhunstleichesten, vnd sinnreichesten Regel, Cossa, oder Algebra", die mit den Regeln cossischen Rechnens nach den 4 Species bekannt machte. Einen am Schluß der Handschrift angezeigten 2. Teil über die Gleichungslehre („Aequatio") gab ein Unbekannter 1601 aus dem Nachlaß des Ursus heraus („Arithmetica analytica vulgo Coss oder Algebra").

Van Ceulens Publikation gab auch Bürgi Anregung und Anleitung, „der Coss nachzusinnen und die dazu gehörigen Aequationes für sich selbst zu erforschen" (S. ..). Dabei kam er auf eine zweite, die cossische Methode zur Berechnung von Sinus-Tafeln. Obwohl ihm zur Berechnung des geplanten großen „Canon Sinuum" die oben genannten Differenzenmethode (s. S. 106) hätte genügen können, erachtete Bürgi es für angebracht, bei der Zurichtung dieser Tafeln keinen Vorteil oder Behelf zu verschmähen, der geeignet war, sie möglichst vollkommen zu machen. Dieser in der Einleitung dargelegte Sachverhalt läßt begründeten Zweifel an der im Vorsatzblatt (vgl. S. 110) überlieferten Jahreszahl 1588 als dem Zeitpunkt der Vollendung des Bürgischen „Canon Sinuum" aufkommen. Vielmehr legt er die Vermutung nahe, daß Bürgi diese Arbeit erst 1598 abschloß. Wolfs Überlieferung könnte auf einem Lesefehler beruhen.

Von Prag im Dezember 1596 wieder nach Kassel zurückgekehrt, widmete sich Bürgi dem Studium der Coss und anschließend der Berechnung der Sinus-Tafel. In ihrer geplanten Veröffentlichung sollte der Benützer einleitend mit den Regeln der Coss und mit der Differenzenmethode bekannt gemacht werden. Wer aber sollte anstelle des dafür weniger geeigneten Bürgi diese Einleitung, anonym im Hintergrund bleibend, abfassen? Dabei an Ursus zu denken, lag nahe; allein der Wirbel, den das „Fundamentum" des Ursus einst ausgelöst hatte, und das Zerwürfnis zwischen Brahe und Ursus legten Bürgi Zurückhaltung auf.

Kepler

Während der vorgenannten Ereignisse begann Johannes Kepler in Graz als junger Landschaftsmathematiker seine Laufbahn. Im Juli 1595 entdeckte er sein „Weltgeheimnis", dessen Grundgedanken er auf Rat steirischer Edelleute am Kaiserhof dem gerühmten Mathematiker Raimarus Ursus in einem Brief unterbreitete und ihn um sein Urteil bat [19, Bd. 13, S. 48f.]. Die darin gebrauchten Worte hohen Lobes für Ursus hatten diesem so sehr geschmeichelt, daß er den Brief ohne Wissen Keplers in seinem „Tractatus de astronomicis hypothesibus" abdruckte. Das sollte Keplers Beziehungen zu Brahe belasten, als er sich anschickte, dessen Einladung, als sein Mitarbeiter nach Prag zu übersiedeln, anzunehmen. Allein die Einsicht, welch hervorragenden Assistenten er für seine in Prag wieder anlaufende astronomische Arbeit in Kepler gewinnen konnte, bewog den in seinem Streit mit Ursus unversöhnlichen Brahe, die von Kepler vorgebrachten Beweggründe für die Lobeshymne in seinem Brief an Ursus gelten zu lassen. Dafür verlangte er von Kepler die Abfassung einer Verteidigungsschrift gegen Ursus, worin der Prioritätsanspruch Brahes auf das neue Weltsystem fundiert werden sollte.

Prag 1600

Zur ersten Begegnung mit Brahe machte sich Kepler Anfang Januar 1600 von Graz aus auf den Weg. Noch ehe er aber den in Benatek bei Prag wohnenden Brahe aufsuchte, traf er mit Ursus in Prag zusammen. Ohne Nennung seines Namens führte er mit ihm ein Gespräch über den leidigen Streit zwischen Ursus und Brahe. Schließlich gab Kepler sich zu erkennen und schied friedlich von Ursus [18, Bd. 1, S. 237]. Während seines bis 1. Juni sich ausdehnenden Aufenthalts bei Brahe weilte Kepler noch einmal etwa 3 Wochen in Prag; dabei ist ein abermaliges Zusammentreffen mit Ursus nicht ausgeschlossen. Vielleicht übergab ihm Ursus damals bereits die von Bürgi erhaltenen Unterlagen zur Abfassung einer Einleitung zum „Canon Sinuum". Auch die um jene Zeit in Prag anwesenden Gelehrten V. Otho und A. Romanus lernte Kepler kennen. Bei dieser Gelegenheit wurden von beiden Druckfehlerberichtigungen im „Opus Palatinum" vorgenommen.*

Mit dem Einzug Brahes in Prag begannen für Ursus „gefahrenvolle Jahre", wie er selbst notiert und worüber auch Gerüchte im Umlauf waren. Dank der Gunst Kaiser Rudolphs, deren sich der gelehrte dänische Edelmann erfreute, gewann er bald in den Hofkreisen Ansehen und Unterstützung, die den emporgestiegenen Ursus in die Enge trieb. Dennoch ließ der im Sommer 1600 schwerkranke Ursus sich auf keinen Widerruf ein, wie Brahe verlangte, sondern forderte eine schiedsrichterliche Entscheidung. Doch eben, da er vor ein Tribunal von 4 kaiserlichen Kommissaren zitiert werden sollte, starb Ursus an der Schwindsucht am 15. August 1600. Brahe erreichte beim Kaiser, daß über den Erzbischof von Prag alle Exemplare der Schrift des Ursus „De hypothesibus astronomicis" beschlagnahmt und verbrannt wurden, auch der Drucker bestraft werden sollte [19, Bd. 14, S. 148f.]. Ein Hofkammerbeschluß vom 20. Oktober 1600 sprach der Witwe Ursus für die im Auftrag

* Wien, Nat. Bibl. Cod. 10540, Bl. 23–34.

des Kaisers weggenommenen Bücher 300 fl. zu.* Ein Jahr später schon starb auch Tycho Brahe. Seinem Nachfolger Kepler oblagen jetzt wichtigere Aufgaben als die Fertigstellung der Brahe versprochenen Verteidigungsschrift gegen Ursus; sie liegt unvollendet im Keplerschen Nachlaß.

„Coss“ von Bürgi

Bürgi, nach dem Tod Landgraf Wilhelms 1592 von dessen Nachfolger Moritz als fürstlich-hessischer Uhrmacher im Amt belassen, machte sich in den folgenden Jahren als „Automatopaeus“ einen rühmlichen, mit finanziellem Aufstieg verbundenen Namen. Immer wieder wurde die Frage laut, welches denn nun die von Ursus im „Fundamentum“ angedeutete Methode zur Berechnung von Sinus-Tafeln (Differenzenmethode) sei [19, Bd. 14, S. 339 und 378]. Aber selbst Kepler wußte darauf dem Fabricius am 4. Juli 1603 nur mit einer Mutmaßung zu antworten, die nicht weiter ging als des Ursus Mitteilung.

Dieser Brief enthält außerdem den einzigen und den zugleich von Kepler selbst gegebenen indirekten Hinweis auf seine vorliegend veröffentlichte Arbeit in den Worten: „Byrgii artificium puto me proxime attigisse“ [19, Bd. 14, S. 413]. Damit liegt aber auch ein Zeitpunkt vor, ante quem Kepler die Redaktion der Bürgischen Vorlage zu seiner „Coss“ abgeschlossen hatte, denn der Wortlaut der dem Fabricius erteilten Antwort deckt sich mit dem letzten Absatz der Ausarbeitung (S. 77). Wann aber und von wem erhielt Kepler die Vorlage? Zwei Möglichkeiten sind in Betracht zu ziehen: 1. sie wurde ihm von Ursus übergeben, der, weil er selbst eine „Coss“ geschrieben hatte, diese Arbeit nicht übernehmen wollte; oder 2. Bürgi selbst war mit diesem Wunsch an Kepler herangetreten. Etwas Schriftliches darüber ist nicht erhalten. Mündliche Vereinbarungen können im Laufe des Jahres 1602 getroffen worden sein, nachdem Bürgi, während er im Herbst 1603 in Prag weilte, als Gegenleistung für die Abfassung der „Coss“ Kepler die Ausführung des Wasserwerkmodells in Metall versprach [19, Bd. 14, S. 448]. Sobald Kepler mit dieser Arbeit fertig war, gab er zumindest die Vorlage zurück. Die Frage, ob er auch eine Reinschrift seiner Darstellung, wie sie im Keplerschen Nachlaß als Konzept vorliegt, mitlieferte, muß offen bleiben.

Eine der darin behandelten Entdeckungen des Bürgi – die Winkelteilung in 3 oder 5 gleiche Teile mit Hilfe der Coss – wurde, sicher nicht infolge einer Indiskretion von seiten Keplers, publik. B. Pitiscus machte darüber mit Angabe von Bürgis Namen Mitteilung in seiner 1608 erschienenen „Trigonometriae sive de dimensione triangulorum libri quinque“, Augsburg 1608 (auch Frankfurt 1612). Die Unvollkommenheit dieser Angaben jedoch veranlaßten den Schwager und langjährigen Schüler von Bürgi, B. Bramer, 1614 eine Veröffentlichung von Bürgis „Coss“ zu gegebener Zeit in Aussicht zu stellen in der Schrift „Problema: Wie auß bekanntgegebenem Sinu, eines Grades Minuten oder Secunden, alle folgende Sinus auffs leichteste zu finden vnd der Canon Sinuum zu absolviren seye“ [zitiert nach 35, S. 23]. Ob er dabei an die Keplersche Redaktion dachte, läßt sich nicht ermitteln. Immerhin darf man annehmen, daß Bramer Einblick in die Arbeiten des Bürgi nehmen und auch davon Gebrauch machen durfte, so daß seine Ausführungen in diesem Werk die Kenntnis des von Bürgi erfundenen „Kunstwegs“ vermuten lassen.

