

Fortgesetzte Untersuchungen

über das

mehrfache Sternsystem ζ Cancri

von

H. Seeliger.

(Mit 1 Tafel.)

Aus den Abhandlungen der k. bayer. Akademie der Wiss. II. Cl. XVII. Bd. I. Abth.

München 1888.

Verlag der k. Akademie

in Commission bei G. Franz.

In einer Abhandlung, welche im XLIV. Bande der Denkschriften der Wiener Akademie¹⁾ erschienen ist, habe ich die interessanten Verhältnisse, welche das mehrfache Sternsystem ζ Cancri in dynamischer Beziehung darbietet, näher untersucht. Die daselbst verwertheten Beobachtungen reichen bis zum Jahre 1880. Wenngleich seitdem 8 Jahre verflossen sind, so ist doch selbstverständlich nicht anzunehmen, dass das vorliegende Bewegungsproblem jetzt schon, nach einer verhältnissmässig geringen Vermehrung des Beobachtungsmateriales, soweit entwickelt erscheint, dass die naturgemässen Schwierigkeiten, die sich damals einer exacten Bestimmung verschiedener Bewegungselemente entgegenstellten, behoben sein können. Diese werden vielmehr, wie leicht einzusehen, noch lange fortbestehen und erst nach Verlauf von Zeiträumen, deren Grösse noch nicht anzugeben ist, wird es gelingen in dieser Richtung einen wesentlichen Fortschritt zu machen. Für die theoretische Erkenntniss der Eigenthümlichkeiten des Problemes aber ist dieser an sich freilich nicht befriedigende Zustand weniger wichtig. Man kann sich jetzt schon eine genügende Einsicht in die vorliegenden dynamischen Verhältnisse verschaffen und im Allgemeinen jene Methoden angeben, die später eine bessere Bestimmung der vorkommenden Unbekannten ermöglichen werden, als dies gegenwärtig möglich ist.

In der Hauptsache zwar habe ich den Resultaten meiner früheren Arbeit nichts Wesentliches hinzuzufügen. Trotzdem schien es mir der Mühe werth, eine neue Bearbeitung desselben Gegenstandes zu unter-

1) Untersuchungen über die Bewegungsverhältnisse in dem dreifachen Sternsystem ζ Cancri. Wien 1881. Im Folgenden soll diese Arbeit mit I bezeichnet werden. Einen kurzen Auszug der genannten Abhandlung findet man in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie, Band LXXXIII, II. Abth. Maiheft 1881.

nehmen und zwar zunächst aus dem Grunde, um manches stärker hervorzuheben, als es damals geschehen ist. Wenn sich hierdurch eine gute und zum Theil auf directerem Wege erhaltene Controle für die Richtigkeit der früheren nicht ganz einfachen Rechnungen ergab, so war dies natürlich nicht unwichtig. Mir schien aber eine solche Prüfung deshalb eine erhöhte Bedeutung zu besitzen, weil in den letzten Jahren Ansichten über die Verhältnisse in dem Sternsystem ζ Cancri ausgesprochen worden sind, die ich als mit meinen Untersuchungen durchaus unvereinbar ansehen muss.

Die folgende Abhandlung ist in 5 Paragraphen getheilt.

Im ersten werde ich zur Erleichterung der Uebersicht zuerst die Resultate von I kurz anführen und daran eine Darstellung der hauptsächlichsten Resultate knüpfen, welche die vorliegende Arbeit ergeben hat.

Der zweite Paragraph enthält die Grundlagen der folgenden Rechnungen. Es werden also hier die nothwendigen Formeln entwickelt und der Nachweis der Berechtigung gewisser Annahmen geführt, die später gemacht werden müssen.

Im dritten Paragraphen soll die Bewegung der zwei inneren Sterne um einander behandelt werden, während der vierte sich mit der Bewegung des entfernteren Begleiters und der fünfte speciell mit den auf diesen sich beziehenden Beobachtungen beschäftigen wird.

§ 1.

Der Stern ζ Cancri (Σ 1196; $\alpha = 8^h 3^m 6$, $\delta = + 8^{\circ} 6'$, 1850.0) wurde im Jahre 1781 von W. Herschel als dreifach erkannt und zwar wurde von ihm an einem Abende die gegenseitige Stellung der 3 Sterne bestimmt. Derselbe Beobachter hat noch einmal, im Jahre 1802, dasselbe Object aufgesucht, die beiden inneren Sterne aber nicht getrennt gesehen, wenigstens liegt keine diesbezügliche Messung vor. Infolge dessen ist der physische Zusammenhang aller 3 Sterne erst durch W. Struve's Beobachtung im Jahre 1826 nachgewiesen worden. Struve bezeichnet die beiden nahe an einander stehenden Sterne mit A und B , den entfernteren mit C . Die Helligkeiten in Grössenklassen sind nach demselben Astronomen:

$$A = 5.0, B = 5.7, C = 5.5.$$

Wenngleich die neueren Schätzungen zum Theil etwas andere Helligkeiten ergeben haben, so scheint doch mit ziemlicher Sicherheit hervorzugehen, dass A der hellste, B der schwächste ist und beide nicht um eine ganze Grössenklasse von einander verschieden sind. ζ Cancri hat zwar keine grosse, aber doch eine bemerkbare Eigenbewegung. Nach Mädler¹⁾ ist dieselbe in $\alpha + 10''6$ und in $\delta - 11''$ im Jahrhundert. Wenn auch diese Angabe mit unzweifelhafter Sicherheit auf eine Zusammengehörigkeit der drei Sterne hinweist, so ist ein Nachweis auf diesem Wege heute kaum mehr nöthig. Zu einem Ueberblicke über die stattfindenden Verhältnisse mag noch erwähnt werden, dass die beiden Sterne A und B in etwa 60 Jahren einen Umlauf um einander beschreiben und hierbei eine Distanz von $0''.6$ bis $1''.1$ einhalten. Der Stern C dagegen hat seit Herschel's Beobachtung bis jetzt um die Mitte von A und B (im Folgenden kurz mit $\frac{A+B}{2}$ bezeichnet) in Positionswinkel etwa 55° beschrieben bei einer Distanz von $5\frac{1}{2}''$.

Nach diesen orientirenden Bemerkungen gehe ich dazu über, die Resultate meiner früheren Arbeit kurz zu resumiren.

1) Sowohl eine Prüfung des Flächensatzes, als auch die Berechnung einer elliptischen Bahn ergaben, dass man den Beobachtungen von A und B beinahe vollkommen genügen kann, ohne eine Einwirkung des dritten Sternes zu berücksichtigen. In der allgemein üblichen Bezeichnungsweise sind als solche Elemente für die Bewegung von B um A zu betrachten (I pg. 8 und pg. 52):

	IV _a	IV _b
$T =$	1870.393	1870.082
$\lambda =$	$113^\circ 872$	$125^\circ 405$
$\Omega =$	71.532	63.260
$i =$	10.888	15.643
$\varphi =$	20.076	20.774
$n =$	-5.8867	-5.6939
$a =$	$0''.852$	—

1) Dorpater Beobachtungen, Band 14.

Die letzteren schmiegen sich den in I benutzten Beobachtungen besser an als die ersteren. Elemente IV_a dagegen stellen die allerneuesten Beobachtungen etwas besser dar, weshalb sie im Folgenden benutzt werden. In jedem Falle dürfen die aus den genannten Elementen folgenden Positionswinkel und Distanzen innerhalb der Zeit 1828—1880 als die Messungen beinahe vollständig darstellend bezeichnet werden.

2) Hieraus darf aber nicht geschlossen werden, dass der dritte Stern *C* keinen bedeutenden Einfluss auf die Bewegung von *B* um *A* ausübt. Vielmehr hat sich ergeben, dass man für den Stern *C* sehr bedeutende Massenwerthe annehmen kann, ohne die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung zu gefährden und dass man ziemlich bedeutende Massenwerthe annehmen muss, um die beste Darstellung im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate zu erhalten. Infolge der unter 1) gemachten Bemerkungen aber ist es natürlich, dass eine wirkliche Bestimmung des Massenwerthes ausserordentlich unsicher ausfallen muss. Diese Unsicherheit wird noch vermehrt dadurch, dass die Beobachtungen von *C*, da sie sich nur auf die Projectionsebene senkrecht zum Visionsradius beziehen, vorderhand noch keinen Schluss über die Lage der Bahn im Raume, welche *C* beschreibt, gestatten. Ich habe indessen eine Bestimmung der Grössen, welche diese Lage bestimmen und ebenso des Massenwerthes trotzdem versucht, obwohl das Resultat dieser mühsamen und weitläufigen Untersuchung vorauszusehen war. Es hat sich ergeben, dass die Genauigkeit der Beobachtungen gegenwärtig es noch als völlig gleichgiltig erscheinen lässt, welche Annahme man über die Bahnebene, welche *C* um $\frac{A+B}{2}$ im Grossen und Ganzen einhält, machen will. Aus Gründen der Analogie bin ich schliesslich bei der Annahme, der auch sonst nicht widersprochen wird, stehen geblieben, dass *C* sich in der Projectionsebene selbst bewegt. Angemessen der geringen Sicherheit, mit welcher diese Annahme gestützt werden kann, und angemessen den geringen Folgen, welche eine thatsächliche Abweichung davon hat, wenn sie nur gewisse Grenzen nicht überschreitet, können wir diese Annahme auch so formuliren: der Stern *C* bewegt sich in einer nur wenig gegen die Projectionsebene geneigten Bahn. Unter diesen Voraussetzungen, die aber, wie nach-

drücklich hervorgehoben werden muss, den Beobachtungen durchaus entsprechen, wurden schliesslich nach mehrfachen Verbesserungen folgende Elemente für die Bewegung von B um A abgeleitet (I. pg. 38 und 40):

Osculation 1836.2

$$\left. \begin{aligned} \frac{m'}{1+m} &= 2.368 \\ T &= 1868.022 \\ \lambda &= 109^{\circ}735 \\ \Omega &= 81.550 \\ i &= 15.530 \\ \varphi &= 23.007 \\ n &= -5.9675 \\ a &= 0''.8532 \end{aligned} \right\} \text{(VIII)}$$

Hierin bedeutet $\frac{m'}{1+m}$: Masse C dividirt durch die Summe der Massen A und B . Die Darstellung der Beobachtungen durch diese Elemente ist, wie eigentlich selbstverständlich, etwas besser als durch die rein elliptischen IV_a und IV_b . Ebenso von selbst klar ist es aber auf der anderen Seite, dass der erlangte Vortheil nur ein geringer sein kann.

Auf den ersten Blick mag das erhaltene Resultat paradox erscheinen. Wir haben auf der einen Seite eine Bewegung, die im Vergleiche mit den Verhältnissen in unserem Sonnensystem ganz enorme Störungen aufweist, auf der anderen Seite lässt sich dieselbe Bewegung durch die Kepler'schen Gesetze allein beinahe ebenso gut darstellen. Eine einfache Ueberlegung aber, die wir nun anstellen wollen, erklärt dieses Vorkommniss vollkommen.

Zunächst muss hervorgehoben werden, dass die Genauigkeit der Beobachtungen vergleichsweise zu denen, die wir im Planetensystem voraussetzen haben, sehr gering ist. Es müssen schon sehr günstige Umstände obwalten, wenn das Mittel aus mehreren Beobachtungen der Wahrheit bis auf wenige Zehntel Grad im Positionswinkel und einige Hundertstel Bogensecunde in der Distanz nahe kommt. Ausserdem treten die sog. persönlichen Fehler hindernd in den Weg, systematische Abweichungen zwischen Theorie und Beobachtung auch dort zu erkennen, wo dies ohne dieselben möglich

wäre. Im vorliegenden Falle z. B. werden Fehler von 0.05 bis 0.1 der Distanz durchaus nicht mit Sicherheit zu constatiren sein. Hält man sich ferner gegenwärtig, dass bei ζ Cancri die Störungswerthe in Distanz diese Grenze nicht viel überschreiten, und dass schliesslich die grosse Halbaxe der Bahn so bestimmt wird, dass der beste Anschluss hervorgeht, so wird es nicht auffallen, dass in Distanz die Einwirkung des dritten Sternes nicht bemerkbar wird. Ganz anders gestaltet sich die Sachlage für die Positionswinkel. Die weiter unten folgenden Rechnungen geben Störungen im Positionswinkel bis zu 28 Grad und die Thatsache, dass diese Störungswerthe durch eine passend gewählte elliptische Bewegung ziemlich nahe dargestellt werden, muss einen tieferen Grund haben. Diesen findet man in der That im Folgenden. Nennt man die mittleren Bewegungen der Sterne B und C um A , n und n' , so sind bekanntlich die Hauptglieder der im Positionswinkel auftretenden Störungen von der Form

$$a_0 + a_1 t + \sum A_{ii'} \cos (i n t - i' n' t + c_{ii'})$$

wo i und i' ganze Zahlen sind. Im Falle nicht bedeutender Excentricität kann man den Positionswinkel p in eine Reihe entwickeln von der Form:

$$p = \alpha_0 + \alpha_1 t + \sum A_{ii'} \cos (i n_0 t + \gamma_{ii'})$$

Bedenkt man noch weiter, dass im vorliegenden Falle sowohl die $A_{ii'}$ als auch die $A_{ii'}$ mit wachsenden i und i' rasch kleiner werden, dass ferner n' im Vergleiche zu n sehr klein ($n' < \frac{1}{10} n$) ist, so ist sofort klar, dass man die grössten Glieder der ersten Formel mit analogen Gliedern in der zweiten dadurch vereinigen kann, dass man die Coëfficienten, also die Bahnelemente danach bestimmt. Wie lange auf solche Weise die Darstellung der Beobachtungen erzwungen werden kann, kann natürlich auf diesem allgemeinen Wege nur durch nicht ganz einfache, wenn auch nicht schwierig durchzuführende, Entwicklungen gezeigt werden, auch muss auf den interpolatorischen Character des ganzen Vorganges hierbei Rücksicht genommen werden. Ich habe keinen Grund hierauf näher einzugehen, weil ich diese Verhältnisse durch umfangreiche numerische Rechnungen, also auf einem völlig einwurfsfreiem Wege, bei ζ Cancri zuerst aufgedeckt und dargethan habe.

Vielleicht liegen bei anderen dreifachen Sternen die Verhältnisse ein wenig anders. Im Allgemeinen aber werden wir Vorkommnisse, wie die geschilderten, bei jenen Systemen wiederfinden, in welchen der dritte Stern, vergleichsweise zum zweiten, vom ersten weit absteht, also die ihm zugehörige mittlere Bewegung klein, wenn weiter die Excentricität der Bahn, welche *B* um *A* beschreibt, nicht gross ist und schliesslich natürlich die Einwirkung des dritten Sternes auf die Bewegung des zweiten eine gewisse Grenze nicht übersteigt. Selbstverständlich ist es und wurde oben bereits hervorgehoben, dass alles Gesagte nur für beschränkte Zeiten gilt und dass nach Ablauf genügend grosser Zeiträume die erwähnte interpolatorische Darstellung durch die Kepler'sche Ellipse nicht mehr genügen wird.

Mir scheint überhaupt die Genauigkeit der Doppelsternmessungen und die Kürze der Zeit, über welche sie sich erstrecken, durchaus nicht der Sicherheit zu entsprechen, mit welcher man behauptet, dass die bisher berechneten Doppelsternbahnen den Beweis geliefert hätten für die Geltung des Newton'schen Gravitationsgesetzes in jenen entfernten Himmelsräumen. Auch ohne diese Berechnungen würde wahrscheinlich Niemand daran gezweifelt haben, dass das genannte Gesetz im Grossen und Ganzen auch auf die Fixsterne anwendbar sei. Es handelt sich also nur um kleinere Abweichungen, die eventuell zu constatiren wären. Solche erscheinen aber selbst in einem Betrage, der in unserem Planetensysteme bereits eine völlige Disharmonie zwischen Theorie und Beobachtung ergeben würde, bei der Genauigkeit, die man den Doppelsternmessungen jetzt geben kann, völlig verdeckt. Mit dieser Bemerkung soll natürlich durchaus nicht als wahr heinlich hingestellt werden, dass nachweisbare Abweichungen vom Newton'schen Gesetze überhaupt existiren.

3) Die Beobachtungen des Sternes *C* zeigen Anomalien höchst merkwürdiger Art. Otto Struve hatte vor mehreren Jahren darauf aufmerksam gemacht, dass seine Messungen mit grosser Deutlichkeit eine periodische Veränderung in Positionswinkel und Distanz ergeben, die beinahe vollkommen durch die Annahme fortgeschafft werden konnte, der Stern *C* bewege sich in etwa 18 Jahren in einer Kreisbahn vom Radius 0".2 um

einen Punkt, der wieder in einer Kreisbahn langsam um $\frac{A+B}{2}$ fortrückt. In der That ist die durch diese Hypothese erzielte Uebereinstimmung so auffällig, dass an ihrer Berechtigung schon damals kaum zu zweifeln war. Indessen sind bekanntlich die O. Struve'schen Messungen nicht frei von systematischen Fehlern und es war demgemäss nöthig, eine in jeder Beziehung so wichtige und interessante Thatsache auch an den von anderen Astronomen herrührenden Messungen zu prüfen und namentlich zu untersuchen, ob die gegebene Interpretation mehr Wahrscheinlichkeit für sich hat, als etwa andere mögliche ¹⁾.

Mit Hülfe eines grossen Beobachtungsmateriales habe ich diese Frage in Angriff genommen und bin zu einer vollkommenen Bestätigung der genannten Ansicht gelangt. Die von einander unabhängige Behandlung der Positionswinkel und der Distanzen ermöglichte eine Beweisführung auf zwei verschiedenen Wegen. Ferner war, weil eine rein interpolatorische Darstellung gewählt worden war, das erlangte Resultat frei von irgendwelchen Hypothesen. Nach mehrfachen Verbesserungen bin ich bei folgenden Formeln stehen geblieben (I pg. 65 und 69):

$$p = 145.074 - 0.523t + 0.001400t^2 - 2.040 \sin 20^\circ t + 0.100 \cos 20^\circ t \quad (\text{III})$$

$$\begin{aligned} \varrho = 5.595 - 0.0253 \left(\frac{t}{10}\right) + 0.01754 \left(\frac{t}{10}\right)^2 \\ + (0.171 \cos 20^\circ t + 0.010 \sin 20^\circ t) \frac{\varrho}{5.610} \end{aligned} \quad (\text{B})$$

Hierin ist die Zeit t von 1850.0 gezählt.

Beide Formeln geben also beinahe vollkommen übereinstimmende Werthe für die Bewegung von C um einen Punkt, der nicht durch einen leuchtenden Stern markirt ist und diese Uebereinstimmung schien mir sehr in's Gewicht zu fallen. Ehe man nun aber aus diesem Ergebnisse, welches sich nur auf das geometrische Verhalten der von C beschriebenen Bahn bezieht, die Folgerung ziehen dürfte, dass hier thatsächlich ein

1) Dass bei solchen Fragen grosse Vorsicht nöthig ist, mag der Umstand beweisen, dass aus Otto Struve's Beobachtungen von AB grosse Abweichungen von dem Kepler'schen Gesetze der Flächen folgen, die nach Hinzuziehung der andern verfügbaren Beobachtungen verschwinden und auch nach den Untersuchungen des nächsten Paragraphen gar nicht vorkommen können.

ganz ähnliches Phänomen vorliegt, wie etwa bei Sirius oder Procyon, musste zuerst, in Anbetracht der hier vorliegenden complicirten Verhältnisse, gezeigt werden, dass dergleichen Anomalien nicht etwa Folgen der Einwirkungen der beiden Sterne *A* und *B* sein können. Die Frage nun, ob Bewegungen, wie sie der Stern *C* zeigt, in einem System von 3 sich gegenseitig anziehenden Massenpunkten unter den obwaltenden Verhältnissen stattfinden können, habe ich mit Hülfe eines einfachen und allgemeinen Theorems verneinen können, welches fast ohne Rechnung durch ein blosses Betrachten der vorliegenden Beobachtungsergebnisse eine Entscheidung gestattet. Ich komme auf diesen Punkt im folgenden Paragraphen ausführlicher zu sprechen.

Dies waren die wesentlichsten Resultate meiner früheren Untersuchungen. Ich will nun gleich, mit Weglassung aller Einzelheiten, zusammenfassen, was die folgenden Seiten enthalten.

Nach den obigen Bemerkungen muss gegenwärtig der Versuch, aus den Beobachtungen von *A* und *B* die Masse des Sternes *C* und die Lage seiner Bahn um $\frac{A+B}{2}$ bestimmen zu wollen, als aussichtslos angesehen werden. Man wird dieses Problem erst in ferner Zukunft lösen können. Dies wird vielleicht nicht früher möglich sein, als bis sich die Bewegung von *C* um $\frac{A+B}{2}$ so entwickelt hat, dass man eine directe Bahnbestimmung für *C* mit Erfolg versuchen können wird. Dann wird allerdings die ganze Sachlage mit einem Schlage ausserordentlich vereinfacht werden. Denn kennt man die Umlaufszeit von *C* um $\frac{A+B}{2}$, so geben die Kepler'schen Gesetze sofort einen Werth für das oben mit $\frac{m'}{1+m}$ bezeichnete Massenverhältniss. Unter den obwaltenden Umständen, wo also gewisse Willkürlichkeiten nicht zu umgehen sind, musste der Vortheil, mit den früheren Rechnungen in Contact zu bleiben, von massgebendem Einfluss bei der Wahl der Ausgangspunkte der vorliegenden Untersuchungen sein. Ich habe also angenommen: 1) der dritte Körper, welcher die Bewegung von *B* um *A* beeinflusst, bewegt sich nahezu in der Projectionsebene. 2) Seine Masse ist dieselbe wie bei den Elementen VIII.

Mit diesen Annahmen habe ich nun die ganze Störungsrechnung

nach einer Methode von Neuem durchgeführt, die von der in I benutzten in mehreren Punkten abweicht. Wie zu erwarten, ergab sich eine gute Bestätigung der früher gefundenen Zahlen. Nach Ausführung der nothwendig gewordenen neuen Ausgleichung erhielt ich als beste Elemente für die Bewegung des Sternes *B* um *A*:

Elemente IX.

Osculation 1842.2

$$\begin{array}{rcl} T = 1868.112 & & \\ \lambda = 109^{\circ}735 & & \\ \Omega = 80.190 & \left. \vphantom{\begin{array}{l} \lambda \\ \Omega \\ i \end{array}} \right\} 1850.0 & \\ i = 11.135 & & \\ \varphi = 22.450 & & \\ n = -6.0898 & & \end{array}$$

Die Darstellung der Beobachtungen durch diese Elemente ist eine völlig befriedigende. Als werthvolle Prüfung, deren Bedeutung jedoch nicht überschätzt werden darf, ergab sich noch, dass Elemente IX die W. Herschel'sche Beobachtung vom Jahre 1781 beinahe vollständig darstellen, während gleiches die Elemente IV_a und IV_b nicht leisten.

Die weiter unten folgenden Untersuchungen über die Bewegung des Sternes *C* gehen von einer, allerdings unbedeutenden, Unvollkommenheit der Formeln (III) und (B) aus. Man kann nämlich, worauf ich im folgenden Paragraphen zu sprechen komme, zeigen, dass die nicht periodischen Theile der genannten Formeln sehr nahe den Flächensatz:

$$\rho^2 \frac{dp}{dt} = \text{Const.}$$

erfüllen müssen. Es ist bekannt, dass sich der Schwerpunkt des dynamischen Systems, dessen sichtbares Mitglied der Stern *C* ist, nahe nach den Kepler'schen Gesetzen um den Schwerpunkt von *A* und *B* bewegen muss. Dieser Bedingung genügen die erwähnten Formeln nicht. Es war dies auch nicht, nach der Art, wie dieselben gewonnen worden sind, zu erwarten, weil die Abweichungen von dieser Bedingung innerhalb der Zeiten, für welche die Formeln angewendet worden sind, nur sehr gering und durch eine kleine Correctur zu beseitigen sind. Immerhin erschien es erforderlich, diese strengere Ausgleichung auszuführen. Der Rechnung

wurden provisorische Normalörter zu Grunde gelegt, bei welchen die persönlichen Fehler noch nicht genügend eliminirt waren. Auf solche Weise wurden die Formeln gewonnen:

$$\left. \begin{aligned} p &= 145^{\circ}506 - 0^{\circ}5151t - 0^{\circ}1886 \left(\frac{t}{20}\right)^2 - 1^{\circ}688 \sin 20^{\circ}t + \\ &\quad + 0^{\circ}349 \cos 20^{\circ}t - 0.037f \\ \varrho &= 5^{\circ}.638 - 0^{\circ}.0489 \left(\frac{t}{10}\right) + 0^{\circ}.165 \cos 20^{\circ}t + 0^{\circ}.0341 \cos 20^{\circ}t - 0.037f \end{aligned} \right\} \text{(IV)}$$

Hierin ist wieder die Zeit von 1850.0 an gezählt und f bedeutet die Anzahl Grade resp. Secunden, welche man an p resp. ϱ anzubringen hat, um diese auf $\frac{A+B}{2}$ bezogenen Grössen von B aus zu rechnen.

Wenngleich diese Formeln der Wahrheit ziemlich nahe kommen dürften, so fordert der systematische Character der übrig bleibenden Fehler doch noch zu einer erneuten Untersuchung auf. Ich habe nun zunächst durch ein allerdings nicht einwurfsfreies Verfahren die persönlichen Fehler zu ermitteln gesucht und aus den solchergestalt corrigirten Beobachtungen neue Normalörter gebildet. Jetzt wurde ein von dem früheren völlig verschiedenes Verfahren eingeschlagen. Innerhalb der Zeit, über welche sich die Beobachtungen seit W. Struve erstrecken, hat der Stern C um den hypothetischen Schwerpunkt, den ich mit S_2 bezeichnen will, schon drei Mal einen vollen Umlauf beschrieben. Es lag deshalb nahe, die elliptische Bahn, die er hierbei beschreibt, vollständig zu bestimmen. Das vorliegende Problem ist eine Verallgemeinerung der Aufgabe, welche bei den Betrachtungen über sogenannte veränderliche Eigenbewegungen zu lösen war. Als Unbekannte treten auf die Bestimmungsstücke der erwähnten elliptischen Bewegung des Sternes C um S_2 und die Constanten, welche die Bewegung der Projection von S_2 um die Projection des Schwerpunktes von A und B bestimmen. Es wäre nun der Unsicherheit, welche dem Resultate nothwendigerweise anhaften muss, kaum entsprechend, die vorliegende verwickelte Aufgabe strenge nach der Methode der kleinsten Quadrate zu behandeln. Ich habe deshalb ein etwas vereinfachtes, aber doch, wie ich glaube, genügend sicheres Verfahren angewandt und für die Bewegung von C um S_2 folgende Elemente erhalten:

$$\left. \begin{aligned} T &= 1860.127 \\ \Omega &= 71^{\circ}96 \\ \lambda &= 109.68 \\ i &= 17.35 \\ n &= -20.460 \\ e &= 0.1106 \\ a &= 0''.217 \end{aligned} \right\} (V_a)$$

und für die Bewegung von S_2 (p_0, ϱ_0) um $\frac{A+B}{2}$ ergaben sich die Formeln:

$$\left. \begin{aligned} \varrho_0 &= 5''.439 \\ p_0 &= 145^{\circ}42 - 0^{\circ}513 (t - 1850.2) \end{aligned} \right\} (V)$$

Dieses Resultat genügt den Beobachtungen, wie im letzten Paragraphen gezeigt wird, so gut als man nur erwarten konnte. Eine gute Uebersicht in dieser Beziehung giebt auch die dieser Abhandlung beigefügte Tafel, deren nähere Erklärung unten gegeben wird.

Was nun aber den Punkt S_2 betrifft, so kann derselbe wohl kaum anders aufgefasst werden, als der Schwerpunkt von C und einem dunklen Begleiter. Ich werde im nächsten Paragraphen zeigen, dass mit grosser Wahrscheinlichkeit behauptet werden darf, dieser Begleiter befinde sich in einer Entfernung von C , die einige wenige Zehntel einer Bogensekunde nicht überschreiten kann. Diese Annahme genügt gegenwärtig allen Forderungen der Beobachtungen, während gleiches keine andere Hypothese leisten kann. Ich für meinen Theil stehe deshalb nicht an, derselben eine Sicherheit zuzusprechen, die so gross ist, wie sie wenigen Erklärungsversuchen in der Stellarastronomie zukommt, die nicht durch den blossen Augenschein sofort bewiesen werden können. — Wenn man alle diese Verhältnisse, die im Folgenden eingehend besprochen werden sollen, näher in's Auge fasst, so scheint die Ansicht wohl berechtigt, dass das mehrfache Sternsystem ζ Cancri in vieler Beziehung eines der interessantesten Objecte am ganzen Fixsternhimmel ist. Wir haben hier einen merkwürdigen Fall des Problemes der 3 Körper vor uns, das sich vor unseren Augen entwickelt; wir haben ferner die Bewegung des Sternes C um S_2 , den Schwerpunkt von C und einem

bis jetzt nicht gesehenen Begleiter, deren Elemente schon jetzt mit einiger Sicherheit zu ermitteln möglich ist. Wenn sich nun, was ja auch nur eine Frage der Zeit ist, die Elemente der Bewegung von S_2 um den Schwerpunkt von A und B bestimmen lassen werden, dann liegt vor uns in der That eine wunderbare Bewegungserscheinung, die trotz ihrer Complicirtheit aus einer solchen Anordnung der sich gegenseitig anziehenden Massen entspringt, dass mit verhältnissmässig einfachen Hilfsmitteln ein vollständiges Eindringen in die Eigenthümlichkeiten des ganzen Systemes möglich ist.

§ 2.

Es sollen jetzt einige Entwicklungen vorgenommen werden, die den speciellen Verhältnissen, welche ζ Cancri¹⁾ darbietet, angepasst sind. Hier haben die beiden Sterne A und B eine kleine Entfernung von einander im Vergleiche zu den Entfernungen AC und BC . Es sollen nun diese Quotienten als kleine Grössen erster Ordnung betrachtet und nach ihren Potenzen entwickelt werden.

