Untersuchungen über p-reihige Charakteristiken,

die aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind,

und die Additionstheoreme der zugehörigen

Thetafunktionen.

Von

A. von Braunmühl.

Einleitung.

Die folgende Abhandlung zerfällt in zwei Abschnitte. Der erste behandelt die Theorie der Systeme von Charakteristiken, deren Zahlen sich nach dem Modul 3 unterscheiden (Drittelcharakteristiken), und kann somit als eine Weiterführung der Arbeiten der Herren Noether[1]) und Frobenius[2]) gelten, insoferne dieselben eine vollständige Behandlung der Charakteristikensysteme für den Modul 2 (Halbercharakteristiken) gegeben haben.

Die sämtlichen Charakteristiken werden durch eine Operationsgruppe von 3^{2p} Additionen entstanden gedacht, und diese Gruppe gibt, verbunden mit der Gruppe der unimodularen linearen Transformationen eine Gesamtgruppe von Operationen, welche die sämtlichen Charakteristiken ungeändert lassen. Diese Gesamtgruppe besitzt dann, nach einer mir von Herrn F. Klein gemachten Mitteilung zwei isomorphe Untergruppen, denen sich ähnlich wie bei den Halbercharakteristiken eine doppelte Einteilung der Charakteristiken in eigentliche und Gruppen-Charakteristiken an die Seite stellt (§ 1 und 2).

Die Gruppe von 3^{2p} Additionen besitzt eine Reihe von Untergruppen vom Grade 3^{λ} (§ 3), welche sofort Charakteristikensysteme liefern, deren wichtigste bezüglich aus 3 und 3^p Charakteristiken bestehen (§ 5). Letztere

---

1) M. Noether: Zur Theorie der Thetafunktionen von beliebig vielen Argumenten. Mathematische Annalen, Bd. 16.

2) G. Frobenius: Ueber das Additionstheorem der Thetafunktionen mehrerer Variabeln. Journal für Mathematik, Bd. 89, und: Ueber Gruppen von Thetacharakteristiken. Dasselbe, Bd. 96. Für den Fall $p = 1$ hat Herr A. Krazer im 22. Band der Mathematischen Annalen die Relationen der diesen Charakteristiken zugehörigen Thetafunktionen eingehend behandelt.

zerfallen in zwei getrennte Klassen von Systemen: solche, welche den sogenannten Goepel'schen Systemen bei Halbercharakteristiken völlig analog sind, und solche, wie sie für den einfachsten Fall $p = 2$ bereits von Clebsch und Jordan bei Gelegenheit des Dreiteilungsproblemes der hyperelliptischen Funktionen verwendet wurden (§ 6). An die Gruppe der linearen Transformationen schliessen sich Systeme von $2p + 2$ Charakteristiken an, welche ich analog der Bezeichnung bei Halbercharakteristiken Fundamentalsysteme nenne. Jeder der 3^{2p} gleichberechtigten Untergruppen linearer Transformationen gehört ein gewisser Complex solcher Fundamentalsysteme zu, deren Bildung und Anzahl in § 7 gegeben werden.

Der zweite Abschnitt behandelt die Verwendung der gefundenen Systeme zur Bildung zweier Additionstheoreme jener Thetafunktionen, deren Argumente sich durch Periodendrittel unterscheiden. Sowol die Goepel'schen Systeme (§ 9) als auch die Fundamentalsysteme (§ 12) liefern je eine umfassende Additionsformel. Die erstere der beiden habe ich bereits im Juni vorigen Jahres mitgeteilt.[1]) Aus diesen beiden Additionsformeln leite ich dann in den §§ 10 und 11, resp. 13 und 14 eine Reihe von speziellen Formeln und Thetarelationen ab, ohne jedoch bei der Fülle der sich darbietenden Beziehungen eine umfassende Theorie dieser Formeln geben zu wollen.

I. Abschnitt.

§ 1.

Bezeichnung der Charakteristiken. Fundamentalsätze.

Der Zahlencomplex

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots & \alpha_p \\ \alpha_1', & \alpha_2', & \ldots & \alpha_p' \end{pmatrix}$$

bestehend aus $2p$ Zahlen heisst eine p-reihige Charakteristik oder eine Charakteristik vom Geschlechte p.

1) Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen. 1886. Vergl. übrigens die Anmerkung § 9.

Legt man den α nur die Werte des vollständigen Restsystemes mod. 3 bei, so repräsentirt die obige Form 3^{2p} verschiedene Charakteristiken.

Man kann die Charakteristiken in drei Arten unterscheiden, solche deren Zahlen der Congruenz

$$\alpha_1 \alpha_1' + \alpha_2 \alpha_2' + \ldots + \alpha_p \alpha_p' \equiv 0 \text{ mod. } 3,$$

genügen, solche, für welche der Wert dieser Congruenz $+1$ und endlich solche, für die er -1 ist. Von der ersten Gattung gibt es

$$S_p = 3^{p-1}(3^p + 2),$$

von den beiden anderen Gattungen je

$$R_p = R_p' = 3^{p-1}(3^p - 1).$$

Beweis. Für $p = 1$ ist der Satz richtig, denn die Charakteristiken erster Art sind:

$$\binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{1}{0}, \binom{-1}{0}, \binom{0}{-1},$$

die zweiter und dritter Art bezüglich:

$$\binom{1}{1}, \binom{-1}{-1}; \binom{-1}{1}, \binom{1}{-1}.$$

Wir nehmen also die Richtigkeit des Satzes für $p-1$ an und zeigen, dass er dann auch für p gilt.

Es ist

$$S_{p-1} = 3^{p-2}(3^{p-1} + 2),$$

$$R_{p-1} + R_{p-1}' = 2 \cdot 3^{p-2}(3^{p-1} - 1).$$

Alle Charakteristiken zweiter Art erhält man, indem man die R_{p-1} $(p-1)$ reihigen Charakteristiken mit

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}, \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}, \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}, \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix}, \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix}, \ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

die R_{p-1}' $(p-1)$ reihigen Charakteristiken dritter Art mit

$$\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}, \begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix} \ldots\ldots\ldots \quad \text{(b)}$$

und endlich die S_{p-1} $(p-1)$ reihigen Charakteristiken erster Art mit

$$(c) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1\,, & -1 \end{matrix}$$

zu p-reihigen Charakteristiken ergänzt. Somit muss

$$5\, R_{p-1} + 2\, R'_{p-1} + 2\, S_{p-1} = R_p$$

sein; desgleichen hat die Gleichung

$$5\, R'_{p-1} + 2\, R_{p-1} + 2\, S_{p-1} = R'_p$$

stattzufinden.

Endlich ergeben sich alle S_p p-reihigen Charakteristiken, wenn man alle S_{p-1} $(p-1)$ reihigen mit den unter (a), alle R_{p-1} $(p-1)$ reihigen mit den unter (b) und alle R'_{p-1} $(p-1)$ reihigen Charakteristiken mit den unter (c) aufgeführten Formen zu p-reihigen ergänzt, somit muss sein:

$$5\, S_{p-1} + 2\, R_{p-1} + 2\, R'_{p-1} = S_p.$$

Die Rechnung bestätigt diese 3 Identitäten.

Zwei Charakteristiken (α) und (β) heissen mod. 3 congruent, wenn

$$\left.\begin{matrix} \alpha_1 \equiv \beta_1\,,\; \alpha_2 \equiv \beta_2 \ldots \alpha_p \equiv \beta_p \\ \alpha'_1 \equiv \beta'_1,\; \alpha'_2 \equiv \beta'_2, \ldots \alpha'_p \equiv \beta'_p \end{matrix}\right\} \text{mod. } 3$$

ist.

Die Summe der Charakteristiken (α) und (β) ist:

$$(\alpha) + (\beta) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1\,,\; \alpha_2 + \beta_2\,, \ldots \alpha_p + \beta_p \\ \alpha'_1 + \beta'_1,\; \alpha'_2 + \beta'_2, \ldots \alpha'_p + \beta'_p \end{pmatrix}$$

und sei kurz mit $(\alpha\,\beta)$ bezeichnet.

Daraus folgt:

$$2\,(\alpha) \equiv (2\,\alpha) \equiv (\alpha^2) \equiv \begin{pmatrix} -\alpha_1\,, & -\alpha_2\,, \ldots & -\alpha_p \\ -\alpha'_1, & -\alpha'_2, \ldots & -\alpha'_p \end{pmatrix} \equiv -(\alpha) \quad \text{mod. } 3.$$

Darnach ist

$$(\alpha) - (\beta) = (\alpha\,\beta^2).$$

Hieraus folgt, dass sich die $3^{2p} - 1$ Charakteristiken, die ausser der Charakteristik (o), deren sämtliche Elemente Null sind, existiren, in zwei Hälften teilen, deren einzelne Charakteristiken derart paarweise zusammengehören, dass die Glieder eines Paares sich nur durch das Zeichen unterscheiden, z. B.

$$(\alpha) \text{ und } (\alpha^2).$$

Fasst man zwei solche Charakteristiken in ein Zeichen zusammen, indem man schreibt:

$$[\alpha] = [\alpha^2],$$

so hat man einen speciellen Fall von dem, was Herr Noether eine Gruppencharakteristik nennt. Zeichnet man hingegen eine andere beliebige der 3^{2p} gleichberechtigten Charakteristiken, etwa (α) aus, so gruppiren sich in Bezug auf sie, wie Herr Noether in einer Anmerkung zu meiner Eingangs zitirten Note angab, die übrigen Charakteristiken zu Paaren.

Genügen nämlich drei Charakteristiken der Relation

$$(\alpha) + (\beta) + (\gamma) = (\alpha\,\beta\,\gamma) \equiv o \quad \text{mod. } 3,$$

so haben (β) und (γ) zu (α) dieselbe Beziehung. Für diese Beziehung führt Herr Noether das Zeichen ein

$$[\alpha - \beta] = [\alpha\,\beta^2],$$

das dann eine Gruppencharakteristik heisst. Dann ist

$$[\alpha\,\beta^2] = [\alpha\,\gamma^2],$$

und aus der obigen Relation folgt $(\gamma) = (\alpha^2\,\beta^2)$, so dass

$$[\alpha\,\beta^2] = [\beta\,\alpha^2]$$

wird. Setzt man hier $(\beta) = (o)$, so geht diese Bezeichnung, wie es sein muss, in die unsrige über.

Aus diesen Erläuterungen folgt, dass es

$$\frac{3^{2p} - 1}{2}$$

Gruppencharakteristiken gibt.

Im Gegensatze zu den Gruppencharakteristiken seien die übrigen eigentliche oder schlechthin Charakteristiken genannt.

Es werden diesen Bezeichnungen der Charakteristiken noch einige Abkürzungen angefügt, die wir im Folgenden beständig gebrauchen.

Es bedeute

(1.) $|\alpha| = \alpha_1\,\alpha_1' + \alpha_2\,\alpha_2' + \ldots + \alpha_p\,\alpha_p',$

(2.) $\alpha\,|\,\beta = \alpha_1\,\beta_1' - \alpha_1'\,\beta_1 + \alpha_2\,\beta_2' - \alpha_2'\,\beta_2 + \ldots + \alpha_p\,\beta_p' - \alpha_p'\,\beta_p,$

und es werde auch in diesen Symbolen statt $\alpha + \beta = \alpha\beta$ und für $\alpha - \beta$ $\alpha\beta^2$ gesetzt, dann erhält man folgende Relationen:

$$\left.\begin{array}{ll} (3.)\ |\alpha| \equiv |\alpha^2| \equiv |-\alpha|; & (4.)\ \alpha|\alpha^2 \equiv \alpha^2|\alpha \equiv 0; \\ (5.)\ \alpha|\beta \equiv -\beta|\alpha \equiv \beta^2|\alpha; & (6.)\ \alpha^2|\beta \equiv \alpha|\beta^2. \end{array}\right\} \pmod{3.}$$

Ein System von eigentlichen Charakteristiken mag unabhängig heissen, wenn nicht die Summe irgend einer Anzahl derselben mit Null nach dem Modul 3 congruent ist, und wesentlich unabhängig, wenn nicht die Summe von irgend 3 r derselben congruent mit Null mod. 3 ist; dann ergeben sich drei für das Folgende äusserst wichtige Sätze:

(I.) Die Combinationen (Summen von irgend einer Anzahl von Charakteristiken) von λ unabhängigen Charakteristiken sind 3^λ verschiedene Charakteristiken.

(II.) Die wesentlichen Combinationen (Summen von irgend einer mit 1 mod. 3 congruenten Anzahl) von λ wesentlich unabhängigen Charakteristiken liefern $3^{\lambda-1}$ Charakteristiken.

(III.) Es gibt unter den 3^{2p} Charakteristiken höchstens 2 p unabhängige und 2 p + 1 wesentlich unabhängige.

Die Richtigkeit dieser Sätze erkennt man unmittelbar; denn jede Combination der λ Charakteristiken

$$(\mu_1),\ (\mu_2),\ (\mu_3),\ \ldots\ (\mu_\lambda)$$

nimmt die Form $(\mu_1^m, \mu_2^n \ldots \mu_\lambda^e)$ an, wo m, n .... e die Zahlen 0, 1, 2 bedeuten. Die 3^λ Variationen mit Wiederholung derselben geben also die 3^λ Charakteristiken des Satzes (I). Unter ihnen befinden sich aber $3^{\lambda-1}$, welche von allen Combinationen gebildet sind, deren Anzahl gleich 3 r ist, während die übrigen zu gleichen Teilen aus den Combinationen der Anzahl 3 r + 1 und 3 r — 1 entstehen, was Satz (II) aussagt. (III) ist eine unmittelbare Folge aus (I) und (II).

§ 2.

Operationsgruppen.

Die 3^{2p} Charakteristiken können durch eine Operationsgruppe von 3^{2p} Additionen entstanden gedacht werden, indem die Summe je zweier p-reihiger Charakteristiken wieder eine solche gibt. Die Charakteristik (o) vertritt dann die Identität.

Durch Anwendung der Operationen dieser Gruppe bleibt dann das System der 3^{2p} Charakteristiken ungeändert. Es bleibt aber auch ungeändert durch die Gruppe der unimodularen linearen Transformationen, d. h. der mod. 3 zur Identität congruenten Transformationen, deren Anzahl nach C. Jordan

$$A = (3^{2p} - 1)\, 3^{2p-1}\, (3^{2p-2} - 1)\, 3^{2p-3} \ldots (3^2 - 1)\, 3$$

beträgt, denn bezeichnen (α) und (β) irgend zwei Charakteristiken des Systems, so sind die linearen Transformationen der erwähnten Gruppe jene, welche den Ausdruck

$$\alpha | \beta = \alpha_1 \beta_1' - \alpha_1' \beta_1 + \ldots + \alpha_p \beta_p' - \alpha_p' \beta_p = \varepsilon$$

ungeändert lassen. Da die Substitutionen der letzteren Gruppe mit denen der ersteren vertauschbar sind, so kann man beide zu einer Gruppe[1]) von Operationen vereinigen, die das System der 3^{2p} Charakteristiken ungeändert lässt und vom Grade

$$3^{2p}(3^{2p} - 1)\, 3^{2p-1}\, (3^{2p-2} - 1) \ldots (3^2 - 1) \,.\, 3$$

ist. Die Untergruppen, aus welchen sich diese Gesamtgruppe constituirt, bilden den Ausgangspunkt für das Folgende.

Die Operationen der Additionsgruppe, oder was dasselbe ist, die 3^{2p} eigentlichen Charakteristiken können nach Satz (III) entweder aus 2 p unabhängigen oder aus 2 p + 1 wesentlich unabhängigen derselben zusammengesetzt werden. Im ersten Falle kommt man zu folgen-

1) Diese Gesamtgruppe von Operationen besitzt nach der mir von Herrn F. Klein zugegangenen Mitteilung zwei isomorphe Untergruppen: die eine derselben lässt eine Charakteristik (α) ungeändert und vertauscht die übrigen untereinander, was der Einteilung der Charakteristiken in eine ausgezeichnete und $\frac{3^{2p} - 1}{2}$ Gruppencharakteristiken entspricht, die andere ist die im Texte erwähnte Gruppe der linearen Transformationen, welche einen Complex von Fundamentalsystemen, wie sie in § 7 aufgestellt und behandelt sind, ungeändert lässt. Ihr entspricht also die Noethersche Bezeichnungsweise der eigentlichen Charakteristiken. Von jeder der erwähnten Untergruppen gibt es 3^{2p} gleichberechtigte Individuen, entsprechend der Möglichkeit eine der 3^{2p} Charakteristiken oder einen der 3^{2p} Complexe von Fundamentalsystemen auszuzeichnen.

der Darstellung der 3^{2p} Charakteristiken, wie bereits in der erwähnten Note angegeben wurde.