Trigonometrische Tafeln

Wiederholt schon wurde herausgestellt, wie Bürgi seine „Coss“ als Hilfsmittel zur Berechnung eines neuen „Canon Sinuum“ einsetzte, der vermutlich im Jahre 1598 „vollendet“ wurde (s. S. 112ff.). Ausführliche und zuverlässige Sinus-Tafeln, an denen es bisher noch mangelte, waren, wie Bürgi erkannte, zur rechten Handhabung der prosthaphaeretischen Methode notwendig. Das bis dahin genaueste und umfangreichste Tafelwerk hatte J. Rheticus vorbereitet, der während seines Aufenthalts bei Copernicus (1539–1542) die

* Wien, Hofkammer-Archiv, Hoffinanzindices, Gedenkbuch 1600, Bl. 275v.

Anregung zur Berechnung und Herausgabe neuer Tafeln erhielt. Das erste Ergebnis dieser Arbeit erschien 1551 in Leipzig unter dem Titel „Canon doctrinae triangulorum". Der Canon enthielt alle 6 trigonometrischen Funktionen einschließlich sec α und cosec α; der Einfluß auf Zeitgenossen (z. B. auf Reinhold) war erheblich. Ein wesentlich ausführlicheres Tabellenwerk für die Sinus- und Cosinus-Funktion wurde noch von Rheticus begonnen, dann von seinem Mitarbeiter V. Otho, dem Erben des wissenschaftlichen Nachlasses von Rheticus, zu Ende geführt. Es erschien 1596 unter dem Titel „Opus Palatinum" und war, wie bald erkannt wurde, ziemlich fehlerhaft (vgl. S. 7). B. Pitiscus konnte nach erneuter Durchsicht des Nachlasses von Rheticus 1613 mit dem „Thesaurus mathematicus sive Canon Sinuum" ein stark verbessertes Tafelwerk herausbringen. Bei der Herausgabe derartiger Tafeln wurde zumeist auf bereits vorhandene Tafeln zurückgegriffen. Neue Werte wurden am Kreis aus der Länge der Sehnen abgeleitet. Erst I. Newton hat angegeben, wie trigonometrische Funktionen mit Hilfe von Reihenentwicklungen berechnet werden können.

2. DAS MANUSKRIPT DER „COSS" INHALT UND „KUNSTWEG"

Das Manuskript der „Coss" nimmt in Band 5 der Pulkowoer Kepler-Handschriften [20] 46 mehr oder weniger engbeschriebene Blätter (gleich 92 Seiten) in Foliogröße ein. Ihre Zählung ist am inneren Rand unserer Wiedergabe angebracht. Ohne Überschrift und Einleitung beginnt der Text mit den Worten „Günstiger Leser". Er endet mit dem Hinweis: „Caetera desiderantur: ex quibus erant etiam ista". Das Manuskript ist durchweg von Kepler geschrieben, mit Ausnahme der drei Seiten Bl. 122r, 127v und 128r, die Bürgis kleine und zierliche Handschrift zeigen (vgl. Faksimile); fast könnte man den Uhrmacher daran erkennen. Ein nicht mehr vorhandenes Vorsatzblatt brachte das Manuskript in Zusammenhang mit Bürgis „Canon Sinuum". Es wurde dem ersten Bearbeiter der „Coss", dem Schweizer Astronomen R. Wolf, zusammen mit dem Manuskript von O. v. Struve, dem Direktor der Sternwarte Pulkowo, vorgelegt. Nach Wolf hatte es folgenden Inhalt:

Vorsatzblatt

> „Anno 1588 hat d. h. Byrgi den Canonem Sinuum in Logistischen Zalen absolvirt und vollendet bis in die sextas sexagesimas in $\overline{\text{pris}}$ und halb in allen 2″. Weil aber solche logistische Rechnung nit Jederman bekant, hat er dieselben nit publiciren und absolviren wollen."

Der Verfasser, ein Zeitgenosse von Bürgi, ist unbekannt. Er muß ein Vertrauter Bürgis gewesen sein. Der Text, in seiner Formulierung nicht ganz eindeutig, könnte darauf hinweisen, daß Bürgi vor der Veröffentlichung des Canons eine Erläuterung über „solche logistische Rechnung", d. h. hier über die Berechnung des Tafelwerkes, geben wollte. Das Vorsatzblatt befindet sich heute nicht mehr bei den Kepler-Handschriften in Pulkowo. Für die Bestätigung dieses Sachverhalts danken wir Herrn Prof. Michailov, dem Direktor dieser Sternwarte. Nachforschungen nach dem Blatt im Nachlaß Wolfs, für die wir der Eidgenössischen Sternwarte in Zürich ebenso danken wie der Burgerbibliothek in Bern, blieben erfolglos.

Titel

In dem von J. Hevelius angelegten, ersten auf uns gekommenen Verzeichnis des Keplerschen Nachlasses wird die Handschrift beschrieben: „Fasc. 12. Cossam Burgii excultam; ubi ratio nova duplex Canonis Sinuum adornandi; ratio compendiosè quadrandi, et radicem extrahendi". Ch. Frisch, R. Wolf und J. O. Backlund zitieren sie als „Arithmetica Bürgii".

Von den Historikern, die sich zu Bürgis „Arithmetica“ äußern, hatten nur Ch. Frisch und R. Wolf die Pulkowoer Handschrift in Händen. Ersterer sah darin Anmerkungen und Verbesserungen Keplers zu Bürgis „Arithmetik“, die vielleicht als Additamentum zu dessen „Progress-Tabuln“ vorgesehen gewesen seien [18, Bd. 2, S. 834]. Er wandte dem Manuskript in seinen „Opera Kepleri“ keine weitere Aufmerksamkeit zu. R. Wolf, dem Keplers Handschrift wohl auch unbekannt war, spricht nur von „flüchtiger Schrift und vielen Correcturen der Vorlage“ [35, S. 8f.]. In Wirklichkeit handelt es sich um das Konzept einer von Kepler abgefaßten Darstellung von Bürgis „Coss“, die als Einleitung zu dessen „Canon Sinuum“ vorgesehen war.

Die Arbeit beansprucht stilistisch ihren Platz neben anderen, in deutscher Sprache geschriebenen Werken Keplers. Stil Zahlreiche Ausstreichungen und Korrekturen sind bezeichnend für Keplers Arbeitsweise, von der er selbst sagt, daß sie oft zeitraubend sei, da ihm bei der Formulierung seiner Gedanken pausenlos neue Worte einfielen. Von den rund 400 Korrekturen, die das Manuskript aufweist, entfällt die Mehrzahl auf eine neue, die Sache besser treffende Formulierung und auf stilistische Änderungen. Der Rest verteilt sich auf die Verbesserung eines falschen Ausdrucks, auf eine ausführlichere Darstellung und auf zusätzliche, später wieder gestrichene Überlegungen. Häufig erfährt der Satzanfang eine Änderung, nicht selten wird ein begonnenes Wort nach 2 oder 3 Buchstaben wieder gestrichen. Zahlreiche Wörter verraten Keplers Dialekt, wie etwa: waserlay (schwäbisch = welcherlei), waher (woher), nindert (nirgends), du wilt (willst), stupff, stüpffe (Einstiche mit dem Zirkel). Aufschlußreich in dieser Hinsicht erweist sich ein Vergleich der Keplerschen Schreibweise mit derjenigen von Bürgi. Der Schweizer schreibt: ich finden, setzen (Kepler: ich finde, setze); es seige (Kepler: es sei); werre (Kepler: wäre); diuisser (Kepler: divisor); ich duon (Kepler: ich tue); suochen (Kepler: suechen); ich subtrir (Kepler: ich subtrahir); zuo (Kepler: zue); felt (Kepler: fällt); verendrete (Kepler: veränderte).

Die von Kepler in lateinischer Sprache abgefaßten Sätze und Abschnitte bringen teils eine Zusammenfassung des vorangegangenen Textes, teils knüpfen sie nur mittelbar an die Vorlage Bürgis an und enthalten Keplers eigene Überlegungen. Ausdrücklich weist Kepler in dem längeren Absatz auf Bl. 115 und 116 mit der Überschrift „De Aequatione ex me“ darauf hin. Er durchstreicht überdies die 4 Seiten jeweils mit einem einzigen senkrechten Strich, nicht um sie ungültig zu machen, sondern um anzudeuten, daß dieser Text nicht in die „Coss“ Bürgis aufgenommen werden soll.

Zur Gliederung des Manuskripts hat Kepler anhand der Vorlage einen Entwurf geschrieben (Bl. 102v), Gliederung ihn aber, wie den Text selbst, unvollendet gelassen und Teile daraus sogar gestrichen. Ähnlich wie im Druckmanuskript der „Tabulae Rudolphinae“ ist auch dieser Entwurf, die „Dispositio sequentium“, mit einer Numerierung nach der Dezimalklassifikation versehen, die es gestattet, beliebig viele Unterteilungen vorzunehmen und neue Texte einzuschieben. Es besteht weitgehende Übereinstimmung der Dispositio mit dem Hauptteil des Textes.

Folgt man nicht nur der „Dispositio“, sondern auch den Überschriften der einzelnen Abschnitte, so ergibt sich folgende Einteilung der „Coss“:

I	Einleitung	Bl. 93 –94v
II	Beschreibung der Coss	Bl. 95v–96
III	Rechenarten, Cossisches Rechnen	Bl. 96v–104
IV	Winkelteilung	Bl. 107v–115
V	Gleichungslehre	Bl. 115 –129v
VI	Berechnung des „Canon Sinuum“	Bl. 130 –138.

Sieht man in den Abteilungen III bis V den eigentlichen Inhalt der „Coss", so kommt man zu einer Dreiteilung der „Coss" in Einleitung – Coss – Anwendung. Freilich läßt sich eine derartige Teilung nicht in aller Strenge vornehmen, denn schon die Abteilungen IV und V bereiten die Anwendung vor und zeigen die algebraischen Zusammenhänge zwischen Kreisteilung, Sehnenrechnung und Berechnung der Sinus-Werte auf.