Die Massen der 3 Sterne A , B , C seien m_1 , m_2 , m_3 ; die Entfernungen AB , BC , AC bezw. r , r_{23} , r_{13} . Ferner werde die Entfernung C $\frac{A+B}{2}$ mit r_1 bezeichnet und der Winkel, welchen die Richtung AB , nach B hin positiv genommen, mit r_1 bildet mit σ . Legt man in den Stern A ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Z -Axe mit dem Visionsradius, dessen X -Axe in der Projectionsebene mit der Nullrichtung der Positionswinkel zusammenfällt und dessen Y -Axe den Positionswinkel 90° anzeigt und nennt man die auf dieses System bezogenen Coordinaten von B und C , x , y , z bez. x_3 , y_3 , z_3 , so hat man:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 (m_1 + m_2) \frac{x}{r^3} + k^2 m_3 \left(\frac{x_3 - x}{r_{23}^3} - \frac{x_3}{r_{13}^3} \right)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -k^2 (m_1 + m_2) \frac{y}{r^3} + k^2 m_3 \left(\frac{y_3 - y}{r_{23}^3} - \frac{y_3}{r_{13}^3} \right)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -k^2 (m_1 + m_2) \frac{z}{r^3} + k^2 m_3 \left(\frac{z_3 - z}{r_{23}^3} - \frac{z_3}{r_{13}^3} \right)$$

1) In dieselbe Categorie fällt auch der dreifache Stern ξ Scorpii u. A.

worin k die Gauss'sche Anziehungsconstante ist. Durch Entwicklung von

$$r_{23}^2 = r_1^2 + \frac{1}{4}r^2 - r r_1 \cos \sigma$$

$$r_{13}^2 = r_1^2 + \frac{1}{4}r^2 + r r_1 \cos \sigma$$

erhält man:

$$\frac{1}{r_{23}^3} = \frac{1}{r_1^3} \left\{ 1 + \frac{3}{2} \frac{r}{r_1} \cos \sigma + \frac{3}{8} \left(\frac{r}{r_1} \right)^2 (5 \cos^2 \sigma - 1) + \dots \right\}$$

$$\frac{1}{r_{13}^3} = \frac{1}{r_1^3} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \frac{r}{r_1} \cos \sigma + \frac{3}{8} \left(\frac{r}{r_1} \right)^2 (5 \cos^2 \sigma - 1) + \dots \right\}$$

Nennt man weiter ξ, η, ζ die Coordinaten von C gegen ein dem früheren gleichgerichtetes Coordinatensystem mit seinem Anfang in $\frac{A+B}{2}$, so ist:

$$x_3 = \frac{1}{2}x + \xi; \quad y_3 = \frac{1}{2}y + \eta; \quad z_3 = \frac{1}{2}z + \zeta$$

und durch Einführung dieser Grössen gestaltet sich die erste der drei Differential-Gleichungen so:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2(m_1 + m_2) \frac{x}{r^3} - \frac{k^2 m_3}{r_1^3} \left\{ x - 3 \xi \frac{r}{r_1} \cos \sigma + \frac{3}{8} \left(\frac{r}{r_1} \right)^2 x (5 \cos^2 \sigma - 1) + \dots \right\}$$

Das letzte Glied innerhalb der Klammer ist um 2 Ordnungen kleiner als die beiden ersten. Es soll von nun an fortgelassen werden. Beachtet man weiter, dass

$$\cos \sigma = \frac{\xi x + \eta y + \zeta z}{r r_1}$$

so stellen sich die Bewegungsgleichungen in der Form dar:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -k^2(m_1 + m_2) \frac{x}{r^3} - \frac{k^2 m_3}{r_1^3} \left[x - 3 \xi \frac{r}{r_1} \cdot \frac{\xi x + \eta y + \zeta z}{r r_1} \right] \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -k^2(m_1 + m_2) \frac{y}{r^3} - \frac{k^2 m_3}{r_1^3} \left[y - 3 \eta \frac{r}{r_1} \cdot \frac{\xi x + \eta y + \zeta z}{r r_1} \right] \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= -k^2(m_1 + m_2) \frac{z}{r^3} - \frac{k^2 m_3}{r_1^3} \left[z - 3 \zeta \frac{r}{r_1} \cdot \frac{\xi x + \eta y + \zeta z}{r r_1} \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{I})$$

Aus den ersten beiden Gleichungen ergibt sich:

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = 3 \frac{k^2 m_3}{r_1^3} \cdot \frac{r}{r_1} \cdot \frac{\xi x + \eta y + \zeta z}{r r_1} (x \eta - \xi y)$$

Führt man Positionswinkel und Distanz ein durch die Formeln:

$$\begin{array}{l|l} x = \varrho \cos p & \xi = \varrho_1 \cos p_1 \\ y = \varrho \sin p & \eta = \varrho_1 \sin p_1 \end{array}$$

so kann die letzte Gleichung geschrieben werden:

$$\frac{d\left(\varrho^2 \frac{dp}{dt}\right)}{dt} = 3 \frac{k^2 m_3}{r_1^5} \varrho \varrho_1 \sin(p_1 - p) \{ \varrho \varrho_1 \cos(p_1 - p) + \zeta z \}$$

Aus diesem Ausdrucke, dessen rechte Seite von der zweiten Ordnung ist, ergibt sich, dass nur dann, wenn m_3 sehr gross ist, eine Abweichung vom Kepler'schen Gesetze bemerkbar sein wird. Die Untersuchung des Flächensatzes wird demnach kein zweckmässiges Mittel sein, um eine Einwirkung des dritten Sternes auf die Bewegung der beiden inneren zu constatiren.

Ich habe bei ζ Cancri durch wirkliche Bildung von $\varrho^2 \frac{dp}{dt}$ (I pag. 16) nachgewiesen, dass dort eine solche eventuelle Einwirkung durch die Beobachtungsfehler vollkommen verdeckt wird. Ich will diesen Gegenstand noch einmal an der Hand der obigen Formel besprechen, weil ich annehmen muss, dass die erwähnte Thatsache von anderer Seite nicht gehörig beachtet worden ist. Im Anschlusse an die Bemerkungen des vorigen Paragraphen setzen wir $\zeta = 0$ also auch $r_1 = \varrho_1$. Dann wird also

$$\frac{d\left(\varrho^2 \frac{dp}{dt}\right)}{dt} = \frac{3}{2} \frac{k^2 m_3}{\varrho_1} \left(\frac{\varrho}{\varrho_1}\right)^2 \sin 2(p_1 - p) \quad (1)$$

Die Constante k ist hier in folgenden Einheiten: Bogensecunde, Grad, Jahr, auszudrücken. Bezeichnet also n_0 die mittlere Bewegung von B um A in Einheiten des Radius, a_0 die zur selben Zeit stattfindende grosse Halbaxe in Bogensekunden ausgedrückt, $\varepsilon = 57^{\circ}29 \dots$, so hat man bekanntlich:

$$k^2(m_1 + m_2) = n_0^2 a_0^3 \varepsilon$$

Die Gleichung (1) wird also:

$$\varrho^2 \frac{dp}{dt} = \text{Const.} + \frac{3}{2} \varepsilon n_0^2 a_0^3 \frac{m_3}{m_1 + m_2} \cdot \int \frac{\varrho^3}{\varrho_1^3} \sin 2(p_1 - p) dt \quad (2)$$

Auf die leichteste Weise wird das Integral in dieser Formel auf mechanische Weise berechnet. Ich habe diese einfache Rechnung für

ζ Cancri durchgeführt und zwar wurden alle den Stern B betreffenden Angaben aus den Elementen (VIII) entnommen. ϱ_1 und p_1 bedeuten hier die Coordinaten des Punktes S_2 , sind also nach Formel V zu berechnen. Nimmt man als untere Grenze des Integrales 1828.2, so kann man schreiben

$$\varrho^2 \frac{dp}{dt} = \left(\varrho^2 \frac{dp}{dt} \right)_{1828.2} - f \cdot \frac{m_3}{m_1 + m_2}$$

und für f habe ich gefunden:

1828.2	0.000
38.2	0.043
48.2	0.079
58.2	0.075
68.2	0.062
78.2	0.064

Bei der numerischen Integration wurde zwischen 1828 und 1858 in Intervallen von 2, von da ab in solchen von 1 Jahr vorwärts gegangen. Ich erinnere noch, dass in I als Mittelwerth gefunden wurde:

$$\varrho^2 \frac{dp}{dt} = -4.235$$

und dass die Abweichungen, welche in dieser Constanten durch die Beobachtungsfehler entstanden, sehr oft mehrere Einheiten der ersten Decimale betrug. Die obigen Zahlen ergeben nun, dass in der That, wenn, wie früher angenommen, $\frac{m_3}{m_1 + m_2}$ einige Einheiten nicht übersteigt, der Flächensatz als so nahe erfüllt angesehen werden kann, als es die Genauigkeit der Beobachtungen zulässt. Aber selbst bei grossen Werthen für das genannte Massenverhältniss könnte sich höchstens in der Zeit von 1828 bis 1838 ein Einfluss bemerkbar machen.

Ich will nun die Gleichungen (I) in eine Form bringen, in welcher sie im Folgenden gebraucht werden. Ohne auf eine, von selbst klare, allgemeinere Anwendbarkeit des folgenden Verfahrens hinzuweisen, nehme ich gleich $\zeta = 0$ an. Die Gleichungen (I) schreiben wir nun in der Form, welche in der Theorie der speciellen Störungen üblich ist:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + k^2 (m_1 + m_2) \frac{x}{r^3} &= X \\ \frac{d^2y}{dt^2} + k^2 (m_1 + m_2) \frac{y}{r^3} &= Y \\ \frac{d^2z}{dt^2} + k^2 (m_1 + m_2) \frac{z}{r^3} &= Z \end{aligned} \right\} (3)$$

wo also:

$$\begin{aligned} X &= -\frac{k^2 m_3}{e_1^3} \left\{ x - 3 \frac{\xi}{e_1^2} (\xi x + \eta y) \right\} \\ Y &= -\frac{k^2 m_3}{e_1^3} \left\{ y - 3 \frac{\eta}{e_1^2} (\xi x + \eta y) \right\} \\ Z &= -\frac{k^2 m_3}{e_1^3} z \end{aligned}$$

Durch Einführung von Positionswinkel und Distanz erhält man:

$$\left. \begin{aligned} X &= -\frac{k^2 m_3}{e_1^3} \rho \left[\cos p - 3 \cos p_1 \cos (p_1 - p) \right] \\ Y &= -\frac{k^2 m_3}{e_1^3} \rho \left[\sin p - 3 \sin p_1 \cos (p_1 - p) \right] \\ Z &= -\frac{k^2 m_3}{e_1^3} z. \end{aligned} \right\} (3a)$$

Es soll nun vorausgesetzt werden, dass man von osculirenden Elementen ausgeht. Diese, sowie die aus ihnen hervorgehenden Coordinaten werden mit dem Index 0 bezeichnet. Setzt man weiter

$$x = x_0 + \delta x; \quad y = y_0 + \delta y; \quad z = z_0 + \delta z; \quad r = r_0 + \delta r$$

so sind δx , δy , δz die Störungen in den Coordinaten. Es ist aber zu beachten, dass die Beobachtungen die gestörten Werthe x , y ergeben. Mit z und r verhält es sich anders. Wären die osculirenden Elemente genau bekannt, so wären es natürlich auch z_0 und r_0 . Dieses ist nun allerdings nicht der Fall, aber man wird auf Grund der Rechnungen in (I) annehmen dürfen, dass die osculirenden Werthe wenigstens näherungsweise bekannt sind. Eine kleinere Unsicherheit in dieser Beziehung wird bei ζ Cancri von keinem Einflusse sein, weil die Neigung i klein ist und also die von der z -Coordinate herrührende Störungscomponente keinen

grossen Einfluss haben kann. Die Gleichungen (3) schreiben wir nun in bekannter Weise:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \delta x}{dt^2} &= X - k^2 (m_1 + m_2) \left(\frac{x}{r^3} - \frac{x_0}{r_0^3} \right) \\ \frac{d^2 \delta y}{dt^2} &= Y - k^2 (m_1 + m_2) \left(\frac{y}{r^3} - \frac{y_0}{r_0^3} \right) \\ \frac{d^2 \delta z}{dt^2} &= Z - k^2 (m_1 + m_2) \left(\frac{z}{r^3} - \frac{z_0}{r_0^3} \right)\end{aligned}$$

Setzt man noch

$$\frac{z}{\varrho} = \operatorname{tg} \sigma; \quad f = \left(\frac{r_0 \cos \sigma}{\varrho} \right)^3$$

so wird $r = \frac{\varrho}{\cos \sigma}$ und man hat:

$$\left. \begin{aligned}\frac{d^2 \delta x}{dt^2} &= X + \frac{k^2 (m_1 + m_2)}{r_0^3} \{x(1-f) - \delta x\} \\ \frac{d^2 \delta y}{dt^2} &= Y + \frac{k^2 (m_1 + m_2)}{r_0^3} \{y(1-f) - \delta y\} \\ \frac{d^2 \delta z}{dt^2} &= Z + \frac{k^2 (m_1 + m_2)}{r_0^3} \{z(1-f) - \delta z\}\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Wie diese Gleichungen in der wirklichen numerischen Rechnung anzuwenden sind, wird später erörtert werden.

Die Verhältnisse bei ζ Cancri werden, wie in § 1 bereits ausführlich besprochen, in höchst interessanter Weise complicirt, durch die Anomalien, welche in der Bewegung des dritten Sternes C aufgedeckt worden sind. Ich habe oben bereits erwähnt, dass, ehe man an die Erklärung dieser Anomalien schreiten kann, zuerst nachgewiesen werden muss, dass nicht etwa bloss eine im Problem der 3 Körper (A , B , C) mögliche Bewegungsform vorliege. Ich habe diesen Beweis in höchst einfacher Weise und völlig streng in meiner früheren Arbeit (I pg. 58 ff.) geführt. Derselbe stützte sich auf einen einfachen Satz, welcher mir an sich so evident schien, dass ich kein besonderes Gewicht auf denselben legte. Die Thatsache aber, dass derselbe Missverständnissen ausgesetzt sein konnte und dass Zweifel an seiner Richtigkeit, wenn auch nur vorübergehend,

ausgesprochen werden konnten, lässt mich demselben nun eine grössere Wichtigkeit beimessen. Ich will deshalb die diesen Punkt betreffenden Untersuchungen hier zum Theil wörtlich anführen und daran einige kurze Bemerkungen knüpfen. Den erwähnten Satz habe ich in I so abgeleitet:

Ich bezeichne mit 1 , m und m' die respectiven Massen der drei Sterne A , C und B . Ich lege ferner in den Stern A als Mittelpunkt ein sonst beliebiges rechtwinkeliges Coordinatensystem der x , y , z , bezeichne mit x , y , z die Coordinaten von C und mit x' , y' , z' diejenigen von B , mit r und r' die Entfernungen AC und AB und schliesslich mit ϱ die Entfernung BC . Dann wird die Bewegung von C durch die Differentialgleichungen definirt:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 (1 + m) \frac{x}{r^3} = k^2 m' \left(\frac{x' - x}{\varrho^3} - \frac{x'}{r'^3} \right),$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + k^2 (1 + m) \frac{y}{r^3} = k^2 m' \left(\frac{y' - y}{\varrho^3} - \frac{y'}{r'^3} \right)$$

indem ich die z -Coordinate unberücksichtigt lasse. Aus diesen Gleichungen ergibt sich:

$$\frac{d}{dt} \left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} \right) = k^2 m' (x' y - x y') \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \quad (\alpha)$$

In analoger Weise betrachte ich die relative Bewegung von C um B . Ich lege also nach B den Anfangspunkt eines neuen, dem früheren parallel gerichteten Coordinatensystems und bezeichne mit x'' , y'' , z'' und ξ , η , ζ die Coordinaten von C und von A . Dann ergibt eine Wiederholung der eben ausgeführten Betrachtung:

$$\frac{d}{dt} \left(y'' \frac{dx''}{dt} - x'' \frac{dy''}{dt} \right) = k^2 (\xi y'' - \eta x'') \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \quad (\beta)$$

Wie man aber sofort übersieht, ist:

$$\xi y'' - \eta x'' = -(x' y - y' x) \quad (\gamma)$$

Ferner sind bei ζ Cancri die gegenseitigen Entfernungen der drei Sterne so beschaffen, dass für alle Zeiten, über welche sich die Beobachtungen erstrecken

$$\varrho > r'; \quad r > r'$$

die in (α) und (β) vorkommenden Differenzen

$$\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r'^3} \quad \text{und} \quad \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}$$

sind infolgedessen stets negativ.

Da sich nun weiter infolge von (γ) die Gleichung (β) schreiben lässt:

$$\frac{d}{dt} \left(y'' \frac{dx''}{dt} - x'' \frac{dy''}{dt} \right) = -k^2 (x' y - x y') \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} \right)$$

so können wir sagen, es muss immer sein

$$\frac{d}{dt} \left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} \right) = + T$$

$$\frac{d}{dt} \left(y'' \frac{dx''}{dt} - x'' \frac{dy''}{dt} \right) = - T_1$$

wobei T und T_1 zwei Functionen der Zeit bedeuten, die beide zu gleicher Zeit entweder positiv oder zu gleicher Zeit negativ sind.

Bezeichnet man nun mit p und ϱ Positionswinkel und Distanz des Sternes C von A aus gemessen, p'' und ϱ'' dieselben Grössen von B aus, so hat man also:

$$\varrho^2 \frac{dp}{dt} = C + \int T dt$$

$$\varrho''^2 \frac{dp''}{dt} = C_1 - \int T_1 dt$$

oder wenn man die Werthe von ϱ , p , ϱ'' und p'' für die Zeit $t = t_0$ durch dieselben mit dem Index 0 versehenen Buchstaben bezeichnet und ausserdem setzt:

$$\delta \left(\varrho^2 \frac{dp}{dt} \right) = \varrho^2 \frac{dp}{dt} - \varrho_0^2 \frac{dp_0}{dt}$$

$$\delta \left(\varrho''^2 \frac{dp''}{dt} \right) = \varrho''^2 \frac{dp''}{dt} - \varrho_0''^2 \frac{dp_0''}{dt}$$

so kann man die letzten Relationen auch schreiben:

$$\delta \left(\varrho^2 \frac{dp}{dt} \right) = + \int_{t_0}^t T dt$$

$$\delta \left(\varrho''^2 \frac{dp''}{dt} \right) = - \int_{t_0}^t T dt$$

So lange sich die beiden bestimmten Integrale aus lauter Grössen mit demselben Vorzeichen zusammensetzen, müssen also

$$\delta \left(\varrho^2 \frac{dp}{dt} \right) \text{ und } \delta \left(\varrho''^2 \frac{dp''}{dt} \right)$$

stets verschiedene Zeichen haben.

Ich habe die frühere Ableitung dieses Satzes zum Theil wörtlich hingesetzt, weil ich auch jetzt noch seine Fassung als völlig unzweideutig und klar ansehe. Was die Einschränkung „aus lauter Grössen mit demselben Vorzeichen“ betrifft, so kann doch wohl kaum ein Zweifel über ihre Bedeutung obwalten. Mit etwas anderen Worten heisst sie: T' und T , dürfen innerhalb der Zeit t_0 bis t das Zeichen nicht wechseln und da diese Grössen sich aus zwei Factoren zusammensetzen, von denen der eine, wie besonders hervorgehoben worden, überhaupt immer dasselbe Zeichen hat, so kann sich die gemachte Einschränkung nur auf den zweiten Factor

$$(x'y - xy')$$

beziehen. Dieses ist der analytische Ausdruck für den doppelten Flächeninhalt des Dreieckes ABC und ändert offenbar sein Zeichen nur dann, wenn er durch Null hindurchgeht. Die gemachte Einschränkung bedeutet also: innerhalb der Zeit t_0 bis t dürfen die Projectionen der drei Sterne ABC niemals in einer geraden Linie liegen.

Dass dem genannten Satze die Beobachtungen von C zu wiederholten Malen widersprechen, folgt durch einen Anblick der betreffenden Zusammenstellung in I (pg. 57). Ich nehme aus dieser beispielsweise die folgenden auf A resp. B bezogenen Positionswinkel:

	\overbrace{AC} p	\overbrace{BC} p''
1833.25	148 ^o 47	157 ^o 02
35.31	145.44	153.65
36.27	144.13	152.14
40.25	145.35	152.08
41.07	145.59	151.87
42.32	145.20	150.75
43.29	147.03	151.96
44.28	148.80	153.14
45.37	149.54	153.23

Hierzu die Bemerkung in Erinnerung behalten, dass innerhalb der angeführten Zeiten die Projectionen der ABC niemals in einer Geraden stehen und ausserdem beide Distanzen stets zwischen $5''$ und $6''$ liegen, so ist alles gegeben, um den Widerspruch mit dem bewiesenen Satze auf den ersten Blick zu entdecken. Von 1833 bis etwa 1840 sind sowohl $\frac{dp}{dt}$ als auch $\frac{dp''}{dt}$ negativ. Hierauf wird $\frac{dp}{dt}$ positiv; es müsste also $\frac{dp''}{dt}$ zum mindesten stark negativ bleiben. Wenn man also vielleicht auch das Positivwerden dieser Grösse den Beobachtungsfehlern zuschreiben wollte, so dürfte sie doch bei der geringen Veränderung von ϱ'' , nicht der Null nahe kommen, was doch zweifelsohne stattfindet.

Betrachtet man demnach ζ Cancri als ein System von 3 Körpern, so sind die Eigenthümlichkeiten, welche die Bewegung des Sternes C zeigt, nicht zu erklären. Dass dies aber vollständig der Fall ist, wenn man annimmt, dass C in seiner Nähe einen vierten Massenpunkt hat, ist schon oben erwähnt worden. Es stellt sich uns also nun die Aufgabe entgegen, gewisse Beziehungen in einem solchen System von 4 Massen, von denen je 2 einander sehr nahe stehen, aufzudecken. Dies soll jetzt geschehen.

Die 4 Sterne A, B, C, D mit den Massen m_1, m_2, m_3, m_4 und den gegenseitigen Entfernungen r_{12}, r_{13} etc. sollen auf ein festes Coordinatensystem bezogen die Coordinaten $x_1 \dots x_4, y_1 \dots y_4, z_1 \dots z_4$ haben. X_1, Y_1, Z_1 seien die Coordinaten des Schwerpunktes S_1 der beiden Massen m_1 und m_2 ; X_2, Y_2, Z_2 die Coordinaten des Schwerpunktes S_2 von m_3 und m_4 . In Bezug auf ein Axensystem, das dem früheren parallel gerichtet seinen Anfang in S_1 hat, seien die Coordinaten der 4 Punkte der Reihe nach $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ etc., während die Coordinaten von S_2, ξ, η, ζ sind. Ferner werde allgemein die Bezeichnung eingeführt:

$$\frac{x_\lambda - x_\mu}{r_{\lambda\mu}^3} = \frac{\xi_\lambda - \xi_\mu}{r_{\lambda\mu}^3} = (\lambda, \mu)$$

Dann hat man sofort:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = k^2 m_2 (21) + k^2 m_3 (31) + k^2 m_4 (41)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = k^2 m_1 (12) + k^2 m_3 (32) + k^2 m_4 (42)$$

Hieraus ergibt sich:

$$(m_1 + m_2) \frac{d^2 X_1}{dt^2} = k^2 \{m_1 m_3 (31) + m_2 m_3 (32) + m_1 m_4 (41) + m_2 m_4 (42)\}$$

und auf ganz gleiche Weise:

$$(m_3 + m_4) \frac{d^2 X_2}{dt^2} = k^2 \{m_1 m_3 (13) + m_1 m_4 (14) + m_2 m_3 (23) + m_2 m_4 (24)\}$$

Bedenkt man, dass: $\xi = X_2 - X_1$ so folgt sofort:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= \lambda \{m_1 m_3 (13) + m_1 m_4 (14) + m_2 m_3 (23) + m_2 m_4 (24)\} \\ \text{wo} \quad \lambda &= k^2 \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4)} \end{aligned} \right\} (5)$$

Ganz analoge Gleichungen bestehen selbstverständlich für die Coordinaten η und ζ . Hieraus leitet man sofort ab:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda} \left\{ \xi \frac{d^2 \eta}{dt^2} - \eta \frac{d^2 \xi}{dt^2} \right\} \\ &= \frac{m_1 m_3}{r_{13}^3} \left[(\eta_1 - \eta_3) \xi - (\xi_1 - \xi_3) \eta \right] + \frac{m_1 m_4}{r_{14}^3} \left[(\eta_1 - \eta_4) \xi - (\xi_1 - \xi_4) \eta \right] \\ &+ \frac{m_2 m_3}{r_{23}^3} \left[(\eta_2 - \eta_3) \xi - (\xi_2 - \xi_3) \eta \right] + \frac{m_2 m_4}{r_{24}^3} \left[(\eta_2 - \eta_4) \xi - (\xi_2 - \xi_4) \eta \right] \end{aligned}$$

Beachtet man nun, dass nach der Definition

$$\begin{aligned} m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2 &= 0 \\ m_3 \xi_3 + m_4 \xi_4 &= (m_3 + m_4) \xi \end{aligned}$$

so erhält man schliesslich:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \left\{ \xi \frac{d^2 \eta}{dt^2} - \eta \frac{d^2 \xi}{dt^2} \right\} &= m_2 (\eta_2 \xi - \xi_2 \eta) \left[m_3 \left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3} \right) + m_4 \left(\frac{1}{r_{24}^3} - \frac{1}{r_{14}^3} \right) \right] \\ &+ m_3 (\eta_3 \xi - \xi_3 \eta) \left[m_1 \left(\frac{1}{r_{14}^3} - \frac{1}{r_{13}^3} \right) + m_2 \left(\frac{1}{r_{24}^3} - \frac{1}{r_{23}^3} \right) \right] \end{aligned} \right\} (6)$$

Dieser Ausdruck soll nun wieder unter der Voraussetzung entwickelt werden, dass die Entfernungen AB und CD vergleichsweise mit den Strecken AC , AD etc. sehr klein sind. Zu diesem Zwecke seien r_1 , r_2 , r_3 , r_4 die Entfernungen der 4 Punkte A , B , C , D von S_1 . Ferner sei σ_3 der Winkel, welchen die Richtungen von A nach B und von S_1 nach

C mit einander bilden und σ_4 der in derselben Richtung gezählte Winkel zwischen AB und S_1D . Dann ist:

$$\frac{1}{r_{23}^3} = \frac{1}{r_3^3} \left(1 + 3 \frac{r_2}{r_3} \cos \sigma_3 + \dots \right)$$

$$\frac{1}{r_{13}^3} = \frac{1}{r_3^3} \left(1 - 3 \frac{r_1}{r_3} \cos \sigma_3 + \dots \right)$$

Hieraus ergibt sich:

$$\frac{m_2}{r_{23}^3} + \frac{m_1}{r_{13}^3} = \frac{m_1 + m_2}{r_3^3} + \dots$$

und auf gleiche Weise:

$$\frac{m_2}{r_{24}^3} + \frac{m_1}{r_{14}^3} = \frac{m_1 + m_2}{r_4^3} + \dots$$

Man hat also:

$$m_1 \left(\frac{1}{r_{14}^3} - \frac{1}{r_{13}^3} \right) + m_2 \left(\frac{1}{r_{24}^3} - \frac{1}{r_{23}^3} \right) = (m_1 + m_2) \left(\frac{1}{r_4^3} - \frac{1}{r_3^3} \right) + \dots$$

Ebenso leicht findet man:

$$\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3} = \frac{3}{r_3^4} (r_1 + r_2) \cos \sigma_3 + \dots$$

$$\frac{1}{r_{24}^3} - \frac{1}{r_{14}^3} = \frac{3}{r_4^4} (r_1 + r_2) \cos \sigma_4 + \dots$$

Vernachlässigt man die Glieder höherer Ordnung, so kann man $\sigma_3 = \sigma_4 = s$ setzen, wo s der Winkel zwischen den Richtungen AB und S_1S_2 ist. Nennt man noch r , ϱ_3 und ϱ_4 die Strecken S_1S_2 , CS_2 , DS_2 und den Winkel zwischen S_2S_1 und S_2C , s_1 , so wird

$$\frac{1}{r_3^3} - \frac{1}{r_4^3} = \frac{3}{r^4} (\varrho_3 + \varrho_4) \cos s_1 +$$

Alle diese Ausdrücke in (6) eingesetzt geben:

$$\begin{aligned} \frac{d \left(\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} \right)}{dt} &= 3 \lambda m_2 (\eta_2 \xi - \xi_2 \eta) \frac{r_1 + r_2}{r^4} (m_3 + m_4) \cos s \\ &\quad - 3 \lambda m_3 (\eta_3 \xi - \xi_3 \eta) \frac{(\varrho_3 + \varrho_4)}{r^4} (m_1 + m_2) \cos s_1 \\ &= \frac{3 k^2 (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)}{r^4} \left\{ \frac{m_2}{m_1} r_2 \cos s (\eta_2 \xi - \xi_2 \eta) - \frac{m_3}{m_4} \varrho_3 \cos s_1 (\eta_3 \xi - \xi_3 \eta) \right\} \end{aligned}$$

Berücksichtigt man die Gleichungen:

$$r r_2 \cos s = \xi \xi_2 + \eta \eta_2 + \zeta \zeta_2$$

$$- r \varrho_3 \cos s_1 = \xi (\xi_3 - \xi) + \eta (\eta_3 - \eta) + \zeta (\zeta_3 - \zeta)$$

und nennt man x, y, z die Coordinaten von B gegen A , so kann man die letzte Gleichung auch schreiben:

$$\frac{d \left(\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} \right)}{dt} = \frac{3 k^2 (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)}{r^5} \left\{ \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} (y \xi - \eta x) (\xi x + \eta y + \zeta z) \right. \\ \left. + \frac{m_3}{m_4} (\eta_3 \xi - \xi_3 \eta) [\xi (\xi_3 - \xi) + \eta (\eta_3 - \eta) + \zeta (\zeta_3 - \zeta)] \right\}$$

Hierin sollen nun Positionswinkel und Distanz eingeführt werden, indem man setzt:

$$\begin{array}{l|l|l} x = \varrho \cos p & \xi = \varrho_0' \cos p_0' & \xi_3 - \xi = g \cos \gamma \\ y = \varrho \sin p & \eta = \varrho_0' \sin p_0' & \eta_3 - \eta = g \sin \gamma \end{array}$$

und wie früher

$$\zeta = 0 ; \quad r = \varrho_0'$$

Wird ferner zur Abkürzung gesetzt:

$$\alpha = \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)}{(m_1 + m_2)^3}$$

$$\beta = \frac{m_3 (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)}{m_4 (m_1 + m_2)}$$

so ergibt sich schliesslich:

$$\frac{d \left(\varrho_0'^2 \frac{d p_0'}{dt} \right)}{dt} = \frac{3 k^2 (m_1 + m_2)}{\varrho_0'^3} \left\{ \alpha \varrho^2 \sin 2 (p - p_0') + \beta g^2 \sin 2 (\gamma - p_0') \right\}$$

Noch übersichtlicher wird diese Formel, wenn man setzt:

$$f_1 = \frac{3}{2} k^2 (m_1 + m_2) \int \frac{\varrho^2}{\varrho_0'^3} \sin 2 (p_0' - p) dt$$

$$\varphi = \frac{3}{2} k^2 (m_1 + m_2) \int \frac{g^2}{\varrho_0'^3} \sin 2 (p_0' - \gamma) dt$$

Dem jetzt wird einfach:

$$\varrho_0'^2 \frac{d p_0'}{dt} = c - \alpha f_1 - \beta \varphi \quad (7)$$

f_1 ist nämlich nichts anderes als $f \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_3 + m_4}$, wo f der pg. 18 bereits berechnete Ausdruck ist. Es wurde schon oben erwähnt, dass $\frac{m_3 + m_4}{m_1 + m_2}$ voraussichtlich einige Einheiten sein wird. Wir haben es = 2.4 angenommen. Ferner kann, wie noch weiter unten erwähnt werden wird, angenommen werden, dass sehr nahe $m_1 = m_2$. Hieraus ergibt sich

$$\alpha = 0.9 \quad ; \quad \beta = 3.4 \frac{m_3}{m_4}$$

Aus der pg. 18 ausgeführten Rechnung folgt also, dass das Glied αf_1 wegen seiner Kleinheit jedenfalls nicht in den Messungen zum Vorschein kommen wird. Aber auch das zweite Glied ist verschwindend. Sehr nahe ist nämlich, wenn μ eine Constante bedeutet:

$$p_0' - \gamma = -20^0 t + \mu$$

$$g = 0''.25$$

$$q_0' = 5''.44$$

und infolge dessen

$$\beta \varphi = 0.0011 \frac{m_3}{m_4} \cos(2\mu - 40^0 t)$$

Es folgt also wiederum, dass eine Abweichung von dem Kepler'schen Flächensatze in der Bewegung des Schwerpunktes S_2 um S_1 in den Beobachtungen sich nicht verrathen wird. Dass auch die anderen Kepler'schen Gesetze in dieser Bewegung eingehalten werden, ist nun auch nach bekannten Entwicklungen ohne Weiteres anzunehmen.

