Ueber

die projective Centrafläche

einer

algebraischen Fläche n. Ordnung.

Von

A. Voss.

Der Begriff der von den Krümmungsmittelpuncten der Hauptnormalschnitte einer gegebenen Fläche gebildeten Fläche, oder der Centrafläche derselben, lässt sich in zweifacher Weise projectiv verallgemeinern, je nachdem man als absolutes Gebilde eine Fläche zweiten Grades oder einen Kegelschnitt voraussetzt. Obwohl der letztere Fall aus dem ersteren als Grenzfall hervorgeht, so scheint es doch angemessen, die beiden auf diese Art entstehenden Flächen als projective Centraflächen erster und zweiter Art zu unterscheiden.[1]) Im Folgenden habe ich versucht, die Theorie dieser Flächen, unter Voraussetzung einer allgemeinen algebraischen Fläche n. Ordnung, analytisch darzulegen, soweit dies mit Hülfe einfacher Formenbildungen geschehen kann; es genügt dabei die Centrafläche erster Art zu betrachten, deren analytische Behandlung in mancher Beziehung sich einfacher gestalten lässt.

In § 1 behandle ich zuerst eine allgemeine Classe von Brennflächen. Sie gehört zu denjenigen Strahlensystemen, welche entstehen, wenn man jeden Punct x einer allgemeinen Ordnungsfläche f mit einem Puncte y verbindet, dessen Coordinaten rationale Functionen von x sind. Dabei erscheint die Brennfläche im allgemeinen zweideutig auf f bezogen; für gewisse Curven derselben tritt indessen eine eindeutige Beziehung ein; hieraus ergeben sich sofort alle Singularitäten der ebenen Schnittcurve und des Tangentenkegels dieser Flächen. Zu diesen Curven gehören insbesondere die in § II betrachtete Rückkehr und parabolische Curve der Brennfläche, deren Verhalten demnach durch ihre eindeutige Abbildung auf f untersucht werden kann.

1) Bei den Flächen zweiten Grades sind diese beiden Centraflächen im projectiven Sinne nicht verschieden.

Von diesem Gesichtspunct aus sind in § IV die Centraflächen erster Art betrachtet. Als besonders characterisch für das Strahlensystem der projectiven Normalen erweisen sich die Hauptpuncte desselben, welche zu den Kreispuncten von f gehören. In den § V und VII stelle ich die Gleichungen zweier Flächen 8 (2 n — 3) Ordnung auf, welche f in der eindeutigen Abbildung der Rückkehr und parabolischen Curve der Centrafläche durchsetzen; hieraus ergibt sich eine Reihe von Eigenschaften, welche diese Curven in ihrem gegenseitigen Verhalten und dem in Bezug auf andere Curven auszeichnen. Im § IX sind die Hauptpuncte einer Theorie der Centraflächen zweiter Art skizzirt, und endlich noch die einfachsten Modificationen besprochen, welche eintreten, wenn f entweder einen vielfachen Punct hat, oder die absolute Fläche resp. die absolute Ebene berührt.

Wenn nun die Resultate dieser Arbeit sich auch zunächst auf gewisse Hauptfragen der abzählenden Geometrie in Betreff der projectiven Centraflächen beziehen, so war es doch zugleich meine Absicht, durch die Bildung geeigneter analytischer Formen zur Untersuchung der Krümmungsverhältnisse der algebraischen Flächen neue Gesichtspuncte zu gewinnen, insbesondere auch eine synthetische Behandlung der Theorie der Centraflächen anzubahnen, von der man eine vollständigere Darlegung aller Singularitäten dieser Flächen erwarten darf. In dieser Beziehung sei es mir gestattet auf den in § III entwickelten Begriff des Hauptschnittes einer Fläche, die analytische Bestimmung der Anzahl der Kreispuncte, den Inhalt der § V und X, sowie auf die in mancher Hinsicht ausgezeichneten Krümmungseigenschaften der Flächen dritter Ordnung hinzuweisen.

§ I.

Eigenschaften einer allgemeinen Classe von Brennflächen.