Zweck der Coss

Die vorliegende „Coss" soll auch gar keine allgemeine Einführung in die Algebra des 16. Jahrhunderts geben. Eine derart umfassende Aufgabe hätte sich Bürgi als wenig belesener, des Griechischen und Lateinischen unkundiger Mann, wie er eingangs selbst schreibt, kaum gestellt. Bürgi verfolgte vielmehr die zweckgebundene Aufgabe, eine Einführung zu seinem „Canon Sinuum" zu geben. Kepler, der nicht nur die „Coss" ausarbeitete und formulierte, sondern auch zur Verbesserung des Inhalts beitrug, hätte sich fraglos auch in die Algebra noch weiter vertiefen können. Aber ihm lag die Coss insbesondere wegen ihrer im Vergleich zur Geometrie geringeren Anschaulichkeit nicht. Hierfür lassen sich auch in dem Text Beispiele finden; so auf Bl. 121: „Damit aber der Cossist gleichwol nit allerdings auff ein vngewisses rathe, sondern nach dem zil schiesse, vnd zum wenigisten die Mauren treffe".

Der Zusammenhang zwischen „Coss" und „Canon Sinuum" wird in der Einleitung erläutert. Wir erfahren, wie Bürgi, als er am Hof des hessischen Landgrafen Wilhelm des IV. weilte, oft Gelegenheit hatte, bedeutende Mathematiker kennenzulernen und mit ihnen über ihre Probleme zu sprechen. Eines dieser Probleme war das Verfahren der Prosthaphaerese. Es sollte, indem es Multiplikationen und Divisionen durch Additionen und Subtraktionen von trigonometrischen Funktionen ersetzt, vor allem dem Astronomen behilflich sein, der bei seinen Rechnungen ständig mit trigonometrischen Formeln umzugehen hatte. Vor dem Aufkommen der Logarithmen und der Erfindung der Rechenmaschine konnte man sich lediglich einiger Rechenverkürzungen bedienen, die aber gerade bei einer Vielzahl astronomischer Rechnungen langwierig genug blieben. Als um 1580 sowohl in Kassel als auch auf der Insel Hven bei Tycho Brahe eine rege astronomische Beobachtungstätigkeit einsetzte, war das Interesse an wirklichen Rechenerleichterungen bei der Auswertung der Beobachtungen besonders groß.

So erregte P. Wittich, als er von Brahe kommend in Kassel die Grundzüge des neuen Verfahrens erläuterte, ein beträchtliches Aufsehen. Seine Anwendung schien aber durch einen Mangel eingeschränkt: genaue Sinus-Tafeln mit großer Stellenzahl, wie man sie zur leichten Handhabung der Prosthaphaerese benötigte, gab es kaum, und wenn es sie gab, so waren sie ungenau – wie das „Opus Palatinum" –, oder die Unterteilung des Kreises war nicht fein genug.

„Canon Sinuum"

Um hier Abhilfe zu schaffen, nahm Bürgi die ungeheure Arbeit auf sich, einen neuen „Canon Sinuum" zu berechnen, der, von 2 zu 2″ fortschreitend und achtstellige Werte enthaltend, für die Prosthaphaerese besonders geeignet sein sollte.

Ist dieser Canon jemals fertiggestellt worden? Vollkommene Sicherheit darüber gibt es nicht, weil er nie gedruckt wurde und kein Manuskript vorhanden ist. Dennoch existieren einige Belege, die für die Fertigstellung des Canons sprechen und die Aufschluß darüber geben, warum die Publikation unterblieb. Es seien folgende Zeugnisse angeführt:

1. Das Vorsatzblatt zu dieser „Coss".
2. Hinweise in der „Coss".
   (a) Auf Bl. 94 heißt es:
   „Weil dan … jch … zum end khomen, vnd neben meiner Handtierung, auch disen grossen vnd dreyssigfaltigen Canonem sinuum auf gegenwürtige form vnd weis vollendet …"

Diese Stelle erhellt, daß die „Coss" als Einleitung zum „Canon Sinuum" gedacht ist und erst geschrieben wurde, nachdem der Canon vollendet war. Er war „dreyssigfaltig" angeordnet, d. h. jede Seite besaß 30 Spalten. Nimmt man an, daß auf einer Seite auch 30 Zeilen unterzubringen waren, so waren pro Grad 2 Seiten erforderlich. Der Canon umfaßte demnach 180 Manuskriptseiten mit insgesamt 162000 Sinus-Werten.

(b) Auf Bl. 137 heißt es:

> „Derowegen jch mich auch wie andere Authores vor mir, hin vnd wider mit den differentijs beholffen ..."

Diese Angabe bezieht sich auf die Berechnung von Sinus-Werten bei der Fertigstellung des Canons. Die Perfekt-Form des Verbs zeigt, daß die beschriebene Tätigkeit bereits abgeschlossen ist.

3. B. Bramer, Bürgis Schwager, schreibt in seinem „Bericht zu M. Jobsten Burgi seligen Geometrischen Triangular Instruments, Cassel 1648" [5, Vorrede]:

> „Anno 1609, als ich bey demselben [Bürgi] mich auffgehalten/... ist er endlich willens gewesen/ diesen Bericht gäntzlich verfertigen zulassen/ vnd denselben also auch seine schöne progres Tabulen, vnd die Tabulas Sinuum, so er in grad/ minuten/ vnd von 2. zu 2. secunden, mit vnsäglicher arbeit calculiret, auff vieler anhalten in Truck kommen zu lassen/ wie dann 1619. sein deß Burgi S. Bildnuß von Aegidio Satlern in den Titul gestochen worden/ weil aber die in gantz Teutschland noch wehrende grosse vnruhe sich damals in Böhmen entsponnen/.../ ist solches alles liegen verblieben/ biß er endlichen in Anno 1632. sich in hohem Alter wider nacher Cassel begeben/ vnd folgendes Jahr auch daselbsten verstorben."

Bramer führt über den „Canon Sinuum" im Grunde nichts Neues an, aber der ausdrückliche Hinweis darauf, daß er berechnet war und gedruckt werden sollte, verdient doch besondere Beachtung.

4. Brief Keplers an Landgraf Philipp von Hessen 1623 [19, Bd. 18, S. 149f.]. Kepler schreibt in Beantwortung einer Anfrage des Landgrafen über die Genauigkeit der gebräuchlichen Sinus-Tafeln:

> „Zum andern, so ist nit ohn, das die sinus nit auff das allerscherffeste gerechnet seind, ob wol Pitiscus bey der correctione Operis Palatini etwas gethan. Hie haben aber E. F. Gn: das remedium zu Hauß, den E. Gn: vnderthan Jost Byrgius hatt die sinus auff ein Neues biß auff acht figuren gerechnet, vnd, so jch mich recht besinne, auff alle gerade secunda. Er hatt gleichwol das geschribne werckh nie von Handen gegeben, noch druckhen lassen. Nit weniger auch ein Engellender Heinricus Briggius gethan, dessen sinus auffs ehist in Truckh kommen sollen."

Zweifellos spricht auch die Ausarbeitung der „Coss" dafür, daß der „Canon Sinuum" bereits fertiggestellt war oder unmittelbar vor dem Abschluß stand. Denn ohne Sinus-Tafeln wären etliche Textstellen im Manuskript unklar, und die in der Einleitung aufgeführte Motivation für die Abfassung des „Coss" wäre dann besser unterblieben. Es bleibt der Eindruck, daß sich Bürgi durch seine Unentschlossenheit auch hier um die verdiente Anerkennung brachte, die ihm durch den Druck seiner Sinus-Tafeln sicher gewesen wäre. Kepler verdroß solche Haltung; ihm lag immer daran, neue wissenschaftliche Erkenntnisse bekanntzumachen und damit anderen den Weg zu wiederum neuen Einsichten zu eröffnen: eine Einstellung, die ihn schließlich dazu bewogen haben mag, die Redaktion der „Coss" zu übernehmen und damit zumindest einen Teil von Bürgis Vorarbeiten zum „Canon Sinuum" vor dem Verlust zu bewahren.

Coss

Wenden wir uns nun dem Inhalt des vorliegenden Textes zu. Allgemein läßt sich sagen, daß durch die Coss die Umständlichkeit der früheren Verfahren, auf geometrischem Weg durch ständiges Quadrieren und Radizieren die Sinus-Werte zu ermitteln, vermieden wird. Geblieben ist das Prinzip, Vielecke in Kreisen zu konstruieren und dann die Sinus-Werte als Längen der halben Vielecksseiten zu bestimmen. Die Coss bedient sich also durchaus der geometrischen Anschauung, steht aber in der Verfahrensweise der Arithmetik näher. Die Konstruktion von Vielecken in Kreisen oder Kreisbögen läuft darauf hinaus, einen gegebenen Winkel in gleich große Teile zu teilen. Diese Aufgabe meistert die Coss weitaus besser als die alten geometrischen Verfahren, indem für die Vielecksseiten Gleichungen aufgestellt und dann nach der Unbekannten aufgelöst werden. Die Coss gibt also vor allem eine Gleichungslehre. Bürgi geht in den weiteren Ausführungen zur Coss didaktisch recht geschickt vor, indem er, vom Einfachen zum Komplizierten aufsteigend, zunächst das Rechnen mit cossischen Größen erläutert und sich dann den Gleichungen zuwendet: dem Aufstellen von Gleichungen bei der Winkelteilung und den verschiedenen Verfahren zur Auflösung der Gleichungen.