Sind

$$(\mu_1),\ (\mu_2),\ \ldots\ (\mu_p);\quad (\varrho_1),\ (\varrho_2),\ \ldots\ (\varrho_p)$$

die 2 p unabhängigen Charakteristiken, so ist die ganze Gruppe dargestellt durch die sämtlichen Combinationen derselben und zwar in der Form:

$$\begin{array}{llllllll}
(1), (\mu_1), & (\mu_2) & \ldots (\mu_p), & (\mu_1^2) & \ldots (\mu_p^2), & (\mu_1\,\mu_2) & \ldots\ldots (\mu_1^2\,\mu_2^2 \ldots \mu_p^2), \\
(\varrho_1), (\varrho_1\,\mu_1), & (\varrho_1\,\mu_2) & \ldots (\varrho_1\,\mu_p), & (\varrho_1\,\mu_1^2) & \ldots (\varrho_1\,\mu_p^2), & (\varrho_1\,\mu_1\,\mu_2) & \ldots\ldots (\varrho_1\,\mu_1^2\,\mu_2^2 \ldots \mu_p^2), \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(\varrho_1^2\,\varrho_2^2 \ldots \varrho_p^2) & . & . & & (\varrho_1^2\,\varrho_2^2 \ldots \varrho_p^2\,\mu_p^2) & . & \ldots\ldots (\varrho_1^2\,\varrho_2^2 \ldots \varrho_p^2 \cdot \mu_1^2\,\mu_2^2 \ldots \mu_p^2),
\end{array}$$

die wir durch Einführung von $3^p - 1$ Indices symmetrischer folgendermassen schreiben können:

$$\begin{array}{llllll}
(1), & (\mu_1), & (\mu_2) & \ldots (\mu_p), & (\mu_{p+1}) & \ldots\ldots (\mu_{3^p-1}), \\
(\varrho_1), & (\varrho_1\,\mu_1), & (\varrho_1\,\mu_2) & \ldots (\varrho_1\,\mu_p), & (\varrho_1\,\mu_{p+1}) & \ldots\ldots (\varrho_1\,\mu_{3^p-1}), \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(\varrho_{3^p-1}), & (\varrho_{3^p-1}\,\mu_1) & . & . & . & \ldots\ldots (\varrho_{3^p-1}\,\mu_{3^p-1}).
\end{array}$$

Hier ist $(\mu_0) = (\varrho_0) = (o) = (1)$ gesetzt.

In jeder Horizontallinie dieses quadratischen Schemas sind 3^p Charakteristiken enthalten. Die Charakteristiken der ersten Zeile bilden, wie ihre Construktion zeigt, eine Untergruppe 3^p ten Grades, die übrigen Horizontalreihen dagegen enthalten Systeme von 3^p Charakteristiken, die aus jener Untergruppe hervorgehen, indem man zu ihren Operationen je eine der 3^p Combinationen der unabhängigen Charakteristiken $(\varrho_1), (\varrho_2) \ldots (\varrho_p)$ hinzufügt.

Bei dieser Darstellung, die zur Bildung des Additionstheorems der zugehörigen Thetafunktionen vorteilhaft ist, ist die eine Charakteristik (o) ausgezeichnet. Eine andere Darstellung ohne Auszeichnung von (o) erhält man, indem man nur die wesentlichen Combinationen von $2p + 1$ wesentlich unabhängigen Charakteristiken bildet; dann erscheint jede

Horizontalreihe, unabhängig definirt, als die Gesamtheit der wesentlichen Combinationen von $p + 1$ wesentlich unabhängigen eigentlichen Charakteristiken. So ist z. B. für $p = 2$ die erste Horizontalreihe des neuen Schemas:

$$(\alpha_1),\ (\alpha_2),\ (\alpha_3),\ (\alpha_1^2\,\alpha_2^2),\ (\alpha_1^2\,\alpha_3^2),\ (\alpha_2^2\,\alpha_3^2),\ (\alpha_1^2\,\alpha_2\,\alpha_3),\ (\alpha_1\,\alpha_2^2\,\alpha_3),\ (\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3^2),$$

und man erhält alle Systeme desselben, indem man in unserem ersten Schema mit Hinzunahme einer weiteren Charakteristik (μ) jede Grösse $(\varkappa)$ durch diejenige Grösse $(\varkappa)$, $(\varkappa\,\mu)$ oder $(\varkappa\,\mu^2)$ ersetzt, welche eine wesentliche Combination ist.[1])

§ 3.

Untergruppen der Additionsgruppe.

Die Untergruppen der Additionsgruppe vom Grade 3^{2p} sind sämtlich vom Grade 3^λ, wo $\lambda = 1, 2, \ldots 2p - 1$ ist, und die Anzahl der gleichberechtigten Untergruppen vom Grade 3^λ ist durch die Formel gegeben:

$$B = \frac{(3^{2p}-1)\ (3^{2p-1}-1)\ \ldots\ (3^{2p-\lambda+1}-1)}{(3^\lambda-1)\ (3^{\lambda-1}-1)\ \ldots\ (3-1)}.$$

Denn eine Untergruppe vom Grade 3^λ ist nach Satz (I) aus λ unabhängigen Charakteristiken gebildet; sind $(\mu_1), (\mu_2), \ldots (\mu_\lambda)$ diese Charakteristiken, so kann man (μ_1) auf $3^{2p} - 1$ Arten wählen, da die Null auszuschliessen ist, dann bleiben zur Wahl von (μ_2) noch $3^{2p} - 3$ Charakteristiken übrig, da (μ_1) und (μ_1^2) als von einander abhängig auszuschliessen sind. Zur Wahl von (μ_3) sind dann noch $3^{2p} - 3^2$ übrig, da die 3^2 aus (μ_1) und (μ_2) gebildeten Combinationen als abhängige Charakteristiken ausgeschlossen werden müssen. Endlich bleiben nach der Wahl von $(\mu_{\lambda-1})$ noch $3^{2p} - 3^{\lambda-1}$ unabhängige Charakteristiken übrig, die für (μ_λ) gewählt werden können. Die unabhängigen Charakteristiken (μ_1), (μ_2), $\ldots (\mu_\lambda)$ lassen sich also auf

$$(3^{2p}-1)\ (3^{2p}-3)\ (3^{2p}-3^2)\ \ldots\ (3^{2p}-3^{\lambda-1})$$

1) Diese Bezeichnung rührt von Herrn Noether her; vergl. die Anmerkung desselben zu meiner o. c. Note.

Arten wählen; doch sind die hiedurch erhaltenen Gruppen nicht alle verschieden, denn unter den in einer Gruppe von 3^λ enthaltenen Charakteristiken kann (μ_1) selbst auf $3^\lambda - 1$, (μ_2) auf $3^\lambda - 3$ u. s. f. (μ_λ) auf $3^\lambda - 3^{\lambda-1}$ Arten gewählt werden ohne eine andere Gruppe zu liefern, somit ist die Zahl der verschiedenen Untergruppen nur

$$\frac{(3^{2p}-1)\ (3^{2p}-3)\ \ldots\ (3^{2p}-3^{\lambda-1})}{(3^\lambda-1)\ (3^\lambda-3)\ \ldots\ (3^\lambda-3^{\lambda-1})} = \mathrm{B}.$$

Zu jeder Untergruppe vom Grade 3^λ gehören $3^{2p-\lambda}$ Systeme von je 3^λ Charakteristiken, da die Anzahl der Operationen der Gesamtgruppe 3^{2p}, die der Untergruppe 3^λ ist. Somit ist die Gesamtzahl aller Charakteristikensysteme von 3^λ Gliedern. die Gruppe mit eingerechnet:

$$\mathrm{C} = 3^{2p-\lambda} \cdot \frac{(3^{2p}-1)\ (3^{2p-1}-1)\ \ldots\ (3^{2p-\lambda+1}-1)}{(3^\lambda-1)\ (3^{\lambda-1}-1)\ \ldots\ (3-1)}.$$

Dieselbe Formel hätten wir von der zweiten Bildungsweise der Charakteristiken ausgehend erhalten können. Zwischen den Charakteristiken einer Untergruppe vom Grade 3^λ existiren noch einige Sätze, die gleich hier angeführt werden mögen, da sie für das Folgende von Wichtigkeit sind.

§ 4.

Sätze über Beziehungen zwischen Charakteristiken.

(IV.) Genügen λ unabhängige Charakteristiken der Bedingung

$$\mu_\alpha \,|\, \mu_\beta \equiv 0 \ (\text{mod. } 3.), \quad \left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} = 1, 2, \ldots \lambda,$$

so erfüllen je 2 eigentliche Charakteristiken der aus jenen gebildeten Gruppe vom Grade 3^λ dieselbe Bedingung.

Denn irgend zwei Charakteristiken der Gruppe haben die Form:

$$(\mu_1^{\nu_1}\,\mu_2^{\nu_2}\cdots\mu_\lambda^{\nu_\lambda}) \quad \text{und} \quad (\mu_1^{\sigma_1}\,\mu_2^{\sigma_2}\cdots\mu_\lambda^{\sigma_\lambda}),$$

wo die ν und σ die Zahlen 0, 1, 2 bedeuten; es ist aber:

$$\mu_1^{\nu_1}\mu_2^{\nu_2}\ldots\mu_\lambda^{\nu_\lambda} \,|\, \mu_1^{\sigma_1}\mu_2^{\sigma_2}\ldots\mu_\lambda^{\sigma_\lambda} \equiv \mu_1^{\nu_1} \,|\, \mu_1^{\sigma_1} + \mu_1^{\nu_1} \,|\, \mu_2^{\sigma_2} + \ldots + \mu_\lambda^{\nu_\lambda} \,|\, \mu_\lambda^{\sigma_\lambda} \equiv 0 \quad (\text{mod. } 3.)$$

(V.) Es gibt höchstens $\lambda = p$ unabhängige Charakteristiken, die der Congruenz

$$\mu_\alpha \,|\, \mu_\beta \equiv 0 \quad (\text{mod. } 3.)$$

genügen.

Denn die λ linearen Congruenzen

$$\mu_1 \,|\, \mu \equiv 0, \;\; \mu_2 \,|\, \mu \equiv 0, \;\; \ldots \;\; \mu_\lambda \,|\, \mu \equiv 0 \quad (\text{mod. } 3.)$$

zwischen 2 p Unbekannten haben $3^{2p-\lambda}$ Lösungen. Nach Satz (IV) sind die 3^λ Combinationen von $(\mu_1), (\mu_2) \ldots (\mu_\lambda)$ solche Lösungen, also existiren ausser den Charakteristiken der Gruppe vom Grade 3^λ noch $3^{2p-\lambda} - 3^\lambda = 3^\lambda (3^{2p-2\lambda} - 1)$ von $(\mu_1), (\mu_2) \ldots (\mu_\lambda)$ unabhängige Lösungen, somit muss $\lambda \leqq p$ sein, damit diese Zahl positiv ist, und für $\lambda = p$ sind die Charakteristiken der Gruppe vom Grade 3^p die einzigen Lösungen der Congruenz.

(VI.) Ist (μ_α) irgend eine der 3^{2p} eigentlichen Charakteristiken, sind $(\mu_1), (\mu_2) \ldots (\mu_\lambda)$ irgend λ unabhängige derselben, und bestehen die λ Congruenzen

$$\mu_\alpha \,|\, \mu_1 \equiv \mu_\alpha \,|\, \mu_2 \equiv \ldots \equiv \mu_\alpha \,|\, \mu_\sigma \equiv 0, \quad \lambda > \sigma \geqq 0,$$

$$\mu_\alpha \,|\, \mu_{\sigma+1} \equiv \pm 1, \;\; \mu_\alpha \,|\, \mu_{\sigma+2} \equiv \pm 1, \ldots \mu_\alpha \,|\, \mu_\lambda \equiv \pm 1,$$

so gibt es in der aus den λ unabhängigen Charakteristiken gebildeten Gruppe vom Grade 3^λ stets $3^{\lambda-1}$ Charakteristiken (μ_β), die mit (μ_α) zu der Congruenz

$$\mu_\alpha \,|\, \mu_\beta \equiv \varepsilon, \; (\text{mod. } 3)$$

verbunden, ε den Wert Null und $2 \cdot 3^{\lambda-1}$, die ε den Wert ± 1 erteilen.

Denn $\mu_\alpha \,|\, \mu_\beta$ wird nur dann mit ± 1 congruent sein können, wenn (μ_β) von der Form ist:

$$(\mu_\beta) = (\varrho \, \mu_{\sigma+1}^{\nu_1} \, \mu_{\sigma+2}^{\nu_2} \ldots \mu_\lambda^{\nu_\lambda}),$$

wo ϱ irgend eine Combinationsform der unabhängigen Charakteristiken $(\mu_1), (\mu_2) \ldots (\mu_\sigma)$ ist, da ja

$$\mu_\alpha \,|\, \varrho \, \mu_{\sigma+1}^{\nu_1} \, \mu_{\sigma+2}^{\nu_2} \ldots \mu_\lambda^{\nu_\lambda} \equiv \mu_\alpha \,|\, \mu_{\sigma+1}^{\nu_1} + \mu_\alpha \,|\, \mu_{\sigma+2}^{\nu_2} + \ldots + \mu_\alpha \,|\, \mu_\lambda^{\nu_\lambda}$$

wird, und die Summanden rechts nach Voraussetzung allein congruent ± 1 sind. Die Combinationsform (ϱ) selbst stellt aber 3^σ verschiedene Charakteristiken vor, da sie aus den σ unabhängigen Charakteristiken (μ_1), $(\mu_2) \ldots (\mu_\sigma)$ gebildet ist, somit kann die eine Combinationsform $(\mu_{\sigma+1}^{\nu_1}\, \mu_{\sigma+2}^{\nu_2} \ldots \mu_\lambda^{\nu_\lambda})$ mit 3^σ Combinationsformen (ϱ) verbunden werden. Ferner kann die Congruenz

$$\mu_\alpha \,|\, \mu_{\sigma+1}^{\nu_1}\, \mu_{\sigma+2}^{\nu_2} \ldots \mu_\lambda^{\nu_\lambda} \equiv \pm 1 \pmod{3}$$

selbstverständlich nur dann eintreten, wenn

$$\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\lambda \equiv \pm 1 \pmod{3}$$

ist; diese lineare Congruenz hat aber, da es $\lambda - \sigma$ Werte ν sind, $2 \cdot 3^{\lambda-\sigma-1}$ Lösungen, so dass die Combination $(\mu_{\sigma+1}^{\nu_1}\, \mu_{\sigma+2}^{\nu_2} \ldots \mu_\lambda^{\nu_\lambda})$ $2 \cdot 3^{\lambda-\sigma-1}$ Formen annehmen kann, mithin gibt es im Ganzen $2 \cdot 3^\sigma \cdot 3^{\lambda-\sigma-1} = 2 \cdot 3^{\lambda-1}$ Combinationsformen (μ_β), welche die Congruenz

$$\mu_\alpha \,|\, \mu_\beta \equiv \pm 1 \pmod{3}$$

befriedigen. Da nun aber stets zwei dieser Charakteristiken einander entgegengesetzt gleich sind, so befriedigt die eine Hälfte die Congruenz $\varepsilon \equiv +1$ die andere Hälfte die Congruenz $\varepsilon \equiv -1$, während die übrigen $3^{\lambda-1}$ Charakteristiken die Congruenz $\varepsilon \equiv 0$ befriedigen müssen.

Wir haben nun in den folgenden Paragraphen die für uns wichtigsten Untergruppen vom Grade 3 und 3^p genauer zu untersuchen und die zugehörigen Systeme zu entwickeln.

§ 5.

Die Untergruppen dritten Grades.

Eine Untergruppe dritten Grades hat in unserer Bezeichnung die Gestalt:

$$(1),\ (\mu),\ (\mu^2).$$

Ihr gehören $3^{2p-1} - 1$ weitere Dreiersysteme von der Form

$$(\varrho),\ (\varrho\,\mu),\ (\varrho\,\mu^2)$$

zu, welche durch Hinzufügung von $2p-1$ verschiedenen Charakteristiken (ϱ) und ihren Combinationen (die selbst wieder eine Gruppe vom Grade 3^{2p-1} ausmachen) gebildet werden, und es gibt nach Formel C § 3

$$3^{2p-1}\cdot\frac{3^{2p}-1}{2}$$

solcher Dreiersysteme (die Gruppe mit eingerechnet), die man zu $\frac{3^{2p}-1}{2}$ Complexen zusammengehöriger Systeme vereinigt denken kann, so dass jeder Complex eine Gruppe und $3^{2p-1}-1$ Systeme umfasst. Jedem dieser Complexe kann dann als Zeichen eine der $\frac{3^{2p}-1}{2}$ (speziellen) Gruppencharakteristiken zugeordnet werden; so z. B. dem Complexe mit der Gruppe

$$(1),\ (\mu),\ (\mu^2)$$

die Charakteristik

$$[\mu],$$

dann ist der betreffende Complex durch die Angabe dieses Zeichens vollkommen bestimmt.

Die in jedem Complexe auftretenden Systeme können in Paare geteilt werden, so dass die Charakteristiken der Systeme eines Paares einander entgegengesetzt sind, z. B.

$$(\lambda),\ (\lambda\mu),\ (\lambda\mu^2)\ \text{und}\ (\lambda^2),\ (\lambda^2\mu^2),\ (\lambda^2\mu),$$

wofür man kürzer das Tripel von Gruppencharakteristiken

$$[\lambda],\ [\lambda\mu],\ [\lambda\mu^2]$$

schreiben kann.

Solcher Tripel, die einer bestimmten Gruppencharakteristik $[\mu]$ zugeordnet sind, gibt es dann

$$\frac{3^{2p-1}-1}{2}.$$

Wir wollen jetzt die Beschaffenheit der in einem Complexe enthaltenen Dreiersysteme näher ins Auge fassen; es wird sich dann zeigen, dass die in einem Complexe enthaltenen Systeme stets zwei wesentlich verschiedene Klassen bilden; die Charakteristiken der Systeme der einen Klasse genügen zu zweien der Bedingung $\mu_\alpha | \mu_\beta \equiv 0$ (mod. 3), und diese Klasse enthält 3^{2p-2} Systeme. Die Charakteristiken der Systeme der 2. Klasse genügen zu zweien der Bedingung $\mu_\alpha | \mu_\beta \equiv \pm 1$ (mod. 3), und solcher Systeme gibt es $2 \cdot 3^{2p-2}$.