Es wäre nun noch die Bewegung von C um S_2 zu betrachten. Die völlige Analogie dieser Betrachtung, mit der, welche bei der Bewegung der Sterne B und A um einander angestellt worden ist, überhebt uns aber dieser Mühe. Zuerst ist sofort zu sehen, dass hier die Abweichungen von den Kepler'schen Gesetzen viel kleiner sein werden wie dort, weil die Distanz CS_2 viel kleiner ist als die Distanz AB ; ferner weil voraussichtlich $\frac{m_3 + m_4}{m_1 + m_2} > 1$. Hiezu kommt noch die Bemerkung, dass auch hier wieder ein beträchtlicher Theil der Störungen sich durch eine passende Wahl der elliptischen Bahnelemente berücksichtigen lassen wird,

schliesslich, dass die relativen Coordinaten von C gegen S_2 nur mit sehr geringer Genauigkeit aus den Beobachtungen hervorgehen.

Zuletzt tritt an uns die Frage heran, wie man sich das materielle System, dessen Schwerpunkt S_2 und zu welchem der Stern C gehört, zu denken habe. Mit grosser Sicherheit geht nun aus den Rechnungen in I und den folgenden Paragraphen hervor, dass die Projection von C in etwa 18 Jahren eine geschlossene, dem Kreise nahe kommende Bahn um die Projection von S_2 beschreibt. Von selbst drängt sich die weitere Interpretation auf, dass dieser Punkt S_2 nichts anderes ist als der Schwerpunkt des Sternes C und eines unsichtbaren Begleiters D . Die weitere Verfolgung dieser Ansicht hat nun in allen Stücken eine so völlig befriedigende Darstellung der Beobachtungen ergeben, dass es mir geradezu unerklärlich ist, wie die Behauptung ausgesprochen werden konnte, die Beobachtungen des Sternes C können nicht durch die Annahme eines nahen Begleiters allein dargestellt werden, sondern es müsse, wenn auch ein solcher vorhanden sein könne, noch ein fünfter Stern supponirt werden, der in grösserer Entfernung von C sich befinden könne. Wenn hierbei auf Sterne aufmerksam gemacht worden ist, die sich in vielen Bogenminuten Entfernung von ζ Cancri befinden, so muss eine solche Meinung als in jeder Beziehung unzulässig bezeichnet werden. Die Frage indessen, ob der Stern D sich in grosser Nähe bei C befinden muss, wurde bisher nicht discutirt, sie lässt sich aber leicht erledigen und zwar in einer Weise, die einen Zweifel gar nicht mehr aufkommen lässt. Die Annahme, welche eine ganz befriedigende Darstellung aller Beobachtungen ergeben hat war die: die 4 Sterne A , B , C , D gruppiren sich zu zwei Partialsystemen AB und CD . Die Wirkung des zweiten auf das erste ist, obwohl sie an sich bedeutend sein kann, nur schwer in den Beobachtungen zu erkennen. Ebenso genügt die Annahme, dass sich C um D nach den Kepler'schen Gesetzen bewegt. Die Elemente dieser Bewegungen lassen sich mit grosser Sicherheit ermitteln, namentlich ergeben sich sehr sicher die Umlaufszeiten und die grossen Axen. Unter der Annahme gewisser Massenverhältnisse sind auch die osculirenden Elemente der Bewegung von B um A sicher abgeleitet worden und da eine Veränderung der Bewegungselemente von C um D nicht zu constatiren ist, kann sie nicht so bedeutend sein, dass man nicht

annehmen dürfte, dass die gefundenen, wenigstens in roher Näherung, als für dieselbe Zeit geltende osculirende Elemente angesehen werden können. Osculirende Elemente erfüllen aber nach ihrer Definition strenge die Kepler'schen Gesetze. Bezeichnet man also die mittleren Bewegungen von B um A und von C um D mit n und n_1 und die grossen Halbaxen dieser Bahnen mit a und a_1 , so finden die Gleichungen statt:

$$k^2 (m_1 + m_2) = a^3 n^2 ; \quad k^2 (m_3 + m_4) = a_1^3 n_1^2$$

und hieraus

$$\frac{(m_1 + m_2) n^2}{(m_3 + m_4) n_1^2} = \left(\frac{a}{a_1}\right)^3$$

Nennt man c die grosse Halbaxe der Bahn, welche C um S_2 beschreibt, so ist

$$c = \frac{m_4}{m_3 + m_4} a_1$$

also:

$$\frac{m_1 + m_2}{m_3 + m_4} = \left(\frac{n}{n_1}\right)^2 \left(\frac{a}{c}\right)^3 \left(\frac{m_4}{m_3 + m_4}\right)^3$$

Bezeichnet weiter der Kürze wegen:

$$y = \frac{m_3 + m_4}{m_1 + m_2} ; \quad x = \frac{m_3}{m_4}$$

so hat man zufolge der letzten Gleichung

$$1 + x = \frac{a}{c} \left(\frac{n}{n_1}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}}$$

Nach den Elementen IX (pg. 12) und V_a (pg. 14) ist aber:

$$c = 0''.217 , \quad n_1 = - 20^{\circ}46$$

$$a = 0''.87 \quad n = - 6^{\circ}09$$

Es ergibt sich demnach:

$$\left. \begin{aligned} 1 + x &= [0.252] y^{\frac{1}{2}} \\ a_1 &= [9.588 - 10] y^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

worin die eingeklammerten Zahlen Logarithmen sind. Diese Formeln zeigen zunächst, weil $x > 0$ sein muss, dass

$$y > 0.19$$

ist. Zweitens aber geben sie mit grosser Wahrscheinlichkeit eine obere Grenze für a' , die mittlere Entfernung der Massen C und D . Berechnet

man nämlich für verschiedene y die zugehörigen a' und x , so erhält man folgende Zahlenreihe:

y	a'	x
1	0.39	0.79
2	0.49	1.25
3	0.56	1.58
4	0.61	1.83
10	0.83	2.85
20	1.05	3.85
100	1.80	7.30

Halten wir daran fest, dass die früheren Untersuchungen für y den Werth 2.4 ergeben haben, dass überhaupt sehr grosse Werthe von y wenig wahrscheinlich und voraussichtlich sogar bei genauerer Untersuchung der ausgeübten Störungen ganz auszuschliessen sind, so dürfte mit grosser Sicherheit der Schluss zu ziehen sein, dass der Stern D in einem Abstand von wenigen Zehnteln einer Secunde sich von C befinden muss. Abgesehen von allem Anderen dürfte diese grosse Nähe der beiden Massen die Thatsache genügend erklären, warum der jedenfalls lichtschwache Stern D bisher nicht gesehen worden ist.

§ 3.

Ich gehe nun zur speciellen Betrachtung der Bewegung des Sternes B um A über.

Die in meiner früheren Arbeit (I p. 35) berechneten Störungswerthe, welche die Einwirkung des dritten Sternes auf die Bewegung von B um A ausdrücken, werden wohl kaum einer Verbesserung bedürfen. Trotzdem habe ich es nicht für unnütz gehalten, diesen Theil der Rechnung noch einmal zu wiederholen. Zunächst wollte ich hierdurch eine unabhängige Controle für die Richtigkeit jener Rechnungen erhalten, zugleich aber auch die a. a. O. (pg. 33) erwähnte, damals nicht zur Anwendung gekommene Methode nun wirklich benutzen. Diese Methode ist oben (pg. 20) ausführlich aus einander gesetzt worden. Es wurde also nach den Formeln (4) gerechnet und die Integration nach den zuerst von Encke gegebenen bekannten Vorschriften auf mechanischem Wege ausgeführt. Die ganze Rechnung gestaltet sich verhältnissmässig sehr einfach und

angenehm, namentlich infolge des Umstandes, dass die Kraftcomponenten X , Y , die Factoren $\frac{k^2(m_1 + m_2)}{r_0^3}$ und die Coordinaten x , y , alle zusammen berechnet werden können und sich deshalb derjenige Theil der Arbeit, der sich erst successive von Ort zu Ort erledigen lässt, wesentlich abkürzt. Die Coordinaten x , y sind durch die Beobachtungen gegeben. Statt aber diese durch Beobachtungsfehler entstellten Daten zu nehmen, ist es gerathener, interpolatorisch gewonnene Werthe, die sich jenen gut anschliessen, in Anwendung zu bringen, weil dadurch ein gleichmässiger Verlauf der Differenzen gesichert ist. Ich habe früher gezeigt, dass die Elemente IV_a dieser Bedingung genügend entsprechen. Wenn dieselben auch nicht mehr die neuesten Beobachtungen hinlänglich darstellen, so werden sie doch gewiss zur sicheren Berechnung der Störungswerthe ausreichen. Ich habe deshalb x und y mit Hülfe der aus den genannten Elementen IV_a folgende Ephemeride (I pg. 10) berechnet. Als osculirende Elemente wurden die am Schlusse der früheren Arbeit gefundenen Elemente VIII benutzt. Zur Erreichung eines besseren Anschlusses wurde jedoch die Osculationsepoche auf 1842.2 verlegt. Die störende Masse m_3 , welche bei diesen Rechnungen als im Schwerpunkte S_2 vereinigt angenommen werden darf, wurde den früheren Untersuchungen zufolge abgerundet

$$m_3 = (m_1 + m_2) \times 2.37$$

angenommen. Dieser Massenwerth ist freilich ziemlich willkürlich. Doch ist gegenwärtig, wie oben ausführlich dargelegt, diese Willkür nicht zu umgehen. Nimmt man noch den Elementen VIII zufolge

$$n_0 = -5^{\circ}9675 ; \quad a_0 = 0^{\circ}8532$$

und nach den weiter unten folgenden Rechnungen

$$\varrho_1 = 5^{\circ}438$$

so folgt hieraus der in den Störungsformeln (3_a) (p. 19) vorkommende Factor:

$$\log \frac{k^2 m_3}{e_i^3} = 5.9969 - 10$$

Die folgende Zusammenstellung enthält nun diejenigen Grössen, welche in den Störungsformeln vorkommen. Dabei ist zu bemerken, dass X und Y in Einheiten der 6. Stelle angegeben sind.

	X	Y	$\log x$	$\log y$	$\log z_0$	$\log \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^3$	$\log k^2 \frac{m_1 + m_2}{r_0^3}$	$\log \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^3$
1826.2	+ 14.1	- 107.5	9.7846	9.8896	9.2059 <i>n</i>	7.7755	7.7542	0.0926
28.2	+ 35.0	- 117.2	9.8672	9.8529	9.2891 <i>n</i>	7.8259	7.7055	0.0909
30.2	+ 54.9	- 125.7	9.9284	9.8023	9.3513 <i>n</i>	7.8685	7.6673	0.0865
32.2	+ 73.2	- 132.6	9.9735	9.7342	9.3985 <i>n</i>	7.9012	7.6389	0.0823
34.2	+ 90.1	- 138.1	0.0065	9.6428	9.4341 <i>n</i>	7.9252	7.6194	0.0778
36.2	+ 105.3	- 142.0	0.0293	9.5157	9.4603 <i>n</i>	7.9402	7.6083	0.0738
38.2	+ 119.0	- 144.6	0.0441	9.3246	9.4781 <i>n</i>	7.9495	7.6062	0.0666
40.2	+ 130.8	- 145.7	0.0505	8.9561	9.4888 <i>n</i>	7.9495	7.6112	0.0617
42.2	+ 140.9	- 145.1	0.0494	8.5063 <i>n</i>	9.4920 <i>n</i>	7.9426	7.6250	0.0547
44.2	+ 149.2	- 142.7	0.0403	9.1870 <i>n</i>	9.4879 <i>n</i>	7.9273	7.6476	0.0474
46.2	+ 155.7	- 138.7	0.0233	9.4360 <i>n</i>	9.4768 <i>n</i>	7.9060	7.6785	0.0378
48.2	+ 159.9	- 132.8	9.9966	9.5871 <i>n</i>	9.4549 <i>n</i>	7.8757	7.7209	0.0258
50.2	+ 162.1	- 124.7	9.9587	9.6923 <i>n</i>	9.4232 <i>n</i>	7.8373	7.7733	0.0177
52.2	+ 161.6	- 114.5	9.9062	9.7688 <i>n</i>	9.3766 <i>n</i>	7.7899	7.8378	9.9946
54.2	+ 158.3	- 101.6	9.8338	9.8241 <i>n</i>	9.3073 <i>n</i>	7.7323	7.9161	9.9739
56.2	+ 151.9	- 86.0	9.7312	9.8617 <i>n</i>	9.2198 <i>n</i>	7.6636	8.0097	9.9490
58.2	+ 142.0	- 67.8	9.5769	9.8829 <i>n</i>	9.0772 <i>n</i>	7.5850	8.1202	9.9171
59.2	+ 135.4	- 57.4	9.4634	9.8865 <i>n</i>	8.9723 <i>n</i>	7.5400	8.1809	9.9004
60.2	+ 127.9	- 46.4	9.3025	9.8853 <i>n</i>	8.8245 <i>n</i>	7.4632	8.2479	9.8812
61.2	+ 118.9	- 34.6	9.0335	9.8781 <i>n</i>	8.5855 <i>n</i>	7.4413	8.3174	9.8636
62.2	+ 108.9	- 22.1	8.1444	9.8650 <i>n</i>	7.9794 <i>n</i>	7.3891	8.3892	9.8440
63.2	+ 97.3	- 8.9	8.9107 <i>n</i>	9.8434 <i>n</i>	8.2939	7.3327	8.4615	9.8281
64.2	+ 84.6	+ 4.4	9.2384 <i>n</i>	9.8125 <i>n</i>	8.6841	7.2760	8.5308	9.8155
65.2	+ 70.1	+ 18.1	9.4180 <i>n</i>	9.7680 <i>n</i>	8.8765	7.2163	8.5930	9.8130
66.2	+ 54.5	+ 31.8	9.5369 <i>n</i>	9.7073 <i>n</i>	8.9968	7.1605	8.6423	9.8195
67.2	+ 37.8	+ 45.0	9.6201 <i>n</i>	9.6221 <i>n</i>	9.0753	7.1086	8.6730	9.8407
68.2	+ 20.2	+ 57.3	9.6787 <i>n</i>	9.4990 <i>n</i>	9.1239	7.0660	8.6808	9.8755
69.2	+ 2.2	+ 68.3	9.7164 <i>n</i>	9.3033 <i>n</i>	9.1486	7.0336	8.6646	9.9241
70.2	- 15.8	+ 77.4	9.7366 <i>n</i>	8.9001 <i>n</i>	9.1527	7.0174	8.6267	9.9782
71.2	- 33.1	+ 84.2	9.7405 <i>n</i>	8.6526	9.1383	7.0195	8.5721	0.0307
72.2	- 49.3	+ 88.6	9.7278 <i>n</i>	9.2247	9.1061	7.0384	8.5068	0.0772
73.2	- 63.8	+ 90.6	9.6994 <i>n</i>	9.4547	9.0563	7.0750	8.4359	0.1114
74.2	- 76.3	+ 90.1	9.6531 <i>n</i>	9.5939	8.9862	7.1218	8.3636	0.1369
75.2	- 87.1	+ 87.8	9.5876 <i>n</i>	9.6898	8.8898	7.1794	8.2925	0.1505
76.2	- 95.9	+ 83.6	9.4964 <i>n</i>	9.7589	8.7543	7.2424	8.2241	0.1577
77.2	- 102.9	+ 77.8	9.3674 <i>n</i>	9.8097	8.5431	7.3027	8.1595	0.1601
78.2	- 108.1	+ 70.9	9.1690 <i>n</i>	9.8467	8.1080	7.3621	8.0994	0.1608
79.2	- 111.9	+ 63.1	8.7756 <i>n</i>	9.8748	7.9852 <i>n</i>	7.4224	8.0435	0.1564
80.2	- 114.4	+ 54.7	8.4651	9.8946	8.5048 <i>n</i>	7.4785	7.9919	0.1519
81.2	- 115.7	+ 45.7	9.0706	9.9077	8.7345 <i>n</i>	7.5274	7.9446	0.1473
82.2	- 116.0	+ 36.4	9.3112	9.9154	8.8778 <i>n</i>	7.5790	7.9013	0.1421
83.2	- 115.5	+ 26.7	9.4620	9.9185	8.9842 <i>n</i>	7.6237	7.8615	0.1365
84.2	- 114.2	+ 17.0	9.5698	9.9166	9.0672 <i>n</i>	7.6636	7.8255	0.1333
85.2	- 112.4	+ 7.2	9.6536	9.9116	9.1342 <i>n</i>	7.7020	7.7927	0.1277
86.2	- 110.0	- 2.7	9.7206	9.9030	9.1898 <i>n</i>	7.7365	7.7631	0.1228
87.2	- 107.1	- 12.4	9.7757	9.8907	9.2369 <i>n</i>	7.7674	7.7365	0.1184
88.2	- 104.0	- 22.1	9.8223	9.8753	9.2771 <i>n</i>	7.7965	7.7128	0.1130

Zu einem etwaigen Anschluss theile ich den Anfang und das Ende der Reihe der gefundenen Werthe für die zweiten Differentialquotienten mit. Alles ist in Einheiten der 4. Decimalstelle angesetzt.

	"f	'f	$\frac{d^2 \delta x}{dt^2}$	"f	'f	$\frac{d^2 \delta y}{dt^2}$	"f	'f	$\frac{d^2 \delta z}{dt^2}$
1826.2	— 55.4	+ 20.5	— 5.5	— 79.2	+ 24.5	— 8.0	+ 32.0	— 8.5	+ 1.0
28.2	— 34.9	+ 15.1	— 5.4	— 54.7	+ 18.1	— 6.4	+ 23.5	— 7.1	+ 1.4
30.2	— 19.8		— 4.9	— 36.6		— 4.9	+ 16.4		+ 1.4
84.2	— 1988.6	+ 86.9	+ 3.7	— 164.8	+ 78.0	— 17.6	+ 346.4	— 30.1	— 0.5
85.2	— 1901.7	+ 88.7	+ 1.8	— 86.8	+ 62.6	— 15.4	+ 316.3	— 30.1	0.0
86.2	— 1813.0	+ 89.2	+ 0.5	— 24.2	+ 49.2	— 13.4	+ 286.2	— 29.7	+ 0.4
87.2	— 1723.8	+ 88.7	— 0.5	+ 25.0	+ 37.5	— 11.7	+ 256.5	— 29.0	+ 0.7
88.2	— 1635.1		— 1.0	+ 62.5		— 10.0	+ 227.5		+ 0.8

Die durch doppelte Integration erhaltenen Störungswerthe ergaben sich so:

	δx	δy		δx	δy
1826.2	— 0.0224	— 0.0320	1865.2	+ 0.0780	— 0.1497
28.2	— 0.0141	— 0.0221	66.2	+ 0.0690	— 0.1784
30.2	— 0.0082	— 0.0148	67.2	+ 0.0516	— 0.2071
32.2	— 0.0041	— 0.0095	68.2	+ 0.0254	— 0.2328
34.2	— 0.0011	— 0.0056	69.2	— 0.0088	— 0.2518
36.2	— 0.0003	— 0.0030	70.2	— 0.0481	— 0.2614
38.2	+ 0.0001	— 0.0013	71.2	— 0.0889	— 0.2606
40.2	+ 0.0001	— 0.0003	72.2	— 0.1273	— 0.2500
42.2	0	0	73.2	— 0.1606	— 0.2316
44.2	+ 0.0002	— 0.0003	74.2	— 0.1872	— 0.2082
46.2	+ 0.0010	— 0.0011	75.2	— 0.2070	— 0.1823
48.2	+ 0.0029	— 0.0026	76.2	— 0.2202	— 0.1560
50.2	+ 0.0063	— 0.0049	77.2	— 0.2278	— 0.1306
52.2	+ 0.0116	— 0.0084	78.2	— 0.2308	— 0.1071
54.2	+ 0.0193	— 0.0135	79.2	— 0.2302	— 0.0860
56.2	+ 0.0296	— 0.0213	80.2	— 0.2269	— 0.0675
58.2	+ 0.0426	— 0.0333	81.2	— 0.2216	— 0.0514
59.2	+ 0.0500	— 0.0416	82.2	— 0.2149	— 0.0377
60.2	+ 0.0577	— 0.0521	83.2	— 0.2071	— 0.0262
61.2	+ 0.0654	— 0.0650	84.2	— 0.1988	— 0.0166
62.2	+ 0.0724	— 0.0809	85.2	— 0.1902	— 0.0088
63.2	+ 0.0779	— 0.1003	86.2	— 0.1813	— 0.0025
64.2	+ 0.0804	— 0.1233	87.2	— 0.1724	+ 0.0024
65.2	+ 0.0780	— 0.1497	88.2	— 0.1635	+ 0.0062

Sind p_0, ϱ_0 die ungestörten d. i. aus den osculirenden Elementen berechneten Werthe für Positionswinkel und Distanz und p, ϱ die wirklich stattfindenden, so hat man:

$$\varrho_0 \cos p_0 = \varrho \cos p - \delta x$$

$$\varrho_0 \sin p_0 = \varrho \sin p - \delta y$$

Wird noch

$$p = p_0 + \delta p ; \quad \varrho = \varrho_0 + \delta \varrho$$

gesetzt, so ergeben sich für δp und $\delta \varrho$ folgende strenge Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \delta p &= \frac{A}{1-B} \\ \delta \varrho &= B f \varrho - f \frac{(\delta x)^2 + (\delta y)^2}{2 \varrho} \end{aligned} \right\}$$

Hierin bedeuten:

$$A = \frac{x \delta y - y \delta x}{\varrho^2} ; \quad B = \frac{x \delta x + y \delta y}{\varrho^2} ; \quad f = \frac{2 \varrho}{\varrho + \varrho_0} = \left(1 + \frac{\delta \varrho}{2 \varrho} \right)$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen findet man folgende Störungswerthe:

Osculation 1842.2					
	δp	$\delta \varrho$		δp	$\delta \varrho$
1826.2	— 0.12	— 0.039	1866.2	+ 17.25	+ 0.085
28.2	— 0.33	— 0.026	67.2	+ 20.81	+ 0.076
30.2	— 0.37	— 0.016	68.2	+ 24.13	+ 0.062
32.2	— 0.32	— 0.008	69.2	+ 26.78	+ 0.044
34.2	— 0.24	— 0.003	70.2	+ 28.39	+ 0.021
36.2	— 0.14	— 0.001	71.2	+ 28.85	— 0.001
38.2	— 0.07	0	72.2	+ 28.32	— 0.023
40.2	— 0.02	0	73.2	+ 27.00	— 0.042
42.2	0	0	74.2	+ 25.28	— 0.058
44.2	— 0.02	0	75.2	+ 23.33	— 0.072
46.2	— 0.04	+ 0.001	76.2	+ 21.36	— 0.081
48.2	— 0.07	+ 0.004	77.2	+ 19.47	— 0.090
50.2	— 0.07	+ 0.008	78.2	+ 17.73	— 0.096
52.2	0	+ 0.014	79.2	+ 16.07	— 0.101
54.2	+ 0.24	+ 0.023	80.2	+ 14.60	— 0.105
56.2	+ 0.73	+ 0.034	81.2	+ 13.25	— 0.106
58.2	+ 1.66	+ 0.048	82.2	+ 12.02	— 0.109
59.2	+ 2.39	+ 0.055	83.2	+ 10.89	— 0.110
60.2	+ 3.35	+ 0.063	84.2	+ 9.88	— 0.112
61.2	+ 4.60	+ 0.071	85.2	+ 8.94	— 0.112
62.2	+ 6.21	+ 0.078	86.2	+ 8.06	— 0.111
63.2	+ 8.28	+ 0.083	87.2	+ 7.27	— 0.111
64.2	+ 10.80	+ 0.086	88.2	+ 6.53	— 0.110
65.2	+ 13.87	+ 0.086			

Diese Werthe stimmen mit den früher berechneten in Anbetracht der veränderten Umstände, unter denen sie zu Stande gekommen sind, beinahe vollkommen überein. Zunächst stellt sich nun die Aufgabe dar, die osculirenden Elemente VIII so zu verbessern, dass die Beobachtungen möglichst gut dargestellt werden. Ich werde weiter unten Alles zusammenstellen, was sich auf die Beobachtungen bezieht. Hier genügt es,

die Normalörter anzuführen, deren Zusammensetzung am genannten Orte gegeben wird. Die folgenden Positionswinkel sind wegen Präcession auf 1850.0 bereits reducirt und unterscheiden sich also um diese kleinen Reductionsgrößen von den directen Beobachtungsergebnissen. Die Normalörter, um deren Darstellung es sich handelt, sind nun folgende, wobei die Gewichtszahlen g gleich mit angeführt werden.

	p	g	e	g
	⁰		"	
1832.2	28.80	36	1.129	24
36.2	18.33	14	1.171	8
39.2	8.75	12	1.175	6
42.2	358.57	28	1.156	24
45.2	350.17	16	1.118	15
48.2	339.25	25	1.040	23
51.2	328.31	26	1.040	23
54.2	316.03	31	0.991	26
57.2	301.49	33	0.931	21
60.2	284.49	16	0.827	14
63.2	262.76	16	0.693	16
66.2	235.77	25	0.598	17
69.2	199.78	25	0.522	18
72.2	162.72	38	0.586	24
75.2	129.36	41	0.628	37
78.2	100.98	35	0.698	35
81.2	81.48	25	0.851	25
84.2	64.74	24	0.934	24
87.2	48.94	12	0.904	12

Zur Verbesserung der Elemente VIII benutze ich, wie ich das schon früher gethan, allein die Positionswinkel. Bei Distanzen, die zum grössten Theile beträchtlich kleiner als 1'' sind, scheinen doch sowohl die zufälligen als auch die persönlichen Fehler derart zu sein, dass zum mindesten keine Verbesserung der Resultate durch Berücksichtigung der Distanzen zu erhoffen ist. Bringt man nun an die zuletzt angeführten Positionswinkel die in der obigen Tabelle angeführten Störungen mit umgekehrtem Zeichen an, so erhält man osculirende Werthe der p , welche durch die Elemente darzustellen sind. Unter B sind in der folgenden Uebersicht diese Positionswinkel gegeben. Daneben stehen unter R die aus den Elementen VIII hervorgehenden Werthe; ferner ist noch der abgerundete Werth von \sqrt{g} , welcher im Folgenden benutzt worden ist, angeführt. Die weiteren Columnen finden später ihre Erklärung.