Die projective Centrafläche erster Art der allgemeinen Ordnungsfläche n. Ordnung f = o ist die Brennfläche des Strahlensystemes, welches aus den Verbindungsgeraden der Pole y der Tangentenebenen von f in Bezug auf eine Fläche zweiten Grades X = o mit den Berührpuncten jener Tangentenebenen gebildet wird. Sie entsteht daher einerseits als Ort der Durchschnittspuncte unendlich naher Strahlen des Systems, andererseits als Umhüllungsgebilde der Ebenen durch benachbarte sich schneidende Strahlen. Die Puncte y bilden die reciproke Fläche F von f. Man kann das Strahlensystem also auch durch die Verbindungsgeraden der Puncte y mit den Polen x der Tangentenebenen von F definiren; die beiden Flächen F und f haben dieselbe Centrafläche. Und da zwischen der Fläche F und einer beliebigen anderen Reciprokalfläche von f kein wesentlicher Unterschied besteht, so kann man auch sagen: Die Centrafläche erster Art von f ist in projectivem Sinne identisch mit der Centrafläche der Reciproken von f.[1])

Wird der Einfachheit halber

$$X = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$$

vorausgesetzt, so hat man, falls zur Abkürzung

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_i, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, d\, x_k} = f_{ik}, \text{ etc.}$$

gesetzt wird,

$$1) \qquad \varrho\, y_i = f_i,$$

als Coordinaten der zu den Puncten x gehörigen Pole y.

Statt der Gleichungen 1) sollen zunächst die y_i proportional mit homogenen Functionen ψ_i vom Grade s vorausgesetzt werden, welche für kein gemeinsames Werthsystem der x, für das f gleich Null ist, gleichzeitig verschwinden. Das durch die Geraden (xy) gebildete Strahlensystem ist von der Classe ns^2, von der Ordnung $n(s^2 + s + 1)$. Die letztere Zahl ergibt sich sofort, wenn man beachtet, dass die Matrix [2])

---

1) Für die C. Flächen zweiter Art besteht ein analoger Satz nicht, obwohl auch hier gewisse Charactere bei dualistischer Vertauschung ungeändert bleiben, vgl. § IX.

2) Zur Abkürzung soll bei der Angabe von Determinanten in der Regel nur eine Verticalreihe derselben, welche durch den Index i bezeichnet ist, angegeben werden. Ebenso bediene ich mich zur Darstellung der geränderten Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A = \left\| \begin{matrix} \psi_i \\ x_i \\ a_i \end{matrix} \right\| = o; \; i = 1, 2, 3, 4,$$

welche ausdrückt, dass die Puncte ψ_i, x_i, a_i in einer Geraden liegen, bei willkürlichen Werthen der a_i eine Curve der Ordnung

$$s^2 + s + 1$$

darstellt, welche mit der Fläche f die soeben angegebene Zahl von Puncten gemein hat. Im Folgenden sollen die Unterdeterminanten jener Matrix mit

$$\eta_1, \; \eta_2, \; \eta_3, \; \eta_4,$$

bezeichnet werden.

Schreitet man auf f von x um dx fort, so erhalten die y die Incremente dy. Befinden sich die Puncte x, y, x + dx, y + dy, in einer Ebene, so ist dieselbe eine Tangentenebene der Brennfläche des Strahlensystems.

Liegt der willkürliche Punct a in derselben, so kann man demnach setzen

$$2) \qquad \begin{aligned} dx_i &= a_i + \lambda x_i + \mu y_i, \\ dy_i &= a_i + \lambda_1 x_i + \mu_1 y_i. \end{aligned}$$

Mit Hülfe der Gleichung

$$\Sigma f_i \, dx_i = o, \text{[1]}$$

folgt hieraus

$$3) \qquad \Sigma a_i f_i + \mu \Sigma y_i f_i = o.$$

Setzt man noch

$$4) \qquad dy_i = \Sigma \psi_{ik} \, dx_k; \;\; \psi_{ik} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k},$$

und führt die dx_i aus 2) in 4) ein, so entsteht

---

des Zeichens

$$\begin{vmatrix} a_{ik} & b_k \\ a_i & o \end{vmatrix}.$$

1) Da alle Summationszeichen sich im Folgenden immer auf diejenigen Indices i, k, l = 1, 2, 3, 4 beziehen, welche doppelt unter dem Σ-zeichen vorkommen, so wird die besondere Bezeichnung der Indices unterbleiben.