Wie oben erwähnt entstehen die Systeme eines Complexes $[\mu]$, indem man aus den 3^{2p} eigentlichen Charakteristiken $2p-1$ von einander und von (μ) unabhängige auswählt, die durch sie bedingte Gruppe vom Grade 3^{2p-1} bildet und jede Charakteristik (ϱ) derselben mit (μ) zu dem Systeme:

$$(\varrho),\ (\varrho\,\mu),\ (\varrho\,\mu^2)$$

oder

$$(\mu_1),\ (\mu_2),\ (\mu_3)$$

vereinigt. Die zwischen je 2 der Charakteristiken bestehenden Bedingungen

$$\mu_\alpha | \mu_\beta \equiv \varepsilon \text{ (mod. 3)}, \quad \left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} = 1, 2, 3$$

hängen somit nur von der Congruenz:

$$\varrho | \mu \equiv \varepsilon_1 \text{ (mod. 3)}$$

ab. Ist $\varepsilon_1 \equiv 0$, so genügen die Charakteristiken des Dreiersystems der Bedingung $\varepsilon \equiv 0$, im Gegenfalle der Bedingung $\varepsilon \equiv \pm 1$. Sind nun die $2p-1$ unabhängigen Charakteristiken, aus denen die Gruppe vom Grade 3^{2p-1} gebildet ist,

$$(\varrho_1),\ (\varrho_2)\ \ldots\ (\varrho_{2p-1}),$$

so müssen diese mit (μ) entweder die Congruenz

$$(1) \quad \ldots\ldots\ \mu | \varrho_1 \equiv \mu | \varrho_2 \equiv \ldots \equiv \mu | \varrho_{2p-1} \equiv 0$$

oder die Congruenzen:

$$(2) \quad \ldots \left\{\begin{matrix} \mu | \varrho_1 \equiv \mu | \varrho_2 \equiv \ldots \equiv \mu | \varrho_\sigma \equiv 0 \\ \mu | \varrho_{\sigma+1} \equiv \pm 1,\ \mu | \varrho_{\sigma+2} \equiv \pm 1, \ldots \mu | \varrho_{2p-1} \equiv \pm 1 \end{matrix}\right\} \sigma < 2p-1$$

erfüllen.

Die erste Congruenz ist nach Satz (V) sofort auszuschliessen, da es nur p unabhängige Charakteristiken gibt, die sie befriedigen. Wenn aber die $2p-1$ unabhängigen Charakteristiken (ϱ) den Bedingungen (2) genügen, so folgt aus Satz (VI), dass es in der aus ihnen gebildeten Gruppe stets 3^{2p-2} Charakteristiken gibt, die mit (μ) der Bedingung $\varepsilon_1 \equiv 0$ genügen und $2 \cdot 3^{2p-2}$, die der Bedingung $\varepsilon_1 \equiv \pm 1$ entsprechen. Somit gibt es 3^{2p-2} Systeme, deren Charakteristiken zu zweien der Bedingung $\varepsilon \equiv 0$ und $2 \cdot 3^{2p-2}$ Systeme, deren Charakteristiken zu Paaren der Congruenz $\varepsilon \equiv \pm 1$ genügen.

Unter den Systemen der ersten Klasse befindet sich die Gruppe

$$(1),\ (\mu),\ (\mu^2) = [\mu],$$

während die $3^{2p-2} - 1$ übrigen Systeme $\frac{3^{2p-2}-1}{2}$ Tripel von Gruppencharakteristiken bilden, indem man sie paarweise zu einem solchen Tripel vereinigt.

Die Anzahl der Tripel, die auf dieselbe Weise aus den Systemen der 2. Klasse entspringen, ist:

$$3^{2p-2}.$$

Es sei noch bemerkt, dass dieses allgemeine Resultat im Falle $p = 2$ bereits von anderer Seite her bekannt ist, indem die hier auftretende Teilung der Tripel von Gruppencharakteristiken in 4 und 9 genau der Gruppirung der Lösungen des Dreiteilungsproblems der hyperelliptischen Funktionen vom Geschlechte $p = 2$ entspricht, wie sie A. Clebsch in den Abhandlungen der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Band 14, angibt.

§ 6.

Untergruppen vom Grade 3^p. Die Goepel'sche Gruppe.

Die Bildung einer Untergruppe vom Grade 3^p haben wir bereits in der ersten Zeile des Schemas auf pag. 334 kennen gelernt. Die Anzahl der gleichberechtigten Untergruppen 3^pten Grades ist nach Formel B. pag. 335

$$B' = \frac{(3^{2p}-1)\ (3^{2p-1}-1) \ldots (3^{p+1}-1)}{(3^p-1)\ (3^{p-1}-1) \ldots (3-1)}.$$

Zu jeder derselben gehören weitere $3^p - 1$ Systeme von 3^p Charakteristiken, die mit der Gruppe einen Complex bilden. (Einen solchen Complex stellt das erwähnte Schema vor.) Es gibt somit B' solcher Complexe.

Die Gruppen, von denen jede aus den Combinationen von p unabhängigen Charakteristiken $(\mu_1), (\mu_2) \dots (\mu_p)$ entsteht, scheiden sich in zwei wesentlich verschiedene Klassen, je nachdem

$$\mu_\alpha \mid \mu_\beta \equiv 0 \pmod{3}, \quad \left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} = 1, 2, \dots p,$$

ist oder nicht.

Im ersten Falle genügen nach den Sätzen (IV.) und (V.) alle Charakteristiken der Gruppe der Bedingung:

$$\mu_\alpha \mid \mu_\beta \equiv 0 \pmod{3}.$$

Die zu dieser Klasse gehörigen Gruppen entsprechen vollständig jenen, die Herr Frobenius bei seinen Untersuchungen über Charakteristiken, deren Zahlen nach dem Modul 2 genommen sind, als Goepel'sche Gruppen bezeichnet, wir wollen daher auch für unsere Gruppen erster Klasse diese Benennung beibehalten.

Die Anzahl der Goepel'schen Gruppen findet man durch eine ähnliche Betrachtung, wie wir sie pag. 12 zur Aufstellung der Untergruppen vom Grade 3^λ angestellt haben, indem man nur beachtet, dass die zu wählenden Charakteristiken der einen linearen Congruenz $\mu_\alpha \mid \mu_\beta \equiv 0$ genügen müssen. Man erhält so:

$$D = \frac{(3^{2p}-1)\ (3^{2p-2}-1)\ (3^{2p-4}-1)\ \dots\ (3^2-1)}{(3^p-1)\ (3^{p-1}-1)\ (3^{p-2}-1)\ \dots\ (3-1)}$$

oder

$$D = (3^p+1)\ (3^{p-1}+1)\ \dots\ (3^2+1)\ (3+1).$$

Zu jeder Gruppe gehören dann noch 3^p-1 weitere Goepel'sche Systeme, die mit ihr einen Complex von 3^p Systemen bilden, also gibt es überhaupt, die Gruppe mitgerechnet,

$$E = 3^p\,(3^p+1)\,(3^{p-1}+1)\dots(3^2+1)\,(3+1)$$

Goepel'sche Systeme.

Die Anzahl der Gruppen 2. Klasse ist dann

$$B' - D,$$

die der Systeme 2. Klasse

$$3^p\,(B' - D).$$

Im Falle p = 2 sind die fraglichen Systeme beider Klassen Neunersysteme, es gibt deren 1170, darunter befinden sich überhaupt 130 Gruppen und von diesen sind 40 Goepel'sche Gruppen und 90 Gruppen 2. Klasse, die je aus 2 unabhängigen Charakteristiken (μ_1), (μ_2) gebildet sind, welche der Bedingung $\mu_1 | \mu_2 \equiv \pm 1$ genügen. Diese $2 \cdot 45$ Neunersysteme sind identisch mit jenen, die Herr Jordan [1]) bei Behandlung des Dreiteilungsproblems aufstellt, indem er eine gewisse Untergruppe der Gruppe linearer Transformationen bildet, deren Operationen mit denen einer solchen Neunergruppe vertauschbar sind.

§ 7.

Fundamentalsysteme.

Die Untergruppe der linearen Transformationen, welche in unserer Gesamtgruppe enthalten ist, gibt zur Betrachtung einer Reihe anderer sehr wichtiger Systeme Anlass, die Fundamentalsysteme [2]) heissen mögen.

Genügen nämlich die Charakteristiken eines Systemes alle zu zweien der Congruenz

$$\mu_\alpha | \mu_\beta \equiv 1 \pmod{3},\ \alpha < \beta, \quad \ldots\ldots \tag{1.}$$

so geht jedes dieser Systeme durch eine lineare Transformation in ein anderes und zwar nur einmal über, so dass man ebensoviele Systeme als lineare Transformationen erhält, nämlich nach pag. 333.

$$A = (3^{2p} - 1)\, 3^{2p-1}\, (3^{2p-2} - 1) \ldots (3^2 - 1)\, 3\ [3]).$$

Um diese Systeme genauer zu untersuchen, schicken wir einige Sätze voraus.

(VII.) Genügen die Charakteristiken eines Systems alle

1) C. Jordan: Traité des substitutions pag. 367.

2) Vergleiche bezüglich dieser Bezeichnungsweise die schon citirte erste Abhandlung von Frobenius pag. 208; die im Texte folgenden Sätze entsprechen völlig den daselbst für den Modul 2 entwickelten.

3) Vergleiche die weiter unten durch andere Ableitung erzielte Bestätigung der Richtigkeit dieser Formel.

zu zweien der Congruenz $\mu_\alpha | \mu_\beta \equiv 1 \pmod{3}$, $\alpha < \beta$, so sind sie, wenn ihre Anzahl gerade ist, voneinander unabhängig; ist aber ihre Anzahl ungerade, so sind sie entweder unabhängig oder die Combination einer mit 1 congruenten Anzahl derselben ist Null, und dann ist die um eins verminderte Anzahl von Charakteristiken unabhängig.

Die Richtigkeit des Satzes ergibt sich wie folgt: Ist die Anzahl der Charakteristiken des Systems 2 r und bildet man aus irgend 3 s derselben eine Combination

$$(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{3s}),$$

wo natürlich auch mehrere (μ) einander gleich sein dürfen, so ist:

$$\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{3s} | \mu_1 \equiv \mu_1 | \mu_1 + \mu_2 | \mu_1 + \dots + \mu_{3s} | \mu_1 \equiv (3s - 1) \pmod{3},$$

wie auch s gewählt ist, somit kann $(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{3s})$ nicht mit Null congruent sein, sonst wäre nach der Bedeutung des Symbols $\mu_\alpha | \mu_\beta$ die obige Congruenz Null. Auf dieselbe Weise folgt, dass

$$\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{3s-1} | \mu_1 \equiv (3s - 2) \pmod{3}$$

und

$$\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{3s+1} | \mu_1 \mu_2 \equiv (3s - 1) \pmod{3}$$

ist, somit kann auch keine Combination zu $3s - 1$ oder $3s + 1$ der 2 r Charakteristiken, also auch nicht ihre Summe mit Null congruent sein, somit sind sie unabhängig.

Ist aber die Anzahl der Charakteristiken ungerade: $2r + 1$, und bildet man aus allen $2r + 1$ Charakteristiken die Combination

$$(\mu_1 \mu_2^2 \mu_3 \mu_4^2 \dots \mu_{2r}^2 \mu_{2r+1}),$$

so kann dieselbe mit Null congruent sein, ohne dass die Charakteristiken aufhören der Bedingungsgleichung

$$\mu_\alpha | \mu_\beta \equiv 1 \pmod{3}$$

zu genügen; denn aus der Annahme

$$(\mu_1 \mu_2^2 \mu_3 \mu_4^2 \dots \mu_{2r}^2 \mu_{2r+1}) \equiv 0$$

folgt

$$(\mu_{2r+1}) \equiv (\mu_1^2 \mu_2 \mu_3^2 \dots \mu_{2r})$$

und hieraus

$$\mu_\varepsilon | \mu_{2r+1} \equiv 1.$$

Um dies einzusehen, unterscheide man zwei Fälle: $\varepsilon = 2\lambda$, $\varepsilon = 2\lambda + 1$.

Im ersten Falle ist:

$$\begin{aligned}\mu_{2\lambda} \mid \mu_{2r+1} &\equiv \mu_{2\lambda} \mid \mu_1^2 + \mu_{2\lambda} \mid \mu_2 + \ldots + \mu_{2\lambda} \mid \mu_{2\lambda} + \ldots + \mu_{2\lambda} \mid \mu_{2r} \\ &\equiv \mu_1 \mid \mu_{2\lambda} - \mu_2 \mid \mu_{2\lambda} + \ldots + \mu_{2\lambda-1} \mid \mu_{2\lambda} + \mu_{2\lambda} \mid \mu_{2\lambda} - \mu_{2\lambda} \mid \mu_{2\lambda+1} \\ &\qquad + \ldots + \mu_{2\lambda} \mid \mu_{2r} \\ &\equiv 1, \text{ (mod. 3)},\end{aligned}$$

da vor Null ($\mu_{2\lambda} \mid \mu_{2\lambda} \equiv 0$) eine ungerade, nach Null eine gerade Anzahl wechselnder Zeichen liegt.

Im zweiten Falle ist:

$$\begin{aligned}\mu_{2\lambda+1} \mid \mu_{2r+1} &\equiv \mu_1 \mid \mu_{2\lambda+1} - \mu_2 \mid \mu_{2\lambda+1} + \ldots - \mu_{2\lambda} \mid \mu_{2\lambda+1} + \mu_{2\lambda+1} \mid \mu_{2\lambda+1} \\ &\qquad + \mu_{2\lambda+1} \mid \mu_{2\lambda+2} - \ldots + \mu_{2\lambda+1} \mid \mu_{2r} \\ &\equiv 1,\end{aligned}$$

da vor $\mu_{2\lambda+1} \mid \mu_{2\lambda+1} \equiv 0$ eine gerade, nach Null eine ungerade Anzahl von wechselnden Zeichen liegt.

Eine ungerade Anzahl von Charakteristiken braucht also nicht unabhängig zu sein, dagegen ist dann die um eine Charakteristik verminderte Anzahl, als eine gerade, wieder unabhängig.

Hat man also ein System von λ Charakteristiken (μ_1), $(\mu_2) \ldots (\mu_\lambda)$, die der Congruenz $\mu_\alpha \mid \mu_\beta \equiv 1$, $\alpha < \beta$, genügen, (λ ungerade), so sind jedenfalls $\lambda - 1$ von ihnen unabhängig, und da es höchstens 2 p unabhängige gibt, so ist $\lambda - 1 \leqq 2\,p$, also höchstens $\lambda = 2\,p + 1$.

Fügt man einem solchen Systeme von $2\,p + 1$ wesentlich unabhängigen Charakteristiken noch $(1) = (0)$ hinzu, so hat man ein **speziellen Fundamentalsystem** von $2\,p + 2$ Charakteristiken.

Die nächste Frage ist nach der Bildung eines speziellen Fundamentalsystemes und der Ableitung allgemeinerer Systeme aus demselben.

Zur Beantwortung der ersten Frage beachte man, dass ausser Null die Charakteristik (μ_1) auf $3^{2p} - 1$ Arten aus den überhaupt vorhandenen 3^{2p} Charakteristiken gewählt werden kann; (μ_2) muss dann mit (μ_1) der Bedingung $\mu_1 \mid \mu_2 \equiv 1$ genügen und kann somit auf 3^{2p-1} Arten gewählt werden, dann sind (μ_1) und (μ_2) nach Satz (VII.) unabhängig. Hierauf ist (μ_3) so zu bestimmen, dass es den Congruenzen $\mu_1 | \mu_3 \equiv 1$, $\mu_2 | \mu_3 \equiv 1$ genügt. Diese Congruenzen haben 3^{2p-2} Lösungen, von denen aber die Lösung $(\mu_1^2 \mu_2)$ nach Satz (VII.) auszuschliessen ist (für $p > 1$), so dass demnach (μ_3) auf $3^{2p-2}-1$ Arten von (μ_1) und (μ_2) unabhängig gewählt werden kann; (μ_4) kann dann wieder auf 3^{2p-3} Arten unabhängig von den vorausgehenden Charakteristiken bestimmt werden, während bei der Wahl von (μ_5) wieder die Lösung $(\mu_1^2 \mu_2 \mu_3^2 \mu_4)$ auszuschliessen ist (für $p > 2$). Somit ergibt sich ausser dem geschilderten Bildungsgesetz eines speziellen Fundamentalsystemes die Anzahl derselben in der Gestalt:

$$A = (3^{2p}-1)\, 3^{2p-1} (3^{2p-2}-1) \ldots (3^2-1) \cdot 3,$$

wie sie bereits § 2 angegeben wurde. Diese speziellen Fundamentalsysteme gehören alle der einen Charakteristik Null zu und bilden somit einen Complex von Systemen, der bei einer Untergruppe linearer Transformationen ungeändert bleibt.

Aus einem speziellen Fundamentalsystem erhält man dann sofort ein allgemeines, indem man eine der übrigen $3^{2p}-1$ Charakteristiken zu den einzelnen Charakteristiken des Systemes addirt. Dadurch geht der Complex spezieller Fundamentalsysteme in je einen neuen Complex allgemeinerer über, und man hat somit 3^{2p} Complexe, welche einzeln den 3^{2p} gleichberechtigten Untergruppen linearer Transformationen zugehören.