Die cossischen Namen werden in der Weise eingeführt, daß die gesuchte Zahl das Zeichen ϰ erhält und bei der Bildung von Potenzen mit sich selbst zu multiplizieren ist, also die Progressionalzahl darstellt. Hierfür werden Abkürzungen verwendet, die am Ende des 16. Jahrhunderts für die verschiedenen Potenzen noch durchweg uneinheitlich aussehen, wie die entsprechende Tafel (Bl. 98v) zeigt. Unserer heutigen Schreibweise am nächsten kommt die Bezeichnungsweise der letzten Spalte, in der die Exponenten als römische Zahlen über die 1 gesetzt sind.

Die cossischen Rechenoperationen, species arithmeticae, werden von den gemeinen Zahlenrechnungen unterschieden. Gleiche Potenzen werden durch Addition oder Subtraktion zusammengefaßt. Ebenso werden das Multiplizieren und Dividieren cossischer Ausdrücke, das Radizieren und das Kürzen von Brüchen anhand von Beispielen erläutert. Dabei werden Verfahren, wie das Überwärtsdividieren, vorgestellt, die heute nicht mehr gebräuchlich sind. Als eigenes Verfahren wird die Dezimalrechnung behandelt (Bl. 104 bis 106). Sie ist von Bürgi unabhängig von Stevin eingeführt worden. Ein Trennungszeichen wird noch nicht gesetzt. Die Zahl wird als Dezimalzahl dadurch kenntlich gemacht, daß vor den Dezimalbruch eine Null oder unter die letzte Ziffer der ganzen Zahl eine kleine Null geschrieben wird. Inhaltlich steht diese Schreibweise in der „Coss" in engem Zusammenhang mit der Sinus-Rechnung. Denn der größte Sinus-Wert wird gleich dem Radius des Einheitskreises gesetzt, alle anderen Sinus-Werte werden als Dezimalbrüche in dieser Einheit ausgedrückt. Unter den angeführten Rechnungen, die die verschiedenen Species wieder verdeutlichen sollen, findet sich auch die verkürzte Multiplikation, ein Verfahren, dessen sich Kepler mit Vorliebe bei seinen astronomischen Rechnungen bedient hat. Ob Kepler es hier bei Bürgi (Bl. 105v) kennenlernte, wie Wolf vermutet, läßt sich nicht belegen.

Winkelteilungen

Mit den nun folgenden Winkelteilungen beginnt der Hauptteil der „Coss". Über ihn soll hier nur ganz summarisch berichtet werden, weil es nicht möglich ist, die vielen Einzelheiten des Textes zu referieren. Auf besonders interessante Stellen ist in den Anmerkungen näher eingegangen worden. Nach einigen vorbereitenden Sätzen am Kreis wird unter oftmaligem Verweis auf Euklid zuerst geometrisch, dann arithmetisch die Gleichung für die Sehne, die den Kreisbogen über einer gegebenen Sehne in zwei gleiche Teile teilt, abgeleitet. Für die weitere Winkelteilung wird der Satz des Ptolemäus herangezogen, nach dem in einem Sehnenviereck das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte je zweier Gegenseiten ist. So folgt hiernach aus der vorangegangenen Gleichung unmittelbar die Gleichung für die Dreiteilung des Winkels; denn die Gleichungen für die Diagonalen, also für die Sehnen, die gerade vom Doppelten des Kreisbogens über der gesuchten Sehne überspannt werden, sind aus der Zweiteilung des Winkels gegeben. Mit der Zwei- und Dreiteilung des Bogens über einer gegebenen Sehne läßt sich jede andere Teilung leicht herbeiführen und die entsprechende Gleichung ableiten. In der konsequenten Fortführung dieses Prozesses kommt Bürgi durch den Vergleich der vor den cossischen Größen stehenden Zahlen zu einer in Form eines Dreiecks angeordneten Koeffiziententafel (Bl. 111), der für jede beliebige Winkelteilung die entsprechende Gleichung sogleich zu entnehmen ist. Es sind dies die gleichen Koeffizienten, die bei dem Sinus des n-fachen Winkels, also bei der Umkehrung der vorliegenden Aufgabe, auftreten. Sie sind unabhängig von Bürgi auch von Viète erkannt und 1615 in dessen Werk über die Winkelteilung veröffentlicht worden.

Gleichungslehre

Die Gleichungen der Winkelteilungen haben mehrere Lösungen. Sie sind ja, geometrisch gesehen, nichts anderes als die Spannweiten des Zirkels, die, von einem Endpunkt der gegebenen Sehne aus an den Kreis angetragen, zum anderen Endpunkt führen müssen. Dabei kann der Kreis auch häufiger als einmal durchlaufen werden. Es ist also bei der Bestimmung der Wurzeln sowohl vom gegebenen Bogen, als auch von Bögen, die sich aus ihm und ganzen Kreisen zusammensetzen, auszugehen. Mit der Auflösung der Gleichungen, die hier „vergleichung“ oder „aequatio“ genannt wird, beginnt die „größte Kunst der Coss“. Zunächst werden einige grobe Verfahren angegeben, die von geratenen Werten für die Unbekannte ausgehen und dann die Ausgangszahlen allmählich verbessern. Ein Beispiel wird mit der Auflösung der Gleichung für die Neunecksseite gegeben. Schneller zur gewünschten Lösung führt der Ansatz der „Regula detri“ (Bl. 126ff.) über eine fortlaufende Interpolationsrechnung. Nach jeder Iteration verdoppelt sich die Zahl der Dezimalstellen.

Berechnung des „Canon Sinuum“

Wie hat nun Bürgi den „Canon Sinuum“ berechnet? Die bisherigen Ausführungen haben die theoretischen Grundlagen für die Berechnung des „Canon“ behandelt. Angelpunkt des ganzen Unternehmens bleibt die Erkenntnis, daß sich die Sinus-Werte über die Sehnen darstellen lassen, indem nämlich die Sehne eines Bogens gleich dem Doppelten des Sinus vom halben Bogen ist:

$$\mathrm{crd}\, x = 2 \sin \frac{x}{2} \,.$$

Würde man sich konsequent dieser Gleichung bedienen, so käme es nur darauf an, alle hiernach erforderlichen Sehnen nach den zuvor beschriebenen Verfahren der „Coss“ zu berechnen. Nun wäre die Zahl der notwendigen Sehnen derart groß, daß diese Möglichkeit in Anbetracht des Rechenaufwandes von vornherein ausscheidet. Bürgi gibt stattdessen einen anderen Weg an. Nach obenstehender Gleichung genügt es, als kleinsten Wert die Sehne für den Bogen von 4″ zu berechnen. Dies geschieht, wie auf Bl. 130v ausgeführt, durch die aufeinanderfolgende Teilung des Kreises in 2, 3 oder 5 gleiche Teile. Im Verlauf dieser Teilung ergeben sich die Sinus-Werte für folgende Winkel:

$$60^\circ,\ 30^\circ,\ 10^\circ,\ 2^\circ,\ 1^\circ,\ 12',\ 4',\ 2',\ 1',\ 12'',\ 4'',\ 2''.$$

Freilich sind auch noch andere Teilungswege denkbar. Für die Auflösung der Teilungsgleichungen wird, ehe der weitere Weg der Berechnung aufgezeigt wird, an dieser Stelle (Bl. 134ff.) ein neues Verfahren angegeben. Es besteht darin, daß die höchste Potenz in dem die Teilungsgleichung darstellenden Polynom zunächst gleich Null gesetzt wird. Dann wird die Unbekannte iterativ bestimmt, indem in der Iteration k für x in der höchsten

Potenz der Wert aus der Iteration $k - 1$ genommen wird. So ergibt sich eine Folge von Kettenbrüchen, die allerdings schlecht konvergiert.

Die weitere Berechnung geht von den kleinsten erhaltenen Werten aus. Werden die Sehnengleichungen, die bei der Teilung eines Kreisbogens aufgestellt wurden, nicht als Teilungsgleichungen, sondern als Gleichungen zur Vervielfachung eines Bogens aufgefaßt, derart, daß in dem die Sehnengleichung darstellenden Polynom $f(x) = a \ f(x)$ gegeben ist und a gesucht wird, so lassen sich, ausgehend von sin 2″ leicht weitere Sinus-Werte durch Vervielfachung ableiten. Zur Berechnung von Werten in Nähe von 45° dient die Formel $s^2 = 2 \pm 2 \sin \alpha$, in der sich die Sehne s auf den Bogen $90° \pm \alpha$ bezieht und das Doppelte des Sinus vom halben Winkel darstellt. Es sind also mit dieser Formel auch Sinus-Werte für $45° \pm \frac{\alpha}{2}$ leicht zu berechnen.

„Kunstweg“

Das Schlußkapitel, unvollendet geblieben, zeigt nun, daß Bürgi die bisher erläuterten Verfahren offenbar nur zur Berechnung einiger Werte verwendet und einen Großteil der Sinus-Werte seines „Canon“ auf einem anderen Weg gefunden hat. Wie könnte dieser Weg ausgesehen haben? Das letzte Kapitel weist sowohl in der Überschrift, als auch im Text selbst darauf hin, daß es sich hierbei um ein Verfahren gehandelt hat, in dem von der Bildung von Differenzen – auch höherer Ordnung – ausgegangen wird. Dieses Verfahren ist von R. Wolf „der Kunst Weg“ genannt worden; eine Bezeichnung ist damit gegeben, die, obwohl die Sache treffend, sich in dieser Form nicht belegen läßt. Offenbar ist Wolf bei der Prägung des Begriffs von einer Textstelle auf Bl. 137v der „Coss“ ausgegangen mit folgendem Wortlaut:

> „vnd ich will mir hernach zu erclärung des jenigen so von Kunst wegen zusagen sein würt, recht der weil nemen.“

Der Ausdruck „von Kunst wegen“ meint „von Kunst aus“, von dieser Fertigkeit her betrachtet. Diese Bezeichnungsweise soll hier beibehalten werden, weil sie umreißt, daß es sich um ein besonderes Verfahren der Rechenpraxis handelt.

Gab es den „Kunstweg“?