$$\Sigma a_k \psi_{ik} + \mu \Sigma \psi_{ik} \psi_k = a_i + \lambda_1 x_i + \psi_i (\mu_1 - \lambda s),$$

und endlich, wenn man die λ_1, $\mu_1 - \lambda s$ eliminirt, und μ aus 3) einsetzt

$$5) \qquad F = \Sigma y_i f_i \Sigma a_k \psi_{ik} \eta_i - \Sigma a_i f_i \Sigma \psi_{ik} \psi_k \eta_i = o.$$

Die Fläche $3s + n - 1$. Ordnung F, welche einem gegebenen Werthe von a entspricht, berührt, wovon man sich leicht überzeugt, die Fläche f in allen den Puncten, in denen die gemeinsame Curve der Matrix A f durchsetzt; sie schneidet f in einer Curve Γ mit ebenso viel Doppelpuncten, welche diejenigen Puncte x enthält, für welche eine der zugehörigen Tangentenebenen der Brennfläche durch den Punct a geht. Bei gegebenem x dagegen repräsentirt die in a quadratische Form F das Product jener beiden Tangentenebenen selbst, zerfällt also beständig vermöge $f = o$ in das Product zweier linearer Factoren.

Die Classe M der Brennfläche ist gleich der Zahl der gemeinsamen Lösungen der Gleichungen

$$f = o, \; F = o, \; \Sigma b_i \eta_i = o,$$

welche ausdrücken, dass eine Tangentenebene der Brennfläche durch die beiden willkürlichen Puncte a, b, geht, also wird

$$M = n(s+1)(3s+n-1) - 2n(s^2+s+1).$$

Die von den Puncten x gebildete Curve Γ ist eindeutig umkehrbar auf die Berührungscurve des Tangentenkegels der Brennfläche mit der Spitze a bezogen. Das liefert den folgenden Satz:

Das Geschlecht p des Tangentenkegels der Brennfläche ist gegeben durch die Gleichung

$$2p - 2 = n(3s+n-1)(3s+2n-5) - 2n(s^2+s+1),$$

nämlich gleich dem Geschlechte einer Curve mit $n(s^2+s+1)$ Doppelpuncten, welche vollständiger Schnitt von f und F ist.

Auf eine ähnliche Art, wie im vorigen die Ebenen der Brennfläche, lassen sich nun auch die beiden zu einem Puncte x von f gehörigen Puncte derselben characterisiren. Bezeichnet man nämlich mit z_i die

Coordinaten eines Punctes der Brennfläche, welcher auf dem zu x gehörigen Strahle (x y) liegt, so ist

$$6)\quad \varrho z_i = x_i + \lambda y_i,$$

falls beim Fortschreiten um d x und correspondirende Werthe der d y (4) die Verhältnisse der z_i keine Aenderung erfahren. Setzt man daher:

$$7)\quad \frac{d\varrho}{\varrho}(x_i + \lambda y_i) = d x_i + \lambda d y_i + y_i d\lambda,$$

so erhält man durch Elimination der $d x_i$, $d\lambda$, $\frac{d\varrho}{\varrho}$, zur Bestimmung von λ die quadratische Gleichung

$$8)\quad \varDelta = \frac{1}{\lambda}\begin{vmatrix} 1+\lambda\psi_{11} & \lambda\psi_{12} & \lambda\psi_{13} & \lambda\psi_{14} & x_1 \\ \lambda\psi_{21} & 1+\lambda\psi_{22} & \lambda\psi_{23} & \lambda\psi_{24} & x_2 \\ \lambda\psi_{31} & \lambda\psi_{32} & 1+\lambda\psi_{33} & \lambda\psi_{34} & x_3 \\ \lambda\psi_{41} & \lambda\psi_{42} & \lambda\psi_{43} & 1+\lambda\psi_{44} & x_4 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & o \end{vmatrix} = o$$

oder in entwickelter Form

$$\varDelta = \Sigma f_i \psi_i + \lambda(\Sigma f_i \psi_i \Sigma \psi_{kk} - \Sigma f_i \psi_{kk} \psi_k) + \lambda^2 D,$$

wo

$$D = \begin{vmatrix} \psi_{ik} & x_i \\ f_k & o \end{vmatrix},$$

zu setzen ist. Die beiden Wurzeln λ_1, λ_2 derselben bestimmen die zu x gehörigen Puncte z_1, z_2 der Brennfläche.