Wollte man die allgemeinen Fundamentalsysteme unabhängig von ihrer Bildung aus den die Charakteristik Null enthaltenden speziellen definiren, so müsste dies (analog den von Herrn Frobenius in der citirten Abhandlung für den Modul 2 aufgestellten Systemen) durch die Congruenz

$$(2) \quad \ldots \ldots \quad \mu_\alpha | \mu_\beta + \mu_\beta | \mu_\gamma + \mu_\gamma | \mu_\alpha \equiv 1, \; \alpha < \beta < \gamma, \; (\text{mod. } 3)$$

geschehen, die für $\mu_\gamma = o$ in die spezielle $\mu_\alpha | \mu_\beta \equiv 1$ übergeht. Dass die Charakteristiken unserer Fundamentalsysteme dieser Gleichung genügen, ergibt sich leicht. Denn ist ein spezielles Fundamentalsystem gegeben durch

$$(1),\ (\mu_1),\ (\mu_2) \ldots (\mu_{2p+1}),$$

und (μ) irgend eine Charakteristik, so ist ein dem (μ) zugehöriges allgemeines Fundamentalsystem:

$$(\mu),\ (\mu\,\mu_1),\ (\mu\,\mu_2) \ldots (\mu\,\mu_{2p+1}).$$

Für irgend 3 dieser Charakteristiken erhält man dann gemäss Gleichung (1.)

$$\mu\,\mu_\alpha \,|\, \mu\,\mu_\beta + \mu\,\mu_\beta \,|\, \mu\,\mu_\gamma + \mu\,\mu_\gamma \,|\, \mu\,\mu_\alpha \equiv 1,$$

wie man sich durch Auflösung dieser Symbole in bekannter Weise leicht überzeugt.

Die Gesamtzahl aller überhaupt zu bildenden Fundamentalsysteme beträgt nach dem Vorhergehenden

$$A' = 3^{2p}(3^{2p}-1)\,3^{2p-1}(3^{2p-2}-1)\ldots(3^2-1)\,3;$$

darunter sind jedoch nur $\frac{A'}{2p+2}$ verschiedene, wenn man diejenigen Systeme als gleich auffasst, die sich nur durch die Stellung der einzelnen Charakteristiken von einander unterscheiden. Es sind nämlich dann immer jene $2p+2$ einander gleich, die durch cyklische Vertauschung der Charakteristiken (μ_1), (μ_2), $(\mu_3)\ldots(\mu_{2p+2})$ gewonnen werden, wie die Form der Gleichung (2) unmittelbar zeigt.

II. Abschnitt.

§ 8.

Bezeichnungen der Thetafunktionen.

Wir stellen hier vorerst die bekannten Bezeichnungen und Formeln über Thetafunktionen zusammen, die wir im Folgenden bedürfen.

Die Thetafunktion, die unsern Betrachtungen zugrunde liegt, ist definirt durch

$$\vartheta(o)(u) = \vartheta(o)(u_1, u_2, \ldots u_p) = \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty}\ldots\sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{i\pi\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2i\pi\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} m_\mu u_\mu} \qquad (1),$$

wo die Moduln $a_{\mu\mu'}$ der Bedingung:

$$a_{\mu\mu'} = a_{\mu'\mu}$$

genügen müssen, und der reelle Teil von $\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\, m_\mu\, m_{\mu'}$ eine wesentlich negative quadratische Form sein muss. Wir ordnen nun den 3^{2p} Charakteristiken (α), die Null mit eingeschlossen, die 3^{2p} möglichen Systeme von Periodendritteln zu, indem wir setzen:

$$\alpha = \frac{\alpha'_\mu}{3} + \frac{1}{3}\sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} \alpha_{\mu'}\, a_{\mu\mu'},$$

so dass

$$(2)\qquad \vartheta(\alpha)(u) = e^{\frac{i\pi}{9}\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} a_{\mu\mu'}\,\alpha_\mu\,\alpha_{\mu'} + \frac{2}{3} i\pi \sum\limits_{\mu}\alpha_\mu\left(u_\mu + \frac{\alpha_\mu'}{3}\right)}\ \vartheta(o)(u+\alpha), \left.\begin{matrix}\mu\\ \mu'\end{matrix}\right\} = 1, 2 \,.. \,p$$

ist; die Summen im Exponenten erstrecken sich hier, wie im Folgenden, überall auf die Werte von 1 bis p.

Der Additionsgruppe der eigentlichen ϑ-Charakteristiken entspricht dann die Additionsgruppe der 3^{2p} Periodendrittel, welche die Thetafunktionen ineinander überführt.

Weiter ist

$$(3)\quad \vartheta(\alpha)(-u_1, -u_2, \ldots -u_p) = \vartheta(-\alpha)(u_1, u_2, \ldots u_p) = \vartheta(\alpha^2)(u_1, u_2, \ldots u_p),$$

also

$$(4)\quad \ldots\ldots\quad \vartheta(\alpha)(o) = \vartheta(\alpha^2)(o);$$

somit kann man die Thetafunktionen mit Auszeichnung einer, hier der $\vartheta(o)(u)$ auch zu $\frac{3^{2p}-1}{2}$ Paaren gruppiren, deren Charakteristiken sich nur durch das Zeichen unterscheiden (vergl. pag. 331).

Ferner sind noch folgende wichtige Formeln zu bemerken:

$$(5)\qquad \ldots\quad \vartheta(\alpha)(u + 3\beta)$$

$$= e^{-i\pi\left\{\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} a_{\mu\mu'}\,\beta_\mu\,\beta_{\mu'} + 2\sum\limits_{\mu}\beta_\mu\, u_\mu\right\} + \frac{2i\pi}{3}\sum\limits_{\mu}(\alpha_\mu\,\beta_\mu' - \alpha_\mu'\,\beta_\mu)} \cdot \vartheta(\alpha)(u),$$

$$(6)\qquad \ldots\quad \vartheta(\alpha)(u + \beta)$$

$$= e^{\frac{-i\pi}{9}\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} \alpha_{\mu\mu'}\,\beta_\mu\,\beta_{\mu'} - \frac{2i\pi}{3}\sum\limits_{\mu}\beta_\mu\left(u_\mu + \frac{\alpha_\mu'}{3} + \frac{\beta_\mu'}{3}\right)} \cdot \vartheta(\alpha\beta)(u).$$

Sei ferner zur Abkürzung:

$$e^{\frac{2i\pi}{3}} = \tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

gesetzt; bildet man dann das Symbol $\tau^{\mu_\alpha|\zeta}$, so ist

$$\sum_\zeta \tau^{\mu_\alpha|\zeta} = 0 \text{ und } \sum_\zeta \tau^{0|\zeta} = 3^{2p}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

wenn sich die Summen auf sämtliche Charakteristiken (ζ) beziehen. Denn nach der Bedeutung des Symbols $\mu_\alpha|\zeta$ ist $0|\zeta \equiv 0$ für jeden Wert von ζ, wodurch die Richtigkeit der 2. Gleichung folgt. Ferner befinden sich unter den 3^{2p} Charakteristiken (ζ) 3^{2p-1}, die $\mu_\alpha|\zeta \equiv 0$, 3^{2p-1}, die $\mu_\alpha|\zeta \equiv +1$ und 3^{2p-1} die $\mu_\alpha|\zeta \equiv -1$ machen; also ist

$$\sum_\zeta \tau^{\mu_\alpha|\zeta} \equiv 3^{2p-1}(1 + \tau + \tau^{-1}) \equiv 0 \pmod{3}. \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

§ 9.

I. Additionstheorem der Thetafunktionen.

Bildet man 3^p Thetaprodukte aus je drei Thetafunktionen mit derselben Charakteristik, so sind dieselben nach einem bekannten Satze voneinander unabhängig, und ein $3^p + 1$ tes Produkt lässt sich durch dieselben linear darstellen.

Es ist also:

$$c \cdot \vartheta(\sigma)(u-v_1)(u-v_2)(u-v_3) = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=3^p-1} c_\alpha \, \vartheta(\sigma_\alpha)(u-b_1)(u-b_2)(u-b_3), \quad (1)$$

wobei die Gleichungen bestehen:

$$\left.\begin{array}{l} v_1^{(1)} + v_2^{(1)} + v_3^{(1)} = b_1^{(1)} + b_2^{(1)} + b_3^{(1)} = w_1, \\ v_1^{(2)} + v_2^{(2)} + v_3^{(2)} = b_1^{(2)} + b_2^{(2)} + b_3^{(2)} = w_2, \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \\ v_1^{(p)} + v_2^{(p)} + v_3^{(p)} = b_1^{(p)} + b_2^{(p)} + b_3^{(p)} = w_p, \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und die w auch $= 0$ genommen werden können, was wir im Folgenden zur Vereinfachung voraussetzen. Ferner wurde in der obigen Gleichung statt der p Argumente

$$u_1 - v_1^{(1)},\ u_2 - v_1^{(2)},\ \ldots\ u_p - v_1^{(p)} \text{ nur } u - v_1$$

und statt

$$\vartheta(\sigma)(u - v_1)\,\vartheta(\sigma)(u - v_2)\,\vartheta(\sigma)(u - v_3)$$

$\vartheta(\sigma)$ nur einmal geschrieben.

Führen wir nun in diese Gleichung statt der Indices (σ) die Charakteristiken eines Goepel'schen Systems

$$(\varrho_1),\ (\varrho_1\,\mu_1),\ (\varrho_1\,\mu_2)\ \ldots\ (\varrho_1\,\mu_{3^p-1})$$

ein, so kann man die Constanten c, c_α durch ein ähnliches Verfahren bestimmen, wie es von Herrn Frobenius a. a. O. angewendet wurde.

Es ist zunächst:

$$(3)\ \ldots\ c\,\vartheta(\varrho_1)(u - v_1)(u - v_2)(u - v_3) = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=3^p-1} \vartheta(\varrho_1\,\mu_\alpha)(u - b_1)(u - b_2)(u - b_3).$$

Setzt man statt u: $\qquad a + \mu_\beta,$

wo a irgend eine Constante ist, so ergibt sich mit Hilfe von Gleichung 6, § 8

$$(4)\ \ldots\ldots\ c\,\vartheta(\varrho_1\,\mu_\beta)(a - v_1)(a - v_2)(a - v_3)$$
$$= \sum_{\alpha=0}^{\alpha=3^p-1} c_\alpha\,\tau^{2\Sigma\mu_\alpha'\mu_\beta}\,\vartheta(\varrho_1\,\mu_\alpha\,\mu_\beta)(a - b_1)(a - b_2)(a - b_3),$$

die Summe $\Sigma\,\mu_\alpha'\,\mu_\beta$ im Exponenten ist hier, wie im Folgenden immer, wenn im Exponenten kein Summationsbuchstaben angegeben ist, über alle Zahlenwerte der betreffenden Charakteristik von 1 bis p auszudehnen. Multiplicirt man jetzt die Gleichung mit dem Faktor $\tau^{\mu_\beta|\zeta}$, wo (ζ) irgend eine der 3^{2p} Charakteristiken ist, lässt β alle Werte von o bis $3^p - 1$ durchlaufen und addirt die entstandenen 3^p Gleichungen, so bekommt man:

$$(5)\ \ldots\ c \cdot \sum_{\beta=0}^{\beta=3^p-1} \tau^{\mu_\beta|\zeta}\,\tau^{|\mu_\beta|}\,\vartheta(\varrho_1\,\mu_\beta)(a - v_1)(a - v_2)(a - v_3)$$
$$= \sum_{\alpha=0}^{\alpha=3^p-1}\ \sum_{\beta=0}^{\beta=3^p-1} c_\alpha\,\tau^{\mu_\beta|\zeta}\cdot\tau^{|\mu_\beta| - \Sigma\mu_\alpha'\mu_\beta}\,\vartheta(\varrho_1\,\mu_\alpha\,\mu_\beta)(a - b_1)(a - b_2)(a - b_3).$$

Um nun rechts die Indices α und β zu trennen, sei

$$(\mu_\beta) = (\overset{2}{\mu_\alpha}\, \mu_\gamma) = (\mu_\gamma) - (\mu_\alpha)$$

gesetzt, dann stellt (μ_γ) ebenfalls alle Charakteristiken der Goepel'schen Gruppe dar, nur in anderer Reihenfolge als (μ_β), und wenn man beachtet, dass die Charakteristiken dieser Gruppe nach § 6 alle der Relation genügen:

$$\mu_\alpha \mid \mu_\beta \equiv 0 \text{ (mod. 3)},$$

so ergibt sich durch eine leichte Zwischenrechnung statt der rechten Seite der Gleichung (5)

$$\sum_{\gamma=0}^{\gamma=3^p-1} \sum_{\alpha=0}^{\alpha=3^p-1} c_\alpha\, \tau^{2\,|\,\mu_\alpha\,|}\, \tau^{2\,|\,\mu_\gamma\,|}\, \tau^{\mu_\alpha^2\,|\,\zeta}\, \tau^{\mu_\gamma\,|\,\zeta}\, \vartheta\,(\varrho_1\, \mu_\gamma)\,(a-b_1)\,(a-b_2)\,(a-b_3)$$

$$= \left(\sum_{\alpha=0}^{\alpha=3^p-1} c_\alpha\, \tau^{2\,|\,\mu_\alpha\,|}\, \tau^{\mu_\alpha^2\,|\,\zeta}\right) \cdot \sum_{\gamma=0}^{\gamma=3^p-1} \tau^{|\,\mu_\gamma\,|}\, \tau^{\mu_\gamma\,|\,\zeta}\, \vartheta\,(\varrho_1\, \mu_\gamma)\,(a-b_1)\,(a-b_2)\,(a-b_3),$$

und hieraus, indem man noch $\alpha = \beta$ setzt und die so umgeformte Gleichung (5) nach der Coeffizientensumme auflöst:

$$\sum_{\beta=0}^{\beta=3^p-1} c_\beta\, \tau^{2\,|\,\mu_\beta\,|}\, \tau^{\mu_\beta^2\,|\,\zeta}$$

$$= c \cdot \frac{\sum_\beta \tau^{|\,\mu_\beta\,|}\, \tau^{\mu_\beta\,|\,\zeta}\, \vartheta\,(\varrho_1\, \mu_\beta)\,(a - v_1)\,(a - v_2)\,(a - v_3)}{\sum_\gamma \tau^{|\,\mu_\gamma\,|}\, \tau^{\mu_\gamma\,|\,\zeta}\, \vartheta\,(\varrho_1\, \mu_\gamma)\,(a - b_1)\,(a - b_2)\,(a - b_3)} \quad . \quad . \quad (5)$$

Will man den Coeffizienten c_ε bestimmen, so multiplizirt man die Gleichung mit $\tau^{\mu_\varepsilon\,|\,\zeta}$, dann bekommt c_ε den Coeffizienten: $\tau^{2\,|\,\mu_\varepsilon\,|}\, \tau^{\mu_\varepsilon^2\,|\,\zeta}\, \tau^{\mu_\varepsilon\,|\,\zeta} = \tau^{2\,|\,\mu_\varepsilon\,|}$, und die Gleichung wird:

$$c_\varepsilon\, \tau^{2\,|\,\mu_\varepsilon\,|} + \sum_\beta \tau^{2\,|\,\mu_\varepsilon\,|}\, \tau^{\mu_\beta^2\, \mu_\varepsilon\,|\,\zeta}\, c_\beta$$

$$= c\, \tau^{\mu_\varepsilon\,|\,\zeta} \cdot \frac{\sum_\beta \tau^{|\,\mu_\beta\,|}\, \tau^{\mu_\beta\,|\,\zeta}\, \vartheta\,(\varrho_1\, \mu_\beta)\,(a - v_1)\,(a - v_2)\,(a - v_3)}{\sum_\gamma \tau^{|\,\mu_\gamma\,|}\, \tau^{\mu_\gamma\,|\,\zeta}\, \vartheta\,(\varrho_1\, \mu_\gamma)\,(a - b_1)\,(a - b_2)\,(a - b_3)},$$

wo β noch alle Werte von o bis $3^p - 1$ mit Ausnahme von ε durchläuft. Lässt man nun (ζ) alle Charakteristiken durchlaufen und addirt die entstandenen 3^{2p} Gleichungen, so bekommt c_ε den Faktor 3^{2p}, während

$$\sum_\zeta \sum_\beta \tau^{2\left|\mu_\beta\right|} \tau^{\mu_\beta^2 \mu_\varepsilon \mid \zeta} c_\beta = \sum_\beta \tau^{2\left|\mu_\beta\right|} c_\beta \left(\sum_\zeta \tau^{\mu_\beta^2 \mu_\varepsilon \mid \zeta} \right) = 0$$

ist nach Gleichung 8, § 8. Ausserdem werden auf der rechten Seite 3^p Glieder einander gleich. Denn denkt man sich die 3^{2p} Charakteristiken (ζ) etwa in ein Schema wie pag. 334 geordnet, so dass die an der Spitze stehende Gruppe der (μ) unsere Goepel'sche Gruppe ist, so erkennt man leicht, dass infolge der Gleichung $\tau^{\mu_\alpha \mid \mu_\beta} \equiv 1$ immer jene 3^p Glieder einander gleich werden, die durch Einführung der in der gleichen Horizontalreihe stehenden Charakteristiken erscheinen. Daraus folgt, dass man die Summation jetzt nur mehr auf die Gruppe der (ϱ) auszudehnen braucht. Somit hat man:

$$(6)\quad 3^p \cdot \frac{c_\varepsilon}{\tau^{\left|\mu_\varepsilon\right|}} = \sum_{0}^{3^p-1} \lambda\, \tau^{\mu_\varepsilon \mid \varrho\lambda} \frac{\sum\limits_\beta \tau^{\left|\mu_\beta\right|} \tau^{\mu_\beta \mid \varrho\lambda}\, \vartheta(\varrho_1 \mu_\beta)(a - v_1)(a - v_2)(a - v_3)}{\sum\limits_\gamma \tau^{\left|\mu_\gamma\right|} \tau^{\mu_\gamma \mid \varrho\lambda}\, \vartheta(\varrho_1 \mu_\gamma)(a - b_1)(a - b_2)(a - b_3)}.$$

Führt man die so bestimmten Coeffizienten in Gleichung (3) ein, so kommt die Additionsformel:

$$(7)^{1)} \quad \ldots\ldots\quad 3^p\, \vartheta(\varrho_1)(u - v_1)(u - v_2)(u - v_3)$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=3^p-1} \left\{ \frac{\sum\limits_{\beta=0}^{\beta=3^p-1} \tau^{\left|\mu_\beta\right|} \tau^{\mu_\beta \mid \varrho\lambda}\, \vartheta(\varrho_1 \mu_\beta)(a - v_1)(a - v_2)(a - v_3)}{\sum\limits_{\gamma=0}^{\gamma=3^p-1} \tau^{\left|\mu_\gamma\right|} \tau^{\mu_\gamma \mid \varrho\lambda}\, \vartheta(\varrho_1 \mu_\gamma)(a - b_1)(a - b_2)(a - b_3)} \cdot \sum_{\alpha=0}^{\alpha=3^p-1} \tau^{\left|\mu_\alpha\right|} \tau^{\mu_\alpha \mid \varrho\lambda}\, \vartheta(\varrho_1 \mu_\alpha)(u - b_1)(u - b_2)(u - b_3) \right\}.$$

1) Gemäss dieser Gleichung möge die in meiner o. c. Note angegebene Schlussformel richtig gestellt werden, in welcher durch ein Versehen die im Neuner rechter Hand auftretende Summe nach links gesetzt wurde.