Hat es ein besonderes Differenzenverfahren zur Berechnung des „Canon Sinuum“, den Kunstweg, wirklich gegeben? Wir sind wegen der Unvollständigkeit des Textes bei der Beantwortung dieser Frage nur zu Vermutungen berechtigt. Eine Reihe von Belegen, die aber zum Inhalt des Verfahrens wenig beitragen, kann hier herangezogen werden. Es handelt sich teils um die „Coss“ selbst, teils um schriftlich niedergelegte Äußerungen von Zeitgenossen Bürgis.

1. Einleitend schreibt Bürgi in der „Coss“ (Bl. 93v), daß er herausgefunden habe, wie der „gantze Canon sinuum durch seine differentias zu erheben seye: wölliche Invention heranch Nicolaus Reinmarus Ursus vnder meinem Namen publicirt“. Bei der erwähnten „Invention“ handelt es sich um den Kunstweg, auf den Ursus in seinem „Fundamentum“ von 1588 näher eingeht.

2. Ein weiterer Hinweis findet sich, wie schon erwähnt, im Schlußkapitel der „Coss“. Bürgi spricht von einem „gar lauttern vnd gewissen weg“ in der Handhabung der Differenzen, den er erst später erklären wolle. Diese Absicht aber wird nicht ausgeführt; der Text bricht ab; „caetera desiderantur“, wie Kepler schreibt.

3. Auch Kepler, der die „Coss“ nach Aufzeichnungen Bürgis niedergeschrieben hat, läßt nur wenig über den Kunstweg verlauten. Auf Anfragen von D. Fabricius aus den Jahren 1602/03 über das „artificium Birgianum“, von dem er in dem „Fundamentum“ des Ursus nur eine dunkle Andeutung gefunden habe, antwortet Kepler: „Byrgii artificium puto me proxime attigisse. Scribe sinus integrorum graduum vel binorum, vel trinorum, interpone

ad latus differentias, his rursum ad latus secundas differentias; sic tertias, quartas, quousque ut fit in Lansbergio, occurrat inaequalitas. Inde considera quid fiat cum primis et secundis differentiis. Idem enim cum tertiis et quartis fieri debet. Hoc considerato fortasse Birgius modum aliquem excogitavit, ex quibuscunque numeris incipiendi.“ In der Übersetzung:

> „Ich glaube, mich mit dem Bürgischen Kunstgriff am eingehendsten befaßt zu haben. Schreib die Sinus-Werte der ganzen Grade oder von je 2 oder 3 Graden auf, stell dazwischen auf die Seite ihre Differenzen, diesen wiederum auf die Seite die zweiten Differenzen; ebenso die dritten, vierten, solange – wie bei Lansberg – Ungleichheit besteht. Hierauf überleg, was mit den ersten und zweiten Differenzen geschehen könnte. Dasselbe muß nämlich mit den dritten und vierten Differenzen gemacht werden. Nachdem Bürgi so überlegt hat, hat er sich vielleicht irgendeine Regel ausgedacht, mit irgendwelchen Zahlen zu beginnen.“

Kepler hat also auch nichts Näheres über den Kunstweg gewußt, weder aus den Aufzeichnungen Bürgis, noch aus persönlichen Gesprächen mit Bürgi oder Ursus. Was er Fabricius antwortet, bringt zu dem Schlußkapitel der „Coss“ nichts Neues.

Nach all dem dürfte kaum ein Zweifel daran bestehen, daß Bürgi einen Kunstweg gekannt und angewandt hat, ihn aber aus Gründen, die noch zu erläutern sind, der interessierten Öffentlichkeit nicht mitteilen wollte. Als weitere wichtige Belege für die Existenz des Kunstwegs lassen sich 2 Stellen von Ursus heranziehen. Ursus, mit seinem Lehrer Bürgi enge Verbindung haltend, könnte Kepler vielleicht die Unterlage Bürgis zur „Coss“ überbracht haben. Jedenfalls geht aus seinen Bemerkungen hervor, daß er nicht nur von der Existenz des Kunstwegs, sondern auch über seine Anwendung mehr zu wissen schien, als er angeben wollte.

4. Die erste Stelle, immer wieder in diesem Zusammenhang erwähnt, findet sich im „Fundamentum“ auf Bl. 8v–9r. Sie ist weder von Zeitgenossen des Ursus, noch von späteren Mathematikhistorikern recht verstanden oder gedeutet worden. Noch Braunmühl schreibt [7, Bd. 1], daß aus der Angabe des Ursus nur zu entnehmen sei, daß „die Methode eine Differenzenmethode war“.

Kommen wir nun zur fraglichen Stelle auf Bl. 8v–9r. Sie ist als Teil der arithmetischen Regeln, einen Winkel zu teilen, eingeordnet. Als Erfindung Bürgis bezeichnet, ist sie als besondere Aussage (enunciatum) des Ursus mit Anführungszeichen versehen. Die einzelnen Sätze, hier zum Zweck der nachfolgenden Interpretation mit großen Buchstaben gekennzeichnet, lauten:

„(A) Positis totidem pro lubitu numeris, in quot partes angulus Rectus est secandus, ita vt [*obversum 5*].

(B) ponatur differentia inter portionem vltimam et penultimam, eademque differentia addita numero posito proximè antecedenti ponatur differentia inter portionem penultimam et antepenultimam, et sic deinceps consequenter usque ad primum positum numerum,

(C) eodemque modo ipsa operatione aliquoties reiterata: erit ultima seu suprema differentia prima seu suprema portio anguli secti:

(D) eademque portio addita proxime sequenti differentiae, erit portio secunda. Et sic deinceps consequenter usque ad infimam differentiam.

(E) Et quo saepius eadem operatio reiteratur, eo exactius angulus sectus erit, donec tandem portionum Ratio inuariabilis fere permanebit.“ – In der Übersetzung:

„(A) Es werden nach Gutdünken so viele Zahlen genommen, wie der rechte Winkel in Teile zu teilen ist, ita vt [*obversum 5*].

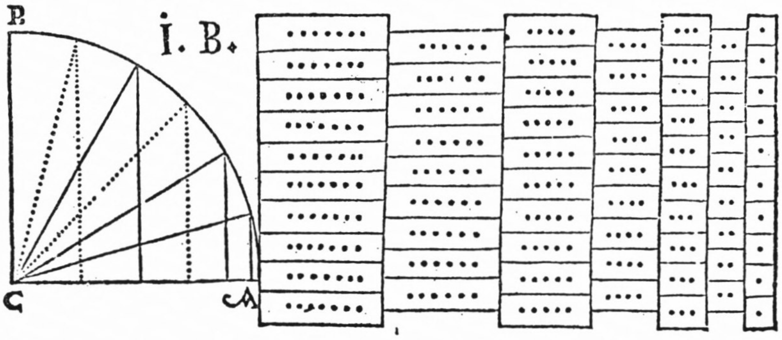
(B) Es wird die Differenz zwischen dem letzten und vorletzten Teil gebildet. Sie wird der Zahl beigegeben, die der gesetzten am nächsten voransteht. Jetzt wird die Differenz zwischen dem vorletzten und vorvorletzten Teil gebildet und so dann folgerichtig bis zur ersten gesetzten Zahl.

(C) Wenn in dieser Weise die Operation selbst einigemal wiederholt ist, wird die letzte oder oberste Differenz der erste oder oberste Teil des geteilten Winkels sein.

(D) Nachdem dieser Teil der nächstfolgenden Differenz hinzugefügt ist, wird sich der zweite Teil ergeben. Und so dann folgerichtig bis zur untersten Differenz.

(E) Und je häufiger diese Operation wiederholt wird, desto genauer wird der Winkel geteilt sein, bis endlich die Berechnung der Teile fast unveränderlich bleiben wird."

Diesem Text folgt eine Zeichnung zur Teilung eines Viertelkreises und eine Aufreihung von Punkten in Spalten und gegeneinander verschobenen Zeilen (vgl. Abb.).



Figur 8

Darunter stehen die Worte: „Und so kann durch diesen goldenen Kunstgriff (aureum artificium) der ganze Canon Sinuum äußerst einfach angelegt und vollendet werden in einem Zeitraum von 2, 3 oder höchstens 4 Tagen." – Im übrigen verweist Ursus zur weiteren Erklärung auf „unsere große und königliche Astronomie" von 1597 [31].

5. In der Tat finden sich dort Hinweise auf den Kunstgriff Bürgis; sie sind schon bei Delambre [10, S. 299ff.] z. T. wiedergegeben und kommentiert. Insbesondere bringen sie etwas Licht in jene dunkle, in Teil (A) des oben wiedergegebenen Textes in Klammern gesetzte Stelle „ita ut obversum 5". Ursus schreibt: „Diese umgestürzte 5 stellt die linke oder vordere Hälfte des letzten Buchstabens des griechischen Alphabets dar." Ursus wollte mit der Hälfte des letzten Buchstabens (Ω) „die Hälfte einer letzten Quantität" anzeigen, wie er sagt. Nach seiner Vorschrift in „De astronomicis hypothesibus" sollte diese Quantität durch die zuletzt gesetzte Zahl ersetzt werden. Die nächstfolgenden Sätze machen seine Absichten deutlicher: „Tycho ist nicht würdig, daß ich ihn diesen Kunstgriff lehre; aber ich habe mir seither einen Beweis ausgedacht ... den ich hier aufzuzeichnen zuerst Lust verspürte, hätte ich nicht gefürchtet, daß Tycho und Rothmann sagten, ich hätte ihnen denselben gestohlen." Ob Ursus auf Bürgi eingewirkt hat, den Kunstweg in der „Coss" zurückzuhalten und auch Kepler nicht mitzuteilen, wäre bei dem Haß zwischen Ursus und Tycho denkbar, läßt sich aber nicht belegen. Jedenfalls spielen hier stark persönliche Motive mit herein, die die Entwicklung der Wissenschaft wohl nicht entscheidend hemmten, aber doch dazu beitrugen, daß eine für die 2. Hälfte des 16. Jahrhunderts wichtige Entdeckung in der Mathematik der wissenschaftlichen Öffentlichkeit vorenthalten wurde.