	<i>B</i>	<i>R</i>	<i>B-R</i>	\sqrt{g}	<i>IX</i>	<i>B-IX</i>
1832.2	29.12	28.54	+0.58	6	29.61	-0.49
36.2	18.47	16.82	+1.65	4	17.32	+1.15
39.2	8.79	8.05	+0.74	3	8.34	+0.45
42.2	358.57	359.10	-0.53	5	359.27	-0.70
45.2	350.20	349.84	+0.36	4	349.84	+0.36
48.2	339.32	339.71	-0.39	5	339.75	-0.43
51.2	328.35	328.56	-0.21	5	328.58	-0.23
54.2	315.79	315.81	-0.02	6	315.74	+0.05
57.2	300.32	300.34	-0.02	6	300.29	+0.03
60.2	281.14	280.99	+0.15	4	280.65	+0.49
63.2	254.48	254.94	-0.46	4	254.25	+0.23
66.2	218.52	218.79	-0.27	5	218.05	+0.47
69.2	173.00	174.10	-1.10	5	174.09	-1.09
72.2	134.40	133.91	+0.49	6	134.25	+0.15
75.2	106.03	105.20	+0.83	6	104.98	+1.05
78.2	83.25	84.81	-1.56	6	83.88	-0.63
81.2	68.23	69.20	-0.97	5	67.76	+0.47
84.2	54.86	56.59	-1.73	5	54.61	+0.25
87.2	41.67	45.67	-4.00	3	43.33	-1.66

Die Bedingungsgleichungen für die Verbesserung der Elemente werden hieraus, wenn Logarithmen angesetzt werden:

$$[0.7782]d\Omega + [0.9040]\frac{di}{10} + [0.7826]d\lambda + [0.2583]10dT + [0.4790n]d\varphi + [1.0367n]10dn = [0.5466] \quad 1.0613$$

0.6021	0.6325	0.6124	0.0671	9.7710 <i>n</i>	0.7945 <i>n</i>	0.8195	1.1250
0.4771	0.3553	0.4906	9.9461	9.5571	0.6300 <i>n</i>	0.3464	0.8786
0.6990	0.2576	0.7145	0.1830	0.2948	0.8192 <i>n</i>	0.4233 <i>n</i>	0.7953
0.6021	9.5363 <i>n</i>	0.6210	0.1127	0.4348	0.6953 <i>n</i>	0.1584	0.9208
0.6990	0.4455 <i>n</i>	0.7137	0.2440	0.6814	0.7653 <i>n</i>	0.2900 <i>n</i>	0.7899
0.6990	0.6984 <i>n</i>	0.7101	0.2970	0.8054	0.7371 <i>n</i>	0.0212 <i>n</i>	0.8450
0.7782	0.8979 <i>n</i>	0.7835	0.4440	0.9791	0.8088 <i>n</i>	9.0792 <i>n</i>	0.9965
0.7782	0.9045 <i>n</i>	0.7747	0.4630	1.0551	0.7929 <i>n</i>	9.0792	1.0740
0.6021	0.5426 <i>n</i>	0.5896	0.4713	0.9262	0.5888 <i>n</i>	9.7782	1.0975
0.6021	0.1043	0.5864	0.6105	0.9115	0.5179 <i>n</i>	0.2648 <i>n</i>	1.2103
0.6990	0.8404	0.6979	0.8426	0.7540	0.3274 <i>n</i>	0.1303 <i>n</i>	1.4162
0.6990	9.7902	0.7141	0.8736	0.5979 <i>n</i>	0.1690	0.7404 <i>n</i>	1.0122
0.7782	0.9062 <i>n</i>	0.7825	0.8368	1.0848 <i>n</i>	0.6820	0.4684	0.8103
0.7782	0.7872 <i>n</i>	0.7675	0.6788	1.1101 <i>n</i>	0.6590	0.6972	0.8547
0.7782	9.9758 <i>n</i>	0.7623	0.5450	1.0570 <i>n</i>	0.7769	0.9713 <i>n</i>	9.6365 <i>n</i>
0.6690	0.4628	0.6845	0.3640	0.8998 <i>n</i>	0.7080	0.6857 <i>n</i>	0.8673
0.6990	0.7254	0.6887	0.2888	0.8062 <i>n</i>	0.7219	0.9370 <i>n</i>	0.8671
0.4771	0.5976	0.4724	0.0131	0.4725 <i>n</i>	0.5201	1.0792 <i>n</i>	9.8439 <i>n</i>

Bei der Berechnung dieser Coëfficienten wurde der Bequemlichkeit wegen ρ aus den Normalörtern genommen. Ferner ist an letzter Stelle der Logarithmus der Summe sämtlicher in derselben Horizontalreihe stehender Coëfficienten mitgetheilt. Der Beobachtungsfehler Δp im Positionswinkel ist bekanntlich abhängig von der Distanz, dergestalt, dass er innerhalb gewisser Grenzen mit zunehmender Distanz sich verkleinert. Das Gesetz dieser Abhängigkeit ist aber noch wenig bekannt, wird auch wohl von Beobachter zu Beobachter variiren und voraussichtlich keinen einfachen

Verlauf zeigen. Für mässige Distanzen, welche grösser als etwa 1'' sind, wird man indess vielleicht der Wahrheit nahe kommen, wenn man Δp proportional mit $\frac{1}{\rho}$ setzt. Dann wäre die Ausgleichung so auszuführen, dass man nicht $\Sigma(\Delta p)^2$, sondern $\Sigma(\rho \Delta p)^2$ zu einem Minimum macht. Wenn ich hier dieses Verfahren nicht eingeschlagen, vielmehr die Bedingung $\Sigma(\Delta p)^2 = \text{Min.}$ aufgestellt habe, so geschah dies, weil es mir zweifelhaft ist, ob man bei so kleinen Distanzen, wie die vorliegenden, jenes Gesetz mit Vortheil annehmen darf. Im Uebrigen ist das erlangte Endresultat ganz zufriedenstellend und da dasselbe von mehr oder weniger willkürlichen Annahmen (z. B. über die Grösse der constanten Fehler) gänzlich frei zu machen doch nicht möglich ist, so wird es ziemlich gleichgültig sein, ob man nach dem einen oder andern der beiden genannten Gesichtspunkte die Normalgleichungen bildet. Die durch die bekannte Summencontrole streng geprüften Normalgleichungen sind nun:

$$\begin{array}{r}
 + 473.0 d\Omega - 63.7 \frac{di}{10} + 473.9 d\lambda + 299.4 (10 dT) - 41.7 d\varphi - 166.1 (10 dn) = -121.1 + 853.7 \\
 - 63.7 \quad + 468.6 \quad - 64.1 \quad - 55.3 \quad - 98.3 \quad - 10.5 \quad - 101.2 + 75.5 \\
 + 473.9 \quad - 64.1 \quad + 475.0 \quad + 299.5 \quad - 36.4 \quad - 173.8 \quad - 117.8 + 856.3 \\
 + 299.4 \quad - 55.3 \quad + 299.5 \quad + 254.8 \quad - 69.4 \quad - 31.7 \quad - 77.5 + 619.8 \\
 - 41.7 \quad - 98.3 \quad - 36.4 \quad - 69.4 \quad + 1046.7 \quad - 533.3 \quad + 106.9 + 374.5 \\
 - 166.1 \quad - 10.5 \quad - 173.8 \quad - 31.7 \quad - 533.3 \quad + 564.3 \quad - 190.7 - 541.8
 \end{array}$$

Es war von vornherein klar und eine Ansicht der Normalgleichungen bestätigt dies, dass eine unabhängige Bestimmung von $d\lambda$ und $d\Omega$ zu gleicher Zeit mit grosser Unsicherheit behaftet sein muss. Es ist dies eine unmittelbare Folge der kleinen Neigung und liegt also in der Natur der Sache. Man wird daher offenbar in der Darstellung der Beobachtung kaum eine nennenswerthe Einbusse erleiden, wenn man eine der beiden genannten Grössen von der Ausgleichung ausschliesst.

Ich habe $d\lambda = 0$ gesetzt; dann fällt die dritte Normalgleichung einfach fort und in den anderen ist $d\lambda$ wegzulassen. Die Auflösung dieses reducirten Systems mit 5 Unbekannten ergibt nun:

$$\left. \begin{array}{l}
 dT = + 0.0895 \\
 d\Omega = - 1.360 \\
 d\varphi = - 0.557 \\
 di = - 4.395 \\
 dn = - 0.1223
 \end{array} \right\}$$

Addirt man diese Correctionen zu den Elementen VIII, so erhalten wir

Elemente IX.

Osculation 1842.2

$$\begin{array}{r} T = 1868.112 \\ \lambda = 109^{\circ}735 \\ \Omega = 80.190 \\ i = 11.135 \\ \varphi = 22.450 \\ n = -6.0898 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} T \\ \lambda \\ \Omega \\ i \\ \varphi \\ n \end{array}} \right\} 1850.0$$

Diese Elemente nähern sich sehr den früher gefundenen (VII). Es erübrigt nun noch die Ableitung der halben grossen Axe a . Zu diesem Zwecke reduciren wir zunächst die beobachteten Distanzen der Normalörter durch Anbringung der Störungswerthe auf osculirende Distanzen, B in der folgenden Zusammenstellung. Jede solche Distanz gibt mit Hülfe der Elemente IX ein a , aus welchen Zahlen dann nach Massgabe der daneben stehenden abgerundeten Gewichte g_0 das Mittel genommen wird.

	B	g_0	a	$B-R$
1832.2	1.137	4	0.861	+ 0.003
36.2	1.172	1	0.865	+ 0.007
39.2	1.175	1	0.866	+ 0.008
42.2	1.156	4	0.862	+ 0.004
45.2	1.118	3	0.856	- 0.002
48.2	1.036	4	0.827	- 0.031
51.2	1.029	4	0.872	+ 0.014
54.2	0.968	4	0.888	+ 0.030
57.2	0.891	4	0.908	+ 0.050
60.2	0.764	2	0.890	+ 0.032
63.2	0.610	3	0.833	- 0.025
66.2	0.513	3	0.811	- 0.047
69.2	0.478	3	0.780	- 0.078
72.2	0.608	4	0.880	+ 0.022
75.2	0.700	6	0.852	- 0.006
78.2	0.794	6	0.834	- 0.024
81.2	0.956	4	0.891	+ 0.033
84.2	1.046	4	0.893	+ 0.035
87.2	1.015	2	0.813	- 0.045

Mittel $a = 0.8581$

Die Darstellung der Normalörter durch die Elemente IX ist unter den Rubriken $B-IX$ für Positionswinkel und $B-R$ für Distanz gegeben. Die dort angeführten Differenzen dürfen sowohl was ihre Grösse

als auch die Vertheilung ihrer Vorzeichen betrifft, als befriedigend angesehen werden. Wenigstens ist die nicht ganz gute Vertheilung der Vorzeichen nicht auffallend, wie noch weiter unten erörtert werden soll.

Zum Schlusse dieser Untersuchungen soll nun noch eine Ephemeride nach den Elementen IX mitgetheilt werden. Die Störungswerthe (pg. 34) sowie die kleine Reduction auf das jedesmalige Aequinoctium sind hierbei bereits hinzugefügt, so dass die folgenden Zahlen direct mit den Beobachtungen vergleichbar sind. Was die Reduction wegen Praecession betrifft, so ist die jährliche Veränderung des Positionswinkels gegeben durch:

$$\frac{dp}{dt} = + 0^{\circ}0051 (t - 1850).$$

Ephemeride nach Elementen IX.

	p	e		p	e
1826.2	50.00 — 3.85	0.993 + 30	1857.2	301.45 — 5.44	0.883 — 28
27.2	46.15 — 3.67	1.023 + 26	58.2	296.01 — 5.78	0.855 — 29
28.2	42.48 — 3.50	1.049 + 23	59.2	290.23 — 6.18	0.826 — 28
29.2	38.98 — 3.36	1.072 + 21	60.2	284.05 — 6.63	0.798 — 30
30.2	35.62 — 3.25	1.093 + 18	61.2	277.42 — 7.14	0.768 — 30
31.2	32.37 — 3.17	1.111 + 16	62.2	270.28 — 7.68	0.738 — 31
32.2	29.20 — 3.10	1.127 + 12	63.2	262.60 — 8.31	0.707 — 29
33.2	26.10 — 3.03	1.139 + 11	64.2	254.29 — 9.05	0.678 — 29
34.2	23.07 — 2.99	1.150 + 7	65.2	245.24 — 9.86	0.649 — 27
35.2	20.08 — 2.97	1.157 + 6	66.2	235.38 — 10.68	0.622 — 23
36.2	17.11 — 2.96	1.163 + 3	67.2	224.70 — 11.51	0.599 — 19
37.2	14.15 — 2.95	1.166 + 2	68.2	213.19 — 12.22	0.580 — 12
38.2	11.20 — 2.96	1.168 — 2	69.2	200.97 — 12.72	0.568 — 6
39.2	8.24 — 2.97	1.166 — 2	70.2	188.25 — 12.88	0.562 + 1
40.2	5.27 — 3.00	1.164 — 6	71.2	175.37 — 12.69	0.563 + 7
41.2	2.27 — 3.04	1.158 — 6	72.2	162.68 — 12.21	0.570 + 15
42.2	359.23 — 3.09	1.152 — 9	73.2	150.47 — 11.43	0.585 + 21
43.2	356.14 — 3.11	1.143 — 9	74.2	139.04 — 10.60	0.606 + 24
44.2	352.99 — 3.20	1.134 — 11	75.2	128.44 — 9.75	0.630 + 28
45.2	349.79 — 3.28	1.123 — 13	76.2	118.69 — 8.86	0.658 + 29
46.2	346.51 — 3.37	1.110 — 14	77.2	109.83 — 8.08	0.687 + 29
47.2	343.14 — 3.47	1.096 — 16	78.2	101.75 — 7.43	0.716 + 32
48.2	339.67 — 3.58	1.080 — 18	79.2	94.32 — 6.85	0.748 + 30
49.2	336.09 — 3.70	1.062 — 18	80.2	87.47 — 6.30	0.778 + 30
50.2	332.39 — 3.84	1.044 — 21	81.2	81.17 — 5.88	0.808 + 27
51.2	328.55 — 4.02	1.023 — 20	82.2	75.29 — 5.50	0.835 + 27
52.2	324.53 — 4.17	1.003 — 23	83.2	69.79 — 5.13	0.862 + 26
53.2	320.36 — 4.36	0.980 — 22	84.2	64.66 — 4.86	0.888 + 23
54.2	316.00 — 4.59	0.958 — 25	85.2	59.80 — 4.63	0.911 + 23
55.2	311.41 — 4.84	0.933 — 25	86.2	55.17 — 4.41	0.934 + 20
56.2	306.57 — 5.12	0.908 — 25	87.2	50.76 — 4.20	0.954 + 20
57.2	301.45	0.883	88.2	46.56	0.974 + 20

Ich habe nun zu erklären, wie die dem Vorigen zu Grunde gelegten Normalörter zusammengesetzt sind.

Im Allgemeinen wurden die Beobachtungen der Zusammenstellung entnommen, die ich in meiner früheren Arbeit (p. 40 ff.) gegeben habe. Inzwischen sind aber eine beträchtliche Zahl neuerer Messungen veröffentlicht worden. Ausser den in den bekannten und allgemein zugänglichen periodischen Schriften enthaltenen konnte namentlich die schöne Reihe von Doppelsternmessungen benutzt werden, welche Schiaparelli¹⁾ kürzlich veröffentlicht hat. Diese Publikation kam in meine Hände kurz vor Abschluss der hier mitgetheilten Rechnungen. Zu bemerken ist ferner, dass ich die Beobachtungen Dembowski's²⁾ nicht wie früher aus den „Astron. Nachr.“, sondern aus dem inzwischen erschienenen Werke entnommen habe, welches um Kleinigkeiten gegen die früheren Mittheilungen veränderte Jahresmittel enthält. Dieses mir zugängliche Material ist im folgenden chronologisch zusammengestellt. Es wurden aber nicht die von den Beobachtern angegebenen Resultate direct aufgenommen, vielmehr wurden gewisse Correctionen angebracht, über welche ich nun zu berichten habe.

Die Aufgabe, die Beobachtungen engerer Doppelsterne durch eine theoretische Formel möglichst gut darzustellen, hängt von dem äusserst schwierigen und in vielen Fällen gegenwärtig noch nicht vollständig zu bewältigenden Probleme ab, die constanten oder persönlichen Fehler der einzelnen Beobachter abzuleiten und numerisch zu bestimmen. Wären diese Fehler während der ganzen Zeit, über welche sich die Messungen eines Astronomen erstrecken, der Hauptsache nach wirklich constant, so wäre das Problem, wenigstens für die Sterne *A* und *B* bei ζ Cancri, verhältnissmässig einfach und sicher zu lösen. Hier liegen theoretische Voraussetzungen zu Grunde, die sich sicher verfolgen lassen und die, wie ich glaube, durch meine Arbeiten ziemlich sicher verfolgt worden sind. Es ist so die Basis vorhanden, welche gestattet, durch successive Näherungen, indem man die Resultate der Theorie wiederholt mit den Beobachtungen

1) Osservazioni sulle stelle doppie. Pubblicazioni del reale osservatorio di Brera in Milano No. XXXIII 1888.

2) Misure micrometriche di stelle doppie e multiple fatte negli anni 1852—1878, Roma 1883 u. 1884.

vergleicht, die constanten Fehler mit stets wachsender Genauigkeit abzuleiten. Zwei Umstände aber arbeiten der Zuverlässigkeit dieses Verfahrens entgegen. 1) Es ist längst bekannt, dass abgesehen von vielen anderen Umständen nicht unbeträchtliche zeitliche Aenderungen in den persönlichen Fehlern eines Beobachters eintreten können und wirklich eingetreten sind. Solche Aenderungen sind z. B. bei Otto Struve, dessen Messungen wegen ihrer grossen Zahl und der langen Zeit, über welche sie sich erstrecken, von geradezu dominirendem Einflusse sind, in starkem Masse constatirt und der Beobachter selbst hat bei der Untersuchung seiner Messungen mehrere getrennte Perioden unterscheiden müssen. Solche zeitliche Aenderungen der persönlichen Fehler sind aber sehr schwer in Rechnung zu bringen, weil bei den meisten Beobachtern die Anzahl der Messungen viel zu klein ist, um bei solchen Untersuchungen einige Sicherheit zu gestatten. Man wird sich der Wahrheit nur durch die Betrachtung der Messungen an vielen Sternen nähern können, wobei aber wieder andere nicht zu leugnende Störungen zu befürchten sind. Auf diese Weise wird man allerdings durch das Verfahren, welches ich in meiner früheren Arbeit angewandt habe, nicht völlig zufriedenstellende Werthe für die persönlichen Fehler erlangen. Man darf aber doch erwarten, grosse und besonders schädliche Einwirkungen dieser Art zu beseitigen. Zudem giebt der Verlauf der so erhaltenen Correctionen immerhin einen Massstab für die Sicherheit der erhaltenen Bestimmungen an und die Aufsuchung der mittleren Fehler, wie ich sie a. a. O. ausgeführt, giebt in der That einen Anhalt für die Abschätzung der relativen Gewichtszahlen. Ich muss demnach das von mir eingeschlagene Verfahren noch immer als das unter den obwaltenden Umständen (bei dem Sterne C aus weiter unten folgenden Gründen in erhöhtem Masse) relativ beste bezeichnen. 2) Thatsächlich liegen oftmals die Verhältnisse so, dass die verschiedenen Beobachter desselben Doppelsternes sich zeitlich auf einander folgen und nur kurze Zeiträume hindurch gleichzeitig sich an den Messungen betheiligen. Es ist klar, dass dadurch der innere Zusammenhang zwischen den einzelnen Beobachtern gelockert erscheint und eine Ermittlung der persönlichen Fehler sehr erschwert ist. Bei ζ Cancri zeigt sich dieser Uebelstand sehr deutlich und in der That ist z. B. der Zusammenhang zwischen W. Struve, Dawes, Otto Struve ein sehr loser. Dieser

Umstand tritt noch mehr in den Vordergrund, wenn man die neueren Beobachter Dembowski, Dunér und Schiaparelli berücksichtigt. Im Allgemeinen wird hier zwischen den früheren und letzten Jahrzehnten nur durch O. Struve eine Verbindung hergestellt und diese Verbindung ist eine nicht zuverlässige, weil leider gerade O. Struve persönliche Fehler zeigt, die zeitliche und auch von anderen Umständen abhängige Veränderungen aufzuweisen scheinen. Die Folgen dieser misslichen Verhältnisse werden sich darin äussern, dass die übrigbleibenden Fehler nicht das Verhalten zufälliger Fehler zeigen werden, m. a. W. die Vertheilung der Vorzeichen wird nicht den Wahrscheinlichkeitsgesetzen entsprechen und man wird an diese nicht jene strengen Anforderungen stellen können, die man in anderen Theilen der Astronomie zu stellen berechtigt ist.

Was vor Allem die neuesten etwa seit 1875 angestellten Messungen von ζ Cancri betrifft, so erscheint es hier fast unmöglich, die constanten Fehler aus der Vergleichung mit der Theorie zu bestimmen. Ich habe deshalb auch, wenigstens bei dem Sterne *B*, von einer Anwendung dieses Verfahrens absehen müssen und konnte dies um so eher, als sich erwarten lässt, dass in Zukunft die Sachlage in dieser Beziehung sich besser gestalten wird. Dies gilt wenigstens, wenn, wie zu hoffen, die Mailänder und Pulkowaer Reihen fortgesetzt werden. Auf der anderen Seite muss hervorgehoben werden, dass durch den Tod der beiden Beobachter Engelmann und Jedrzejewicz zwei ausgezeichnete Mitarbeiter ausgeschieden sind. Vielleicht liesse sich aber doch durch eine eingehende Bearbeitung der von ihnen ausgeführten Messungen manches über die persönlichen Fehler derselben mit mehr Sicherheit aufdecken, als es jetzt möglich ist.

Den gemachten Bemerkungen zufolge wurden also die in der früheren Arbeit bereits benutzten Beobachtungen mit jenen Correctionen versehen, die damals gefunden worden sind. Die neu hinzugekommenen Messungen wurden mit Ausnahme von Schiaparelli uncorrectirt gelassen. An die Messungen von Schiaparelli (Sp.) wurde zufolge der Angaben des Beobachters (a. a. O. pg. 76) die Correction

$$\text{Sp} = \Delta_2 + 0''.40 \text{ und } \text{Sp} = \Delta_2 - 0''.040 \text{ } ^1)$$

1) Diese Zahl ist durch einen Schreibfehler entstellt worden. Sp. führt $-0''.020$ an. Ich habe indessen bei dem provisorischen Character, den die Benutzung der neuesten Beobachtungen in der vorliegenden Arbeit haben muss, diesen an sich geringfügigen Fehler nicht correctirt, da ich denselben erst nach völligem Abschluss der ganzen Untersuchung gefunden habe.

angebracht, wo Δ_2 die Correction bedeutet, die an die Messungen von Dembowski angebracht werden muss. Für Δ_2 habe ich früher $+ 0^{\circ}05$ gefunden. In Distanz war die Ableitung von Δ_2 infolge der vielen Schätzungen, welche hier vorkommen, sehr wenig sicher. Ich habe es deshalb für besser gehalten, die früher gefundene Correction (vgl. I pg. 44, 45) zu ersetzen durch die von Schiaparelli gemachte Angabe:

$$\Delta_2 = - 0^{\circ}102$$

In der That scheint hierdurch der Anschluss besser geworden zu sein. Die anderen in Anwendung gebrachten Correctionen waren:

1) W. Struve (Σ) $+ 0^{\circ}93$ und $+ 0^{\circ}004$

2) O. Struve (O. Σ) $\left\{ \begin{array}{l} \text{I} + 1^{\circ}50 \\ \text{II} - 1.40 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{I} \quad 0 \\ \text{II} + 0^{\circ}030 \\ \text{III} - 0.030 \end{array} \right.$

Es bedeuten dabei im Positionswinkel: II den Fall, wo die 3 Sterne A, B, C bis auf $\pm 10^{\circ}$ in einer Geraden zu stehen scheinen, I den entgegengesetzten Fall. In Distanz sind unter I, II, III die 3 bekannten Zeitperioden verstanden, welche bei O. Σ zu unterscheiden sind.

3) Dawes (D). Hier sind ebenfalls 3 Perioden zu unterscheiden. Als diesbezügliche Correctionen wurden angenommen:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I} + 0^{\circ}09 \\ \text{II} + 1.26 \\ \text{III} + 0.65 \end{array} \right\} - 0^{\circ}065$$

4) Secchi (S). Correction: $- 0^{\circ}37$ $+ 0^{\circ}026$

5) Dembowski (Δ). Aeltere Reihe $\Delta_1 = + 3^{\circ}05$

Neuere Reihe $\Delta_2 = + 0^{\circ}05$

6) Dunér (Du). Correction: $- 3^{\circ}44$ $+ 0^{\circ}014$

7) Mädler (M). Correction:

$$\left. \begin{array}{l} \text{1. Periode} \\ \text{2. Periode} \end{array} \right\} - 1^{\circ}99 \left\{ \begin{array}{l} + 0^{\circ}051 \\ - 0.145 \end{array} \right.$$

8) Bessel. Correction: 0° $- 0^{\circ}120$

9) Engelmann. Beobachtungen aus den sechziger Jahren erhielten die Correction: $- 1^{\circ}72$, $- 0^{\circ}040$; die neueren wurden in Ermangelung besserer Kenntnisse unverändert gelassen.

Alle übrigen Beobachtungen wurden uncorrectirt verwerthet.

Es ist keinem Zweifel unterworfen und wurde oben besonders hervorgehoben, dass die auf die angegebene Weise corrigirten Beobachtungen durchaus nicht völlig frei sind von den persönlichen Fehlern. Ebenso wenig zweifelhaft dürfte es sein, dass diese letzteren die zufälligen Beobachtungsfehler in den meisten Fällen bei Weitem übertreffen. Ich habe diesem Umstande in der früheren Abhandlung dadurch entsprochen, dass ich gewisse Gewichtszahlen einführte. Wegen der naturgemässen Unsicherheit, die diesen Bestimmungen anhaften muss, habe ich gegenwärtig eine völlig andere und einfachere Abschätzung eintreten lassen. Ich habe nämlich einem Jahresmittel, gebildet aus 1 oder 2 Abenden, das Gewicht 2 oder 1 und aus mehr als 2 Abenden das Gewicht 4 oder 2 gegeben, je nachdem der betreffende Beobachter Σ , O. Σ , Bessel, D, S, A, Du, Sp oder einer der übrigen war. Ich möchte nicht behaupten, dass diese Gewichtsbestimmung besser sei, wie die frühere. Sie hat aber den einen Vortheil, dass einige Beobachter, welche früher durch die grosse Zahl von Abenden, an denen sie durch mehrere Jahre ζ Cancri zu messen pflegten, einen vielleicht allzu grossen Einfluss auf die Normalörter ausgeübt haben, in ihrer Einwirkung etwas eingeschränkt werden. Diese Einschränkung wird deshalb nur von guter Wirkung sein, weil man doch behaupten darf, dass das Zusammenfassen möglichst vieler verschiedener Beobachter noch am ehesten die persönlichen Fehler unschädlich macht. Im Uebrigen weichen die neueren Jahresmittel von den früher gebildeten nur selten in erheblicher Weise ab und das Resultat der Ausgleichung wird durch die Gewichtsannahme nicht wesentlich beeinflusst. Eine Ausnahme möchten vielleicht die Jahresmittel von 1880 an machen. Diese sind aber überhaupt nicht sehr zuverlässig. Sie hängen wesentlich von der Richtigkeit der Correction Sp ab und von der Voraussetzung, dass Engelmann und Jedrzejewicz keine bedeutenden Correctionen erfordern. Das letztere namentlich wird schwerlich der Wahrheit entsprechen. Man wird deshalb wenig Gewicht darauf legen, wenn die letzten Jahresmittel systematische Unterschiede gegen die theoretisch berechneten Werthe zeigen. Keinesfalls wird man daraus auf eine nachweisbare Unrichtigkeit der letzteren schliessen dürfen.

Ich gehe nun zur Mittheilung der chronologisch geordneten Sammlung der Beobachtungsdaten über. Quellenangabe oder nähere Erläuterungen der einfachen Uebersicht scheinen mir nicht erforderlich.

Jahr	Beobachter	Positionswinkel	Gewicht	Distanz	Gewicht
1781.91	W. Herschel	3.47	—	—	—
1826.22	Σ	57.63	4	1.144	4
28.80	Σ	39.38	2	1.044	2
30.39	J. Herschel	35.35	2	—	—
31.14	J. Herschel	31.57	2	—	—
31.28	Σ	30.73	4	1.052	4
31.30	D	30.87	2	1.034	2
32.12	J. Herschel	32.12	2	—	—
32.12	D	27.09	4	—	—
32.19	Bessel	31.33	4	1.205	4
32.28	Σ	28.45	4	1.154	4
33.14	J. Herschel	26.40	2	—	—
33.21	D	26.32	4	1.154	4
33.27	Σ	23.03	4	1.151	4
35.31	Σ	21.15	4	1.140	4
36.27	Σ	16.30	4	1.201	4
36.97	D	16.86	4	—	—
37.23	D	12.49	2	—	—
38.30	D	11.34	2	—	—
40.15	Kaiser	6.13	2	1.246	2
40.20	D	5.62	4	1.140	4
40.30	O. Σ	4.73	4	—	—
41.16	D	2.13	4	1.123	4
41.31	M	359.00	2	1.101	2
42.21	M	356.66	2	1.121	2
42.22	D	357.52	4	1.134	4
42.29	O. Σ	356.78	4	—	—
42.89	Kaiser	359.90	2	—	—
43.12	Kaiser	—	—	1.270	2
43.18	D	356.31	4	1.062	4
43.19	M	354.92	2	1.116	2
43.30	O. Σ	356.36	4	1.255	4
44.28	O. Σ	352.54	4	1.232	4
44.39	M	352.41	2	1.073	2
45.31	O. Σ	350.17	4	1.058	4
45.95	Hind	348.95	1	—	—
46.04	Jacob	346.50	1	1.200	1
46.29	O. Σ	346.97	4	1.062	4
47.08	Hind	341.95	2	—	—
47.29	M	341.02	1	1.077	1
47.33	O. Σ	343.90	4	1.053	4

Jahr	Beobachter	Positionswinkel	Gewicht	Distanz	Gewicht
1848.23	D	338.82	4	1.060	4
48.29	M	338.17	2	1.084	2
48.30	O. Σ	339.63	4	1.002	4
49.24	D	334.86	4	1.117	4
49.32	O. Σ	335.11	4	0.892	4
50.29	O. Σ	331.74	4	1.032	4
50.72	M	328.06	1	1.083	1
51.18	Fletcher	333.50	2	—	—
51.22	M	327.04	2	1.056	2
51.25	D	328.55	4	1.006	4
51.28	O. Σ	325.94	4	1.110	4
52.16	Fletcher	329.02	1	—	—
52.23	D	325.09	4	1.057	4
52.25	M	323.82	2	0.919	2
52.32	O. Σ	320.97	2	0.975	2
53.20	Jacob	322.04	2	1.220	2
53.26	M	321.64	2	0.918	2
53.30	Fletcher	321.06	1	—	—
53.30	O. Σ	318.71	2	0.923	2
53.95	Jacob	317.24	1	1.150	1
54.20	D	315.96	4	0.969	4
54.28	M	316.68	2	0.932	2
54.29	Wrottesley	320.17	1	1.034	1
55.10	Δ	311.64	4	—	—
55.19	S	312.07	4	1.093	4
55.27	M	308.65	2	0.915	2
55.31	O. Σ	309.76	4	0.848	4
55.31	Winnecke	—	—	1.038	2
56.07	Δ	307.28	4	—	—
56.21	Jacob	306.34	2	1.210	2
56.23	Winnecke	308.64	2	1.001	2
56.24	Wrottesley	309.42	1	1.119	1
56.25	S	306.23	2	0.796	2
56.29	M	305.51	2	0.853	2
56.93	Δ	299.55	4	—	—
57.27	O. Σ	300.02	4	0.941	4
57.30	M	302.54	2	0.819	2
57.90	Jacob	299.72	2	1.140	2
58.18	Δ	297.21	4	—	—
58.21	M	295.59	2	0.945	—
58.28	O. Σ	297.27	2	0.920	2
59.26	M	292.95	2	0.832	2
59.30	O. Σ	288.42	2	0.846	2
60.27	Pulkowa	283.05	2	—	—
60.27	O. Σ	283.04	2	0.780	2
60.29	M	283.98	2	0.872	2

Jahr	Beobachter	Positionswinkel	Gewicht	Distanz	Gewicht
1861.25	M	280.21	2	0.823	2
61.27	O. Σ	276.70	4	0.795	4
62.31	M	272.44	2	0.822	2
62.31	O. Σ	268.07	2	0.645	2
63.13	Δ	263.17	4	0.737	4
63.13	Knott	268.12	1	0.659	1
63.25	Romberg	267.28	1	0.955	1
64.15	Δ	255.08	4	0.550	2
64.30	O. Σ	253.03	2	0.623	2
65.21	Δ	245.79	4	0.50	2
65.23	S	244.93	2	0.667	2
65.36	Knott	241.71	2	0.638	2
65.88	Engelmann	238.65	2	0.699	2
66.19	Δ	238.45	4	0.520	2
66.27	O. Σ	237.38	2	0.602	2
66.29	S	234.25	2	0.426	2
66.38	Barklay	231.52	1	0.724	1
66.40	Knott	232.50	2	0.758	2
67.22	Δ	224.46	4	—	—
68.20	Δ	210.94	4	0.500	2
68.28	O. Σ	214.36	2	0.626	2
69.32	O. Σ	198.18	2	0.547	2
69.37	Du	200.21	4	0.496	4
70.15	Δ	187.33	4	—	—
70.28	O. Σ	186.10	4	0.572	4
70.30	Du	184.83	4	0.441	4
70.56	Gledhill	181.05	1	—	—
71.15	Δ	175.53	4	—	—
71.27	Gledhill	175.10	1	—	—
71.29	Du	174.76	4	0.567	4
71.30	Scharnhorst	169.40	1	—	—
71.31	O. Σ	170.48	4	0.547	4
72.05	Gledhill	166.75	1	—	—
72.12	Knott	166.73	1	—	—
72.21	Wilson	167.80	2	—	—
72.23	Δ	162.89	4	—	—
72.31	O. Σ	162.08	4	0.551	4
72.33	Du	159.86	4	0.704	4
73.19	Δ	150.22	4	—	—
73.28	O. Σ	151.53	4	0.561	4
74.07	Gledhill	141.43	2	—	—
74.09	Δ	141.64	4	0.638	2
74.17	Wilson	141.33	2	0.670	2
74.28	O. Σ	140.54	4	0.597	4
74.29	Du	139.36	2	0.629	2

Jahr	Beobachter	Positionswinkel	Gewicht	Distanz	Gewicht
1875.14	Δ	130.11	4	0.640	4
75.26	Sp	129.32	4	0.540	4
75.28	O. Σ	131.07	4	0.617	4
75.29	Seabroke	133.35	1	0.775	1
75.33	Du	126.02	4	0.602	4
76.14	Δ	119.41	4	0.621	4
76.29	O. Σ	118.05	4	0.660	4
76.34	Du	114.56	2	0.834	2
77.17	Δ	108.74	4	0.580	4
77.23	Sp	108.35	4	0.646	4
77.27	O. Σ	109.37	4	0.720	4
78.18	Δ	100.38	4	0.561	4
78.26	Jedrzejewicz	100.84	2	0.700	2
78.27	Wilson & Seab.	102.95	1	0.865	1
78.27	Du	103.06	2	0.714	2
78.29	O. Σ	100.67	4	0.730	4
79.27	Sp	93.52	4	0.726	4
79.28	Seabr.	96.02	2	0.858	2
79.29	O. Σ	93.33	4	0.737	4
80.22	Verschiedene ¹⁾	89.80	2	0.767	2
80.23	Gledhill	89.47	2	0.767	2
80.29	Burnham	85.20	2	0.730	2
80.32	Seabr.	86.83	2	0.775	2
81.24	Jedrz.	81.10	2	0.910	2
81.26	Seabr.	79.70	1	0.950	1
81.30	Sp	80.66	4	0.779	4
82.22	Engelm.	76.18	2	1.051	2
82.25	Sp	75.52	4	0.838	4
82.26	Seabr.	76.23	2	1.060	2
82.27	Jedrz.	75.02	2	0.940	2
83.24	Engelm.	72.45	2	1.047	2
83.29	Sp	69.75	4	0.860	4
83.34	Küstner	68.96	2	0.900	2
83.35	Seabr.	69.68	2	1.020	2
84.19	Perrotin	62.67	2	1.060	2
84.25	Sp	64.33	4	0.834	4
84.28	Engelm.	67.02	2	0.938	2
85.29	Engelm.	59.42	2	1.050	2
85.29	Sp	58.43	4	0.900	4
86.29	Jedrz.	51.22	2	0.980	2
86.30	Engelm.	56.28	2	1.076	2
87.25	Sp	48.83	4	0.829	4
88.27	Sp	44.14	4	0.897	4

1) Dieses Mittel, aus I pg. 49 entnommen, ist, wie ich nachträglich ersehe, apokryph. Es dürfte nicht unabhängig von den andern Mitteln desselben Jahres sein.