Eine zweite sehr wichtige Gleichung ergibt sich durch folgende Betrachtung. Da a ganz willkürlich gewählt wurde, so sind nach Gleichung (5) die Verhältnisse der Coeffizienten c_β von a unabhängig, und somit folgt:

$$\sum_{\beta=0}^{\beta=3^p-1} \tau^{\mu_\beta|\zeta} \tau^{|\mu_\beta|} \vartheta(\varrho_1 \mu_\beta)(a-v_1)(a-v_2)(a-v_3)$$

$$\cdot \sum_{\gamma=0}^{\gamma=3^p-1} \tau^{\mu_\gamma|\zeta} \tau^{|\mu_\gamma|} \vartheta(\varrho_1 \mu_\gamma)(u-b_1)(u-b_2)(u-b_3)$$

$$= \sum_{\beta=0}^{\beta=3^p-1} \tau^{\mu_\beta|\zeta} \tau^{|\mu_\beta|} \vartheta(\varrho_1 \mu_\beta)(u-v_1)(u-v_2)(u-v_3)$$

$$\cdot \sum_{\gamma=0}^{\gamma=3^p-1} \tau^{\mu_\gamma|\zeta} \tau^{|\mu_\gamma|} \vartheta(\varrho_1 \mu_\gamma)(a-b_1)(a-b_2)(a-b_3).$$

Lassen wir wieder (ζ) alle Charakteristiken durchlaufen und addiren die entstandenen 3^{2p} Gleichungen, so verschwinden wieder alle Glieder ausser dem Gliede, für welches $(\mu_\beta \mu_\gamma) \equiv 0$, d. h. $(\mu_\gamma) = (\mu_\beta^2)$ ist. Also nimmt die Gleichung die Gestalt an:

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{\beta=0}^{\beta=3^p-1} \tau^{2|\mu_\beta|} \vartheta(\varrho_1 \mu_\beta)(a-v_1)(a-v_2)(a-v_3)\, \vartheta(\varrho_1 \mu_\beta^2)(u-b_1)(u-b_2)(u-b_3) = \\ &\sum_{\beta=0}^{\beta=3^p-1} \tau^{2|\mu_\beta|} \vartheta(\varrho_1 \mu_\beta)(u-v_1)(u-v_2)(u-v_3)\, \vartheta(\varrho_1 \mu_\beta^2)(a-b_1)(a-b_2)(a-b_3). \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Die Gleichungen (7) und (8) lassen sich noch etwas verallgemeinern; indem man nämlich in (7) statt u: $u+\sigma-\varrho_1$ und statt v_1, v_2, v_3 bezüglich $v_1-\varkappa$, $v_2-\varkappa$, $v_3-\varkappa$ schreibt, ((σ) und $(\varkappa)$ sind irgend welche Charakteristiken) erhält man:

$$3^p \vartheta(\sigma\varkappa)(u-v_1)(u-v_2)(u-v_3) =$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\lambda=0}^{\lambda=3^p-1} \tau^{\Sigma(\sigma-\varrho_1)\varkappa'} \cdot \left\{ \frac{\sum\limits_\beta \tau^{|\mu_\beta|} \tau^{\mu_\beta|\varrho\lambda} \tau^{2\Sigma\mu_\beta\varkappa'} \vartheta(\mu_\beta \varrho_1 \varkappa)(a-v_1)(a-v_2)(a-v_3)}{\sum\limits_\gamma \tau^{|\mu_\gamma|} \tau^{\mu_\gamma|\varrho\lambda} \vartheta(\mu_\gamma \varrho_1)(a-b_1)(a-b_2)(a-b_3)} \right. \\ &\qquad \cdot \sum_\alpha \tau^{|\mu_\alpha|} \tau^{\mu_\alpha|\varrho\lambda + 2\Sigma(\sigma-\varrho_1)\mu_\alpha'} \vartheta(\sigma\mu_\alpha)(u-b_1)(u-b_2)(u-b_3) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Setzt man in (γ_1) statt v_1, v_2, v_3 bezüglich $v_1+\varrho_1-\sigma$, $v_2+\varrho_1-\sigma$, $v_3+\varrho_1-\sigma$ und statt b_1, b_2, b_3, $b_1+\varrho_1-\sigma$, $b_2+\varrho_1-\sigma$, $b_3+\varrho_1-\sigma$, so kommt:

$$(10)\begin{cases} \sum\limits_{\beta=0}^{\beta=3^p-1} \tau^{2\,|\,\mu_\beta\,|}\,\vartheta(\sigma\,\mu_\beta)(a-v_1)(a-v_2)(a-v_3)\cdot\vartheta(\sigma\,\mu_\beta^2)(u-b_1)(u-b_2)(u-b_3) \\ = \sum\limits_{\beta=0}^{\beta=3^p-1} \tau^{2\,|\,\mu_\beta\,|}\,\vartheta(\sigma\,\mu_\beta^2)(a-b_1)(a-b_2)(a-b_3)\cdot\vartheta(\sigma\,\mu_\beta)(u-v_1)(u-v_2)(u-v_3) \end{cases}$$

Aus Formel (8) gewinnt man noch eine weitere allgemeine Formel, bei welcher rechts 3^{2p} Glieder auftreten. Man addirt zunächst zu u und den Constanten b die Charakteristik (ϱ_α), so kommt nach einigen Reduktionen:

$$\sum_\beta \tau^{2\,|\,\mu_\beta\,|}\,\tau^{\mu_\beta^2\,|\,\varrho_\alpha}\,\vartheta(\varrho_1\mu_\beta)(a-v_1)(a-v_2)(a-v_3)\,\vartheta(\varrho_1\mu_\beta^2)(u-b_1)(u-b_2)(u-b_3)=$$

$$\sum_\beta \tau^{2\,|\,\mu_\beta+\varrho_\alpha\,|}\,\vartheta(\varrho_1\varrho_\alpha\mu_\beta)(u-v_1)(u-v_2)(u-v_3)\,\vartheta(\varrho_1\varrho_\alpha^2\mu_\beta^2)(a-b_1)(a-b_2)(a-b_3).$$

Lässt man jetzt α alle Werte von Null bis 3^p-1 durchlaufen und addirt die so entstehenden Gleichungen, so fallen auf der linken Seite alle Glieder hinaus bis auf das für $\mu_\beta^2\equiv 0$ erscheinende Glied, welches den Faktor 3^p gewinnt, und man hat somit

$$3^p\,\vartheta(\varrho_1)(a-v_1)(a-v_2)(a-v_3)\,\vartheta(\varrho_1)(u-b_1)(u-b_2)(u-b_3)=$$

$$\sum_{\alpha,\beta} \tau^{2\,|\,\mu_\beta+\varrho_\alpha\,|}\,\vartheta(\varrho_1\varrho_\alpha^2\mu_\beta^2)(a-b_1)(a-b_2)(a-b_3)\,\vartheta(\varrho_1\varrho_\alpha\mu_\beta)(u-v_1)(u-v_2)(u-v_3).$$

Da nun α und β alle Werte von Null bis 3^p-1 durchlaufen, so stellt sowol $(\varrho_\alpha\,\mu_\beta)$ als auch $(\varrho_\alpha^2\,\mu_\beta^2)$ alle 3^{2p} Charakteristiken vor (vergl. das Schema pag. 334), und somit kann man $(\varrho_\alpha\,\mu_\beta)=(\lambda_\sigma)$ setzend schreiben:

$$(11)\;.\;.\quad 3^p\,\vartheta(\varrho_1)(a-v_1)(a-v_2)(a-v_3)\,\vartheta(\varrho_1)(u-b_1)(u-b_2)(u-b_3)$$

$$=\sum_\sigma \tau^{2\,|\,\lambda_\sigma\,|}\,\vartheta(\varrho_1\lambda_\sigma)(u-v_1)(u-v_2)(u-v_3)\,\vartheta(\varrho_1\lambda_\sigma^2)(a-b_1)(a-b_2)(a-b_3).$$

Die Formeln (9), (10) und (11) können als Fundamentalformeln aufgefasst werden.

§ 10.

Spezielle Formeln.

Aus den im vorigen Paragraphen entwickelten Formeln lässt sich eine ganze Reihe spezieller Formeln gewinnen, indem man statt a, b_1, b_2, b_3, v_1, v_2, v_3 passende Werte einsetzt; hier mögen nur die einfachsten folgen. Setzt man in (9), (10) und (11) $a = o$, $b_1 = b_2 = b_3 = o$, so kommt:

$$3^p\, \vartheta(\sigma\varkappa)(u-v_1)(u-v_2)(u-v_3) =$$

$$\sum_\lambda \tau^{\Sigma(\sigma-\varrho_1)\varkappa'} \cdot \left\{ \frac{\sum\limits_\beta \tau^{|\mu_\beta|}\, \tau^{\mu_\beta|\varrho\lambda}\, \tau^{2\Sigma\mu_\beta\varkappa'}\, \vartheta(\varrho_1^2\varkappa^2\mu_\beta^2)(v_1)(v_2)(v_3)}{\sum\limits_\gamma \tau^{|\mu_\gamma|}\, \tau^{\mu_\gamma|\varrho\lambda}\, \vartheta^3(\varrho_1\mu_\gamma)} \right.$$

$$\left. \cdot \sum_\alpha \tau^{|\mu_\alpha|}\, \tau^{2\Sigma(\sigma-\varrho_1)\mu_\alpha'}\, \tau^{\mu_\alpha|\varrho\lambda} \cdot \vartheta^3(\sigma\mu_\alpha)(u) \right\}, \quad . \quad . \quad . \qquad (12)$$

$$\sum_\beta \tau^{2|\mu_\beta|}\, \vartheta(\sigma^2\mu_\beta^2)(v_1)(v_2)(v_3)\, \vartheta^3(\sigma\mu_\beta^2)(u)$$

$$= \sum_\beta \tau^{2|\mu_\beta|}\, \vartheta^3(\sigma\mu_\beta^2)\, \vartheta(\sigma\mu_\beta)(u-v_1)(u-v_2)(u-v_3), \qquad (13)$$

$$3^p\, \vartheta(\varrho_1^2)(v_1)(v_2)(v_3)\, \vartheta^3(\varrho_1)(u)$$

$$= \sum_\sigma \tau^{2|\lambda_\sigma|}\, \vartheta^3(\varrho_1\lambda_\sigma^2)\, \vartheta(\varrho_1\lambda_\sigma)(u-v_1)(u-v_2)(u-v_3). \qquad (14)$$

Die Summation nach σ ist hier über alle Charakteristiken auszudehnen.

Zwei mit (12) und (14) analoge Formeln erhält man durch die Substitution: $a = o$, $v_1 = v_2 = v_3 = o$ aus den Gleichungen (9) und (11), schreibt man dann noch w statt b, so lauten sie:

$$(15) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3^{p}\,\vartheta^{3}(\sigma\varkappa)(u) =$$

$$\sum_{\lambda} \tau^{\Sigma(\sigma-\varrho_1)\varkappa'} \left\{ \frac{\sum\limits_{\beta} \tau^{|\mu_\beta|}\, \tau^{2\Sigma\mu_\beta\varkappa'}\, \tau^{\mu_\beta|\varrho\lambda}\, \vartheta^{3}(\varrho_1\mu_\beta\varkappa)}{\sum\limits_{\gamma} \tau^{|\mu_\gamma|}\, \tau^{\mu_\gamma|\varrho\lambda}\, \vartheta(\varrho_1^2\mu_\gamma^2)(w_1)(w_2)(w_3)} \right.$$

$$\left. \cdot \sum_{\alpha} \tau^{|\mu_\alpha|}\, \tau^{2\Sigma(\sigma-\varrho_1)\mu_\alpha'}\, \tau^{\mu_\alpha|\varrho\lambda}\, \vartheta(\sigma\mu_\alpha)(u-w_1)(u-w_2)(u-w_3) \right\},$$

$$(16) \quad \ldots \quad 3^{p}\,\vartheta^{3}(\varrho_1)\,\vartheta(\varrho_1)(u-w_1)(u-w_2)(u-w_3)$$

$$= \sum_{\sigma} \tau^{2|\lambda_\sigma|}\, \vartheta^{3}(\varrho_1\lambda_\sigma)(u)\, \vartheta(\varrho_1^2\lambda_\sigma)(w_1)(w_2)(w_3)$$

Wir führen im folgenden Paragraphen noch eine Reihe der sich aus diesen Formeln ergebenden R e l a t i o n e n z w i s c h e n T h e t a f u n k t i o n e n m i t d e m s e l b e n A r g u m e n t e an.

§ 11.

Thetarelationen.

Man kann zunächst aus den Formeln (12) und (15) 4 Relationen zwischen je $3^p + 1$ Thetacuben oder dreigliedrigen Thetaprodukten ableiten. Setzt man nämlich in (12) $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, so hat man eine Gleichung, durch welche der Cubus irgend einer der 3^{2p} Thetafunktionen durch 3^p unabhängige Thetacuben linear dargestellt wird; es ist:

$$(\mathrm{I}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3^{p}\,\vartheta^{3}(\sigma\varkappa)(u) =$$

$$\sum_{\lambda} \tau^{\Sigma(\sigma-\varrho_1)\varkappa'} \cdot \left\{ \frac{\sum\limits_{\beta} \tau^{|\mu_\beta|}\, \tau^{2\Sigma\mu_\beta\varkappa'}\, \tau^{\mu_\beta|\varrho\lambda}\, \vartheta^{3}(\varrho_1\varkappa\mu_\beta)}{\sum\limits_{\gamma} \tau^{|\mu_\gamma|}\, \tau^{\mu_\gamma|\varrho\lambda}\, \vartheta^{3}(\varrho_1\mu_\gamma)} \right.$$

$$\left. \cdot \sum_{\alpha} \tau^{|\mu_\alpha|}\, \tau^{2\Sigma(\sigma-\varrho_1)\mu_\alpha'}\, \tau^{\mu_\alpha|\varrho\lambda}\, \vartheta^{3}(\sigma\mu_\alpha)(u) \right\}$$

Setzt man ferner in (12) $\mathrm{v}_1 = \nu$, $\mathrm{v}_2 = \nu_1$, $\mathrm{v}_3 = -(\nu + \nu_1)$, wo (ν) und (ν_1) zwei beliebige Charakteristiken sind, so kommt:

$$3^{\mathrm{p}}\, \vartheta(\sigma \varkappa \nu^2)(\mathrm{u})\, \vartheta(\sigma \varkappa \nu_1^2)(\mathrm{u})\, \vartheta(\sigma \varkappa \nu \nu_1)(\mathrm{u}) =$$

$$\sum_\lambda \tau^{\Sigma(\sigma-\varrho_1)\varkappa'} \left\{ \frac{\sum\limits_\beta \tau^{|\mu_\beta|}\, \tau^{2\Sigma\mu_\beta\varkappa'}\, \tau^{\mu_\beta|\varrho\lambda}\, \vartheta(\mu_\beta \varrho_1 \nu^2 \varkappa)\, \vartheta(\mu_\beta \varrho_1 \varkappa \nu_1^2)\, \vartheta(\mu_\beta \varrho_1 \varkappa \nu \nu_1)}{\sum\limits_\gamma \tau^{|\mu_\gamma|}\, \tau^{\mu_\gamma|\varrho\lambda}\, \vartheta^3(\varrho_1 \mu_\gamma)} \right.$$

$$\left. \cdot \sum_\alpha \tau^{|\mu_\alpha|}\, \tau^{2\Sigma(\sigma-\varrho_1)\mu_\alpha'}\, \tau^{\mu_\alpha|\varrho\lambda}\, \vartheta^3(\sigma \mu_\alpha)(\mathrm{u}) \right\}, \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II)}$$

wodurch ein Thetaprodukt durch 3^{p} Thetacuben ausgedrückt wird.