Erklärung des Kunstwegs

Wenn uns nun die Dokumente der Zeit offenbar im Stich lassen, gibt es dann überhaupt noch eine Möglichkeit, näheres über den Kunstweg zu erfahren? Halten wir zunächst fest, was wir aus der „Coss" selbst wissen und was Ursus in verschlüsselter Weise angedeutet hat. Nach der „Coss“ ist der Kunstweg ein Interpolationsverfahren zur Berechnung von Zwischenwerten aus Ausgangswerten, das sich höherer Differenzen bedient. Das Verfahren muß mit den Sätzen (A) bis (E) von Ursus in Übereinstimmung stehen, darf ihnen zumindest nicht widersprechen.

An dieser Stelle kann vielleicht ein Hinweis von Braunmühl weiterhelfen, der durch die Bemerkung Keplers in seinem Brief an Philipp von Hessen (vgl. S. 113), auch Briggs habe neben Bürgi Sinus-Werte berechnet, unterstrichen wird. Braunmühl erwähnt ein besonderes Interpolationsverfahren von H. Briggs, das in der Anordnung der Differenzentabellen gerade an das von Ursus veröffentlichte und nicht näher erklärte Schema erinnert. Er glaubt nun, in Ergänzung zu seiner früheren Bemerkung (S. 117), ohne den Zusammenhang näher darzulegen, daß beide Verfahren, das von Briggs und jenes von Bürgi, identisch seien. „Entweder“, so schreibt Braunmühl [7, 2. Teil, S. 28], „hat Briggs, was uns das Wahrscheinlichste dünkt, dem Sinn dieser Andeutungen nachspürend [denen von Ursus], das Wesen von Bürgis Methode durchschaut, oder es kamen ihm aus irgendeiner unbekannten Quelle nähere Mitteilungen über dieselbe zu.“

Worin bestand nun das Briggssche Verfahren? In der „Trigonometria Britannica“ [8, S. 36ff.] finden sich sowohl eine Skizze zur Teilung des Quadranten als auch Tabellen zur Bildung von höheren Differenzen von Sinus-Werten, Tabellen, die an das Schema von Ursus erinnern. Wie bei Ursus treten auch bei Briggs noch 6. Differenzen auf. Briggs will das Intervall h der Funktion f (z) in 5 gleiche Teile unterteilen. Es werden nacheinander die Differenzen der vorgegebenen Eckwerte gebildet und dann nach einfachen Formeln Teildifferenzen der Unterteilungen berechnet, derart, daß in jeder Spalte an einer bestimmten Stelle eine Teildifferenz erscheint. Die übrigen Werte der einzelnen Spalten lassen sich dann sukzessive von höheren zu geringeren Differenzen durch einfache Subtraktion oder Addition, also im Schema von rechts nach links, berechnen, bis in der ersten Spalte die gesuchten Werte von f (z) für die Teilintervalle erscheinen. Dabei entstehen die Teildifferenzen einfach durch Division der Differenzen der Eckwerte durch 5 für die 2. Differenzen, durch 5^2 für die 3. Differenzen, durch 5^3 für die 4. Differenzen usf. In den Formeln von Briggs treten noch gewisse Korrekturen auf, die hier nicht wiedergegeben werden sollen [vgl. 23, S. 46ff.].

Zur Verdeutlichung des Verfahrens sei ein einfaches Beispiel angegeben. Es sei f (z) = sin z (6stellig). Das Intervall h betrage 50′ und soll wie bei Briggs 5 Unterteilungen erhalten. Es ergibt sich folgendes Schema für die Eckwerte:

(1) z	(2) sin z	(3) Δ^1	(4) Δ^2	(5) Δ^3
21°	358 368			
		13 540		
21° 50′	371 908		— 79	
		13 461		— 2
22. 40	385 369		— 81	
		13 380		— 3
23. 30	398 749		— 84	
		13 296		
24. 20	412 045			

Die unterstrichenen Zahlen werden für die Unterteilung herangezogen. Werden nun abgekürzt die z-Werte

$21° 50'$ mit A,
$22° 40'$ mit B,
$23° 30'$ mit C,

so liegt, wenn zunächst Spalte (3) betrachtet wird, die Differenz 13461 in der Mitte zwischen sin A und sin B, während 13380 genau zwischen sin B und sin C liegt. Bei der Unterteilung der Intervalle (A, B) und (B, C) werden die 5. Teile dieser Differenz aus Spalte (3) wiederum genau in der Mitte der Intervalle liegen. Entsprechendes gilt für die 2. Differenz — 81 in Spalte (4): sie liegt in einer Linie mit sin B, auch die Teildifferenz, die sich aus der Division mit 5^2 ergibt, wird diese Linie einhalten müssen. Die 3. Differenzen in Spalte (5) sind annähernd konstant. Damit wird die Voraussetzung im Verfahren nach Briggs erfüllt dafür, auf weitere Differenzenbildungen zu verzichten. Für die Bildung der Teildifferenzen wird eine dieser Differenzen genommen, wir wählen — 3, die, wie die Teildifferenz nach der Division mit 5^3, zwischen sin B und sin C in der Mitte des Intervalls liegt.

Für die Teildifferenzen der einzelnen Spalten ergeben sich also folgende Werte:

1. Differenzen	$13461 : 5 = 2692$
	$13380 : 5 = 2676$
2. Differenz	$(-81) : 25 = -3{,}24$
3. Differenz	$(-3) : 125 = -0{,}024.$

Für die Unterteilung werden zweckmäßigerweise die 3. Differenzen in Spalte (5) mit — 0,024 konstant gehalten, zumal ohnehin für sin z in Spalte (2) nur die ganzen Zahlen, die in sin z die 6. Stelle bedeuten, benötigt werden. Von Spalte (5) ausgehend, werden über die berechnete 2. Differenz — 3,24 in Spalte (4) die übrigen Werte dieser Spalte berechnet usf. bis zur Berechnung der sin z in Spalte (2). Werden die zuvor berechneten Werte, die neuen Ausgangswerte, sowie die hier benötigten Eckwerte für sin z unterstrichen, ergibt sich endlich folgendes Schema der Unterteilung:

(1) z	(2) sin z	(3) Δ^1	(4) Δ^2	(5) Δ^3
21° 50′	371 908			
		2 699		
22. 0	374 607		— 3,14	
		2 695		— 0,024
22. 10	377 302		— 3,17	
		2 692		— 0,024
22. 20	379 994		— 3,19	
		2 689		— 0,024
22. 30	382 683		— 3,22	
		2 686		— 0,024
22. 40	385 369		— 3,24	
		2 683		— 0,024
22. 50	388 052		— 3,26	
		2 679		— 0,024
23. 0	390 731		— 3,29	
		2 676		— 0,024
23. 10	393 407		— 3,31	
		2 673		— 0,024
23. 20	396 080		— 3,34	
		2 669		
23. 30	398 749			

Die Berechnung der sin z-Werte erfolgt also über einfache Additionen und Subtraktionen.

Kehren wir nun von diesem Beispiel zu Ursus zurück und zu seinem Text im „Fundamentum", den wir mit dem hier vorgeführten vereinfachten Briggsschen Verfahren vergleichen wollen. Es sei zunächst jeweils ein Abschnitt des Textes von Ursus sinngemäß, entsprechend dem Wortlaut auf S. 117f., wiederholt und dann die Interpretation im Sinne des Briggsschen Verfahrens gegeben. Vergleich mit Ursus

(A) Ursus: Es werden so viele Zahlen genommen, wie der rechte Winkel in Teile zu teilen ist.

Interpretation: Die Teilung des rechten Winkels steht synonym für die Unterteilung der Intervalle und die Bestimmung von Sinus-Werten aus Ausgangswerten. Es werden hierfür so viele Ausgangswerte – vorher mit Eckwerten bezeichnet – genommen, wie Unterteilungen gesucht sind, z. B. 5 Ausgangswerte für 5 Unterteilungen. 1 Unterteilung ist sinnlos, sie ist der Wert selbst.

(B) Ursus: Es werden die 1. Differenzen gebildet und an die jeweils nächstvoranstehende Zahl geschrieben, und zwar von den letzten Zahlen zur ersten Zahl aufsteigend.

Interpretation: Bei der Differenzenbildung wird der kleinere vom größeren Wert subtrahiert. Da es sich um Sinus-Werte im 1. Quadrant des Kreises handelt, nehmen die Zahlen von oben nach unten zu. Es können also am einfachsten die Differenzen von unten nach oben gebildet (Spalte 2) und hingeschrieben (Spalte 3 des vorigen Schemas) werden. Es ist ohne Belang, ob die Differenzen den jeweils nächstkleineren Zahlen zugeordnet oder in das Intervall selbst gesetzt werden. Übersichtlicher wirkt die zweite Schreibweise.

(C) Ursus: In dieser Weise ist die Prozedur mehrmals zu wiederholen. Die letzte oder oberste Differenz wird dann der erste oder oberste Teil des geteilten Winkels sein.
Interpretation: Die Prozedur, d. h. die Differenzenbildung, wird mehrmals wiederholt. Es werden also höhere Differenzen gebildet. Die letzte Differenz ist Ausgang für die nun folgende Ermittlung der Sinus-Werte in der Unterteilung des Intervalls, d. h. man muß von den höheren Differenzen wieder hinabsteigen zu den 1. Differenzen und zu den Funktionswerten selbst (von rechts nach links).

(D) Ursus: Dieser Teil wird der nächstfolgenden Differenz hinzugefügt. Es ergibt sich der zweite Teil. So wird bis zur untersten Differenz verfahren.
Interpretation: Es werden die Teildifferenzen in den einzelnen Spalten berechnet.

(E) Ursus: Je häufiger die Operation wiederholt wird, desto genauer wird der Winkel geteilt sein, bis die Berechnung der Teile fast unveränderlich bleiben wird.
Interpretation: Die Berechnung der Funktionswerte innerhalb des unterteilten Intervalls wird desto genauer ausfallen, je mehr höhere Differenzen berücksichtigt werden. An einer Grenze bringt die Berücksichtigung weiterer Differenzen keine erkennbare Steigerung der Genauigkeit mehr.