Die vorstehenden Beobachtungen wurden nach Massgabe der abtheilenden Zwischenräume und mit Berücksichtigung der Gewichte in folgende Jahresmittel vereinigt. Ich habe hierbei die für die Positionswinkel geltenden Epochen auch für die Distanzen angenommen. Eine erhebliche Ungenauigkeit kann dadurch nirgends entstehen.

	p_0	g	e	g	R		$B-R$	
					p_0	e	0	"
1781.91	3.5	—	"	—	1.5	"	+ 2.0	"
1826.22	57.63	4	1.144	4	49.93	0.994	+ 7.70	+ 0.155
1828.80	39.38	2	1.044	2	40.38	1.063	— 1.00	— 0.019
30.39	35.35	2	—	—	35.00	—	+ 0.35	—
31.25	30.98	8	1.046	6	32.20	1.013	— 1.22	+ 0.033
32.19	29.41	14	1.180	8	29.23	1.127	+ 0.18	+ 0.053
33.22	25.02	10	1.153	8	26.09	1.139	— 1.07	+ 0.014
35.31	21.15	4	1.140	4	19.75	1.158	+ 1.40	— 0.018
36.62	16.58	8	1.201	4	15.87	1.165	+ 0.71	+ 0.036
37.23	12.49	2	—	—	14.07	—	— 1.58	—
38.30	11.34	2	—	—	10.90	—	+ 0.43	—
40.23	5.57	10	1.175	6	5.18	1.163	+ 0.39	+ 0.012
41.21	1.09	6	1.116	6	2.24	1.158	— 1.15	— 0.042
42.35	357.53	12	1.128	6	358.77	1.150	— 1.24	— 0.022
43.23	355.99	10	1.170	12	356.04	1.142	— 0.05	+ 0.028
44.32	352.50	6	1.179	6	352.61	1.132	— 0.11	+ 0.047
45.44	349.93	5	1.058	4	349.01	1.120	+ 0.92	— 0.062
46.24	346.88	5	1.090	5	346.38	1.110	+ 0.50	— 0.020
47.25	342.93	7	1.058	5	342.97	1.096	— 0.04	— 0.038
48.27	339.01	10	1.050	10	339.43	1.079	— 0.42	— 0.029
49.28	334.99	8	1.005	8	335.80	1.061	— 0.81	— 0.056
50.30	331.00	5	1.042	5	331.71	1.040	— 0.71	+ 0.002
51.24	328.25	12	1.058	10	328.39	1.023	— 0.14	+ 0.035
52.24	324.32	9	1.002	8	324.37	1.003	— 0.05	— 0.001
53.26	320.83	7	1.020	6	320.10	0.979	+ 0.73	+ 0.046
54.20	316.83	8	0.991	8	316.00	0.958	+ 0.83	+ 0.032
55.21	310.80	16	0.973	12	311.37	0.933	— 0.57	+ 0.040
56.19	307.08	13	0.982	9	306.62	0.908	+ 0.46	+ 0.074
57.14	300.30	10	0.900	6	301.76	0.883	— 1.46	+ 0.017
58.15	297.40	10	1.002	6	296.28	0.856	+ 1.12	+ 0.146
59.28	290.69	4	0.839	4	289.75	0.826	+ 0.94	+ 0.013
60.28	283.36	6	0.826	4	283.55	0.796	— 0.19	+ 0.030
61.26	277.87	6	0.804	6	277.01	0.768	+ 0.86	+ 0.036
62.31	270.26	4	0.734	4	269.47	0.735	+ 0.79	— 0.001
63.15	264.68	6	0.760	6	262.98	0.709	+ 1.70	+ 0.051
64.20	254.40	6	0.587	6	254.29	0.678	+ 0.11	— 0.091

	p	g	ϱ	g	R		$B-R$	
					p	ϱ	ϱ	ϱ
1865.38	243.37	10	0.626	8	243.52	0.644	-0.15	-0.018
66.28	235.75	11	0.593	9	234.56	0.620	+1.19	-0.027
67.22	224.46	4	—	—	224.47	—	-0.01	—
68.23	212.08	6	0.563	4	212.82	0.580	-0.74	-0.017
69.35	199.53	6	0.513	6	199.07	0.567	+0.46	-0.054
70.27	185.70	13	0.507	8	187.35	0.562	-1.65	-0.055
71.26	173.40	14	0.557	8	174.59	0.563	-1.19	-0.006
72.25	163.03	16	0.627	8	162.05	0.571	+0.78	+0.056
73.24	150.88	8	0.561	4	150.00	0.586	+0.88	-0.025
74.18	140.93	14	0.626	10	139.27	0.606	+1.66	+0.020
75.25	129.38	17	0.604	17	127.95	0.631	+1.43	-0.027
76.24	117.90	10	0.679	10	118.32	0.659	-0.42	+0.020
77.22	108.82	12	0.649	12	109.67	0.687	-0.85	-0.038
78.25	101.15	13	0.696	13	101.38	0.718	-0.23	-0.022
79.28	93.94	10	0.757	10	93.76	0.750	+0.18	+0.007
80.27	87.83	8	0.755	8	87.01	0.780	+0.82	-0.025
81.28	80.65	7	0.841	7	80.69	0.810	-0.04	+0.031
82.25	75.69	10	0.945	10	75.01	0.836	+0.68	+0.109
83.30	70.12	10	0.937	10	69.28	0.865	+0.84	+0.072
84.24	64.59	8	0.917	8	64.46	0.889	+0.13	+0.028
85.29	58.76	6	0.950	6	59.38	0.913	-0.62	+0.037
86.29	53.75	4	1.028	4	54.77	0.936	-1.02	+0.092
87.25	48.83	4	0.829	4	50.55	0.955	-1.72	-0.126
88.27	44.14	4	0.897	4	46.28	0.975	-2.14	-0.078

Die angeführten Jahresmittel wurden, wie durch die abtheilenden Zwischenräume angegeben ist, in Normalörter zusammengefasst. Diese Normalörter sind pg. 36 angeführt. Hierbei war es, um stets dasselbe Zehntel des Jahres in den Zeitangaben zu haben, nöthig eine kleine Reduction mit Hülfe von Näherungselementen auszuführen. Dazu wurden bis zum Jahre 1879 die Elemente VIII, von da ab die Elemente IV₂ benutzt. Beide zeigen innerhalb der Zeiten, während welcher sie angewendet worden sind, einen genügenden Anschluss an die Beobachtungen. Im Uebrigen muss daran festgehalten werden, dass bei den Positionswinkeln sowohl als auch bei den Distanzen die Rechnung einige Einheiten der letzten Decimale nicht verbürgen will. Wollte man dies erreichen, was bei dem Grade der Genauigkeit der vorliegenden Beobachtungen wohl als nutzlos bezeichnet werden darf, so hätten auch die Zeitangaben genauer gemacht werden müssen.

In der letzten Zusammenstellung sind unter R die Werthe, welche

aus den Elementen IX folgen, angegeben und daneben die Fehler, welche letztere in beiden Coordinaten übrig lassen. Eine Betrachtung dieser Fehlerreihe lehrt nun, dass die Darstellung eine durchaus befriedigende ist. Wir haben in Positionswinkel 29 positive und 30 negative Fehler, welche so angeordnet sind, dass sie 29 Zeichenwechsel bilden. In Distanz sind diese 3 entsprechenden Zahlen 29, 26, 23. Das ist aber ein Resultat, welches bei Berücksichtigung dessen, was oben über die persönlichen Fehler gesagt worden ist, als sehr günstig bezeichnet werden muss. Es muss hiebei noch einmal daran erinnert werden, dass die letzten Jahresmittel wenig sicher sind und demzufolge aus den hier auftretenden Fehlern, welche allerdings einen systematischen Character zeigen, vorderhand keine weiteren Schlüsse gezogen werden können.

Es erübrigt nur noch, über die beiden ersten Jahresmittel in obiger Zusammenstellung einige Bemerkungen zu machen.

In meiner früheren Arbeit habe ich bereits nachgewiesen, dass die W. Struve'schen Beobachtungen vom Jahre 1826 einen sehr grossen Fehler im Positionswinkel enthalten. Ich habe dort diese Annahme auf verschiedenen Wegen zu beweisen gesucht und dieser Nachweis war mit nicht geringer Mühe verbunden, weil stets alle Ausgleichungen auf zweierlei Weise, nämlich mit Hinzuziehung und mit Hinweglassung der fraglichen Beobachtung, ausgeführt werden mussten. Die Unvereinbarkeit derselben mit den späteren Messungen hat sich aber stets mit grosser Sicherheit herausgestellt. Einige Vorsicht war in dieser Beziehung nöthig, weil damals über einen ganzen Umlauf der beiden Sterne A und B um einander noch nicht verfügt werden konnte und weil das angeführte Jahresmittel aus den gut mit einander stimmenden Beobachtungen von 3 Abenden zusammengesetzt ist. Aus diesen Gründen war die auf den Nachweis der Fehlerhaftigkeit der Beobachtung von 1826 verwendete Mühe und die mit demselben verbundene Weitläufigkeit erforderlich. In der vorliegenden Arbeit darauf zurückzukommen, scheint um so weniger nöthig, weil dieselbe auch in diesem Punkte die früher erlangten Resultate vollkommen bestätigt. Die Rechnung wurde mit Ausschluss der genannten Beobachtung ausgeführt und der übrig bleibende Fehler von beinahe 8 Grad zeigt jetzt, nachdem beinahe ein voller Umlauf von der verwendeten Beobachtung erfüllt wird, mit absoluter Sicherheit an, dass

jene Struve'sche Beobachtung durch irgend welche unbekannte Fehler stark entstellt ist.

Die zweite Bemerkung, die ich zu machen habe, bezieht sich auf die W. Herschel'sche Angabe vom Jahre 1781. Ich habe früher (I pg. 47) diese Beobachtung ganz unberücksichtigt gelassen und dies auch bei den vorliegenden Untersuchungen gethan, indem ich die a. a. O. für dieses Verfahren namhaft gemachten Gründe auch jetzt noch für durchaus stichhaltig ansehe. Indessen ist nicht zu leugnen, dass es nicht ohne Interesse ist nachzusehen, wie jene frühe und dadurch immerhin werthvolle Angabe mit den Resultaten der vorliegenden Untersuchung stimmt. Nach meiner Meinung liegt die Sache so. Giebt die Theorie einen erträglichen Fehler d. i. einen solchen von wenigen Graden, so ist diese Uebereinstimmung immerhin als sehr werthvoller Massstab für die Zuverlässigkeit der ausgeführten Rechnungen anzusehen. Im andern Falle hätte man zu untersuchen bzw. zu erklären, wie sich die Abweichung beheben lässt. Hierbei wird man wohl im Auge behalten müssen, dass die Herschel'sche Angabe nur auf einem Abend beruht und also allerdings von nicht unbedeutenden zufälligen Fehlern beeinflusst sein kann. Glücklicherweise ist aber auf diesen Punkt näher einzugehen im vorliegenden Falle unnöthig, denn die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung ist, wie die obigen Zahlen ergeben, eine ausgezeichnete. Sie ist eine so gute, dass wohl zufällige Umstände zu einer solchen nahen Uebereinstimmung geführt haben. Es ist nicht uninteressant zu erwähnen, wie die in der früheren Abhandlung abgeleiteten rein elliptischen Elemente die Beobachtung von 1781 darstellen. Ich nehme die beiden Elementensysteme IV_a und IV_b , welche den Beobachtungen von 1828 an beinahe vollkommen genügten. Eine einfache Rechnung ergibt für den Positionswinkel für 1781.91 aus

Elementen IV_a : $355^{\circ}6$

Elementen IV_b : 349.4

Beobachtung: $3^{\circ}5$

während eine Vergleichung mit Elementen VIII, wegen des grösseren Rechenaufwandes, nicht ausgeführt worden ist. Dagegen habe ich die Mühe nicht gescheut, eine Vergleichung mit Elementen IX auszuführen,

gerade weil die eben angeführten Differenzen das Mass des Zulässigen wohl überschreiten dürften. Eine solche Vergleichung erfordert die Weiterführung der Störungsrechnungen auf pg. 34. Ich habe diese nach der oben aus einander gesetzten und angewandten Methode ausgeführt. Bei dem mässigen Grad von Genauigkeit, den ich dieser Vergleichung zu geben beabsichtigte, bin ich, um die Rechnung nicht gar zu weitläufig anzulegen, in Intervallen von 2 zu 2 Jahren vorwärts gegangen. Zu Grunde gelegt wurden auch für die Störungsrechnungen die Elemente IX, wodurch im Jahre 1826 eine kleine Unstetigkeit in dem Verlaufe der Störungswerthe eintritt, weil die früheren Rechnungen mit VIII geführt wurden. Diese Unstetigkeit ist übrigens in den Resultaten gar nicht zu merken.

Was die Methode, welche am besten anzuwenden ist, betrifft, so kann man zweifelhaft sein, ob im vorliegenden Falle nicht besser nach der Encke'schen Methode der speciellen Störungen zu rechnen wäre, weil hier die gestörten Coordinaten nicht durch die Beobachtung gegeben sind. In der That würde ich auch dieser Rechenvorschrift ohne Weiteres den Vorzug gegeben und dieselbe angewendet haben, wenn nicht die Elemente IV_a die fragliche Herschel'sche Beobachtung näherungsweise darstellten und also die aus ihnen berechneten Coordinaten mit ausreichender Genauigkeit als die wahren betrachtet werden dürften. Ich habe deshalb diese Elemente zur Berechnung der Coordinaten x , y benutzt, während im Uebrigen unter Zuhülfenahme der Elemente IX als osculirende Elemente die Rechnung ganz nach den oben gegebenen Vorschriften ausgeführt worden ist. Das Detail derselben hat in diesem Falle kein Interesse. Nur wird es für die Beurtheilung des stetigen Verlaufes der Zahlenreihe nicht unnütz sein, die aus der doppelten Integration hervorgegangenen Werthreihen der δx , δy und δz mitzutheilen.

	δx	δy	δz
1780.2	- 0.1282	+ 0.0265	+ 0.0239
82.2	- 0.1368	- 0.0332	+ 0.0266
84.2	- 0.1457	- 0.0907	+ 0.0288
86.2	- 0.1543	- 0.1429	+ 0.0312
88.2	- 0.1622	- 0.1872	+ 0.0336
90.2	- 0.1686	- 0.2219	+ 0.0357
92.2	- 0.1730	- 0.2462	+ 0.0376
94.2	- 0.1749	- 0.2604	+ 0.0390
96.2	- 0.1739	- 0.2656	+ 0.0400
98.2	- 0.1700	- 0.2633	+ 0.0403

	δx	δy	δz
1800.2	- 0.1635	- 0.2550	+ 0.0401
2.2	- 0.1548	- 0.2136	+ 0.0394
4.2	- 0.1446	- 0.2292	+ 0.0384
6.2	- 0.1338	- 0.2136	+ 0.0372
8.2	- 0.1229	- 0.1969	+ 0.0358
10.2	- 0.1122	- 0.1793	+ 0.0343
12.2	- 0.1016	- 0.1608	+ 0.0327
14.2	- 0.0912	- 0.1514	+ 0.0309
16.2	- 0.0805	- 0.1210	+ 0.0288
18.2	- 0.0690	- 0.1004	+ 0.0264
20.2	- 0.0569	- 0.0802	+ 0.0236
22.2	- 0.0446	- 0.0613	+ 0.0202
24.2	- 0.0327	- 0.0450	+ 0.0166
26.2	- 0.0224	- 0.0320	+ 0.0128

Addirt man diese Correctionen zu den aus Elementen IX folgenden ungestörten Coordinatenwerthen x_0 , y_0 , setzt also, wie früher

$$\rho \cos p = x_0 + \delta x ; \quad \rho \sin p = y_0 + \delta y$$

so ergeben sich die gestörten Positionswinkel und Distanzen p und ρ . Man findet nun leicht

	p
1780.2	$10^{\circ}4$
82.2	0.4
84.2	350.2
86.2	339.9

und hieraus mit Berücksichtigung der Correction wegen Praecession ($- 0^{\circ}34$) für den scheinbaren Positionswinkel

$$1781.91 \quad p = 1^{\circ}5$$

welcher Werth in die Uebersicht (S. 50) aufgenommen worden ist.

Wie schon erwähnt, stimmt dieser Werth in ausgezeichneter Weise mit dem Beobachtungsergebnis Herschel's überein. Man wird sich aber hüten müssen, aus dieser Uebereinstimmung mehr zu schliessen, als man berechtigt ist. Dieselbe giebt nur eine werthvolle Bestätigung der Richtigkeit der Rechnung und der Angemessenheit und Zulässigkeit der gemachten Hypothesen. Dass das Verhältniss der Masse des dritten Sternes C und der Summe der beiden ersten A und B sehr nahe richtig bestimmt erscheint oder dass die Annahme, die Bahn von C um den Schwerpunkt von A , B liege in der Projectionsebene, genau der Wahrheit entspräche, lässt sich natürlich nicht feststellen. Man wird nur sagen dürfen, dass diese Annahmen zu verlassen kein Grund vorliegt und dass die Unmöglichkeit

diese betreffenden Unbekannten aus den Beobachtungen sicher zu bestimmen gegenwärtig noch fortbesteht. Uebrigens war dies schon nach den Ergebnissen meiner früheren Arbeit vorauszusehen. Es wird noch eine einige Zeit vergehen, bis in dieser Beziehung eine gründliche Aenderung der Sachlage eintreten wird.

§ 4.

Zufolge der Resultate meiner früheren Untersuchungen und zufolge der oben (§ 2) gemachten Bemerkungen gehe ich ohne Weiteres dazu über, die Annahme zu verfolgen, der Stern C bewege sich um einen als Schwerpunkt eines dynamischen Systemes aufzufassenden Punkt S_2 , welcher wiederum in Folge der anziehenden Wirkungen sich um den Schwerpunkt von A und B bewegt. Wir haben oben (§ 2) gesehen, dass es bei dem Genauigkeitsgrad, der den Messungen zugeschrieben werden kann, voraussichtlich ausreichend sein wird, sowohl die Bewegung von C um S_2 , als auch die des Punktes S_2 um den Schwerpunkt von A und B als nach den Keplerschen Gesetzen vor sich gehend anzunehmen.

Zunächst soll die einfache Annahme, die ich in I allein verfolgt habe, gemacht werden, nämlich, dass sich die Projection von C um diejenige von S_2 in einem Kreise mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt. Bezeichnet a den Radius dieses Kreises, p und ϱ den (beobachteten) Positionswinkel und Distanz des Sternes in Bezug auf den Schwerpunkt von A und B , p_0 und ϱ_0 dieselben Grössen von S_2 und c den Winkel, welchen a mit der Richtung bildet, von welcher die Positionswinkel gezählt werden, so hat man

$$\varrho \cos (p - p_0) = \varrho_0 + a \cos (c - p_0)$$

$$\varrho \sin (p - p_0) = a \sin (c - p_0)$$

Hieraus ergibt sich

$$\operatorname{tg} (p - p_0) = \frac{a \sin (c - p_0)}{\varrho_0 + a \cos (c - p_0)} \text{ und hieraus:}$$

$$p - p_0 = \frac{a}{\varrho_0} \sin (c - p_0) - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\varrho_0} \right)^2 \sin 2 (c - p_0)$$

Da im vorliegenden Falle $\frac{a}{\varrho_0}$ ungefähr $= \frac{1}{23}$ ist, so folgt, dass be-

reits das zweite Glied (< 0.05) zu vernachlässigen sein wird. Der Voraussetzung gemäss ändert sich c der Zeit proportional. p_0 zeigt dasselbe Verhalten bis auf völlig belanglose Grössen. Man darf also setzen

$$c - p_0 = -nt + \varepsilon$$

Setzt man noch

$$a \cos \varepsilon = x ; \quad a \sin \varepsilon = y$$

so wird:

$$p = p_0 - \frac{x}{e_0} \sin nt + \frac{y}{e_0} \cos nt \quad (1)$$

Ferner hat man

$$\varrho^2 = \varrho_0^2 + a^2 + 2a\varrho_0 \cos(c - p_0)$$

und entwickelt

$$\varrho = \varrho_0 \left\{ 1 + \frac{a}{e_0} \cos(nt - \varepsilon) + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{e_0} \right)^2 \sin^2(nt - \varepsilon) + \dots \right\}$$

Auch hier soll das quadratische Glied, welches im Maximum 0.005 werden kann, vernachlässigt werden. Dann hat man

$$\varrho = \varrho_0 + x \cos nt + y \sin nt \quad (2)$$

Es hat sich in I mit sehr grosser Sicherheit ergeben, dass n einen positiven Werth ($= +20^\circ$) hat. Dies bedeutet, dass die Bewegung von C um S_2 , dem gewöhnlichen Sprachgebrauche gemäss, gleichgerichtet ist, mit der Bewegung von S_2 um A .

Sowohl p_0 und ϱ_0 ändern sich nach den Kepler'schen Gesetzen mit der Zeit. Man kann vorderhand nicht daran denken, aus dem kurzen Bogen, über welchen sich die Beobachtungen erstrecken, etwa die elliptischen Bahnelemente abzuleiten. Wäre das möglich, so wäre das ganze Problem, die Bewegungen in dem Sternsystem ζ Cancri zu bestimmen, ausserordentlich vereinfacht, weil man dann sofort eine gute Bestimmung des Verhältnisses der Massenwerthe $m_3 : m_1 + m_2$ ausführen könnte. Man muss sich also vorderhand mit einer interpolatorischen Darstellung begnügen. Zuerst soll angesetzt werden

$$p_0 = \beta + \beta_1 t + \beta_2 t^2 \quad (3)$$

und hierbei zufolge der früheren Ermittlungen gleich angenommen

werden, dass der Quotient $\frac{\beta_2}{\beta_1}$ sehr klein sei. Der Ausdruck für die Distanz ist nun nicht mehr ganz willkürlich. Da nämlich die Gleichung

$$\varrho_0^2 \frac{d\varrho_0}{dt} = \text{const.}$$

stattfinden muss, so ergibt sich sofort, bei Vernachlässigung von $\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^2$

$$\varrho_0 = \alpha - \alpha \frac{\beta_2}{\beta_1} t \quad (4)$$

In I sind die Gleichungen (1) bis (3) benutzt worden. Dagegen habe ich für (4) ebenfalls einen in t quadratischen Ausdruck angesetzt und seine Coëfficienten willkürlich gelassen. Es geschah dies, weil ich dort die Bewegung von C um S_2 in Positionswinkel und Distanz unabhängig von einander beweisen wollte. Ich habe deshalb die aus dynamischen Verhältnissen hervorgehende Relation bei Seite gelassen, habe indessen versäumt, dieselbe nachträglich durch die gefundenen empirischen Formeln zu prüfen. Diese Prüfung fällt zwar nicht ganz befriedigend aus, die übrig bleibenden Fehler sind aber durchaus nicht bedeutend.

Bei der Anwendung der vorstehenden Gleichungen bin ich von der Ansicht ausgegangen, dass bei diesen vorläufigen Rechnungen eine Neubestimmung von n nicht nöthig sei. Es wurde also wie früher $n = +20^\circ$ angenommen. Alle übrigen Constanten sollten aber neu bestimmt werden. Verfügt man über Näherungswerthe und bezeichnet man durch ein vorgesetztes Δ die erforderliche Verbesserung, so giebt jeder Fehler in Positionswinkel und Distanz folgende Bedingungsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \Delta p &= \Delta\beta + \Delta\beta_1 t + \Delta\beta_2 t^2 - \frac{\Delta x}{\varrho_0} \sin nt + \frac{\Delta y}{\varrho_0} \cos nt + \gamma \cdot f \\ \Delta \varrho &= \Delta\alpha \left(1 - \frac{\beta_2}{\beta_1} t\right) + \Delta\beta_1 \frac{\alpha \beta_2 t}{\beta_1^2} - \Delta\beta_2 \frac{\alpha}{\beta_1} t + \Delta x \cos nt + \Delta y \sin nt + \gamma \cdot f_1 \end{aligned} \right\} (5)$$

indem $\gamma \cdot f$ bzw. $\gamma \cdot f_1$ die Aenderung bezeichnet, welche die beiden Coordinaten dadurch erfahren, dass man dieselben nicht (wie die Beobachtungen) auf die Mitte $\frac{A+B}{2}$, sondern einen anderen die Entfernung AB in einem constanten Verhältnisse theilenden Punkt bezieht. Dieser Punkt wird

dann als mit dem Schwerpunkte von A und B zusammenfallend angesehen werden können. Die Zahlencoefficienten sind so angesetzt worden, dass f bzw. f_1 den Betrag bedeutet, welchen man zu den auf $\frac{A+B}{2}$ bezogenen p und ϱ addiren muss, um die auf B bezogenen Coordinaten zu erhalten. Im Uebrigen verweise ich in Bezug auf diesen Punkt auf die Abhandlung I.

Liegen eine Reihe von Δp und $\Delta \varrho$ vor, so wird man aus ihnen die 7 Unbekannten

$$\Delta \alpha, \Delta \beta, \Delta \beta_1, \Delta \beta_2, \Delta x, \Delta y, \gamma$$

nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmen, indem man

$$(\varrho \Delta p)^2 + (\Delta \varrho)^2$$

zu einem Minimum macht.