Umgekehrt erhält man einen Thetacubus durch 3^{p} Thetaprodukte ausgedrückt, indem man in Gleichung (15) $\mathrm{w}_1 = \nu$, $\mathrm{w}_2 = \nu_1$, $\mathrm{w}_3 = -(\nu + \nu_1)$ einführt; es folgt:

$$3^{\mathrm{p}}\, \vartheta^3(\sigma \varkappa)(\mathrm{u}) = \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(III)}$$

$$\sum_\lambda \tau^{\Sigma(\sigma-\varrho_1)\varkappa'} \cdot \left\{ \frac{\sum\limits_\beta \tau^{|\mu_\beta|}\, \tau^{2\Sigma\mu_\beta\varkappa'}\, \tau^{\mu_\beta|\varrho\lambda}\, \vartheta^3(\varrho_1 \varkappa \mu_\beta)}{\sum\limits_\gamma \tau^{|\mu_\gamma|}\, \tau^{\mu_\gamma|\varrho\lambda}\, \vartheta(\varrho_1 \nu^2 \mu_\gamma)\, \vartheta(\varrho_1 \nu_1^2 \mu_\gamma)\, \vartheta(\varrho_1 \nu \nu_1 \mu_\gamma)} \right.$$

$$\left. \cdot \sum_\alpha \tau^{|\mu_\alpha|}\, \tau^{2\Sigma(\sigma-\varrho_1)\mu_\alpha'}\, \tau^{\mu_\alpha|\varrho\lambda}\, \vartheta(\mu_\alpha \sigma \nu^2)(\mathrm{u})\, \vartheta(\mu_\alpha \sigma \nu_1^2)(\mathrm{u})\, \vartheta(\mu_\alpha \sigma \nu \nu_1)(\mathrm{u}) \right\};$$

und endlich erhält man ein Thetaprodukt durch 3^{p} unabhängige Thetaprodukte linear dargestellt, indem man in Gleichung (9) $\mathrm{b}_1 = \mathrm{v}_1$, $\mathrm{b}_2 = \mathrm{v}_2$, $\mathrm{b}_3 = \mathrm{v}_3$ setzt, v_1, v_2, v_3 bezüglich durch $\mathrm{v}_1 + \nu$, $\mathrm{v}_2 + \nu_1$, $\mathrm{v}_3 - (\nu_1 + \nu_2)$ ersetzt und schliesslich $\mathrm{a} = 0$ und $\mathrm{v}_1 = \mathrm{v}_2 = \mathrm{v}_3 = 0$ werden lässt; das gibt:

$$3^{\mathrm{p}}\, \vartheta(\varkappa \sigma \nu^2)(\mathrm{u})\, \vartheta(\varkappa \sigma \nu_1^2)(\mathrm{u})\, \vartheta(\varkappa \sigma \nu \nu_1)(\mathrm{u}) = \quad . \quad . \quad . \quad \text{(IV)}$$

$$\sum_\lambda \tau^{\Sigma(\sigma-\varrho_1)\varkappa'} \left\{ \frac{\sum\limits_\beta \tau^{|\mu_\beta|}\, \tau^{\mu_\beta|\varrho\lambda}\, \tau^{2\Sigma\mu_\beta\varkappa'}\, \vartheta(\mu_\beta \varkappa \varrho_1 \nu^2)\, \vartheta(\mu_\beta \varkappa \varrho_1 \nu_1^2)\, \vartheta(\mu_\beta \varkappa \varrho_1 \nu \nu_1)}{\sum\limits_\gamma \tau^{|\mu_\gamma|}\, \tau^{\mu_\gamma|\varrho\lambda}\, \vartheta(\mu_\gamma \varrho_1 \nu^2)\, \vartheta(\mu_\gamma \varrho_1 \nu_1^2)\, \vartheta(\mu_\gamma \varrho_1 \nu \nu_1)} \right.$$

$$\left. \cdot \sum_\alpha \tau^{|\mu_\alpha|}\, \tau^{2\Sigma(\sigma-\varrho_1)\mu_\alpha'}\, \tau^{\mu_\alpha|\varrho\lambda}\, \vartheta(\mu_\alpha \sigma \nu^2)(\mathrm{u})\, \vartheta(\mu_\alpha \sigma \nu_1^2)(\mathrm{u})\, \vartheta(\mu_\alpha \sigma \nu \nu_1)(\mathrm{u}) \right\}.$$

An diese 4 Relationen schliesst sich eine weitere an, welche eine Beziehung zwischen 3^p Thetacuben und 3^p Thetaprodukten vermittelt. Man bekommt nämlich aus (13) die Relation:

$$
(\mathrm{V})\begin{cases}\sum\limits_{\beta=o}^{\beta=3^p-1} \tau^{2|\mu_\beta|}\, \tau^{2\Sigma(\varrho_1-\sigma)\mu_\beta'}\, \vartheta(\varrho_1\mu_\beta\nu)\,\vartheta(\varrho_1\mu_\beta\nu_1)\,\vartheta(\varrho_1\mu_\beta\nu^2\nu_1^2)\,\vartheta^3(\mu_\beta^2\sigma)(\mathrm{u}) = \\ \sum\limits_{\beta=o}^{\beta=3^p-1} \tau^{2|\mu_\beta|}\, \tau^{2\Sigma(\sigma-\varrho_1)\mu_\beta'}\, \vartheta^3(\varrho_1\mu_\beta^2)\,\vartheta(\sigma\nu^2\mu_\beta)(\mathrm{u})\,\vartheta(\sigma\nu_1^2\mu_\beta)(\mathrm{u})\,\vartheta(\sigma\nu\nu_1\mu_\beta)(\mathrm{u}),\end{cases}
$$

indem man daselbst u um $\sigma - \varrho_1$ vermehrt und v_1, v_2, v_3 bezüglich durch ν, ν_1, $-(\nu+\nu_1)$ ersetzt.

Endlich kann man noch aus den Gleichungen (11), (14) und (16) vier Relationen bilden: zwei zwischen 3^{2p} Thetacuben, bezüglich 3^{2p-1} Thetaprodukten und zwei, in welchen bezüglich ein ϑ-Cubus und 3^{2p-1} ϑ-Produkte, ein ϑ-Produkt und 3^{2p} Thetakuben auftreten. Die erste folgt aus (14) für $\mathrm{u} = \mathrm{u} - \varrho_1 + \xi$ und $v_1 = v_2 = v_3 = o$, wo (ξ) irgend eine Charakteristik ist:

$$
(\mathrm{VI}) \qquad (3^p - 1)\,\vartheta^3(\varrho_1)\,\vartheta^3(\xi)(\mathrm{u}) = \sum_\sigma{}' \tau^{2|\lambda_\sigma|}\, \tau^{\Sigma(\varrho_1-\xi)\lambda_\sigma'}\, \vartheta^3(\varrho_1\lambda_\sigma^2)\,\vartheta^3(\xi\lambda_\sigma)(\mathrm{u}),
$$

wo sich die Summation auf alle Charakteristiken (λ_σ) ausser (o) bezieht, was durch ' angedeutet ist.

Aehnlich erhält man die drei übrigen Formeln:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{VII}) \quad & (3^p - 1)\,\vartheta(\varrho_1\nu^2)\,\vartheta(\varrho_1\nu_1^2)\,\vartheta(\varrho_1\nu\nu_1)\,\vartheta(\xi\nu^2)(\mathrm{u})\,\vartheta(\xi\nu_1^2)(\mathrm{u})\,\vartheta(\xi\nu\nu_1)(\mathrm{u}) \\
& = \sum_\sigma{}' \{\tau^{2|\lambda_\sigma|}\, \tau^{\Sigma(\xi-\varrho_1)\lambda_\sigma'}\, \vartheta(\varrho_1\lambda_\sigma^2\nu^2)\,\vartheta(\varrho_1\lambda_\sigma^2\nu_1^2)\,\vartheta(\varrho_1\lambda_\sigma^2\nu\nu_1) \\
& \qquad \cdot \vartheta(\xi\lambda_\sigma\nu^2)(\mathrm{u})\,\vartheta(\xi\lambda_\sigma\nu_1^2)(\mathrm{u})\,\vartheta(\xi\lambda_\sigma\nu\nu_1)(\mathrm{u})\};
\end{aligned}
$$

$$
(\mathrm{VIII}) \qquad 3^p\,\vartheta(\varrho_1\nu^2)\,\vartheta(\varrho_1\nu_1^2)\,\vartheta(\varrho_1\nu\nu_1)\,\vartheta^3(\xi)(\mathrm{u}) =
$$

$$
\sum_\sigma \tau^{2|\lambda_\sigma|}\, \tau^{2\Sigma(\xi-\varrho_1)\lambda_\sigma'}\, \tau^{|\varrho-\xi|}\, \vartheta^3(\varrho_1\lambda_\sigma^2)\cdot\vartheta(\xi\lambda_\sigma\nu^2)(\mathrm{u})\,\vartheta(\xi\lambda_\sigma\nu_1^2)(\mathrm{u})\,\vartheta(\xi\lambda_\sigma\nu\nu_1)(\mathrm{u});
$$

$$
(\mathrm{IX}) \qquad 3^p\,\vartheta^3(\varrho_1)\,\vartheta(\xi\nu^2)(\mathrm{u})\,\vartheta(\xi\nu_1^2)(\mathrm{u})\,\vartheta(\xi\nu\nu_1)(\mathrm{u}) =
$$

$$
\sum_\sigma \tau^{2|\lambda_\sigma|}\, \tau^{2\Sigma(\xi-\varrho_1)\lambda_\sigma'}\, \vartheta(\varrho_1^2\lambda_\sigma\nu^2)\,\vartheta(\varrho_1^2\lambda_\sigma\nu_1^2)\,\vartheta(\varrho_1^2\lambda_\sigma\nu\nu_1)\cdot\vartheta^3(\xi\lambda_\sigma)(\mathrm{u}).
$$

Die letzten 3 Formeln enthalten nur 3^{2p-1} verschiedene Thetaprodukte, weil λ_σ bei Durchlaufung aller Charakteristiken die Werte ν, ν_1, $\nu\nu_1$ ebenfalls erlangen muss, wodurch immer drei Produkte einander gleich werden.

Aus diesen Relationen lassen sich dann noch sofort einige Beziehungen zwischen einer geringeren Anzahl von Theta-Funktionen ableiten. So gewinnt man z. B. aus (IV) eine Relation zwischen nur $3^{p-1}+1$ Thetaprodukten, indem man statt (ν), (ν_1), zwei Charakteristiken der Gruppe

$$(1),\ (\mu_1),\ (\mu_2)\ \ldots\ (\mu_{3^p-1})$$

einführt. Es sei $(\nu)=(\mu_\nu)$, $(\nu_1)=(\mu_{\nu_1})$ gesetzt, dann ist $(\nu\,\nu_1)=(\mu_\nu\,\mu_{\nu_1})$ wieder eine Charakteristik der Gruppe. Die in obiger Formel enthaltenen Produkte haben nun die Charakteristiken $(\mu_\beta\,\mu_\nu^2)$, $(\mu_\beta\,\mu_{\nu_1}^2)$, $(\mu_\beta\,\mu_\nu\,\mu_{\nu_1})$, und es werden daher bei der Summation nach β immer jene drei Produkte einander gleich, welche dadurch hervorgehen, dass (μ_β) den Wert $(\mu_\lambda\,\mu_\nu^2)$ oder $(\mu_\lambda\,\mu_{\nu_1}^2)$ oder endlich den Wert $(\mu_\lambda\,\mu_\nu\,\mu_{\nu_1})$ annimmt. Somit reducirt sich die Gliederzahl der Summe auf der rechten Seite auf den dritten Teil und man hat eine Relation zwischen $3^{p-1}+1$ Produkten. Solcher Relationen gewinnt man aus den vorhergehenden Formeln im Ganzen drei, nämlich:

aus (III) eine Relation zwischen einem Thetacubus und 3^{p-1} Thetaprodukten; (X)

aus (IV) eine Relation zwischen $3^{p-1}+1$ Theta-Produkten; (XI)

aus (V) eine Relation zwischen 3^p Theta-Cuben und 3^{p-1} Theta-Produkten. (XII)

§ 12.

II. Additionstheorem der Thetafunktionen.

Wie die Goepel'schen Systeme, so bieten auch die Fundamentalsysteme ein Mittel, um ein Additionstheorem aufzustellen.

Seien
$$(\alpha_1),\ (\alpha_2),\ (\alpha_3)\ \ldots\ (\alpha_{2p+2})$$
die Charakteristiken irgend eines Fundamentalsystems, und bildet man daraus die Charakteristiken:

$$(\alpha_1^2\alpha_2),\ (\alpha_3^2\alpha_4),\ (\alpha_5^2\alpha_6)\ldots.(\alpha_{2p-3}^2\alpha_{2p-2}),$$

die mit:

$$(\mu_1),\ (\mu_2),\ (\mu_3)\ .\ .\ .\ .\ (\mu_{p-1})$$

bezeichnet seien, so bilden die 3^{p-1} Combinationen der (μ) eine Gruppe, deren Charakteristiken der Beziehung

$$\mu_\varrho\,|\,\mu_\sigma \equiv o \pmod{3}$$

genügen, und ferner ist

$$\alpha_\lambda\,|\,\mu_\varrho \equiv \alpha_\lambda'\,|\,\mu_\varrho \equiv \varepsilon \pmod{3},$$

wenn α_λ, α_λ' irgend zwei der noch übrigen Charakteristiken des Systemes sind, so dass ε eine vom Index λ unabhängige Zahl ist.

Zum Beweise beachte man, dass $\mu_1\,|\,\mu_2 \equiv \alpha_1^2\,\alpha_2\,|\,\alpha_3^2\,\alpha_4 \equiv \alpha_1^2\,\alpha_2\,|\,\alpha_1\,\alpha_3^2 + \alpha_1^2\alpha_2\,|\,\alpha_1^2\alpha_4 \equiv -\alpha_1^2\alpha_2\,|\,\alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_1^2\alpha_2\,|\,\alpha_1^2\alpha_4 \equiv o \pmod{3}$ ist, da $(\alpha_1^2\alpha_2)$, $(\alpha_1^2\alpha_3)$, $(\alpha_1^2\alpha_4)$ drei Charakteristiken eines speziellen Fundamentalsystemes bedeuten (§ 7). Somit genügen nach Satz (IV) § 4 alle Charakteristiken (μ_ϱ), (μ_σ) und ihre Combinationen der Bedingung $\mu_\varrho\,|\,\mu_\sigma \equiv o$. Ferner ist $\alpha_\lambda^2\,\alpha_{\lambda'}\,|\,\mu_\varrho \equiv \alpha_1^2\,\alpha_\lambda\,|\,\alpha_1^2\,\alpha_{2\varrho-1} - \alpha_1^2\,\alpha_\lambda\,|\,\alpha_1^2\,\alpha_{2\varrho} - \alpha_1^2\,\alpha_{\lambda'}\,|\,\alpha_1^2\,\alpha_{2\varrho-1} + \alpha_1^2\,\alpha_{\lambda'}\,|\,\alpha_1^2\,\alpha_{2\varrho} \equiv o$. Also $\alpha_\lambda\,|\,\mu_\varrho \equiv \alpha_{\lambda'}\,|\,\mu_\varrho \equiv \varepsilon$.

Bezeichnet man irgend drei der unter den (μ) nicht enthaltenen Charakteristiken des Fundamentalsystemes kurz mit (α_1), (α_2), (α_3), so kann man ein System von 3^p Charakteristiken in folgender Weise bilden. Es ist:

$$(\alpha_1),\ (\alpha_2),\ (\alpha_3),\ (\alpha_1\,\mu_1),\ (\alpha_2\,\mu_1),\ (\alpha_3\,\mu_1)\ .\ .\ .\ .\ (\alpha_1\,\mu_\sigma),\ (\alpha_2\,\mu_\sigma),\ (\alpha_3\,\mu_\sigma),$$

$\sigma = 3^{p-1} - 1$. Die Charakteristiken dieses Systemes führen wir jetzt wieder wie früher als Indices einer ähnlichen Formel ein, wie sie in § 9 aufgestellt wurde. Es sei:

$$(1) \quad .\ .\ .\ .\ c\,\vartheta(o)(u-v_1)(u-v_2)(u+v_1+v_2+w)$$
$$= \sum_{\lambda,\beta} c'_{\lambda,\beta}\,\vartheta(\alpha_\lambda\mu_\beta)(u-v_1')(u-v_2')(u+v_1'+v_2'+w),$$

wo λ die Werte 1, 2, 3 annimmt und β von Null bis $3^{p-1}-1$ läuft. Die Bedeutung der Grössen v, v' und w ist die analoge wie in § 9.