Ergebnis Es ist sicherlich nicht ganz einfach, in jedem Wort des dunklen Textes von Ursus eine Andeutung des Verfahrens zu finden, wie es Briggs in seiner „Trigonometria Britannica" angewandt hat. Ursus hat das Verfahren nur formal dargestellt, ohne die einzelnen Schritte zu verdeutlichen, ohne auszuführen, wie die Teildifferenzen entstehen. Dennoch scheinen uns aufgrund des Vergleichs mit Briggs genügend Anhaltspunkte vorzuliegen, um als Ergebnis dieser Untersuchung zweierlei festhalten zu können:

1. Ursus kannte den Kunstweg von Bürgi. Seine mehrmaligen Äußerungen darüber bieten dem Unwissenden kaum eine Möglichkeit, ihn in Erfahrung zu bringen, tragen im Gegenteil eher dazu bei, Verwirrung und Ratlosigkeit zu stiften. Offenbar war Kepler nicht eingeweiht.

2. Der Kunstweg von Bürgi, ein Interpolationsverfahren, das sich höherer Differenzen bedient, ähnelt wahrscheinlich dem Interpolationsverfahren von Briggs oder gleicht ihm sogar. Das Verfahren war äußerst einfach und dementsprechend leicht zu handhaben. Die Rechenarbeiten, wenige Divisionen neben vielen einfachen Additionen und Subtraktionen, benötigten im Vergleich zur Schreibarbeit eine denkbar geringe Zeitspanne. Wenn Ursus nur von Tagen bei der Anlegung und Vollendung des „Canons" spricht, so könnte er diesen geringen Zeitaufwand für die Rechnungen gemeint haben.

Betrachtet man nun abschließend die „Coss" von Bürgi im Zusammenhang mit der Mathematik des 16. Jahrhunderts, so läßt sich feststellen, daß sie in Arithmetik, Logistik, algebraischer Schreibweise und algebraischem Rechnen, Gleichungslehre und Winkelteilung einen Überblick über den Stand der Mathematik gibt. Nicht eingegangen wird auf die Trigonometrie mit ihren verschiedenen Sätzen der Dreieckslehre und auf das Gebiet der komplexen Zahlen, zu deren Behandlung nicht nur eine genaue Literaturkenntnis, sondern auch eine erhebliche Abstraktionsfähigkeit erforderlich gewesen wären. Ebensowenig spielt die Kreiszahl π eine Rolle, obwohl die Untersuchungen der Kreispolygone (Zyklometrie) an dieses Thema heranführen. So steht die „Coss" von Bürgi nur zum Teil in der unmittelbaren Auseinandersetzung mit den mathematischen Problemen der Zeit, wie sie auch kein Lehrbuch der Mathematik sein will, sondern nur jene Fragen, die mit der Berechnung von Sinus-Tafeln zusammenhängen, in umfassender Weise behandelt. Sie kann, obwohl zweckgebunden und als Einleitung zu Bürgis „Canon Sinuum" konzipiert, neben anderen Abhandlungen der Zeit über die Coss stehen, ja überragt jene sogar. In der

Gleichungslehre, speziell in der Auflösung von Gleichungen, werden neben der Behandlung bewährter Verfahren, wie Regula falsi, neue Wege eingeschlagen. Auch die Ausführungen über die Berechnung der Sinus-Tafeln zeigen in den teils angedeuteten, teils ausgeführten Interpolationsverfahren Verfahren der numerischen Mathematik auf, die bis dahin kaum bekannt waren. Die „Coss" von Bürgi ist weder vollendet noch gedruckt worden. Sie hat daher auf die weitere Entwicklung in der Mathematik keinen Einfluß nehmen können. Ihre Stellung in der zeitgenössischen Wissenschaft läßt sich zusammenfassend so charakterisieren: sie ist ein Werk der Übergangszeit in der Mathematik von der Geometrie zur algebraischen Schreib- und Denkweise, das sowohl im Inhalt als auch in der Zielsetzung neue, quantitative Methoden und Fragen berührt.

ZUSAMMENFASSUNG

Vorliegende Abhandlung bringt die wortgetreue Wiedergabe der „Arithmetica Bürgii", die Kepler am Ende des 16. Jahrhunderts nach Aufzeichnungen Bürgis konzipierte. Als Einleitung zum neuen „Canon Sinuum" Bürgis vorgesehen, ist sie, wie das Tafelwerk selbst, nie gedruckt worden, sondern hat sich, bisher nur auszugsweise veröffentlicht, als schwer lesbare Handschrift unter den Pulkowoer Kepler-Manuskripten bis heute der umfassenden Bearbeitung und Veröffentlichung entzogen. Sowohl ihrem Inhalt, als auch ihrem Umfang nach stellt sie weitaus mehr als eine bloße Einführung zu Winkelfunktionstafeln dar: sie erläutert, wie Sinus-Werte nach älteren geometrischen und neueren numerischen und algebraischen Verfahren zu berechnen sind, gibt dabei einen Überblick über den Stand der frühen Algebra, die Coss, und behandelt eine Vielzahl von Problemen, die für das ausgehende 16. Jahrhundert von besonderem Interesse waren, wie Winkelteilung und Auflösung von Gleichungen höheren Grades. Eigentlicher Anlaß zur Berechnung neuer Sinus-Tafeln und damit auch zur Abfassung dieser „Coss" war ein auf Hven bei Tycho Brahe neu entdecktes und dann in Kassel bei Landgraf Wilhelm IV. weiterentwickeltes Rechenverfahren zur Lösung astronomischer Aufgaben, die Prosthaphaerese. So verbindet die „Coss" so verschiedene Geister wie Kepler und Bürgi, Brahe und Ursus, und führt mitten hinein in die mathematisch-astronomischen Probleme einer Zeit, die im Aufbruch zur modernen Naturwissenschaft begriffen ist.

SUMMARY

The present paper contains the literal "Arithmetica Bürgii," which Kepler, according to Bürgi's notes, formulated at the end of the 16th century. Planned as an introduction for Bürgi's new "Canon Sinuum," the "Arithmetica" as well as the Canon itself was never printed and hitherto only published in extracts, as the difficult legible handwriting between the Pulkowo-Kepler manuscripts was never worked out completely. Its content as well as its extent make it represent much more than only an introduction into trigonometrical tables: it explains how sinusfigures, according to older geometrical and newer numerical and algebraical procedures, are to be calculated. Furthermore the "Arithmetica" gives a synopsis of the "Coss," being the early algebra, and deals with many problems, as divisions of angles and solution of equations of a higher degree, all being of special interest for the end of the 16th century. The actual accident for calculating new sinustables and therewith also for the composition of the "Coss" was a new procedure of calculating, the "Prosthaphaerese," rediscovered at Tycho Brahe in Hven and further developed at count Wilhelm IV. in Kassel as how to solve astronomical problems. Combining as different geniuses as Kepler and Bürgi, Brahe and Ursus, the "Coss" leads one directly into the mathematic-astronomical problems of a time being set out for modern science.

ZEITTAFEL ZU JOST BÜRGI

1552, 28. Feb.	Bürgi geb. zu Lichtensteig im Toggenburg (Schweiz)
1575	Brahe besucht Landgraf Wilhelm IV. von Hessen in Kassel und trifft in Wittenberg Wittich
1576	Brahe baut seine Sternwarte auf Hven
1577	Rothmann wird in Kassel angestellt
1579, 25. Juli	Bürgi kommt zu Landgraf Wilhelm nach Kassel
1580, Sommer	Wittich kommt nach Hven; bleibt bis November. Erste Anwendung der Prosthaphaerese
1584	Wittich hält sich in Kassel auf; Abreise vor April 1586; gest. 9. Jan. 1587
1584, Sept.	Ursus weilt 8 Tage bei Brahe auf Hven
1586, Frühjahr	Ursus kommt nach Kassel; er reist vor Juni 1588 wieder ab
1588, 6. Mai	Rothmann erhält ein Autorenprivileg für 12 mathematische Traktate
1588 ca.	Bürgi erfindet die Logarithmen, etwas später den Proportionalzirkel
1588	Von Ursus erscheint in Straßburg das „Fundamentum astronomicum"
1589	Longomontanus wird Brahes Assistent (bis 1597)
1590, 1. Aug.	bis 1. Sept. Besuch Rothmanns bei Brahe
1591, ca. Juli	Ursus wird vom Kaiser als Mathematiker angestellt
1591	„Jobst der Uhrmacher" wird Bürger von Kassel
1592	Bürgi gibt dem Kupferstecher A. Eisenhaut den Auftrag für das Triangular-Instrument
1592	Bürgis 1. Reise nach Prag
10. Juni	Ankunft
4. Juli	Audienz; überreicht Kaiser Rudolph eine Himmelskugel mit Triebwerk und einen Zirkel
27. Juli	Auszahlung eines Geschenks von 3000 Taler
1592, 25. Aug.	Tod Landgraf Wilhelms; Nachfolger Moritz
1593, 1. Jan.	Bürgis Vertragserneuerung mit Moritz
1593	Bürgi beginnt Briefwechsel mit David Fabricius
1596, 22. Aug.	Ursus erhält ein Autorenprivileg für astronomische Schriften
1596, Ende	Bürgis 2., kurze Reise nach Prag
1597, Frühjahr	Brahe verläßt Hven
1597	„De astronomicis hypothesibus" von Ursus erscheint in Prag
1598	Bürgi „absolviert" den „Canon Sinuum"
1599, Juni	Ankunft Brahes in Prag
1600, Januar	Keplers 1. Reise nach Prag
11. Jan.	Ankunft in Prag
1. Juni	Abreise von Benatek
1600	Adrianus Romanus in Prag
1600	Valentin Otho in Prag
1600, 15. Aug.	Ursus stirbt
1600, 19. Okt.	Kepler übersiedelt nach Prag
1601, 10. Mai	David Fabricius hält sich bis 13. Juli in Prag auf