Der ersten Ausgleichung lege ich folgende Positionswinkel (p in der Tabelle) und Distanzen (ϱ) zu Grunde. Da ich auf die einzelnen Beobachter später eingehend zu sprechen komme und neue Normalörter bilden werde, ist es unnöthig auseinander zu setzen, wie ich dieselben gebildet habe. Dieselben sind aus den Daten in I hervorgegangen mit Hinzuziehung neuer Beobachtungen.

	p	ϱ	p_R	Δp	$\Delta \varrho$	IV		B-IV	
	0	$''$	0	0	$''$	0	$''$	0	$''$
1824.0	160.45	5.566	160.04	+ 0.41	- 0.043	158.51	5.584	+ 1.94	- 0.018
31.0	155.18	5.878	156.26	- 1.08	+ 0.278	155.70	851	- 0.52	+ 0.027
35.0	151.08	5.916	154.10	- 3.02	+ 0.316	151.57	795	- 0.49	+ 0.121
41.0	148.99	5.444	150.86	- 1.87	- 0.156	149.55	485	- 0.56	- 0.041
45.0	150.69	5.513	148.70	+ 1.99	- 0.087	149.54	563	+ 1.15	- 0.050
48.0	148.33	5.632	147.08	+ 1.25	+ 0.032	147.78	713	+ 0.55	- 0.081
52.0	142.48	5.714	144.92	- 2.44	+ 0.114	143.66	739	- 1.18	- 0.025
55.0	140.87	5.577	143.30	- 2.43	- 0.023	141.27	584	- 0.40	- 0.007
58.0	139.92	5.488	141.68	- 1.76	- 0.112	140.58	429	- 0.66	+ 0.059
61.0	140.59	5.440	140.06	+ 0.53	- 0.160	140.78	417	- 0.20	+ 0.023
64.0	139.93	5.567	138.44	+ 1.49	- 0.033	140.13	554	- 0.20	+ 0.013
68.0	135.91	5.738	136.28	- 0.37	+ 0.138	136.62	717	- 0.71	+ 0.021
71.0	133.48	5.726	134.66	- 1.18	+ 0.126	133.33	660	+ 0.15	+ 0.066
74.0	132.22	5.578	133.04	- 0.82	- 0.022	131.27	488	+ 0.95	+ 0.090
78.0	131.53	5.442	130.88	+ 0.65	- 0.158	130.81	357	+ 0.72	+ 0.085
81.0	130.99	5.472	129.26	+ 1.73	- 0.128	130.44	446	+ 0.55	+ 0.006
83.0	129.23	5.465	128.18	+ 1.05	- 0.135	129.31	545	- 0.08	- 0.080
86.0	126.60	5.417	126.56	+ 0.04	- 0.183	126.45	637	+ 0.15	- 0.220

Als Näherungswerthe wurden angenommen:

$$n = 20^{\circ}$$

$$p_R = 146^{\circ}00 - 0^{\circ}540 (t - 1850.0)$$

$$\varrho = \varrho_0 = 5''600; \text{ also } \beta_2 = 0$$

Die Differenzen, welche diese Formeln zurücklassen, sind unter Δp und $\Delta \varrho$ angeführt. Um die Bedingungsgleichungen in passender Form aufzustellen, sollen diejenigen Grössen, welche in Graden ausgedrückt werden, mit dem Index 0 und die, welche in Bogensekunden angegeben sind, mit '' versehen werden. Ist dann noch $\varepsilon^0 = 57.296$, so hat man zu setzen als neue Unbekannte:

$$\frac{\varepsilon \Delta \alpha''}{10} = (1) \qquad \frac{x'' \varepsilon^0}{10} = (5)$$

$$\Delta \beta^0 = (2) \qquad \frac{y'' \varepsilon^0}{10} = (6)$$

$$10 \Delta \beta_1^0 = (3) \qquad 10 \gamma = (7)$$

$$400 \Delta \beta_2^0 = (4)$$

und die Gleichungen (5) werden:

$$\begin{aligned} \varrho \Delta p = \varrho(2) + \left(\frac{t}{10}\right) \varrho(3) + \left(\frac{t}{20}\right)^2 \varrho(4) - 10 \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right) \sin nt(5) \\ + 10 \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right) \cos nt(6) + \frac{f^0 \varrho}{10} (7) \end{aligned}$$

$$\varepsilon^0 \Delta \varrho = 10 (1) - \varepsilon^0 \frac{\alpha}{\beta_1} \cdot \frac{t}{400} (4) + 10 \cos nt(5) + 10 \sin nt(6) + \frac{f_1'' \varepsilon^0}{10} (7)$$

Dem obigen zufolge ist hier zu setzen:

$$\beta = 146.00, \quad \beta_1 = -0.540, \quad \alpha = 5.600$$

Ferner wurden die Factoren f^0 und f_1'' aus den betreffenden Angaben in I (pg. 56, 57) entnommen und die Zeit wurde von 1850.0 in Jahren gerechnet.

Die Bedingungsgleichungen sind, wenn die Logarithmen der Coefficienten angegeben werden:

a) in Positionswinkel.

(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	
0.7455	1.1605 n	0.9734	0.5314	0.9703 n	0.4268	= 0.3583
0.7693	1.0480 n	0.7247	0.5551	0.9940	0.4166	0.8027 n
0.7720	0.9481 n	0.5222	0.9614 n	0.7228	0.3890	1.2520 n
0.7359	0.6902 n	0.0423	— ∞	0.9877 n	0.2370	1.0078 n
0.7414	0.4404 n	9.5373	0.9866	0.2329	0.0424	1.0402
0.7507	0.0517 n	8.7507	0.8105	0.8867	9.8237	0.8476
0.7569	0.0580	8.7569	0.8168 n	0.8930	9.9874 n	1.1443 n
0.7464	0.4454	9.5423	0.9916 n	0.2379 n	9.6156 n	1.1320 n
0.7394	0.6425	9.9435	0.5253 n	0.8642 n	9.9923 n	0.9849 n
0.7356	0.7770	0.2163	0.7955	0.8717 n	0.1637 n	0.3599
0.7456	0.8918	0.4358	0.9908	0.2371	0.2370 n	0.9188
0.7588	1.0140	0.6672	— ∞	1.0106	0.2136 n	0.3270 n
0.7579	1.0801	0.8002	0.9472 n	0.7086	9.7535 n	0.8297 n
0.7465	1.1267	0.9048	0.9358 n	0.6973 n	9.4708 n	0.6603 n
0.7358	1.1829	1.0280	0.5216	0.9606 n	8.9788	0.5487
0.7382	1.2295	1.1188	0.9833	0.2296 n	0.2337	0.9762
0.7376	1.2561	1.1726	0.9269	0.6884	0.3081	0.7588
0.7338	1.2901	1.2443	— ∞	0.9856	0.1067	9.3358

b) in Distanz.

(1)	(4)	(5)	(6)	(7)	
1.0000	1.5868 n	0.9730 n	0.5341 n	9.6875	= 0.2896 n
1.0000	1.4506 n	0.9730 n	0.5341 n	0.2084	1.2022
1.0000	1.3478 n	0.6990	0.9375	0.3168	1.2578
1.0000	1.1261 n	1.0000 n	— ∞	0.4357	0.9512 n
1.0000	0.8708 n	0.2397 n	0.9934 n	0.4733	0.6976 n
1.0000	0.4729 n	0.8843	0.8081 n	0.4766	0.2633
1.0000	0.4729	0.8843	0.8081	0.4571	1.0885
1.0000	0.8708	0.2397 n	0.9934	0.4238	0.1199 n
1.0000	1.0749	0.9730 n	0.5341	0.3547	0.8073 n
1.0000	1.2132	0.8843 n	0.8081 n	0.2205	0.9622 n
1.0000	1.3180	1.2397	0.9934 n	0.9195	0.2766 n
1.0000	1.4271	1.0000	— ∞	0.4483 n	0.8980
1.0000	1.4941	0.6990	0.9375	0.0437 n	0.8585
1.0000	1.5521	0.6990 n	0.9375	0.2220 n	0.1005 n
1.0000	1.6190	0.9730 n	0.5341 n	0.2551 n	0.9568 n
1.0000	1.6632	0.2397	0.9934 n	0.1797 n	0.8653 n
1.0000	1.6904	0.6990	0.9375 n	0.1045 n	0.8885 n
1.0000	1.7281	1.0000	— ∞	9.9568 n	1.0206 n

Die Normalgleichungen nach der Bedingung

$$(\rho \Delta p)^2 + (\varepsilon^0 \Delta \rho)^2 = \text{Min.}$$

aufgestellt, werden in logarithmischer Gestalt:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	
3.25527	—	—	3.36218	1.73191	2.19435 n	2.16453	= 1.86183 n
—	2.74999	2.66081	2.74559	1.85594	1.79699	1.71425	2.31810
—	2.66081	3.34765	5.01379	2.22102	2.23561	1.81365 n	2.54176
3.36218	2.74559	3.01379	4.23260 n	2.83913	2.56908	2.52012 n	3.30789 n
1.73191	1.85594	2.22102	2.83913	3.25489	0.96848 n	1.54370	3.19673
2.19435 n	1.79699	2.23561	2.56908	0.96848 n	3.24636	1.28398	2.57548
2.16453	1.71425	1.81365 n	2.52012 n	1.54370	1.28398	2.04493	1.68547

und ihre Auflösung

$$\begin{array}{ll} (1) = + 0.2195 & (3) = + 0.2489 \\ (2) = - 0.4943 & (4) = - 0.1886 \\ (5) = + 0.9454 & (7) = - 0.3703 \\ (6) = + 0.1955 & \end{array}$$

Nach den obigen Festsetzungen folgt hieraus:

$$\begin{aligned} \alpha'' &= + 0''.038 & \Delta\beta_2^0 &= - 0^0.1886 \left(\frac{1}{20}\right)^2 & \gamma &= - 0.037 \\ \Delta\beta^0 &= - 0^0.494 & x'' &= + 0''.1650 \\ \Delta\beta_1^0 &= + 0^0.0249 & y'' &= + 0''.0341 \end{aligned}$$

Wir haben also jetzt folgende Formeln:

$$\left. \begin{aligned} p &= 145^0.506 - 0^0.5151 t - 0^0.1886 \left(\frac{t}{20}\right)^2 - 1^0.688 \sin 20^0 t \\ &\quad + 0^0.349 \cos 20^0 t - 0.037 f \\ \varrho &= 5''.638 - 0''.0489 \left(\frac{t}{10}\right) + 0''.165 \cos 20^0 t + 0''.0341 \cos 20^0 t - 0.037 f_1 \end{aligned} \right\} \text{(IV)}$$

In dieser Form erfüllt in der That der nicht periodische Theil der beiden Formeln sehr nahe die Gleichung $\frac{e^2 dp}{dt} = \text{Const.}$, nämlich so lange als

$$(1 + 0.00183 t) (1 - 0.00087 t)^2 = 1$$

und dies ist für die in Frage kommenden t beinahe vollkommen der Fall.

Die Darstellung, welche die Beobachtungen durch IV erfahren, ist in der obigen Zusammenstellung (pg. 59) gegeben. Dort sind unter IV die aus der Formel folgenden Positionswinkel und Distanzen nebst den Differenzen $B-IV$ angeführt. In der Hauptsache sind jetzt schon die auffallenden Abweichungen fortgeschafft. Indessen ist es doch wünschenswerth, einen besseren Anschluss zu erlangen. Jedenfalls müssen die Normalörter, welche bis jetzt in ziemlich provisorischer Gestalt vorlagen, mit grösserer Sorgfalt gebildet werden. Denn nur dann haben wir ein Recht, uns über die nicht wegzuschaffenden Differenzen zwischen Beobachtung und Theorie eine bestimmte Ansicht zu bilden.

Ich habe nun zunächst die persönlichen Fehler, mit denen die Beobachtungen des Sternes C , wie wir sehen werden, in hohem Grade behaftet sind, auf einem von dem der früheren Abhandlung verschiedenen Wege zu ermitteln gesucht. Ich habe nämlich nur nahezu gleichzeitige Messungen verschiedener Astronomen mit Hülfe der Formeln IV auf gleiche Zeit reducirt und dann verglichen. Bildet man dann ein gewisses Normalsystem dadurch, dass man die absoluten Correctionen so bestimmt,

dass sie im Mittel von sehr vielen Beobachtern nahe Null werden, so kann man allerdings völlig unabhängig von den theoretischen Resultaten die persönlichen Fehler bestimmen. Dieser Weg ist aber im vorliegenden Falle äusserst unsicher, weil, wie schon früher erwähnt, nahezu gleiche Beobachtungszeiten sehr sparsam vorkommen, die Verbindung der einzelnen Beobachter unter einander also nur lose ist. Ich führe deshalb die auf mühsamen und weitläufigen Rechnungen beruhenden Resultate nicht an, sondern lasse gleich die Normalörter, welche auf diese Weise gewonnen sind, folgen. Es wird dies um so mehr genügen, als ich weiter unten die Zusammenziehung des ganzen Beobachtungsmateriales ausführlich vornehmen werde und dabei auf die Besprechung der constanten Fehler zurückkommen muss.

Die weitere Rechnung wurde also auf folgende Normalörter gegründet, bei welchen Messungen aus den letzten Jahren berücksichtigt werden konnten, die mir erst nach Ableitung der Formel IV bekannt geworden sind.

	ρ	ϱ	\sqrt{g}	M_E	M_F
1824.20	$127.00 + 32.99$	5.317	3	352.8	15.1
31.20	28.38	5.731	4	216.5	231.9
35.20	24.39	5.658	4	160.4	150.1
41.20	22.66	5.290	4	25.6	27.3
45.20	23.53	5.406	5	324.1	305.5
48.20	20.82	5.467	5	296.1	244.1
52.20	15.82	5.596	4	141.8	162.3
55.20	13.26	5.437	5	87.4	100.9
58.20	12.88	5.310	5	44.5	39.4
61.20	13.81	5.388	5	327.1	338.0
64.20	12.82	5.416	4	306.8	276.6
68.20	8.90	5.537	4	166.1	194.8
71.20	6.58	5.549	6	130.6	133.4
74.20	4.94	5.434	6	71.7	72.0
78.20	4.33	5.307	7	6.5	350.2
81.20	4.20	5.520	5	261.7	288.8
84.20	1.81	5.647	5	206.3	227.4
87.20	— 0.26	5.593	4	192.2	166.1

Die beigelegten abgerundeten Wurzeln aus den Gewichten geben zu erkennen, dass es keinen wesentlichen Einfluss auf die folgenden Resultate ausüben kann, wenn man sich der etwas vereinfachten Rechnung wegen erlaubt, von den Gewichten ganz abzusehen. Dies ist in der That im Folgenden geschehen.

Ich will nun zur Darstellung der obigen Normalörter einen viel allgemeineren Ansatz machen als es bisher geschehen ist. Offenbar liegt

hier ein ganz ähnliches Problem vor, wie bei der Bearbeitung der sogenannten veränderlichen Eigenbewegung des Sirius zu lösen war und wobei es sich darum handelte, aus der scheinbaren Bahn des Sirius am Himmel die Elemente seiner Revolutionsbewegung um den lichtschwachen Begleiter oder eigentlich um den Schwerpunkt zwischen beiden Körpern zu bestimmen. Ich werde hier eine Methode anwenden, welche auch bei jenen Untersuchungen mit Vortheil eintreten könnte und welche an die Vorschriften anknüpft, die man wohl als die einfachsten bei der Berechnung einer Doppelsternbahn aufstellen kann.

Die scheinbare Bahn des Sternes C um den Schwerpunkt S_2 des dunklen Begleiters und C ist eine Ellipse, welche die Projection von S_2 umschliesst. Nennt man x und y die Coordinaten der Projection von C in Bezug auf ein beliebiges Coordinatensystem, dessen Anfang nur in grosser Nähe von C liegen muss, damit x und y genügend klein seien und ξ , η die Coordinaten des Punktes S_2 , so lautet die Gleichung der genannten Ellipse:

$$\beta(x - \xi)^2 + \gamma(y - \eta)^2 + 2\delta(x - \xi)(y - \eta) + 2\varepsilon(x - \xi) + 2\zeta(y - \eta) - 1 = 0 \quad (6)$$

Die Grössen x und y sind durch die Beobachtungen direct gegeben, dagegen sind ξ und η nur näherungsweise bekannt. Hat man aber die Kenntniss solcher Näherungswerthe erlangt, so giebt jede Beobachtung von C eine Gleichung von der Form (6) zur Bestimmung der Constanten β , γ etc. Die so bestimmten Constanten werden nun wieder nur als Näherungswerthe zu betrachten sein. Jetzt kann aber aus dem ganzen verfügbaren Beobachtungsmateriale eine Verbesserung aller vorkommenden unbekanntenen Grössen leicht und unter Umständen auch sicher abgeleitet werden. Bezeichnet man die gesuchten Correctionen dadurch, dass man vor die zugehörige Grösse ein A setzt, so wird die zu erfüllende Bedingungsgleichung so geschrieben werden können.

Man setze

$$-2(\beta x' + \delta y' + \varepsilon) = A; \quad x' = x - \xi$$

$$-2(\gamma y' + \delta x' + \zeta) = B; \quad y' = y - \eta$$

dann wird

$$A\beta \cdot x'^2 + A\gamma \cdot y'^2 + A\delta \cdot 2x'y' + A\varepsilon \cdot 2x' + A\zeta \cdot 2y' + A\xi \cdot A + A\eta \cdot B + n = 0$$

worin n die linke Seite von (6) ist, wenn hierin die Näherungswerthe

eingesetzt werden. Die Verbesserungen $\Delta\xi$ und $\Delta\eta$ hängen natürlich von so vielen Constanten ab, als in den Formeln enthalten sind, welche diese Grössen bestimmen. So wird z. B. im vorliegenden Falle, die Bewegung des Schwerpunktes S_2 durch

$$\xi = \varrho_0 \cos(\mu t + \nu)$$

$$\eta = \varrho_0 \sin(\mu t + \nu)$$

genügend genau bestimmt. Hier ist

$$\Delta\xi = \frac{\Delta\varrho_0}{\varrho_0} \xi - (\Delta\nu + t\Delta\mu)\eta$$

$$\Delta\eta = \frac{\Delta\varrho_0}{\varrho_0} \eta + (\Delta\nu + t\Delta\mu)\xi$$

also

$$\Delta\xi \cdot A + \Delta\eta \cdot B = \frac{\Delta\varrho_0}{\varrho_0} (A\xi + B\eta) + (\Delta\nu + t\Delta\mu)(B\xi - A\eta)$$

und das ganze Problem hängt von den 8 Constanten

$$\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \varrho_0, \mu, \nu$$

ab. In ferner Zukunft, wo es gelingen wird, für die Bewegung von S_2 eine Ellipse zu bestimmen, müssen natürlich die 7 Bestimmungsstücke dieser elliptischen Bewegung aufgenommen werden und man hat dann ein System von linearen Gleichungen mit 12 Unbekannten aufzulösen. Hierzu kommt noch eine Grösse, welche dem früheren γ entspricht und angiebt um wieviel man sich von der Mitte $\frac{A+B}{2}$ nach B (in Einheiten dieser Entfernung) entfernen muss, um den Punkt zu erhalten, um welchen die Kepler'sche Bewegung stattfindet, der also als der Schwerpunkt von A und B angesehen werden darf. Im Folgenden ist auf dieselbe keine Rücksicht genommen worden, weil sich oben bei Formel IV und auch früher schon in I herausgestellt hat, dass γ sehr klein ist. Es kommt dies darauf hinaus, dass es bei der Betrachtung der Bewegung des Sternes C erlaubt ist, die Massen der beiden Sterne A und B einander gleich zu setzen. Es wird nicht unwichtig sein zu bemerken, dass auch die Helligkeit der beiden Sterne nicht gerade gegen dieses Resultat spricht. Dass freilich, entsprechend einem negativen γ , der Stern A heller als B ist, muss als ein zufälliges Zusammentreffen bezeichnet werden.

Hat man auf solche Weise einmal genügend zuverlässige Werthe für die Constanten β, γ etc. erhalten, so ist die Bestimmung der wirklichen Bahn von C um S_2 durch folgende höchst einfache Formeln¹⁾ ausführbar. In der üblichen und auch bei allen Angaben dieser und der früheren Abhandlung gebrauchten Bezeichnungsweise erhält man folgende Rechenvorschrift. Man setze:

$$\begin{aligned}\mu &= \gamma + \zeta^2 \\ \nu &= \beta + \varepsilon^2 \\ \sigma &= \delta + \zeta \varepsilon\end{aligned}$$

dann ist

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 2 \Omega &= \frac{-2 \sigma}{\mu - \nu}; \quad \cos 2 \Omega \text{ hat das Zeichen von } \mu - \nu \\ \frac{1}{p^2} &= \frac{\mu + \nu}{2} - \frac{\mu - \nu}{2} \cos 2 \Omega + \sigma \sin 2 \Omega \\ \operatorname{tg}^2 i &= (\mu + \nu) p^2 - 2 \\ \frac{e}{p} \sin \lambda &= (-\varepsilon \sin \Omega + \zeta \cos \Omega) \cos i \\ \frac{e}{p} \cos \lambda &= (\varepsilon \cos \Omega + \zeta \sin \Omega)\end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \operatorname{tg} 2 \Omega \\ \frac{1}{p^2} \\ \operatorname{tg}^2 i \\ \frac{e}{p} \sin \lambda \\ \frac{e}{p} \cos \lambda \end{aligned}} \right\} (7)$$

Hiermit sind alle Elemente, welche sich auf Form und Lage der Ellipse beziehen, gegeben. Die Elemente, welche die Bewegung in der Ellipse bestimmen, berechnet man hierauf gesondert aus den vorhandenen Zeitangaben. Durch die rechtwinkligen Coordinaten sind die Positionswinkel p und Distanzen ϱ gegeben, indem

$$\begin{aligned}x - \xi &= \varrho \cos p \\ y - \eta &= \varrho \sin p\end{aligned}$$

Dann ist bekanntlich die mittlere Anomalie M bestimmt durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} (\lambda + \nu) &= \sec i \cdot \operatorname{tg} (p - \Omega) \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} E &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} \nu \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \\ M &= E - e \sin E\end{aligned}$$

Jede vorliegende Zeitangabe t , für welche p und ϱ also auch M gilt, giebt dann eine lineare Gleichung

$$M = n t - \varepsilon \quad (8)$$

1) Ueber die Ableitung derselben soll an einem andern Orte berichtet werden.

zur Bestimmung der mittleren Bewegung n und der Perihelzeit T , indem $\epsilon = nT$ gesetzt worden ist.

Zur Anwendung der vorstehenden Vorschriften ¹⁾ auf die Bahn, welche C um S_2 beschreibt, war es zunächst nöthig, zuverlässige Näherungswerte für ξ und η zu beschaffen. Diese habe ich im Anschlusse an die mit den ersten Normalörtern geführten Rechnungen nach einigen Versuchen gefunden. Zunächst ist der leichteren Uebersicht wegen von allen Positionswinkeln $127^{\circ}00$ abgezogen worden. Mit anderen Worten, die X-Axe unseres Coordinatensystems liegt in der Richtung des Positionswinkels $127^{\circ}0$. Unter dieser Voraussetzung lauten die gefundenen Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= 5''.454 \cos [18^{\circ}41 - 0^{\circ}513 (t - 1850.2)] \\ \eta &= 5''.454 \sin [18^{\circ}41 - 0^{\circ}513 (t - 1850.2)] \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Es hat sich nämlich nach mannigfachen Versuchen herausgestellt, dass diese Ausdrücke, die selbstverständlich dem Flächensatze genügen, völlig ausreichen und dass es nicht nöthig ist, wie früher, in Positionswinkel ein mit t^2 und in Distanz ein dem entsprechendes mit t proportionales Glied anzunehmen. Mit diesen Werthen für ξ und η werden nun die den 18 Normalörtern entsprechenden Bedingungsgleichungen, in denen die Coëfficienten logarithmisch angesetzt sind und bei denen alle Distanzen mit 10 multiplicirt wurden:

β	γ	δ	ϵ	ζ	=
0.5016	8.7861	9.9449 "	0.5518 "	9.6941	1
0.7372	0.3524	0.8458	0.6696	0.4772	1
0.8149	9.6112	0.5141 "	0.7085	0.1066 "	1
0.2781	9.9611	0.4206	0.4401 "	0.2815 "	1
0.2665	0.6255	0.7470 "	0.4343 "	0.6137	1
9.0425	0.2142	9.9293 "	9.8222 "	0.4081	1
0.5056	0.0308	0.5692 "	0.5538	0.3164 "	1
9.3072	0.7663	0.3378 "	9.9546	0.6841 "	1
0.0711	0.4319	0.5525	0.3365 "	0.5169 "	1
9.8777	9.8126	0.1461 "	0.2398 "	0.2073	1
9.6716	0.2896	0.2817 "	0.1368 "	0.4458	1
9.8700	8.2612	9.3666 "	0.2360	9.4316 "	1
0.0567	9.9012	0.2799 "	0.3293	0.2516 "	1
7.9365	0.0956	9.3171	9.2692 "	0.3488 "	1
0.3433	8.3796	9.6625 "	0.4727 "	9.4908	1
9.5015	0.4372	0.2704	0.0518	0.5196	1
0.5632	9.8713	0.5183	0.5826	0.2367	1
0.2866	8.9493	9.9190	0.4443	9.7757	1

1) Will man ganz strenge im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate verfahren, so müssen, nachdem Näherungswerte bekannt sind, die bekannten Differentialformeln in passender

Hieraus gehen als Normalgleichungen hervor:

$$\begin{array}{r}
 + 125.96 \beta + 38.32 \gamma + 9.58 \delta + 61.29 \varepsilon + 11.83 \zeta = + 34.83 \\
 + 38.82 + 83.57 - 13.49 + 4.35 - 0.60 = + 27.36 \\
 + 9.58 - 13.49 + 155.27 + 23.65 + 8.70 = - 2.96 \\
 + 61.29 + 4.35 + 23.65 + 139.32 - 5.92 = + 7.72 \\
 + 11.83 - 0.60 + 8.70 - 5.92 + 109.41 = + 2.84
 \end{array}$$

Die Auflösung dieses Systemes ergibt

$$\begin{array}{l}
 \log \beta = 9.3704 \\
 \log \gamma = 9.3431 \\
 \log \delta = 7.7994_n \\
 \log \varepsilon = 8.7312_n \\
 \log \zeta = 6.8777_n
 \end{array}$$

Aus den Gleichungen (7) findet man nun leicht, wenn die Werthe für die linearen Strecken wieder durch 10 dividirt werden, um dieselben in Bogensekunden zu haben, die Elemente

$$\left. \begin{array}{l}
 \Omega = 71.958 \\
 \lambda = 109.677 \\
 i = 17^{\circ}352 \\
 e = 0.1106 \\
 a = 0''.217
 \end{array} \right\} (V_a)$$

Wollte man Ω wieder von der gewöhnlichen Nullrichtung (Stundenkreis) an zählen, so müsste man $127^{\circ}00$ hinzufügen. Die Bahn von C um S_2 ist also wenig excentrisch und wenig gegen die Projectionsebene geneigt. Gleiches gilt für die Bahn von B um A und gleiches ist (wenn dieser Schluss gestattet ist) für die Bewegung des Schwerpunktes S_2 um den Schwerpunkt von A und B nicht unwahrscheinlich. Es scheinen sich also in dieser Beziehung die Verhältnisse bei ζ Cancri denjenigen zu nähern, welche in unserem Sonnensystem herrschen.

Jetzt hätte nun die oben auseinandergesetzte Methode der Verbesserung der Constanten eintreten sollen. Ich habe aber diese neue und etwas mühsamere Ausgleichung nicht ausgeführt, weil sich mir die Ueber-

Anordnung in Anwendung treten. Ich bezweifele aber, dass es nothwendig sein wird, diesen strengen Weg einzuschlagen und die oben gegebene einfachere Auflösung der vorliegenden Aufgabe zu verlassen.

zeugung aufdrängte, dass hierdurch ein engerer Anschluss an die Beobachtungen nicht zu erzielen sei. Ausserdem kommen wir durch die folgenden Rechnungen wieder auf dieselben Werthe der die Bewegung von S_2 bestimmenden Constanten zurück und diese sind es doch hauptsächlich, über deren Richtigkeit die neue Ausgleichung hätte Aufschluss geben können.

Bestimmt man nun aus den 18 Gleichungen (8) nach der Methode der kleinsten Quadrate, die hier nur als gutes Hilfsmittel ohne tiefere Bedeutung im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung auftritt, die Constanten n und ε , so ergibt sich folgende Formel:

$$M = 203^{\circ}1 - 20^{\circ}460 (t - 1850.2) \quad (V_b)$$

Man wird nicht erwarten können, dass diese Formel mit den aus den Elementen (V_a) berechneten M so gut übereinstimmt, wie bei gewöhnlichen Doppelsternbahnen. Man bedenke nur, aus welchen äusserst kleinen Aenderungen gemessener Grössen die Elemente (V_a) abgeleitet werden mussten und wie die kleinen Beobachtungsfehler in so sehr vergrössertem Massstabe auf die Grösse M übergehen. Es ist aber doch interessant, beide Werthreihen zu vergleichen. Ich habe deshalb in der obigen Zusammenstellung die aus den Elementen direct berechneten Werthe M_E und die aus Formel (V_b) folgenden M_F neben einander gestellt. Mit Hülfe der durch (V_a) und (V_b) dargestellten Elemente ergibt sich nun leicht die Distanz ϱ und der Positionswinkel p des Sternes C von $\frac{A+B}{2}$ aus, aus den entsprechenden Grössen ϱ_0 und p_0 des Punktes S_2 . Es ist nämlich, wenn man mit r und π Distanz und Positionswinkel von C für ein in den Punkt S_2 gelegtes Coordinatensystem bezeichnet

$$\varrho_0 \sin (p_0 - p) = r \sin (p - \pi)$$

$$\varrho_0 \cos (p_0 - p) = \varrho - r \cos (p - \pi)$$

oder genügend genau:

$$p_0 - p = \Delta p = \frac{r}{\varrho_0} \sin (p - \pi)$$

$$\varrho_0 - \varrho = \Delta \varrho = - r \cos (p - \pi)$$

wobei noch bemerkt werden kann, dass nach (9)

$$\varrho_0 = 5^{\circ}.454; p_0 = 18^{\circ}.41 - 0^{\circ}.513 (t - 1850.2) \quad (10)$$

Ich führe nun das Resultat dieser Rechnung an. Die berechneten Werthe sollen durch ein angehängtes R bezeichnet werden.

	p_R	q_R	$B - R$	
1824.20	32.10	5.268	+ 0.89	+ 0.049
31.20	28.86	676	- 0.50	+ 0.055
35.20	24.31	604	+ 0.08	+ 0.054
41.20	22.55	266	+ 0.11	+ 0.024
45.20	23.08	442	+ 0.45	- 0.036
48.20	20.83	639	- 0.01	- 0.172
52.20	16.19	653	- 0.37	- 0.057
55.20	13.55	482	- 0.29	- 0.045
58.20	13.07	295	- 0.19	+ 0.015
61.20	14.00	309	- 0.19	+ 0.079
64.20	13.41	515	- 0.59	- 0.099
68.20	9.40	685	- 0.50	- 0.148
71.20	5.98	614	+ 0.60	- 0.065
74.20	3.92	411	+ 1.02	+ 0.023
78.20	4.52	275	- 0.19	+ 0.032
81.20	4.71	438	- 0.51	+ 0.084
84.20	2.54	631	- 0.73	+ 0.016
87.20	- 0.92	671	+ 0.66	- 0.078

Die Differenz der beobachteten Normalörter (B) und der nach Formel (10) berechneten sind hier unter $B - R$ gegeben. Aus diesen Zahlenreihen sieht man, dass eine mit der Zeit proportionale Correction im Positionswinkel keinen besseren Anschluss hervorbringen wird. Auch die Constante in der Formel (10) für p_0 ergibt sich im Mittel wenig verschieden. Man findet nämlich als nothwendige Correction $+ 0^{\circ}01$. Den Distanzen dagegen genügt am besten der Werth $q_0 = 5''.439$. Man kommt also sehr nahe auf die am Anfange der ganzen Rechnung gemachten Annahmen zurück, indem man die Formeln erhält

$$\left. \begin{aligned} q_0 &= 5''.439 \\ p_0 &= 18^{\circ}42' - 0^{\circ}513 (t - 1850.2) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Ueberblickt man nun diese Fehlerreihe, so wird es auffallen, dass die Darstellung in Positionswinkel entschieden besser ist, wie in Distanz. Beide Fehlerreihen sind aber nicht ganz befriedigend. Man könnte nun zunächst den Grund der wenig guten Uebereinstimmung in der mangelhaft geführten Ausgleichsrechnung suchen. Abgesehen aber davon, dass ich nicht glaube, dass durch eine strenge geführte Rechnung eine wesentliche Verbesserung gewonnen werden könne, wäre diese immerhin nicht ganz kurze Rechnung meiner Meinung nach unter den obwaltenden Umständen ziemlich nutzlos. Jedenfalls haben wir, wie im nächsten Para-

graphen näher aus einander gesetzt werden soll, allen Grund zu der Annahme, dass auch die verbesserten Normalörter (pg. 63) noch wesentlich durch die den Beobachtungen anhaftenden persönlichen Fehler entstellt sind. Es muss also zunächst eine Untersuchung in dieser Richtung vorgenommen werden.