Es sind noch c und $c'_{\lambda,\beta}$ zu bestimmen.[1]) Setzt man zu diesem Zwecke vorerst λ constant und $u = a + \mu_\gamma - \alpha_\lambda$, so kommt:

$$c\,\vartheta(\alpha_\lambda^2\,\mu_\gamma)(a-v_1)(a-v_2)(a+v_1+v_2+w) = \sum_\beta \Big\{ c'_{\lambda,\beta}\,\tau^{2\Sigma(\mu_\gamma-\alpha_\lambda)(\mu_\beta'+\alpha_\lambda')}$$

$$\cdot\,\vartheta(\mu_\beta\,\mu_\gamma)(a-v_1')(a-v_2')(a+v_1'+v_2'+w)\Big\}.$$

Fügt man hier auf beiden Seiten den Faktor $\tau^{\Sigma\mu_\gamma(\mu_\gamma'+\alpha_\lambda')}$ bei, so kommt:

$$c\,\tau^{\Sigma\mu_\gamma(\alpha_\lambda'+\mu_\gamma')}\,\vartheta(\alpha_\lambda^2\,\mu_\gamma)(a-v_1)(a-v_2)(a+v_1+v_2+w)$$

$$= \Sigma\, c'_{\lambda,\beta}\,\tau^{\Sigma\mu_\gamma(\mu_\gamma'-\mu_\beta')+\Sigma\alpha_\lambda(\alpha_\lambda'+\mu_\beta')}$$

$$\cdot\,\vartheta(\mu_\beta\,\mu_\gamma)(a-v_1')(a-v_2')(a+v_1'+v_2'+w).$$

Setzt man jetzt in der Hauptgleichung (1)

$$c'_{\lambda,\beta} = \tau^{2\Sigma\alpha_\lambda(\mu_\beta'+\alpha_\lambda')}\,c_{\lambda,\beta},$$

so wird diese:

$$c\,\vartheta(o)(u-v_1)(u-v_2)(u+v_1+v_2+w)$$

$$= \sum_{\lambda,\beta}\tau^{2\Sigma\alpha_\lambda(\alpha_\lambda'+\mu_\beta')}\,c_{\lambda,\beta}\,\vartheta(\alpha_\lambda\,\mu_\beta)(u-v_1')(u-v_2')(u+v_1'+v_2'+w), \quad (2)$$

und die zur Constantenbestimmung dienende Gleichung wird:

$$c\,\tau^{\Sigma\mu_\gamma(\alpha_\lambda'+\mu_\beta')}\,\vartheta(\alpha_\lambda^2\,\mu_\gamma)(a-v_1)(a-v_2)(a+v_1+v_2+w)$$

$$= \sum_\beta c_{\lambda,\beta}\,\tau^{\Sigma\mu_\gamma(\mu_\gamma'-\mu_\beta')}\,\vartheta(\mu_\beta\,\mu_\gamma)(a-v_1')(a-v_2')(a+v_1'+v_2'+w).$$

Diese Gleichung repräsentirt 3^{p-1} homogene Gleichungen zwischen den $3^{p-1}+1$ zu einem bestimmten Werte von λ gehörigen Coeffizienten c und $c_{\lambda,\beta}$. Um die Verhältnisse dieser Coeffizienten daraus zu bestimmen kann man wieder wie in § 9 zur Trennung der Indices $\mu_\gamma = \mu_\beta^2\,\mu_\varepsilon$ setzen, beiderseits mit $\tau^{\mu_\gamma|\zeta}$ multipliziren (wo (ζ) irgend eine Charakteristik ist), und nach γ von o bis $3^{p-1}-1$ summiren, dann erhält man nach einigen Reduktionen:

1) Vergl. Frobenius l. c.

$$\sum_{\beta} c_{\lambda,\beta}\, \tau^{2|\mu_\beta|}\, \tau^{\mu_\beta^2|\zeta}$$

$$= c\cdot \frac{\sum\limits_{\gamma} \tau^{\Sigma\mu_\gamma(\alpha_\lambda'+\mu_\gamma')}\, \tau^{\mu_\gamma|\zeta}\, \vartheta(\alpha_\lambda^2\mu_\gamma)(a-v_1)(a-v_2)(a+v_1+v_2+w)}{\sum\limits_{\varepsilon} \tau^{|\mu_\varepsilon|}\, \tau^{\mu_\varepsilon|\zeta}\, \vartheta(\mu_\varepsilon)(a-v_1')(a-v_2')(a+v_1'+v_2'+w)},$$

und hieraus durch dieselbe Rechnung, die pag. 351 ausgeführt wurde:

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3^{p-1}\cdot\frac{c_{\lambda,\beta}}{\tau^{|\mu_\beta|}}$$

$$= c\cdot\sum_{\nu=0}^{\nu=3^{p-1}-1} \tau^{\mu_\beta|\varrho_\nu}\, \frac{\sum\limits_{\gamma} \tau^{|\mu_\gamma|}\, \tau^{\Sigma\mu_\gamma\alpha_\lambda'}\, \tau^{\mu_\gamma|\varrho_\nu}\, \vartheta(\mu_\gamma\alpha_\lambda^2)(a-v_1)(a-v_2)(a+v_1+v_2+w)}{\sum\limits_{\varepsilon} \tau^{|\mu_\varepsilon|}\, \tau^{\mu_\varepsilon|\varrho_\nu}\, \vartheta(\mu_\varepsilon)(a-v_1')(a-v_2')(a+v_1'+v_2'+w)}$$

Setzt man diese Constanten in die Hauptformel (2) ein, so kommt:

$$(4) \quad \ldots \quad 3^{p-1}\,\vartheta(o)(u-v_1)(u-v_2)(u+v_1+v_2+w)$$

$$= \sum_{\nu=o}^{\nu=3^{p-1}-1}\ \sum_{\lambda=1,2,3} \Bigg\{ \tau^{2|\alpha_\lambda|} \frac{\sum\limits_{\gamma} \tau^{|\mu_\gamma|+\Sigma\mu_\gamma\alpha_\lambda'}\, \tau^{\mu_\gamma|\varrho_\nu}\, \vartheta(\mu_\gamma\alpha_\lambda^2)(a-v_1)(a-v_2)(a+v_1+v_2+w)}{\sum\limits_{\varepsilon} \tau^{|\mu_\varepsilon|}\, \tau^{\mu_\varepsilon|\varrho_\nu}\, \vartheta(\mu_\varepsilon)(a-v_1')(a-v_2')(a+v_1'+v_2'+w)}$$

$$\cdot \sum_{\beta=o}^{\beta=3^{p-!}-1} \tau^{|\mu_\beta|+2\Sigma\alpha_\lambda\mu_\beta'}\cdot \tau^{\mu_\beta|\varrho_\nu}\, \vartheta(\alpha_\lambda\mu_\beta)(u-v_1')(u-v_2')(u+v_1'+v_2'+w)\Bigg\}.$$

Diese Formel kann man noch in eine weit einfachere Gestalt bringen. Setzen wir vorerst statt u, $u+\mu_\varkappa$, so kommt:

$$3^{p-1}\,\tau^{\mu_\varkappa|\alpha_\lambda}\,\vartheta(\mu_\varkappa)(u-v_1)(u-v_2)(u+v_1+v_2+w)$$

$$= \sum_{\nu}\sum_{\lambda} \Bigg\{ \frac{\tau^{2|\alpha_\lambda|}\, \tau^{\mu_\varkappa^2|\varrho_\nu} \sum\limits_{\gamma} \tau^{|\mu_\gamma|+\Sigma\alpha_\lambda'\mu_\gamma}\, \tau^{\mu_\gamma|\varrho_\nu}\, \vartheta(\mu_\gamma\alpha_\lambda^2)(a-v_1)(a-v_2)(a+v_1+v_2+w)}{\tau^{|\mu_\varkappa|} \sum\limits_{\varepsilon} \tau^{|\mu_\varepsilon|}\, \tau^{\mu_\varepsilon|\varrho_\nu}\, \vartheta(\mu_\varepsilon)(a-v_1')(a-v_2')(a+v_1'+v_2'+w)}$$

$$\cdot \sum_{\beta} \tau^{|\mu_\beta|+2\Sigma\alpha_\lambda\mu_\beta'}\, \tau^{\mu_\beta|\varrho_\nu}\, \vartheta(\mu_\beta\alpha_\lambda)(u-v_1')(u-v_2')(u+v_1'+v_2'+w)\Bigg\},$$

dabei ist zu beachten, dass die Zahl $\mu_\varkappa | \alpha_\lambda$ nach den Entwicklungen am Anfang dieses Paragraphen für $\lambda = 1, 2, 3$ constant ist, so dass man dafür $\mu_\varkappa | \alpha$ setzen kann. Multiplizirt man jetzt auf beiden Seiten mit

$$\tau^{2|\mu_\varkappa|}\,\vartheta(\mu_\varkappa^2)(\mathrm{a}-\mathrm{v}_1')(\mathrm{a}-\mathrm{v}_2')(\mathrm{a}+\mathrm{v}_1'+\mathrm{v}_2'+\mathrm{w}),$$

setzt $(\mu_\varepsilon) = (\mu_\varkappa^2)$ und summirt nach $\varkappa$ von o bis $3^{p-1}-1$, so hebt sich in jedem Gliede der Summe $\sum\limits_\nu$ der Nenner weg und es kommt:

$$\begin{aligned}
3^{p-1} \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=3^{p-1}-1} \Big\{ & \tau^{\mu_\varkappa|\alpha}\,\tau^{2|\mu_\varkappa|}\,\vartheta(\mu_\varkappa^2)(\mathrm{a}-\mathrm{v}_1')(\mathrm{a}-\mathrm{v}_2')(\mathrm{a}+\mathrm{v}_1'+\mathrm{v}_2'+\mathrm{w}) \\
& \cdot \vartheta(\mu_\varkappa)(\mathrm{u}-\mathrm{v}_1)(\mathrm{u}-\mathrm{v}_2)(\mathrm{u}+\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2+\mathrm{w}) \Big\} \\
= \sum_\nu \sum_\lambda \Big\{ & \tau^{2|\alpha_\lambda|} \sum_\gamma \tau^{|\mu_\gamma|+\Sigma\mu_\gamma\alpha_\lambda'}\,\tau^{\mu_\gamma|\varrho_\nu}\,\vartheta(\mu_\gamma\alpha_\lambda^2)(\mathrm{a}-\mathrm{v}_1)(\mathrm{a}-\mathrm{v}_2)(\mathrm{a}+\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2+\mathrm{w}) \\
& \cdot \sum_\beta \tau^{|\mu_\beta|+2\Sigma\alpha_\lambda\mu_\beta'}\,\tau^{\mu_\beta|\varrho_\nu}\,\vartheta(\alpha_\lambda\mu_\beta)(\mathrm{u}-\mathrm{v}_1')(\mathrm{u}-\mathrm{v}_2')(\mathrm{u}+\mathrm{v}_1'+\mathrm{v}_2'+\mathrm{w}) \Big\}.
\end{aligned}$$

Führt man die Summe auf der rechten Seite aus, so findet man ähnlich wie früher bei Herstellung der Formel (8) § 9, dass alle Glieder aus der Summe verschwinden bis auf jene, die für $\mu_\beta^2 = \mu_\gamma$ auftreten, da der in den einzelnen Summanden erscheinende Faktor $\tau^{\mu_\beta|\varrho_\nu} \cdot \tau^{\mu_\gamma|\varrho_\nu} = \tau^{\mu_\beta\mu_\gamma|\varrho_\nu}$ nur dann den Wert 1 erhält, wenn $\mu_\beta\,\mu_\gamma \equiv 0$ ist. Führt man also die Substitution $\mu_\gamma = \mu_\beta^2$ aus, so erhält man die Fundamentalformel:

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{\beta=0}^{\beta=3^{p-1}-1} \Big\{ & \tau^{\mu_\beta|\alpha}\,\tau^{2|\mu_\beta|}\,\vartheta(\mu_\beta^2)(\mathrm{a}-\mathrm{v}_1')(\mathrm{a}-\mathrm{v}_2')(\mathrm{a}+\mathrm{v}_1'+\mathrm{v}_2'+\mathrm{w}) \\
& \cdot \vartheta(\mu_\beta)(\mathrm{u}-\mathrm{v}_1)(\mathrm{u}-\mathrm{v}_2)(\mathrm{u}+\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2+\mathrm{w}) \Big\} \\
= \sum_{\beta=0}^{\beta=3^{p-1}-1} \sum_{\lambda=1,2,3} \Big\{ & \tau^{2|\alpha_\lambda+\mu_\beta|}\,\vartheta(\mu_\beta^2\alpha_\lambda^2)(\mathrm{a}-\mathrm{v}_1')(\mathrm{a}-\mathrm{v}_2')(\mathrm{a}+\mathrm{v}_1'+\mathrm{v}_2'+\mathrm{w}) \\
& \cdot \vartheta(\mu_\beta\alpha_\lambda)(\mathrm{u}-\mathrm{v}_1)(\mathrm{u}-\mathrm{v}_2)(\mathrm{u}+\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2+\mathrm{w}), \Big\}
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

eine Formel, welche im Ganzen aus $3^{p-1} + 3^p = 4 \cdot 3^{p-1}$ Gliedern besteht; sie ist völlig analog den Formeln, welche Herr Frobenius l. c. pag. 219 und Herr Noether l. c. pag. 327 für Halbercharakteristiken gaben.

§ 13.

Spezielle Formeln. Thetarelationen.

Setzt man in der Fundamentalformel $v_1' = \varrho_1$, $v_2' = \varrho_2$, $v_1 = \sigma_1$, $v_2 = \sigma_2$, wo (ϱ_1), (ϱ_2), (σ_1), (σ_2) Charakteristiken sind, so kommt:

$$
\begin{aligned}
(1)\qquad & \sum_\beta \Big\{ \tau^{\mu_\beta|\alpha}\, \tau^{2|\mu_\beta|}\, \vartheta(\mu_\beta^2 \varrho_1^2)(a)\, \vartheta(\mu_\beta^2 \varrho_2^2)(a)\, \vartheta(\mu_\beta^2 \varrho_1 \varrho_2)(a+w) \\
& \qquad \cdot \vartheta(\mu_\beta \sigma_1^2)(u)\, \vartheta(\mu_\beta \sigma_2^2)(u)\, \vartheta(\mu_\beta \sigma_1 \sigma_2)(u+w) \Big\} \\
& = \sum_\beta \sum_\lambda \Big\{ \tau^{2|\alpha_\lambda + \mu_\beta|}\, \vartheta(\mu_\beta^2 \alpha_\lambda^2 \varrho_1^2)(a)\, \vartheta(\mu_\beta^2 \alpha_\lambda^2 \varrho_2^2)(a)\, \vartheta(\mu_\beta^2 \alpha_\lambda^2 \varrho_1 \varrho_2)(a+w) \\
& \qquad \cdot \vartheta(\mu_\beta \alpha_\lambda \sigma_1^2)(u)\, \vartheta(\mu_\beta \alpha_\lambda \sigma_2^2)(u)\, \vartheta(\mu_\beta \alpha_\lambda \sigma_1 \sigma_2)(u+w), \Big\}
\end{aligned}
$$

$\beta = 0 \ldots 3^{p-1} - 1$, $\lambda = 1, 2, 3$.

Diese Gleichung enthält wie die allgemeine $4 \cdot 3^{p-1}$ Glieder. Setzt man aber $\sigma_1 = \mu_{\nu_1}$, $\sigma_2 = \mu_{\nu_2}$, wo (μ_{ν_1}), (μ_{ν_2}) Charakteristiken der Gruppe der (μ) sind, so werden immer drei Produkte mit den Argumenten u einander gleich und die Gleichung:

$$
\begin{aligned}
& \sum_\beta \Big\{ \tau^{\mu_\beta|\alpha}\, \tau^{2|\mu_\beta|}\, \vartheta(\mu_\beta^2 \varrho_1^2)(a)\, \vartheta(\mu_\beta^2 \varrho_2^2)(a)\, \vartheta(\mu_\beta^2 \varrho_1 \varrho_2)(a+w) \\
(2)\qquad & \qquad \cdot \vartheta(\mu_\beta \mu_{\nu_1}^2)(u)\, \vartheta(\mu_\beta \mu_{\nu_2}^2)(u)\, \vartheta(\mu_\beta \mu_{\nu_1} \mu_{\nu_2})(u+w) \Big\} \\
& = \sum_\beta \sum_\lambda \Big\{ \tau^{2|\alpha_\lambda + \mu_\beta|}\, \vartheta(\mu_\beta^2 \alpha_\lambda^2 \varrho_1^2)(a)\, \vartheta(\mu_\beta^2 \alpha_\lambda^2 \varrho_2^2)(a)\, \vartheta(\mu_\beta^2 \alpha_\lambda^2 \varrho_1 \varrho_2)(a+w) \\
& \qquad \cdot \vartheta(\mu_\beta \alpha_\lambda \mu_{\nu_1}^2)(u)\, \vartheta(\mu_\beta \alpha_\lambda \mu_{\nu_2}^2)(u)\, \vartheta(\mu_\beta \alpha_\lambda \mu_{\nu_1} \mu_{\nu_2})(u+w) \Big\}
\end{aligned}
$$

umfasst dann nur mehr $4 \cdot 3^{p-2}$ Glieder.

Die Coeffizienten der 3^{p-2} verschiedenen Produkte

$$\vartheta(\mu_\beta \mu_{\nu_1}^2)(u)\, \vartheta(\mu_\beta \mu_{\nu_2}^2)(u)\, \vartheta(\mu_\beta \mu_{\nu_1} \mu_{\nu_2})(u+w)$$

links und der 3^{p-1} verschiedenen analogen Produkte rechts sind dann dreigliedrige Summen, die sich noch vereinfachen, wenn man $\varrho_1 = 0$, $\varrho_2 = 0$ setzt.