1601, 24. Okt.	Brahe stirbt
1603, Herbst	Bürgi in Prag. Noch „Landgravii Automatopaeus"
1604, 23. Dez.	Bürgi wird Kaiserlicher Kammeruhrmacher mit 60 fl. monatlich
1605, 15. Mai	Bürgi erhält sein erstes Gehalt; dazu Wohnung und Werkstatt in der kaiserlichen Burg
1609	Tod der 1. Frau von Bürgi
1610	Einbürgerung von Jost Bürgi in Prag
1611, 3. Feb.	Nobilitatio Bürgis und Wappen(-Besserung)
1611, 17. Juni	2. Heirat Bürgis in Kassel
1614	Neper veröffentlicht seine Logarithmentafeln in Edinburgh
1617	H. Briggs bringt das erste Tausend seiner Logarithmen in London heraus
1617	Bürgi wieder kurz in Kassel; unterrichtet den Prinzen Hermann in Astronomie
1619, 28. Feb.	Bürgi am Geburtstag von Sadeler gezeichnet; danach der Stich angefertigt
1620	„Progress-Tabuln" von Bürgi in Prag veröffentlicht
1621, 29. Okt.	Bürgi erhält ein Privileg für seine Logarithmentafeln
1624	Keplers „Chilias Logarithmorum" in Marburg gedruckt
1624	H. Briggs veröffentlicht seine „Arithmetica" in London
1631	Bürgi geht für immer nach Kassel zurück
1632, 31. Jan.	Beerdigung Bürgis

LITERATURVERZEICHNIS

1. Archimedes, Op. Om. ed. J. L. Heiberg. Bd. 1. 2. Aufl. Leipzig 1910
2. Becker, O. und Hofmann, J. E., Geschichte der Mathematik. Bonn 1951
3. Bourbaki, N., Elemente der Mathematikgeschichte. Göttingen 1971
4. Brahe, T., Op. Om. ed. J. L. E. Dreyer. 15 Bd. Kopenhagen 1913–1929
5. Bramer, B., Bericht zu M. Jobsten Burgi seligen Geometrischen Triangular Instrument. Cassel 1648
6. v. Braunmühl, A., Zur Geschichte der prosthaphaeretischen Methode in der Trigonometrie. In: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Heft 9. Leipzig 1899
7. v. Braunmühl, A., Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. Leipzig 1900/03
8. Briggs, H., Trigonometria Britannica. Gouda 1633
9. Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Bd. 2. 2. Aufl. Leipzig 1900
10. Delambre, J. B. J., Histoire de l'Astronomie moderne. Bd. 1. Paris 1821
11. Gerhardt, C. J., Geschichte der Mathematik in Deutschland. München 1877
12. Gericke, H., Geschichte des Zahlbegriffs. Mannheim 1970
13. Juschkewitsch, A. P., Geschichte der Mathematik im Mittelalter. Basel 1963
14. Kästner, A. G., Geschichte der Mathematik. 4 Bd. Göttingen 1896–1900
15. Kaunzner, W., Über Christoff Rudolff und seine Coss. Veröff. d. Forschungsinstituts d. Deutschen Museums f. Geschichte d. Naturwiss. u. d. Technik. Reihe A, Nr. 67. München 1970
16. Kaunzner, W., Über das Zusammenwirken von Systematik und Problematik in der frühen deutschen Algebra. Sudhoffs Archiv. Bd. 54, Heft 3. Wiesbaden 1970
17. Kaunzner, W., Über die Algebra bei Heinrich Schreyber. Verhandl. d. Hist. Vereins für Oberpfalz und Regensburg. Bd. 110. 1970
18. Kepler, J., Op. Om. ed. Ch. Frisch. 8 Bd. Frankfurt und Erlangen 1858–1871
19. Kepler, J., Gesammelte Werke. München 1937ff.
20. Kepler, J., Handschriften. Kepler-Mss. Pulkowo
21. Koppe, M., Die Behandlung der Logarithmen und der Sinus im Unterricht. Wissenschaftliche Beilage zum Programm des Andreas-Realgymnasiums zu Berlin. Berlin 1893
22. Kropp, G., Geschichte der Mathematik. Heidelberg 1969
23. Markoff, A. A., Differenzenrechnung. Leipzig 1896
24. Norlind, W., Tycho Brahe. Lund 1970
25. Ptolemäus., Almagest. ed. J. L. Heiberg. Bd. 1
26. Romanus, A., In Archimedis circuli dimensionem expositio et analysis. Würzburg 1597
27. Strieder, F. W., Grundlage zur Hessischen Gelehrten und Schriftsteller Geschichte. Bd. 12. Kassel 1799
28. Struik, D. J., Abriß der Geschichte der Mathematik. Braunschweig 1967
29. Tropfke, J., Geschichte der Elementar-Mathematik. 2. Aufl. 7 Bd. Berlin und Leipzig 1921–1924
30. Ursus, N. R., Fundamentum astronomicum. Straßburg 1588
31. Ursus, N. R., De astronomicis hypothesibus tractatus. Prag 1597
32. Voellmy, E., Jost Bürgi und die Logarithmen. Zeitschrift „Elemente der Mathematik", Beiheft Nr. 5. Basel 1948
33. Vogel, K., Die Practica des Algorismus Ratisbonensis. München 1954
34. Wolf, R., Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz. Bd. 1, S. 57–80: Jost Bürgi. Zürich 1858
35. Wolf, R., Astronomische Mittheilungen XXXI–XXXX. Zürich 1872–1876. XXXI: Bürgis „Coss"
36. Wolf, R., Geschichte der Astronomie. München 1877
37. Wolf, R., Paul Wittich aus Breslau. In: Vierteljahresschrift der Astronomischen Gesellschaft. Jahrg. 17. S. 125–130. Leipzig 1882
38. Wolf, R., Astronomische Mittheilungen LXI–LXX. Zürich 1884–1887. LXVIII: Versuch einer Ehren-Rettung für Nicolaus Reymers.
39. Wolf, R., Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Litteratur. 1. Halbband. Zürich 1890
40. Zeuthen, H. G., Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert. 1903. Nachdruck Stuttgart 1966

NAMENREGISTER

Alchwarazmi 80
Alexander, Andreas 81
Alkarhi 82
Anderson, Alexander 91
Apian, Peter 83
Archimedes 49, 81, 94, 104

Backlund, Johann Oskar 110
Bianchini, Giovanni 83
Boëthius 92
Bombelli, Raffaele 102
Brahe, Tycho 78, 79, 100, 102–109, 112, 118, 124, 125
Bramer, Benjamin 109, 113
Braunmühl, Anton von 117, 119
Brengger, Johann Georg 106
Briggs, Henry 113, 119, 120, 122, 126
Bürgi, Jost 5, 7, 78–88, 91–96, 98–101, 104–119, 122–126

Cardano, Gerolamo 93, 102
Ceulen, Ludolph van 7, 42, 79, 107
Clavius, Christoph 83, 106
von Cölln s. van Ceulen
Copernicus, Nicolaus 83, 103, 107, 109
Curtius, Jakob 107

Delambre, Jean-Baptiste Joseph 118

Eratosthenes von Kyrene 67, 97
Euklid 27–29, 80, 82, 86, 87, 114

Fabricius, David 100, 109, 116, 117, 125
Ferrari, Luigi 93
Fink, Thomas 97
Fridericus Gerhart 80
Friedrich IV., von der Pfalz 80
Frisch, Christian 110
Frisius, Gemma 82

Gerhardt, Carl Immanuel 80
Gernerth, A. 80
Grammateus s. Schreiber

Hermann, Prinz von Hessen 126
Hevelius, Johannes 110

Johann von Gmunden 83

Kepler, Johannes 5, 80, 83, 84, 89, 92, 95–97, 99, 100, 104–114, 116–118, 122, 124–126

Lansberg, Philipp 66, 97, 117
Leonardo von Pisa 82, 93
Longomontanus, Christian 104, 125

Ludolph van Ceulen s. van Ceulen

Mendthal, H. 81
Michailov, Alexander A. 110
Moivre, Abraham de 90
Moritz, Landgraf von Hessen 109, 125

Neper, John 83, 126
Newton, Isaak 110

Otho, Valentin 7, 80, 83, 108, 110, 125

Peurbach, Georg von 83
Philipp, Landgraf von Hessen 113, 119
Pitiscus, Bartholomäus 109, 110, 113
Ptolemäus 30, 80, 87, 90, 91, 97, 114
Pythagoras 86, 90

Ramus, Petrus 67, 97
Ranzow, Heinrich 79
Recorde, Robert 102
Regiomontanus, Johannes 83
Reinhold, Erasmus 107, 110
Reymers s. Ursus
Rheticus, Georg Joachim 80, 83, 109, 110
Riese, Adam 80, 103
Romanus Adrianus 91, 102, 106, 108, 125
Roomen, Adriaen van s. Romanus
Rothmann, Christoph 78, 104–107, 118, 125
Rubeus, Theodosius 106
Rudolff, Christoph 80, 82, 93, 103
Rudolph II., Kaiser 78, 107, 108, 125

Sadeler, Ägidius 113, 126
Satler s. Sadeler
Schreiber, Heinrich 80, 82, 93, 103
Stevin, Simon 83, 102, 114
Stifel, Michael 80, 82, 103
Struve, Otto von 110

Tartaglia, Niccolo 102
Tropfke, Johannes 92
Tycho s. Brahe

Ursus, Nikolaus Raimarus 7, 79, 100, 105–109, 116–119, 121, 122, 124, 125

Viète, François 83, 88, 91, 102, 103, 115

Werner, Johannes 78
Widmann, Johannes 81
Wilhelm IV., Landgraf von Hessen 7, 78, 79, 102–104, 107, 109, 112, 124, 125
Wittich, Paul 7, 78, 104–106, 112, 125
Wolf, Rudolf 97, 105, 108, 110, 111, 114, 116