In Rücksicht auf diesen Umstand ist es offenbar gleichgültig, ob wir alle Distanzen und Positionswinkel um eine kleine Constante ändern. Es ist also auch vollkommen gestattet, statt mit den obigen Werthen für ϱ_0 und p_0 mit den folgenden, äusserst wenig von diesen verschiedenen, (bei p_0 werden nun wieder 127°00 addirt)

$$\left. \begin{aligned} \varrho_0 &= 5''.438 \\ p_0 &= 145^{\circ}46 - 0^{\circ}513 (t - 1850.2) \end{aligned} \right\} \quad (V)$$

zu rechnen. Ursprünglich wurden die, durch einen unbedeutenden Rechenfehler veränderten Formeln (V) an Stelle von (11) gewonnen. Nach der gemachten Bemerkung sind diese aber ebenso berechtigt wie jene, weshalb ich eine Correctur der nachfolgenden Zahlen nicht vorgenommen habe. Zunächst lasse ich, des Folgenden wegen, eine Ephemeride für den Stern *C* berechnet nach Elementen V , V_a und V_b folgen. Dieselbe dürfte stets die betreffenden Coordinaten bis auf wenige Einheiten der letzten Stelle richtig ergeben.

	p	e		p	e		p	e
	$^{\circ}$	$''$		$^{\circ}$	$''$		$^{\circ}$	$''$
1820.2	158.62	5.385	1843.2	150.23	5.291	1866.2	138.74	5.620
21.2	158.47	321	44.2	150.33	351	67.2	137.63	654
22.2	158.54	272	45.2	150.13	426	68.2	136.45	669
23.2	158.81	248	46.2	149.64	501	69.2	135.26	664
24.2	159.15	252	47.2	148.88	569	70.2	134.10	640
25.2	159.42	288	48.2	147.88	623	71.2	133.03	598
26.2	159.51	349	49.2	146.77	657	72.2	132.09	541
27.2	159.32	425	50.2	145.58	670	73.2	131.40	471
28.2	158.81	502	51.2	144.39	663	74.2	130.97	395
29.2	158.04	571	52.2	143.24	637	75.2	130.80	322
30.2	157.06	625	53.2	142.26	602	76.2	130.91	281
31.2	155.91	659	54.2	141.30	535	77.2	131.21	255
32.2	154.70	670	55.2	140.60	467	78.2	131.57	259
33.2	153.51	661	56.2	140.17	395	79.2	131.86	294
34.2	152.29	637	57.2	140.02	329	80.2	131.95	351
35.2	151.36	588	58.2	140.12	279	81.2	131.76	422
36.2	150.49	530	59.2	140.40	253	82.2	131.28	494
37.2	149.84	462	60.2	140.76	258	83.2	130.54	561
38.2	149.42	390	61.2	141.05	293	84.2	129.59	615
39.2	149.24	324	62.2	141.13	352	85.2	128.49	651
40.2	149.33	276	63.2	140.94	424	86.2	127.32	667
41.2	149.60	250	64.2	140.46	499	87.2	126.13	665
42.2	149.95	255	65.2	139.71	566	88.2	124.96	645
43.2	150.23	291	66.2	138.74	620			

§ 5.

Die Ermittlung der persönlichen Fehler bei den auf den Stern *C* sich beziehenden Beobachtungen ist mit noch grösseren Schwierigkeiten verknüpft als bei dem Sterne *B*. Schon bei diesem treten (vergl. § 3) hauptsächlich dadurch Unsicherheiten in der Vergleichung auf, dass die Thätigkeiten der hauptsächlichsten Beobachter zeitlich auf einander folgen, ohne eine genügende Reihe nahe gleichzeitiger Messungen aufzuweisen und wo letzterer Umstand eintritt, ein Zweifel an der Constanz der persönlichen Fehler begründet ist. Dasselbe findet natürlich auch bei dem Sterne *C* statt, der mit wenigen Ausnahmen dieselben Beobachter und dieselben Beobachtungszeiten aufweist wie der Stern *B*. Hierzu kommt nun aber noch ein Umstand, der ganz besonders ins Auge gefasst werden muss. Es unterliegt wohl schon a priori keinem Zweifel, dass die persönlichen Fehler bei einer gewöhnlichen Doppelsternmessung ganz andere sein müssen, als wenn ein Stern (*C*) mit einem Doppelstern (*A* und *B*) verglichen wird. Namentlich dürften sich, was bei der Mehrzahl der Beobachter der Fall war, dann diese Verschiedenheiten bemerkbar machen, wenn *C* direct mit der Mitte von *A* und *B* verglichen wird. Systematische Fehler, die von der Stellung des Sternes *C* gegen die Verbindungslinie *AB* abhängen, sind dann in hohem Grade wahrscheinlich und bei Beobachtern, welche zu einer zeitlichen Veränderung in der Art der Auffassung hinneigen, ist in diesem Falle eine vermehrte Veränderlichkeit zu erwarten. Aber auch, wenn direct einer der Sterne *A* und *B* mit *C* verglichen wird, ist eine Beeinflussung durch den dritten Stern nicht unwahrscheinlich. Ich glaube wenigstens, dass, wenn solche Einwirkungen sich herausstellen, man sich darüber nicht wundern kann. Bei der Complicirtheit des ganzen Vorganges, und bei der völligen Unkenntniss der Art, wie die genannten Einwirkungen bei dem einzelnen Beobachter auftreten, ist es schwer ein zureichendes Verfahren anzugeben, um die Messungen von diesen persönlichen Fehlern zu befreien. Man könnte vielleicht, wenigstens unter gewissen Voraussetzungen, der Wahrheit sich nähern, wenn man die analogen Verhältnisse bei anderen dreifachen Sternen studirt. Das ist aber ein Weg, den ich, wegen zu grosser Weitläufigkeit, hier selbstverständlich um so weniger betreten konnte, als

ein Erfolg am Ende auch ungewiss war. So bleibt nichts anderes übrig, als dieselbe Methode anzuwenden, die ich in meiner früheren Abhandlung angewandt habe. Man hat also die einzelnen Jahresmittel mit den als besten erkannten Elementen d. h. mit der letzten Ephemeride, zu vergleichen und aus den Differenzen die in passender Weise gezogenen Mittel als persönliche Fehler zu betrachten. Dass eine Vergleichung der so gefundenen Correctionen mit den aus gewöhnlichen Doppelsternbeobachtungen gefundenen oder gar die einfache Benutzung der letzteren völlig unzulässig ist, bedarf keiner Begründung. Zunächst will ich also die genannte Vergleichung ausführen. Die Beobachtungen wurden, abgesehen von eventuellen Schreib- und Druckfehlern, aus meiner früheren Abhandlung einfach herausgenommen und nur die seit jener Zeit publicirten hinzugefügt. Ein Nachweis der Quellen dürfte bei der allgemeinen Zugänglichkeit derselben nicht nothwendig sein. In den folgenden Zusammenstellungen bedeuten: g die Anzahl der Abende, p und ϱ beobachtete Positionswinkel und Distanz, Corr. die Differenz: Ephemeride — Beobachtung und zuletzt sind die corrigirten Werthe angeführt.

1. W. Struve (Σ).

	g	p	ϱ	Correct.		Corr. Werthe	
				0	"	0	"
1821.98	3	160.03	—	(— 1.48)	—	160.03	—
26.22	3	159.59	5.431	(— 0.08)	(— 0.080)	159.59	5.431
28.99	3	156.15	5.530	+ 2.05	+ 0.027	157.97	5.460
31.27	6	153.21	5.672	+ 2.62	— 0.012	155.03	5.602
32.28	4	153.18	5.810	+ 1.43	— 0.141	155.00	5.740
33.27	3	152.12	5.779	+ 1.31	— 0.120	153.94	5.709
35.31	5	149.80	5.670	+ 1.46	— 0.088	151.62	5.600
36.27	3	148.40	5.604	+ 2.05	— 0.079	150.22	5.534
			Mittel	+ 1.82	— 0.070		

Nach den Mittheilungen, welche ich in meiner ersten Abhandlung machte, sind die Beobachtungen vor 1828 als mit den späteren nicht direct vergleichbar anzusehen. Ich lasse diese uncorrigirt und gebe ihnen das halbe Gewicht der späteren.

2. Otto Struve (O. Σ).

Ich habe diesmal (vergl. darüber I pg. 73) die Beobachtungen, je nachdem sie sich auf $\frac{A+B}{2}$ oder A oder B beziehen, einzeln behandelt.

Die Jahresmittel entnehme ich direct den „Mesures corrigées etc.“ Die

Reduction auf $\frac{A+B}{2}$ wurde überall nach den Zahlen in I (pg. 56, 57) und einer neu hinzugefügten Fortsetzung, die mitzutheilen wohl unnöthig ist, ausgeführt.

a) Beobachtungen AC.

	<i>g</i>	<i>p</i> ⁰	<i>q</i> ["]	Correct.		Corr. Werthe	
				⁰	["]	⁰	["]
1840.30	7	149.67	5.369	- 0.31	- 0.096	149.18	5.271
42.29	4	149.12	5.395	+ 0.86	- 0.137	148.63	5.297
43.30	3	151.68	5.424	- 1.44	- 0.127	151.19	5.326
44.28	4	150.98	5.531	- 0.67	- 0.175	150.49	5.433
45.31	3	151.90	5.481	- 1.82	- 0.047	151.41	5.383
46.29	3	150.55	5.588	- 0.98	- 0.081	150.06	5.490
47.35	5	149.59	5.618	- 0.86	- 0.041	149.10	5.520
48.30	5	147.90	5.642	- 0.13	- 0.016	147.41	5.544
49.32	4	146.46	5.596	+ 0.17	+ 0.063	145.97	5.498
50.29	3	146.85	5.569	- 1.38	(- 0.101)	146.36	(5.471)
51.28	3	143.72	5.725	+ 0.58	- 0.064	143.23	5.627
52.32	2	143.04	5.582	+ 0.09	+ 0.051	142.55	5.484
53.30	2	140.44	5.552	+ 1.72	+ 0.043	140.81	5.454
55.31	3	140.19	5.527	+ 0.36	- 0.069	140.56	5.429
57.27	3	139.05	5.513	+ 0.98	- 0.188	139.42	5.415
58.28	1	140.07	5.484	+ 0.07	- 0.207	140.44	5.386
59.30	2	141.73	5.481	- 1.29	- 0.228	142.10	5.383
60.27	2	140.73	5.448	+ 0.05	- 0.188	141.10	5.350
61.27	3	141.34	5.489	- 0.29	- 0.192	141.71	5.391
62.33	1	140.44	5.226	+ 0.66	(+ 0.135)	140.81	(5.128)
64.30	1	139.81	5.291	+ 0.57	(+ 0.215)	140.18	(5.193)
66.27	1	136.81	—	+ 1.85	—	137.18	—
68.28	2	134.19	—	+ 2.17	—	134.56	—
70.28	4	133.71	—	+ 0.31	—	134.08	—
77.27	3	130.97	5.456	+ 0.27	- 0.201	131.34	5.358
78.29	3	132.53	5.342	- 0.93	- 0.080	132.90	5.244
79.29	3	132.81	5.375	- 0.96	- 0.076	133.18	5.277

Die einzelnen Correctionen zeigen verschiedene Eigenthümlichkeiten. Im Positionswinkel sind nicht unbeträchtliche Schwankungen zu bemerken. Im Allgemeinen scheint es hier nöthig, in *p* 2 Perioden zu unterscheiden. Ich habe (entsprechend I pg. 43) die Abtheilung bei 1853.0 vorgenommen. Es ergibt sich dann als einfaches Mittel ¹⁾

I. Periode, Correction: — 0^o49

II. Periode, Correction: + 0.37

In Distanz müssen die in Klammer gesetzten Beobachtungen ausgeschlossen werden. Sie zeigen ein so abnormes Verhalten, dass die Berechtigung dieses Verfahrens näher zu begründen wohl unnöthig ist. Das aus allen übrigen gebildete Mittel ergibt:

— 0^o097.

1) Die Gewichte der einzelnen Jahre sind bei diesen und allen folgenden Mitteln, welche zur Ableitung der persönlichen Fehler gebraucht wurden, niemals in Betracht gezogen worden.

b) Beobachtungen $\frac{A+B}{2}, C$

	<i>g</i>	<i>p</i> ₀	<i>e</i>	Correct.		Corr. Werthe	
				⁰	"	⁰	"
1864.30	1	141.10	5.490	-0.72	+0.016	139.81	5.405
66.27	1	—	5.610	—	+0.013	—	5.525
68.28	2	—	5.735	—	-0.066	—	5.650
69.32	2	135.80	5.685	-0.68	-0.024	134.51	5.600
70.28	4	—	5.743	—	-0.106	—	5.658
71.31	3	133.67	5.643	-0.74	-0.051	132.38	5.558
72.31	3	132.90	5.683	-0.89	-0.150	131.61	5.598
73.28	3	134.37	5.447	-3.00	+0.019	133.08	5.362
74.28	3	132.63	5.500	-1.67	-0.116	131.34	5.415
75.28	3	132.27	5.643	-1.46	-0.324	130.98	5.558
76.29	2	132.10	5.420	-1.16	-0.141	130.81	5.335

Das einfache Mittel ist in Positionswinkel $-1^{\circ}29$, in Distanz $-0^{\circ}085$.

c) Beobachtungen *BC*.

	<i>g</i>	<i>p</i> ₀	<i>e</i>	Correct.		Corr. Werthe	
				⁰	"	⁰	"
1844.28	3	151.27	—	-0.96	—	150.99	—
45.31	2	151.07	—	-0.99	—	150.79	—
48.30	5.2	147.83	5.731	-0.06	-0.104	147.55	5.538
49.32	4	147.19	5.779	-0.57	-0.120	146.91	5.586
50.29	3	146.49	5.757	-1.02	-0.087	146.21	5.564
51.28	3	143.78	5.991	+0.52	-0.330	143.50	5.798
52.32	4	142.03	5.777	+1.10	-0.144	141.75	5.584
55.31	3	140.10	5.679	+0.45	-0.221	140.26	5.486
57.27	3	139.18	5.604	+0.85	-0.279	139.34	5.411
58.28	1	139.86	5.640	+0.28	-0.363	140.02	5.447
59.30	2	141.43	5.503	-0.99	-0.250	141.59	5.310
60.27	2	141.72	5.507	-0.94	-0.247	141.88	5.314
61.27	3	141.63	5.502	-0.58	-0.205	141.79	5.309
62.33	1	140.21	5.460	+0.89	-0.099	140.37	5.267
64.30	1	140.33	5.202	+0.05	(+0.304)	140.49	(5.009)
66.27	1	137.14	—	+1.52	—	137.36	—
68.28	2	135.67	—	+0.69	—	135.83	—
70.28	4	133.76	—	+0.26	—	133.92	—
77.27	3	130.96	5.443	+0.28	-0.188	131.12	5.250
78.29	3	131.81	5.361	-0.21	-0.098	131.97	5.168
79.29	3	132.14	5.454	-0.28	-0.155	132.30	5.261

In diesem Falle musste ebenso wie bei *AC* verfahren werden. Im Positionswinkel ergibt sich im Mittel als Correction:

I. Periode $-0^{\circ}28$

II. Periode $+0.16$

in Distanz nach Ausschluss der offenbar ganz abweichenden Beobachtung von 1864

Correction $-0^{\circ}193$

Nach den mitgetheilten Zahlen sind die 3 verschiedenen Methoden der Beobachtung mit zum Theil sehr verschiedenen persönlichen Fehlern

behaftet. Diese letzteren aber sind der Natur der Sache gemäss nicht sicher bestimmbar, wiewohl jedenfalls zu hoffen steht, dass die gefundenen Werthe wenigstens den Hauptbestandtheil der Reduction auf das vorliegende System ergeben. Um nun die dreierlei Beobachtungsdaten in Jahresmittel zu vereinigen, habe ich hier, ebenso wie auch später, dieselbe Gewichtsbestimmung wie bei Stern *B* vorgenommen. Es hat also ein aus 1 oder 2 Abenden zusammengesetztes Mittel das Gewicht 2, ein aus mehr als 2 Abenden bestehendes das Gewicht 4 erhalten. Ein aus mehreren der 3 verschiedenen Beobachtungsmethoden *a*, *b* und *c* bestehendes hat die Summe der Gewichte als Gewicht. Ist dieses aber grösser als 4, so wurde dieselbe Zahl, also 4, als Gewichtszahl beibehalten. Dieses Verfahren ist, wie alle ähnlichen, von grosser Willkür nicht frei. Es dürfte aber doch den thatsächlichen Verhältnissen einigermaßen Rechnung tragen, indem u. A. verhütet werden sollte, dass die Beobachtungen von O. Σ nicht gar zu sehr die von andern Beobachtern herrührenden Messungen in den endgültigen Jahresmitteln verdecken.

Die auf die genannte Weise gebildeten Mittelwerthe sind nun:

Gewicht		<i>p</i>	<i>q</i>	Gewicht		<i>p</i>	<i>q</i>
1840.30	4	149.18	5.271	1860.27	4	141.49	5.332
42.29	4	148.63	5.297	61.27	4	141.75	5.350
43.30	4	151.19	5.326	62.33	4,2	140.59	5.267
44.28	4	150.74	5.433	64.30	4,2	140.16	5.405
45.31	4	151.20	5.383	66.27	4,2	137.24	5.525
46.29	4	150.06	5.490	68.28	4,2	135.20	5.650
47.35	4	149.10	5.520	69.32	4	134.51	5.600
48.30	4	147.48	5.542	70.28	4	134.00	5.658
49.32	4	146.44	5.542	71.31	4	132.38	5.558
50.29	4	146.29	5.564	72.31	4	131.61	5.598
51.28	4	143.37	5.713	73.28	4	133.08	5.362
52.32	4	142.02	5.534	74.28	4	131.34	5.415
53.30	2	140.81	5.454	75.28	4	130.98	5.558
55.31	4	140.41	5.458	76.29	2	130.81	5.335
57.27	4	139.38	5.413	77.27	4	131.23	5.304
58.28	4	140.23	5.417	78.29	4	132.44	5.206
59.30	4	141.85	5.347	79.29	4	132.74	5.269

3. Dawes (D).

	<i>g</i>	<i>p</i>	<i>q</i>	Correct.		Corr. Werthe	
1831.30	1	154.91	5.862	+ 0.88	- 0.202	155.75	5.679
32.18	5	153.43	5.876	+ 1.29	- 0.206	154.27	5.693
41.07	6	149.00	5.437	+ 0.56	- 0.184	149.84	5.254
43.22	2	149.75	5.433	+ 0.48	- 0.140	150.59	5.250
48.14	6	147.51	5.402	+ 0.43	+ 0.218	148.35	5.520
54.07	1	140.00	5.526	+ 1.42	+ 0.018	140.84	5.644

O. Σ hatte bei seiner Discussion der Dawes'schen Beobachtungen die Nothwendigkeit erkannt, 3 verschiedene Perioden zu unterscheiden. Diese sind im Vorigen durch die abtheilenden Striche angedeutet. Der Verlauf der Correctionen zeigt indess, dass hier diese Unterscheidung im Positionswinkel gar nicht und in Distanz nur theilweise nöthig ist, indem bei letzterer nur die 3. Periode ein anderes Verhalten zeigt. Im Mittel ergibt sich:

Correction im Positionswinkel $+ 0^{\circ}84$

Correction in Distanz $\left\{ \begin{array}{l} - 0''183 \\ + 0.118 \end{array} \right.$

der letzte Werth ist selbstredend ganz unsicher, vielleicht sogar illusorisch.

4. Secchi (S).

	g	p	e	Correct.		Corr. Werthe	
				$^{\circ}$	$''$	$^{\circ}$	$''$
1855.19	3	140.33	5.388	+ 0.27	+ 0.080	140.35	5.385
57.29	4	141.20	5.403	- 1.18	- 0.078	141.22	5.400
65.23	2	139.71	5.555	- 0.03	+ 0.013	139.73	5.552
66.29	2	137.61	5.650	+ 1.03	- 0.027	137.63	5.647

Im Mittel aus schlecht stimmenden Einzelwerthen wird

Correction in p $+ 0^{\circ}02$

Correction in e $- 0''003$

S erhält das Gewicht $\frac{1}{2}$.

5. Dembowski (A).

Die Messungen habe ich dem erwähnten Werke entnommen.

	g	p	e	Correct.		Corr. Werthe	
				$^{\circ}$	$''$	$^{\circ}$	$''$
1855.07	6	140.97	5.355	- 0.28	+ 0.121	141.04	5.424
56.05	3	140.33	5.290	- 0.10	+ 0.116	140.40	5.359
56.93	2	139.90	5.445	+ 0.16	- 0.098	139.97	5.514
58.15	5	139.62	5.146	+ 0.49	+ 0.136	139.69	5.215
63.05	9	140.57	5.473	+ 0.40	- 0.060	140.49	5.523
65.17	5	139.72	5.462	+ 0.02	+ 0.102	139.64	5.512
66.27	3	138.97	5.600	- 0.30	+ 0.022	138.89	5.650
67.26	4	137.85	5.577	- 0.28	+ 0.078	137.78	5.627
68.22	4	136.67	5.537	- 0.24	+ 0.132	136.59	5.587
70.21	3	134.23	5.610	- 0.14	+ 0.030	134.15	5.660
71.18	3	134.13	5.603	- 1.08	- 0.004	133.35	5.653
72.23	3	133.17	5.460	- 1.10	+ 0.079	132.39	5.513
73.23	3	132.80	5.400	- 1.42	+ 0.069	132.02	5.450
74.09	3	132.67	5.573	- 1.65	- 0.170	131.89	5.461
75.17	4	131.45	5.397	- 0.64	- 0.073	130.67	5.285
76.07	1	131.40	5.380	- 0.50	- 0.094	130.62	5.268
77.29	3	131.70	5.290	- 0.46	- 0.035	130.92	5.178
78.12	4	130.92	5.445	+ 0.62	- 0.186	130.14	5.333

Bekanntlich sind die Messungen bis 1863 als völlig verschieden von den folgenden zu betrachten, weil Methode der Beobachtung und Instrument andere waren. Eine Abtheilung nach dieser Rücksicht ist also selbstverständlich. Ich habe aber noch zwei andere Perioden (durch Striche angedeutet) unterschieden. Es finden an den erwähnten Stellen sehr deutliche Sprünge statt, die bei der Güte der vorliegenden Messungen sehr auffallend sind. Ich gebe indessen zu, dass sich gegen die Berechtigung der Abtheilung besonders in p berechnigte Zweifel hervorheben lassen.

Man findet nun im Mittel folgende Correctionen:

	p	g
I. Periode	+ 0 ^o 07	+ 0 ^o 069
II. „	— 0.08	— 0.050
III. „	— 0.78	— 0.112

6. Mädler (M).

Auf Grund der Thatsachen, die ich in meiner früheren Arbeit (S. 75) erwähnt habe, wurden die Distanzen ganz ausgeschlossen und den Positionswinkeln wurde halbes Gewicht gegeben.

	g	p	Correct.	Corr. Werth
1841.31	5	151.15	— 1.51	151.45
42.20	5	149.34	+ 0.61	149.64
43.19	6	150.86	— 0.63	151.16
44.39	6	150.82	— 0.53	151.12
47.29	1	147.33	+ 1.46	147.63
51.20	4	144.09	+ 0.30	144.39
52.25	6	141.84	+ 1.35	142.14
53.25	7	140.81	+ 1.40	141.11
54.28	10	142.10	— 0.86	142.40
55.27	4	140.25	+ 0.32	140.55
56.29	2	139.78	+ 0.38	140.08
57.27	2	139.28	+ 0.75	139.58
58.21	3	140.61	— 0.49	140.91
59.26	8	139.30	+ 1.12	139.60
60.29	4	140.86	— 0.07	141.16
61.25	2	141.43	— 0.38	141.73
62.31	3	139.25	+ 1.86	139.55

Correction + 0^o30.

7. Dunér (Du).

	g	p	ϱ	Correct.		Corr. Werthe	
				$^{\circ}$	"	$^{\circ}$	"
1869.37	3	134.88	5.401	+ 0.18	(+ 0.259)	133.32	—
70.27	1	135.90	5.360	— 1.87	(+ 0.277)	134.34	—
71.28	2	135.35	5.500	— 2.40	+ 0.094	133.79	5.450
72.33	2	134.40	5.585	— 2.40	— 0.053	132.84	5.535
74.29	2	133.35	5.387	— 2.40	+ 0.001	131.79	5.337
75.31	6	133.00	5.488	— 2.19	— 0.171	131.44	5.438
76.29	4	131.90	5.398	— 0.97	— 0.119	130.34	5.348
78.29	3	132.05	5.313	— 0.45	— 0.051	130.49	5.263

Die Distanzen zeigen grosse Differenzen, auch nachdem die beiden ersten, die offenbar mit den späteren nicht vergleichbar sind, ausgeschlossen worden sind. Ich habe deshalb den Distanzen nur halbes Gewicht gegeben. Es ergibt sich

Correction in p — 1^o56

„ in ϱ — 0^o050

8. Schiaparelli (Sp).

	g	p	ϱ	Correct.		Corr. Werthe	
				$^{\circ}$	"	$^{\circ}$	"
1875.25	8	130.41	5.382	+ 0.40	— 0.062	131.45	5.386
77.23	7	130.31	5.287	+ 0.91	— 0.032	131.35	5.291
79.27	6	130.88	5.252	+ 0.99	+ 0.046	131.92	5.256
81.30	6	130.53	5.441	+ 1.18	— 0.012	131.57	5.445
82.26	8	130.02	5.464	+ 1.22	+ 0.034	131.06	5.468
83.29	6	129.12	5.594	+ 1.33	— 0.028	130.16	5.598
84.25	7	128.17	5.585	+ 1.36	+ 0.032	129.21	5.589
85.29	5	127.44	5.599	+ 0.95	+ 0.053	128.48	5.603
87.24	13	126.03	5.524	+ 0.05	+ 0.140	125.93	5.611
88.27	12	125.13	5.610	— 0.25	+ 0.034	125.03	5.697

Die letzten zwei Jahresmittel sind aus Beobachtungen mit dem neuen 18-Zöller gewonnen. Sie sind also nicht direct vergleichbar mit den früheren. Man hat demnach 2 Perioden zu unterscheiden und findet

	Corr. p	Corr. ϱ
I. Periode	+ 1 ^o 04	+ 0 ^o 004
II. „	— 0.10	+ 0.087

Dass die letzte Correction, die nur aus 2 Abendmitteln gebildet ist, ganz unsicher ist, braucht nicht erst hervorgehoben zu werden.

9. Engelmann.

Ausser einer älteren Beobachtung vom Jahre 1865, die uncorrectirt bleiben muss, liegen nur 3 Jahresmittel vor. Es ist begreiflich, dass auch hier eine Berechnung des persönlichen Fehlers unsicher ist.

	<i>g</i>	<i>p</i> ⁰	<i>q</i>	Correct.		Corr. Werthe	
1883.13	8	128.05	5.436	+ 2.54	+ 0.120	129.43	5.653
85.29	4	126.80	5.437	+ 1.59	+ 0.215	128.18	5.654
86.30	5	127.18	5.352	+ 0.02	+ 0.315	128.56	5.569

im Mittel Correction + 1^o38 + 0^o217

10. J. Herschel (h) und South.

Ich habe diese beiden Beobachter zusammen behandelt.

		<i>p</i> ⁰	Correct.	Corr. Werthe	Gewicht
h u.	South	1822.14	+ 0.26	158.28	1
	South	24.49	- 0.52	157.57	1
	r	25.27	- 3.84	161.09	1
	h	30.29	- 2.26	157.70	2
	h	31.15	- 1.70	156.15	2
	h	32.15	- 2.31	155.55	2
	h	33.13	+ 0.19	151.88	2

Die erste Beobachtung erhielt keine Verbesserung. Die beiden nächsten von South die Correction: - 2^o18, während an h die Verbesserung - 1^o52 anzubringen ist. Die Gewichtszahlen wurden hier, wie auch in I, willkürlich angenommen.

11. Jedrzejewicz.

	<i>g</i>	<i>p</i> ⁰	<i>q</i>	Correct.		Corr. Werthe	
1878.26	6	131.30	5.483	+ 0.29	- 0.222	132.01	5.380
80.22	6	131.79	5.296	+ 0.16	+ 0.056	132.50	5.193
81.24	4	130.58	5.570	+ 1.16	- 0.145	131.29	5.467
82.27	4	130.23	5.600	+ 1.00	- 0.131	130.94	5.497
86.29	3	126.27	5.431	+ 0.94	(+ 0.236)	126.98	-

Die letzte Distanz muss ausgeschlossen werden. Das Mittel der übrigen Correctionen ist

in *p* + 0^o71
in *q* - 0^o103

12. Kaiser.

	<i>g</i>	<i>p</i> ⁰	<i>q</i>	Correct.		Corr. Werthe	
1840.15	7	146.00	5.533	+ 1.32	- 0.255	149.79	5.253
42.35	6	147.22	5.589	+ 2.77	- 0.329	149.01	5.309
43.33	6	148.10	5.691	+ 2.14	- 0.395	149.89	5.411
65.36	8	-	5.875	-	- 0.300	-	5.595
66.24	5	137.66	5.752	+ 1.04	- 0.131	139.45	5.472
66.33	7	136.91	5.891	+ 1.69	- 0.267	138.70	5.611

Correction im Mittel + 1^o79 - 0^o280

Unter p und ρ sind hier die nach Angabe von I pg. 76 corrigirten Coordinaten angeführt. Dadurch ist in der That eine bessere Uebereinstimmung zwischen den nach verschiedenen Methoden angestellten Messungen entstanden.

Die Messungen aller übrigen Beobachter wurden uncorrigirt gelassen. Die Gewichtsbestimmung ist dieselbe geblieben wie beim Sterne B und unterliegt natürlich denselben Bedenken und Unsicherheiten.

Ueberblickt man die Reihe der Einzelabweichungen, so fällt es auf, dass dieselben oftmals einen regelmässigen Gang zeigen von einem Betrage, der durch eine etwaige Fehlerhaftigkeit der Elemente ganz unerklärbar ist und ausserdem gleichzeitig bei verschiedenen Beobachtern verschiedenes Verhalten zeigt. Jedenfalls ergiebt sich, dass die gefundenen mittleren Correctionen nur ganz ungefähr den den Beobachtungen anhaftenden Fehlern entsprechen und dass ein Theil derselben durchaus nicht durch eine Constante dargestellt wird. Nach den oben gemachten Bemerkungen wird dieses Resultat nicht befremden.

Ich stelle nun sämtliche Beobachtungen chronologisch zusammen.