Macht man endlich auch $\varrho_1 = \mu_{\nu_1}$, $\varrho_2 = \mu_{\nu_2}$, so werden auch die als Coeffizienten auftretenden dreigliedrigen Summen eingliedrig, und die Formel nimmt für $a = 0$ ihre einfachste Gestalt an:

$$\sum_\beta \Big\{ \tau^{\mu_\beta|\alpha}\,\tau^{2|\mu_\beta|}\, \vartheta(\mu_\beta^2 \mu_{\nu_1}^2)\, \vartheta(\mu_\beta^2 \mu_{\nu_2}^2)\, \vartheta(\mu_\beta^2 \mu_{\nu_1} \mu_{\nu_2})(\mathrm{w})$$

$$\cdot\, \vartheta(\mu_\beta \mu_{\nu_1}^2)(\mathrm{u})\, \vartheta(\mu_\beta \mu_{\nu_2}^2)(\mathrm{u})\, \vartheta(\mu_\beta \mu_{\nu_1} \mu_{\nu_2})(\mathrm{u}+\mathrm{w}) \Big\}$$

$$= \sum_\beta \sum_\lambda \Big\{ \tau^{2|\alpha_\lambda + \mu_\beta|}\, \vartheta(\mu_\beta^2 \alpha_\lambda^2 \mu_{\nu_1}^2)\, \vartheta(\mu_\beta^2 \alpha_\lambda^2 \mu_{\nu_2}^2)\, \vartheta(\mu_\beta^2 \alpha_\lambda^2 \mu_{\nu_1} \mu_{\nu_2})(\mathrm{w}) \tag{3}$$

$$\cdot\, \vartheta(\mu_\beta \alpha_\lambda \mu_{\nu_1}^2)(\mathrm{u})\, \vartheta(\mu_\beta \alpha_\lambda \mu_{\nu_2}^2)(\mathrm{u})\, \vartheta(\mu_\beta \alpha_\lambda \mu_{\nu_1} \mu_{\nu_2})(\mathrm{u}+\mathrm{w}) \Big\}.$$

Setzt man hingegen in Gleichung (2) nur $\varrho_1 = \mu_{\nu_1}$, $\varrho_2 = \mu_{\nu_2}$, so werden immer drei der als Coeffizienten auftretenden Produkte

$$\vartheta(\mu_\beta \mu_{\nu_1}^2)(\mathrm{a})\, \vartheta(\mu_\beta \mu_{\nu_2}^2)(\mathrm{a})\, \vartheta(\mu_\beta \mu_{\nu_1} \mu_{\nu_2})(\mathrm{a}+\mathrm{w})$$

einander gleich, und man erhält eine Relation aus $4 \cdot 3^{p-1}$ Gliedern, von denen je drei dasselbe ϑ-Produkt als Faktor besitzen.

Aus diesen drei Gleichungen lassen sich unmittelbar einige Relationen ableiten zwischen Thetafunktionen mit demselben Argumente; diese sollen im Folgenden angegeben und dann zum Schlusse noch für $p = 2$ spezialisirt werden.

Aus (1) erhält man für $a = o$, $w = o$, $\varrho_1 = \varrho_2 = \sigma_1 = \sigma_2 = o$:

$$\sum_\beta \tau^{\mu_\beta|\alpha}\,\tau^{2|\mu_\beta|}\, \vartheta^3(\mu_\beta^2)\, \vartheta^3(\mu_\beta)(\mathrm{u}) = \sum_\beta \sum_\lambda \tau^{2|\alpha_\lambda + \mu_\beta|}\, \vartheta^3(\mu_\beta^2 \alpha_\lambda^2)\, \vartheta^3(\mu_\beta \alpha_\lambda)(\mathrm{u}), \tag{XIII}$$

eine Beziehung zwischen $4 \cdot 3^{p-1}$ Thetacuben.

Setzt man ferner in (2) $a = o$, $w = o$, $\varrho_1 = \varrho_2 = o$, so kommt:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_\beta \tau^{\mu_\beta|\alpha}\,\tau^{2|\mu_\beta|}\, \vartheta^3(\mu_\beta^2)\, \vartheta(\mu_\beta \mu_{\nu_1}^2)(\mathrm{u})\, \vartheta(\mu_\beta \mu_{\nu_2}^2)(\mathrm{u})\, \vartheta(\mu_\beta \mu_{\nu_1} \mu_{\nu_2})(\mathrm{u}) \\ &= \sum_\beta \sum_\lambda \tau^{2|\alpha_\lambda + \mu_\beta|}\, \vartheta^3(\mu_\beta^2 \alpha_\lambda^2)\, \vartheta(\alpha_\lambda u_\beta \mu_{\nu_1}^2)(\mathrm{u})\, \vartheta(\alpha_\lambda u_\beta \mu_{\nu_2}^2)(\mathrm{u})\, \vartheta(\alpha_\lambda u_\beta \mu_{\nu_1} \mu_{\nu_2})(\mathrm{u}), \end{aligned}\right\} \tag{XIV}$$

eine Relation zwischen $4 \cdot 3^{p-2}$ Thetaprodukten.

Eine in den Coeffizienten allgemeinere Form dieser Gleichung ergibt sich aus (2), indem man nur $a = w = o$ setzt, und ein weiterer spezieller Fall tritt ein, wenn man in (3) $w = o$ sein lässt.

§ 14.

Thetarelationen für $p = 2$.

Für $p = 2$ bilden die (μ_ε) in allen Formeln eine Gruppe 3ten Grades, deren Charakteristiken

$$(\mu_0) = (o),\ (\mu_1) = (\mu_1),\ (\mu_2) = (\mu_1^2)$$

sein mögen, dann folgt aus (1) § 13 für $w = o$, $a = o$;

$$\sum_{\beta=o}^{\beta=2} \tau^{\mu_\beta | \alpha} \tau^{2|\mu_\beta|} \vartheta(\mu_\beta^2 \varrho_1^2) \vartheta(\mu_\beta^2 \varrho_2^2) \vartheta(\mu_\beta^2 \varrho_1 \varrho_2) \vartheta(\mu_\beta \sigma_1^2)(u) \vartheta(\mu_\beta \sigma_2^2)(u) \vartheta(\mu_\beta \sigma_1 \sigma_2)(u)$$

$$(\mathrm{I}') \qquad = \sum_{\beta=o}^{\beta=2} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=3} \Big\{ \tau^{2|\mu_\beta + \alpha_\lambda|} \vartheta(\mu_\beta^2 \alpha_\lambda^2 \varrho_1^2) \vartheta(\mu_\beta^2 \alpha_\lambda^2 \varrho_2^2) \vartheta(\mu_\beta^2 \alpha_\lambda^2 \varrho_1 \varrho_2)$$

$$\cdot \vartheta(\mu_\beta \alpha_\lambda \sigma_1^2)(u) \vartheta(\mu_\beta \alpha_\lambda \sigma_2^2)(u) \vartheta(\mu_\beta \alpha_\lambda \sigma_1 \sigma_2)(u) \Big\}.$$

Sei nun hier $\sigma_1 = \mu_1$, $\sigma_2 = \mu_1^2$ gesetzt, dann ist $\sigma\sigma_1 \equiv o$ und man erhält:

$$(\mathrm{II}')\left\{\begin{aligned} &\vartheta(o)(u)\vartheta(\mu_1)(u)\vartheta(\mu_1^2)(u)\left\{\sum_{\beta=o}^{\beta=2} \tau^{\mu_\beta|\alpha} \tau^{2|\mu_\beta|} \vartheta(\mu_\beta \varrho_1^2)\vartheta(\mu_\beta \varrho_2^2)\vartheta(\mu_\beta \varrho_1 \varrho_2)\right\} \\ &= \vartheta(\alpha_1)(u)\vartheta(\alpha_1\mu_1)(u)\vartheta(\alpha_1\mu_1^2)(u)\left\{\sum_{\beta=o}^{\beta=2} \tau^{2|\alpha_\lambda+\mu_\beta|} \vartheta(\alpha_1^2\mu_\beta^2\varrho_1^2)\vartheta(\alpha_1^2\mu_\beta^2\varrho_2^2)\vartheta(\alpha_1^2\mu_\beta^2\varrho_1\varrho_2)\right\} \\ &+ \vartheta(\alpha_2)(u)\vartheta(\alpha_2\mu_1)(u)\vartheta(\alpha_2\mu_1^2)(u)\left\{\sum_{\beta=o}^{\beta=2} \tau^{2|\alpha_2+\mu_\beta|} \vartheta(\alpha_2^2\mu_\beta^2\varrho_1^2)\vartheta(\alpha_2^2\mu_\beta^2\varrho_2^2)\vartheta(\alpha_2^2\mu_\beta^2\varrho_1\varrho_2)\right\} \\ &+ \vartheta(\alpha_3)(u)\vartheta(\alpha_3\mu_1)(u)\vartheta(\alpha_3\mu_1^2)(u)\left\{\sum_{\beta=o}^{\beta=2} \tau^{2|\alpha_\lambda+\mu_\beta|} \vartheta(\alpha_3^2\mu_\beta^2\varrho_1^2)\vartheta(\alpha_3^2\mu_\beta^2\varrho_2^2)\vartheta(\alpha_3^2\mu_\beta^2\varrho_1\varrho_2)\right\}, \end{aligned}\right.$$

eine Relation zwischen vier Theta-Produkten.

Sei ferner in (I!) $\varrho_1 = \mu_1$, $\varrho_2 = \mu_1^2$, $\varrho_1 \varrho_2 = o$ gesetzt, dann folgt:

$$\left.\begin{aligned}
&\vartheta(o)\vartheta(\mu_1)\vartheta(\mu_1^2)\left\{\sum_{\beta=o}^{\beta=2}\tau^{\mu_\beta|\alpha}\tau^{2|\mu_\beta|}\vartheta(\mu_\beta\sigma_1^2)(u)\vartheta(\mu_\beta\sigma_2^2)(u)\vartheta(\mu_\beta\sigma_1\sigma_2)(u)\right\}\\
=&\vartheta(\alpha_1)\vartheta(\alpha_1\mu_1)\vartheta(\alpha_1\mu_1^2)\left\{\sum_{\beta=o}^{\beta=2}\tau^{2|\alpha_1+\mu_\beta|}\vartheta(\alpha_1\mu_\beta\sigma_1^2)(u)\vartheta(\alpha_1\mu_\beta\sigma_2^2)(u)\vartheta(\alpha_1\mu_\beta\sigma_1\sigma_2)(u)\right\}\\
+&\vartheta(\alpha_2)\vartheta(\alpha_2\mu_1)\vartheta(\alpha_2\mu_1^2)\left\{\sum_{\beta=o}^{\beta=2}\tau^{2|\alpha_2+\mu_\beta|}\vartheta(\alpha_2\mu_\beta\sigma_1^2)(u)\vartheta(\alpha_2\mu_\beta\sigma_2^2)(u)\vartheta(\alpha_2\mu_\beta\sigma_1\sigma_2(u)\right\}\\
+&\vartheta(\alpha_3)\vartheta(\alpha_3\mu_1)\vartheta(\alpha_3\mu_1^2)\left\{\sum_{\beta=o}^{\beta=2}\tau^{2|\alpha_3+\mu_\beta|}\vartheta(\alpha_3\mu_\beta\sigma_1^2)(u)\vartheta(\alpha_3\mu_\beta\sigma_2^2)(u)\vartheta(\alpha_3\mu_\beta\sigma_1\sigma_2)(u\right\},
\end{aligned}\right\}\text{(III')}$$

eine Relation zwischen 12 Thetaprodukten, von denen immer drei die nämlichen Coeffizienten besitzen. Die Formeln (II′) und (III′) fallen für $\varrho_1 = \sigma_1 = \mu_1$, $\varrho_2 = \sigma_2 = \mu_1^2$ in die folgende einfachere zwischen 4 Thetaprodukten zusammen:

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{1+\tau^{\mu_1|\alpha-|\mu_1|}+\tau^{\mu_1^2|\alpha-|\mu_1|}\right\}\vartheta(o)\vartheta(\mu_1)\vartheta(\mu_1^2)\cdot\vartheta(o)(u)\vartheta(\mu_1)(u)\vartheta(\mu_1^2)(u)\\
=&\left\{\tau^{2|\alpha_1|}+\tau^{2|\alpha_1+\mu_1|}+\tau^{2|\alpha_1-\mu_1|}\right\}\vartheta(\alpha_1)\vartheta(\alpha_1\mu_1)\vartheta(\alpha_1\mu_1^2)\cdot\vartheta(\alpha_1)(u)\vartheta(\alpha_1\mu_1)(u)\\
&\qquad\vartheta(\alpha_1\mu_1^2)(u)\\
+&\left\{\tau^{2|\alpha_2|}+\tau^{2|\alpha_2+\mu_1|}+\tau^{2|\alpha_2-\mu_1|}\right\}\vartheta(\alpha_2)\vartheta(\alpha_2\mu_1)\vartheta(\alpha_2\mu_1^2)\cdot\vartheta(\alpha_2)(u)\vartheta(\alpha_2\mu_1)(u)\\
&\qquad\vartheta(\alpha_2\mu_1^2)(u)\\
+&\left\{\tau^{2|\alpha_3|}+\tau^{2|\alpha_3+\mu_1|}+\tau^{2|\alpha_3-\mu_1|}\right\}\vartheta(\alpha_3)\vartheta(\alpha_3\mu_1)\vartheta(\alpha_3\mu_1^2)\cdot\vartheta(\alpha_3)(u)\vartheta(\alpha_3\mu_1)(u)\\
&\qquad\vartheta(\alpha_3\mu_1^2)(u).
\end{aligned}\right\}\text{(IV')}$$

Eine Relation zwischen denselben Produkten, aber mit andern Coeffizienten erhält man endlich noch, indem man in (I′) $\varrho_1 = \varrho_2 = o$ setzt; es folgt dann:

$$\left.\begin{aligned}
&\vartheta(o)(u)\vartheta(\mu_1)(u)\vartheta(\mu_1^2)(u)\cdot\sum_\beta\tau^{\mu_\beta|\alpha-|\mu_\beta|}\vartheta^3(\mu_\beta)\\
=&\vartheta(\alpha_1)(u)\vartheta(\alpha_1\mu_1)(u)\vartheta(\alpha_1\mu_1^2)(u)\cdot\sum_\beta\tau^{2|\alpha_1+\mu_\beta|}\vartheta^3(\alpha_1^2\mu_\beta^2)\\
+&\vartheta(\alpha_2)(u)\vartheta(\alpha_2\mu_1)(u)\vartheta(\alpha_2\mu_1^2)(u)\cdot\sum_\beta\tau^{2|\alpha_2+\mu_\beta|}\vartheta^3(\alpha_2^2\mu_\beta^2)\\
+&\vartheta(\alpha_3)(u)\vartheta(\alpha_3\mu_1)(u)\vartheta(\alpha_3\mu_1^2)(u)\cdot\sum_\beta\tau^{2|\alpha_3+\mu_\beta|}\vartheta^3(\alpha_3^2\mu_\beta^2).
\end{aligned}\right\}\text{(V')}$$

Durch die Substitution $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ erhält man ferner eine Relation zwischen 12 Thetacuben, in welcher man dann je drei als Coeffizienten auftretende Thetaprodukte gleich machen kann, indem man $\varrho_1 = \mu_1$, $\varrho_2 = \mu_1^2$ setzt; das gibt:

$$
(\mathrm{VI}')\quad \left\{
\begin{aligned}
&\vartheta(0)\,\vartheta(\mu_1)\,\vartheta(\mu_1^2)\cdot\sum_{\beta=0}^{\beta=2}\tau^{\mu_\beta|\alpha}\,\tau^{2|\mu_\beta|}\,\vartheta^3(\mu_\beta)(\mathrm{u})\\
&= \vartheta(\alpha_1)\,\vartheta(\alpha_1\mu_1)\,\vartheta(\alpha_1\mu_1^2)\cdot\sum_{\beta=0}^{\beta=2}\tau^{2|\alpha_1+\mu_\beta|}\,\vartheta^3(\alpha_1\mu_\beta)(\mathrm{u})\\
&+ \vartheta(\alpha_2)\,\vartheta(\alpha_2\mu_1)\,\vartheta(\alpha_2\mu_1^2)\cdot\sum_{\beta=0}^{\beta=2}\tau^{2|\alpha_2+\mu_\beta|}\,\vartheta^3(\alpha_2\mu_\beta)(\mathrm{u})\\
&+ \vartheta(\alpha_3)\,\vartheta(\alpha_3\mu_1)\,\vartheta(\alpha_3\mu_1^2)\cdot\sum_{\beta=0}^{\beta=2}\tau^{2|\alpha_3+\mu_\beta|}\,\vartheta^3(\alpha_3\mu_\beta)(\mathrm{u}).
\end{aligned}\right.
$$

Relationen zwischen den Nullwerten der Thetafunktionen lassen sich sowol im allgemeinen Falle als auch im Falle $p = 2$ aus den vorangehenden Relationen direkt ableiten, indem man $u = 0$ setzt.

Schlussbemerkung. Bezüglich der in § 9 aufgestellten Fundamentalformeln mag noch bemerkt werden, dass Formel (11) pag. 355 identisch ist mit der sogenannten Riemann'schen Thetaformel für Drittelcharakteristiken, wie sie die Herren Prym und Krazer im 3. Band der Acta mathematica pag. 271 angaben; man kann sie auch der Form nach leicht in dieselbe überführen, indem man $a - v_\lambda = - u_\lambda'$, $u - b_\lambda = u_{\lambda+3}'$, $u - v_\lambda = v_\lambda'$, $a - b_\lambda = - v_{\lambda+3}'$, $\lambda = 1, 2, 3$, und $(\varrho_i) = (0)$ setzt.

Desgleichen enthält die Formel (10) pag. 354 die Analoga zu den von Jacobi für $p = 1$ (Werke, Band I) und von Rosenhain für $p = 2$ (Preisschrift) und den Modul 2 abgeleiteten Fundamentalformeln, wie ich gelegentlich auszuführen gedenke.

Ferner erkennt man, dass die Methoden, welche uns die Fundamentalformeln der §§ 9 und 12 für Drittelcharakteristiken lieferten, sofort auf n-tel Charakteristiken ausgedehnt werden können.

München im Februar 1887.