Jahr	Beobachter	g	p	e	$B-R$		Mittel $B-R$	
1781.89	W. Herschel	1	181.73	—	+ 3.4	—		
1802.16	id.	1	171.82	—	+ 4.0	—		
1821.98	Σ	4	160.03	—	+ 1.48	—		
22.14	h & South	1	158.28	—	— 0.26	—		
24.49	South	1	157.57	—	— 1.66	—		
25.27	id.	1	161.09	—	+ 1.66	—	+ 0.38 (17)	— 0.009 (8)
26.22	Σ	4	159.59	5.431	+ 0.08	+ 0.080		
28.99	Σ	4	157.97	5.460	— 0.23	— 0.097		
30.29	h	2	157.70	—	+ 0.74	—		
31.15	h	2	156.15	—	+ 0.18	—		
31.27	Σ	4	155.03	5.602	— 0.80	— 0.058	— 0.37 (8)	— 0.032 (6)
31.30	D	2	155.75	5.679	— 0.04	+ 0.019		
32.15	h	2	155.55	—	+ 0.79	—		
32.18	D	4	154.27	5.693	— 0.45	+ 0.023	— 0.11 (12)	+ 0.079 (10)
32.19	Bessel	2	153.40	5.878	— 1.31	+ 0.208		
32.28	Σ	4	155.00	5.740	+ 0.39	+ 0.071		
33.13	h	2	151.88	—	— 1.71	—	— 0.23 (6)	+ 0.050 (4)
33.27	Σ	4	153.94	5.709	+ 0.51	+ 0.050		
35.31	Σ	4	151.62	5.600	+ 0.36	+ 0.018	+ 0.36 (4)	+ 0.018 (4)
36.27	Σ	4	150.22	5.534	— 0.23	+ 0.009	— 0.23 (4)	+ 0.009 (4)
40.15	Kaiser	4	149.79	5.253	+ 0.47	— 0.025	+ 0.16 (8)	— 0.014 (8)
40.30	O. Σ	4	149.18	5.271	— 0.15	— 0.002		

Jahr	Beobachter	g	p	e	B-R		Mittel B-R	
1841.07	D	4	149.84	5.254	+ 0.28	+ 0.001	+ 0.79 (6)	+ 0.001 (4)
41.31	M	2	151.45	—	+ 1.81	—		
42.20	M	2	149.64	—	- 0.31	—		
42.29	O. Σ	4	148.63	5.297	- 1.35	+ 0.039	- 0.99 (10)	+ 0.044 (8)
42.35	Kaiser	4	149.01	5.309	- 0.98	+ 0.049		
43.19	M	2	151.16	—	+ 0.93	—		
43.22	D	2	150.59	5.250	+ 0.36	- 0.043	+ 0.42 (12)	+ 0.049 (10)
43.30	O. Σ	4	151.19	5.326	+ 0.95	+ 0.030		
43.33	Kaiser	4	149.89	5.411	- 0.35	+ 0.115		
44.28	O. Σ	4	150.74	5.433	+ 0.43	+ 0.077	+ 0.56 (6)	+ 0.077 (4)
44.39	M	2	151.12	—	+ 0.83	—		
45.31	O. Σ	4	151.20	5.383	+ 1.12	- 0.051		
45.31	Döllen	1	149.90	—	- 0.18	—	+ 1.45 (7)	- 0.051 (4)
45.91	Hind	2	152.69	—	+ 2.91	—		
46.00	Jacob	1	149.31	5.370	- 0.43	- 0.115	+ 0.31 (5)	- 0.037 (5)
46.2 ^c	O. Σ	4	150.06	5.490	+ 0.49	- 0.017		
47.29	M	1	147.63	—	- 1.16	—	+ 0.06 (5)	- 0.057 (4)
47.35	O. Σ	4	149.10	5.520	+ 0.37	- 0.057		
48.14	D	4	148.35	5.520	+ 0.41	- 0.100	+ 0.06 (8)	- 0.092 (8)
48.30	O. Σ	4	147.48	5.542	- 0.29	- 0.084		
49.32	O. Σ	4	146.44	5.542	- 0.19	- 0.117	- 0.19 (4)	- 0.117 (4)
50.29	O. Σ	4	146.29	5.564	+ 0.84	- 0.105	+ 0.84 (4)	- 0.105 (4)
51.20	M	2	144.39	—	0.00	—	- 0.62 (6)	+ 0.052 (4)
51.28	O. Σ	4	143.37	5.713	- 0.93	+ 0.052		
52.08	Miller	1	146.67	5.704	+ 3.29	+ 0.064		
52.25	M	2	142.14	—	- 1.05	—	- 0.31 (8)	- 0.063 (5)
52.32	O. Σ	4	142.02	0.534	- 1.10	- 0.095		
52.49	Fletcher	1	143.72	5.337	+ 0.77	(- 0.290)		
53.23	Wrottesley	2	142.85	—	+ 0.62	—	- 0.61 (6)	- 0.141 (2)
53.25	M	2	141.11	—	- 1.10	—		
53.30	O. Σ	2	140.81	5.454	- 1.35	- 0.141		
54.07	D	2	140.84	5.644	- 0.58	+ 0.100	+ 0.29 (4)	+ 0.100 (2)
54.28	M	2	142.40	—	+ 1.16	—		
55.07	Δ	4	141.04	5.424	+ 0.35	- 0.052		
55.19	S	2	140.35	5.385	- 0.25	- 0.083		
55.27	M	2	140.25	—	- 0.02	—	+ 0.19 (14)	- 0.036 (12)
55.31	O. Σ	4	140.41	5.458	+ 0.14	0		
55.33	Winnecke	2	139.91	5.426	+ 0.63	- 0.030		
56.05	Δ	4	140.40	5.359	+ 0.17	- 0.047		
56.21	Jacob	2	139.92	5.389	- 0.25	- 0.005		
56.24	Winnecke	2	141.73	5.373	+ 1.57	- 0.019	+ 0.28 (11)	+ 0.010 (10)
56.29	M	1	140.08	—	- 0.08	—		
56.93	Δ	2	139.97	5.514	- 0.09	+ 0.167		

Jahr	Beobachter	g	p	e	B--R		Mittel B-R	
1857.27	O. Σ	4	139.38	5.413	- 0.65	+ 0.088		
57.27	M	1	139.58	—	- 0.45	—	- 0.08 (9)	+ 0.073 (8)
57.29	S	2	141.22	5.400	+ 1.20	+ 0.075		
57.90	Jacob	2	140.04	5.335	- 0.05	+ 0.041		
58.15	Δ	4	139.69	5.215	- 0.42	- 0.066		
58.21	M	2	140.91	—	+ 0.79	—	+ 0.03 (10)	+ 0.037 (8)
58.28	O. Σ	4	140.23	5.417	+ 0.09	+ 0.140		
59.26	M	2	139.60	—	- 0.82	—	+ 0.67 (6)	+ 0.093 (6)
59.30	O. Σ	4	141.85	5.347	+ 1.41	+ 0.093		
60.27	O. Σ	4	141.49	5.332	+ 0.75	+ 0.072	+ 0.62 (6)	+ 0.072 (4)
60.29	M	2	141.16	—	+ 0.37	—		
61.25	M	1	141.73	—	+ 0.68	—		
61.27	O. Σ	4	141.75	5.350	+ 0.70	+ 0.051	+ 0.61 (7)	+ 0.051 (4)
61.28	Auwers	2	141.45	5.703	+ 0.40	(+ 0.404)		
62.31	M	2	139.55	—	- 1.56	—	- 0.87 (6)	- 0.094 (2)
62.33	O. Σ	4.2	140.59	5.267	- 0.52	- 0.094		
63.05	Δ	4	140.49	5.523	- 0.48	+ 0.110		
63.13	Knott	1	140.81	5.423	+ 0.15	+ 0.004	- 0.70 (6)	+ 0.089 (5)
63.18	Romberg	1	138.50	5.811	- 2.44	(+ 0.388)		
64.30	O. Σ	4.2	140.16	5.405	- 0.22	- 0.101	- 0.22 (4)	- 0.101 (2)
65.17	Δ	4	139.64	5.512	- 0.10	- 0.052		
65.23	S	1	139.73	5.552	+ 0.05	- 0.016	- 0.10 (11)	+ 0.006 (11)
65.36	Kaiser	4	—	5.595	—	+ 0.020		
65.42	Engelmann	2	139.30	5.682	- 0.19	+ 0.104		
66.24	Kaiser	4	139.45	5.472	+ 0.75	- 0.149		
66.27	Δ	4	138.89	5.650	+ 0.22	+ 0.028		
66.27	O. Σ	4.2	137.24	5.525	- 1.42	- 0.097	- 0.14 (17)	- 0.047 (15)
66.29	S	1	137.63	5.647	- 1.00	+ 0.024		
66.33	Kaiser	4	138.70	5.611	+ 0.10	- 0.013		
67.14	Δ	1	138.05	5.375	+ 0.35	- 0.277	+ 0.23 (5)	- 0.078 (5)
67.26	Barclay	4	137.78	5.627	+ 0.20	- 0.028		
68.22	Δ	4	136.59	5.587	+ 0.16	- 0.082	- 0.50 (8)	- 0.061 (6)
68.28	O. Σ	4.2	135.20	5.650	- 1.15	- 0.019		
69.32	O. Σ	4	134.51	5.600	- 0.61	- 0.061	- 1.18 (3)	- 0.061 (8)
69.37	Du	4	133.32	—	- 1.74	—		
70.21	Δ	4	134.15	5.660	+ 0.06	+ 0.020		
70.27	Du	2	134.34	—	+ 0.31	—	+ 0.08 (10)	+ 0.021 (8)
70.28	O. Σ	4	134.00	5.658	- 0.01	+ 0.021		
71.18	Δ	4	133.35	5.653	+ 0.30	+ 0.054		
71.28	Du	2.1	133.79	5.450	+ 0.84	- 0.144	+ 0.07 (10)	- 0.007 (9)
71.31	O. Σ	4	132.38	5.558	- 0.55	- 0.034		
72.21	Wilson	2	131.36	5.542	- 0.72	+ 0.002		
72.23	Δ	4	132.39	5.513	+ 0.32	- 0.029	- 0.01 (12)	+ 0.014 (11)
72.31	O. Σ	4	131.61	5.598	- 0.41	+ 0.065		
72.33	Du	2.1	132.84	5.535	+ 0.84	+ 0.003		

Jahr	Beobachter	g	p	e	B-R		Mittel B-R	
					$\overset{0}{-}$	$\overset{0}{+}$		
1873.22	Wilson & Seab.	2	131.38	—	- 0.01	—		
73.23	Δ	4	132.02	5.450	+ 0.64	- 0.019	+ 0.94 (10)	- 0.061 (8)
73.28	O. Σ	4	133.08	5.362	+ 1.72	- 0.103		
74.09	Δ	4	131.89	5.461	+ 0.87	+ 0.058		
74.13	Gledhill	1	132.39	—	+ 1.39	—		
74.17	Wilson & Seab.	2	131.67	—	+ 0.69	—	+ 0.73 (13)	+ 0.023 (9)
74.28	O. Σ	4	131.34	5.415	+ 0.38	+ 0.026		
74.29	Du	2.1	131.79	5.337	+ 0.84	- 0.051		
75.17	Δ	4	130.67	5.285	- 0.14	- 0.039		
75.25	Sp	4	131.45	5.382	+ 0.64	+ 0.066		
75.27	Wilson & Seab.	1	131.44	—	+ 0.63	—	+ 0.34 (17)	+ 0.093 (14)
75.28	O. Σ	4	130.98	5.558	+ 0.17	+ 0.239		
75.31	Du	4.2	131.44	5.438	+ 0.63	+ 0.121		
76.07	Δ	2	130.62	5.268	- 0.28	- 0.018		
76.29	O. Σ	2	130.81	5.335	- 0.13	+ 0.056	- 0.40 (8)	+ 0.036 (6)
76.29	Du	4.2	130.34	5.348	- 0.59	+ 0.069		
77.23	Sp	4	131.35	5.291	+ 0.13	+ 0.036		
77.27	O. Σ	4	131.23	5.304	- 0.01	+ 0.049	- 0.06 (12)	+ 0.003 (12)
77.29	Δ	4	130.92	5.178	- 0.32	- 0.077		
78.12	Δ	4	130.14	5.333	- 1.40	+ 0.074		
78.26	Wilson & Seab.	2	131.33	—	- 0.26	—		
78.26	Jedrz.	4	132.01	5.380	+ 0.42	+ 0.109	- 0.15 (18)	+ 0.036 (14)
78.29	O. Σ	4	132.44	5.206	+ 0.84	- 0.056		
78.29	Du	4.2	130.49	5.263	- 1.11	+ 0.001		
79.27	Sp	4	131.92	5.256	+ 0.05	- 0.042		
79.28	Wilson & Seab.	2	133.68	—	+ 1.82	—	+ 0.76 (10)	- 0.036 (8)
79.29	O. Σ	4	132.74	5.269	+ 0.88	- 0.030		
80.16	Franz	2	130.60	5.545	- 1.35	+ 0.194		
80.22	Jedrz.	4	132.50	5.193	+ 0.56	- 0.159	+ 0.19 (7)	- 0.041 (6)
80.31	Seabr.	1	133.72	—	+ 1.79	—		
81.24	Jedrz.	4	131.29	5.467	- 0.45	+ 0.042		
81.26	Seabr.	1	131.37	—	- 0.36	—	- 0.30 (9)	+ 0.029 (8)
81.30	Sp	4	131.57	5.445	- 0.14	+ 0.016		
82.25	Seabr.	2	129.83	—	- 1.38	—		
82.26	Sp	4	131.06	5.468	- 0.18	- 0.030	- 0.46 (10)	- 0.016 (8)
82.27	Jedrz.	4	130.94	0.497	- 0.29	- 0.002		
83.13	Engelm.	4	129.43	5.653	- 1.16	+ 0.097		
83.29	Sp	4	130.16	5.598	- 0.29	+ 0.032		
83.32	Seabr.	1	128.33	—	- 2.09	—	- 0.93 (11)	+ 0.051 (10)
83.35	Küstner	2	129.20	5.557	- 1.19	- 0.004		
84.21	Perrotin	2	128.95	5.561	- 0.63	- 0.054		
84.25	Sp	4	129.21	5.589	- 0.32	- 0.028	- 0.42 (6)	- 0.037 (6)
85.29	Engelm.	4	128.18	5.654	- 0.21	+ 0.002		
85.29	Sp	4	128.48	5.603	+ 0.09	- 0.049	- 0.06 (8)	- 0.024 (8)
86.29	Jedrz.	4	126.98	—	- 0.23	—	+ 0.57 (8)	- 0.098 (4)
86.30	Engelm.	4	128.56	5.569	+ 1.36	- 0.098		
87.24	Sp	4	125.93	5.611	- 0.15	- 0.053	- 0.15 (4)	- 0.053 (4)
88.27	Sp	4	125.03	5.697	+ 0.15	+ 0.053	+ 0.15 (4)	+ 0.053 (4)

In der vorstehenden Zusammenstellung finden sich die mit Berücksichtigung der Gewichte gebildeten Jahresmittel $B - R$. Letztere wurden nun weiter nach Massgabe der abtheilenden Zwischenräume in folgende Normalörter vereinigt, welche also als das Ergebniss der angestellten Untersuchungen über die persönlichen Fehler betrachtet werden können.

	$B - R$		g		p	q
	$^{\circ}$	"			$^{\circ}$	"
1826.2	+ 0.38	- 0.009	17	8	159.89	5.340
1832.2	- 0.22	+ 0.040	16	20	154.48	5.710
1835.2	+ 0.07	+ 0.014	8	8	151.43	5.602
1841.2	- 0.16	+ 0.012	24	20	149.46	5.262
1844.2	+ 0.96	+ 0.033	25	18	151.29	5.384
1847.2	+ 0.13	- 0.069	18	17	149.01	5.500
1850.2	- 0.08	- 0.057	14	12	145.50	5.613
1853.2	- 0.28	- 0.044	18	9	141.98	5.558
1856.2	+ 0.15	+ 0.007	34	30	140.32	5.402
1859.2	+ 0.37	+ 0.063	22	18	140.77	5.316
1862.2	- 0.27	+ 0.042	19	11	140.86	5.394
1865.2	- 0.14	- 0.030	32	28	139.57	5.536
1868.2	- 0.59	- 0.065	21	19	135.86	5.604
1871.2	+ 0.04	+ 0.009	32	28	133.07	5.607
1874.2	+ 0.62	+ 0.033	40	31	131.59	5.428
1877.2	- 0.17	+ 0.024	38	32	131.04	5.279
1880.2	+ 0.24	- 0.014	26	22	132.19	5.337
1883.2	- 0.64	+ 0.007	27	24	129.90	5.568
1886.2	+ 0.26	- 0.049	24	20	127.58	5.618

Ueberblickt man diese Fehlerreihe, so dürfte dieselbe auf einen befriedigenden Anschluss der Theorie an die Beobachtungen deuten. Im Positionswinkel namentlich ist auch die Vertheilung der Vorzeichen eine völlig entsprechende und auffallende Anhäufungen desselben Vorzeichens finden nirgends statt. Für die Distanzen gilt dies nicht in gleichem Grade. Hier sind kleine systematische Abweichungen zu bemerken. Ob dieselben ganz allein den nicht völlig beseitigten persönlichen Fehlern zur Last fallen, ist natürlich nicht mit Sicherheit zu behaupten. Ich möchte aber doch zu dieser Annahme hinneigen, weil das periodenweise Praevaliren einzelner Beobachter weit mehr bemerkbar ist wie in den Positionswinkeln. Auf der anderen Seite freilich muss nochmals hervorgehoben werden, dass das gefundene Rechnungsergebniss kein im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate wahrscheinlichstes ist. Dieses wäre nun nach den letzten Normalörtern abzuleiten. Ich glaube indessen, dass die vorliegenden Beobachtungen noch nicht dazu auffordern. Nach mehreren Jahren freilich kann sich die Sache anders gestalten. In Folge des rein interpolatorischen Characters der Formel für die Bewegung des Schwer-

punktes S_2 kann es gar keinem Zweifel unterliegen, dass mit der Zeit dieselbe den Beobachtungen nicht mehr genügen wird. Andeutungen dafür, allerdings in höchst unsicherer Weise, enthält die Darstellung der beiden Herschel'schen Beobachtungen. Es würde nicht schwer sein, durch kleine Correctionen auch diese beiden Messungen besser darzustellen, als es die gebrauchten Bahnelemente thun. Der dadurch erzielte Gewinn wäre aber ein durchaus imaginärer. Man wird bei jenen Beobachtungen Fehler von einigen Graden als möglich gelten lassen müssen, ohne die Genauigkeit dieser Messungen zu unterschätzen und dies um so mehr, als diese nur auf je einem Abendmittel beruhen. Es muss hierbei noch auf einen Umstand aufmerksam gemacht werden. Beide genannten Messungsergebnisse wurden als auf $\frac{A+B}{2}$ sich beziehend angenommen. Für den ersten Positionswinkel ist es beinahe ganz gleichgiltig, ob man annimmt, dass $\frac{A+B}{2}$, C oder A, C beobachtet worden ist, weil die 3 Sterne ABC zu jener Zeit sehr nahe in einer geraden Linie standen. Für den Positionswinkel vom Jahre 1802 ist dies aber nicht der Fall. Gewöhnlich wird angenommen, dass die Angabe sich auf AC bezieht. Da aber nachweisbar Herschel an jenem Abende die Sterne A und B nicht getrennt gesehen hat, so scheint es mir bei weitem richtiger, die erwähnte Annahme zu machen. Will man diese Ansicht nicht gelten lassen, so verkleinert sich die obige Differenz $B-R$ um ungefähr 3 Grad, so dass die Beobachtung beinahe genau dargestellt wird. Auf allzu grosse Genauigkeit dieser Messung wird man aber schon, nach der erwähnten Thatsache zu schliessen, nicht rechnen dürfen.

Ein instructives Bild der Bewegungsverhältnisse des Sternes C giebt eine graphische Darstellung der scheinbaren Bahn. Herr List hat auf mein Ersuchen die dieser Abhandlung beigefügte Zeichnung ausgeführt. Hier sind die den Jahresmitteln (pg. 81 ff.) entsprechenden Punkte der Reihe nach mit 1,2 etc. bezeichnet und durch eine gebrochene Linie mit einander verbunden. Die ausgezeichnete Curve stellt die theoretisch mit Hülfe der Ephemeride auf pg. 71 berechneten Oerter dar. Der Massstab ist so gewählt, dass $1^{\text{cm}} = 0''.125$. Die Mitte von A und B hat die Coordinaten

$$x_0 = -20.8^{\text{cm}}; \quad y_0 = -19.2^{\text{cm}}$$

und die rechtwinkligen Coordinaten x, y in Centimetern, welche dem Positionswinkel p und der Distanz ϱ entsprechen, sind nach folgenden Formeln berechnet, welche eine Drehung der Coordinatenaxen um 188^0 gegen die frühere Lage enthalten:

$$\xi = \varrho \cos (188^0 - p)$$

$$\eta = \varrho \sin (188^0 - p)$$

$$x = 8 \xi - 20.8$$

$$y = 8 \eta - 19.2$$

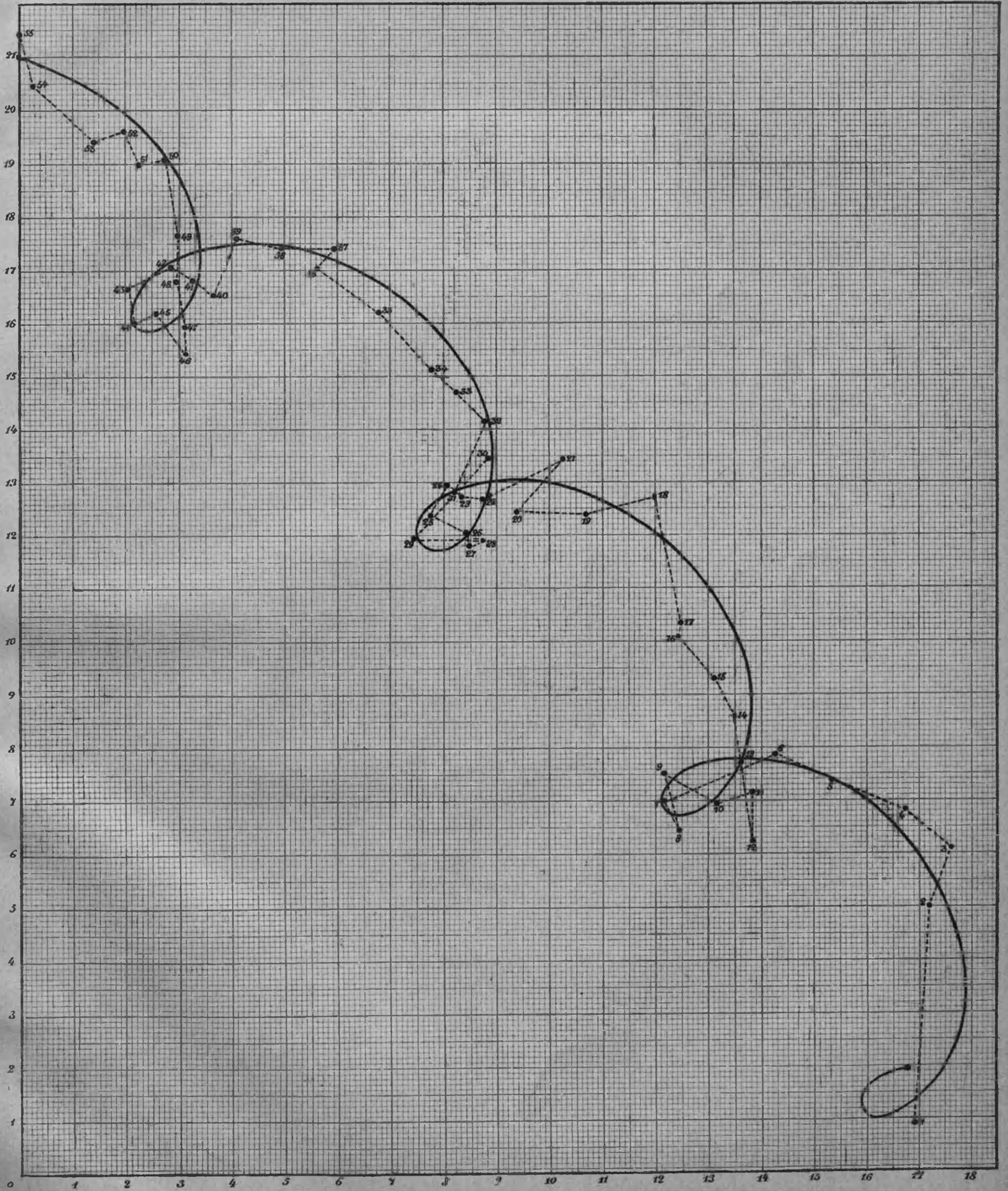
Ein Anblick der Zeichnung dürfte nun darthun, dass die theoretisch berechneten Oerter die scheinbare Bewegung in allen charakteristischen Eigenschaften in ganz ausgezeichnete Weise wiedergeben. Dass die kleinen systematischen Abweichungen in Distanz bei dem gewählten sehr grossen Massstab nicht stärker hervortreten, darf ebenfalls als günstig bezeichnet werden.

Nachtrag.

Der freundlichen Gefälligkeit des Herrn Geheimraths O. v. Struve verdanke ich die Mittheilung folgender bisher noch nicht publicirter Messungen. Leider gelangte ich erst in ihren Besitz, als meine Rechnungen beinahe beendet waren und eine Umrechnung mit grösserer Mühe verbunden gewesen wäre. Aus diesem Grunde begnügte ich mich, die in Jahresmittel vereinigten Beobachtungen mit der in vorstehender Abhandlung entwickelten Theorie zu vergleichen. An die Messungen Herrn O. Struve's wurden hierbei nur die in Band IX der Pulcowaer Beobachtungen angegebenen Correctionen angebracht, während die von Herrn Hermann Struve (H. Σ) am 30-zölligen Refractor erhaltenen Beobachtungen ohne jede Correctur benutzt wurden. Hieraus erklärt sich der offenbar systematische Character der übrig bleibenden Differenzen, der zum Theil sehr deutlich hervortritt.

Beob.	Jahr	Anzahl	A und B		B-R		
			p	q			
O. Σ	1881.28	3	⁰ 86.30	0.880	⁰ + 5.60	+ 0.070	
O. Σ	84.26	3	60.63	0.953	- 3.74	+ 0.064	
H. Σ	86.30	4	49.00	0.863	- 5.73	- 0.073	
H. Σ	87.30	5	46.56	0.960	- 3.78	+ 0.004	
O. Σ	88.33	3	45.85	1.015	- 0.19	+ 0.039	
H. Σ	88.33	2	44.35	0.930	- 1.69	- 0.046	

Beob.	Jahr	Anzahl	$\frac{A+B}{2}$ und C		reduc. aus		
			p	q	$\frac{A+B}{2}$	C	
O. Σ	1881.28	3	⁰ 130.80	5.210	⁰ - 0.92	- 0.218	$\frac{A+B}{2}, C$
O. Σ	84.26	3	130.21	5.524	+ 0.69	- 0.093	A, C
O. Σ	84.26	3	127.69	5.601	- 1.83	- 0.016	B, C
H. Σ	86.30	4	127.25	5.551	+ 0.05	- 0.116	A, C
H. Σ	87.30	3	126.57	5.518	+ 0.56	- 0.145	A, C
H. Σ	88.33	2	124.40	5.505	- 0.41	- 0.135	A, C
O. Σ	88.33	2	123.98	5.635	- 0.83	- 0.005	A, C
O. Σ	88.33	2	123.69	5.698	- 1.12	+ 0.058	B, C



Seeliger, H., fortgesetzte Untersuchungen über das mehrfache Sternsystem ζ Cancri. Mit 1 Tafel. (Aus „Abhandlgn. d. k. b. Akad. d. Wiss.“) München, 1888. Franz in Comm. (88 S. gr. 4.) *M* 2, 80. # 17.

Seit 60 Jahren wird das Gravitationsgesetz zur Darstellung der relativen Bewegung der Componenten von Doppelsternsystemen um den gemeinsamen Schwerpunct angewandt, niemals aber ist, soweit Ref. bekannt, vor Seeliger's erster Abhandlung über ζ Cancri (erschien 1881 in den Denkschriften der Wiener Akademie) der Versuch gemacht worden, auch die Bewegung dreier Körper eines zusammengesetzten Fixsternsystems durch eine gleichartige Rechnung zu verfolgen. Dieser Versuch ist geglückt, soweit die besonderen Verhältnisse des genannten Systems dies zuließen, letztere aber sind eigenthümlicher Art. Nur die Bewegung der beiden gewöhnlich mit A und B bezeichneten Sterne ist rasch genug, um schon jetzt mit Sicherheit die Elemente der elliptischen Bahnbewegung ermitteln zu können, für die Bewegung des dritten Sterns C reicht dazu der bisher beobachtete Bogen lange nicht aus. Wohl aber bietet die Bewegung von C Ungleichheiten anderer Art, aus denen schon D. Struve mit großer Wahrscheinlichkeit geschlossen hat, daß in seiner Nähe noch eine unsichtbare Masse D stehen muß, die mit C in etwa 18 Jahren um den gemeinsamen Schwerpunct beider eine elliptische Bahn beschreibt. Bieten nun diese Bewegungen eben so interessante wie schwierige Aufgaben, so ist andererseits doch die Lösung derselben dadurch wieder erheblich erleichtert, daß die Entfernungen AB und CD beide sehr viel kleiner sind, als AC oder AD, so daß das ganze System gewissermaßen in zwei partielle zerfällt, deren gegenseitige Entfernung die Dimensionen des engern um das Sechsfache und Mehrfache übertrifft. Für eine solche Anordnung hat nun der Verf. seine (demnach noch nicht die Bewältigung aller in drei- und mehrfachen Systemen möglicherweise vorkommenden Bewegungsaufgaben gestattenden) Formeln eingerichtet, in der ersten Abhandlung auf das damals zugängliche Beobachtungsmaterial angewandt und in der neuen Arbeit etwas vereinfacht, auch seine Schlußfolgerungen gegen einige an das Licht getretene Einwürfe mit Glück vertheidigt. Die fortgesetzten Untersuchungen ergeben für AB eine verhältnißmäßig sehr genaue Bahn mit Rücksicht auf die Störungen durch C oder CD; für das letztere Paar, von dem also nur die Componente C sichtbar ist, den ersten Entwurf einer Bahn und eine Massenbestimmung im Verhältniß zu AB, sowie eine empirische Formel für das Fortschreiten seines Schwerpunctes. Benutzt sind alle genaueren Beobachtungen seit W. Struve (1826); die ältesten Beobachtungen, von W. Herschel, sind nicht genügend genau, um die Rückwärtsrechnung der Störungen durch 45 Jahre lohnend erscheinen zu lassen. Die Behandlung des Beobachtungsmaterials läßt nichts zu wünschen übrig. S.