Aus der Form $\varDelta$ geht zunächst hervor: Der Punct x ist selbst ein Punct der Brennfläche, wenn $\Sigma f_i \psi_i = o$, d. h. wenn der Punct y in der Tangentenebene von f liegt. Umgekehrt ist y ein Punct der Brennfläche, wenn $D = o$, d. h. wenn die Tangentialebene der von den Puncten y gebildeten Fläche Φ, welche mit f in eindeutiger Beziehung steht, durch den Punct x geht. Denn die Gleichung dieser Tangentialebene entsteht, wenn man in dem Ausdrucke D den aus den x_i gebildeten Rand durch die laufenden Coordinaten der Ebene ersetzt. Nun beweist man leicht den Satz:

S i n d z w e i F l ä c h e n f u n d Φ a u f e i n a n d e r (ein oder mehrdeutig) s o b e z o g e n , d a s s j e d e m P u n c t e x v o n f ü b e r h a u p t e i n P u n c t y v o n Φ e n t s p r i c h t , s o w i r d d i e B r e n n f l ä c h e d e s

Strahlensystemes (xy) die Fläche f (Φ) längs derjenigen Curve berühren, für deren Puncte die Tangentenebene von f (Φ) durch den zugehörigen Punct y (x) auf Φ (f) geht. — Denn wenn die Tangentenebene T von f im Puncte x durch y geht, so schneidet sie auf Φ einen zu y benachbarten Punct aus, der mit dem entsprechenden Puncte in T einen unendlich nahen Strahl des Systems bestimmt, welcher (xy) in einem Puncte z schneidet. Die durch beide Strahlen gelegte Ebene ist Tangentenebene der Brennfläche im Puncte x, welcher eben den anderen auf (xy) gelegenen Brennpunct bildet. Insbesondere hat man also:

Die Brennfläche berührt die Fläche f längs der Curve $\Sigma f_i \psi_i = o$, $f = o$.

Verbindet man 6) mit den beiden Gleichungen

$$\alpha_z = o, \ \beta_z = o,$$

so wird

$$9) \quad \lambda = -\frac{\alpha_x}{\alpha_y},$$

$$\alpha_x \beta_y - \beta_x \alpha_y = o.$$

Wird der aus 9) folgende Werth von λ in 8) eingesetzt, so wird Δ von der Ordnung $3s + n - 1$. Man erhält demnach als Ordnung der Brennfläche, d. h. als Zahl der Puncte, welche dieselbe mit der willkürlichen Geraden $\alpha_z = o$, $\beta_z = o$, gemein hat,

$$N = n(s+1)(3s+n-1) - 2ns,$$

da offenbar die n s Puncte, in denen

$$f = o, \ \alpha_x = o, \ \alpha_y = o,$$

doppelt zählend zu entfernen sind.

Ein beliebiger ebener Schnitt der Brennfläche ist definirt durch die Gleichungen 8) und 9). Dieselben bestimmen bei gegebenen Werthen der α_i eine Curve auf f, welche in eindeutiger Beziehung zu jener ebenen Schnittcurve steht und welche die Puncte $\alpha_x = o$, $\alpha_y = o$, $f = o$ zu Doppelpuncten hat. Mithin ist das Geschlecht π des ebenen Schnittes der Brennfläche bestimmt durch die Gleichung

$$2\pi - 2 = n(3s+n-1)(3s+2n-5) - 2ns.$$

Zur vollständigen Discussion des ebenen Schnittes, resp. des Tangentenkegels der Brennfläche ist jetzt nur noch eine weitere characteristische Zahl, der Rang R der Fläche zu bestimmen. Hierzu führen die folgenden Betrachtungen.

Wenn Δ verschwindet, so gibt es Werthe der ζ_i, ξ_i, welche den Gleichungen

$$10)\qquad \begin{aligned} &\zeta_k + \lambda \Sigma \psi_{ik} \zeta_i + \zeta f_k = o, \; k = 1, 2, 3, 4 \\ &\Sigma \zeta_i x_i = o, \\ &\Sigma \zeta_i y_i = o. \end{aligned}$$

$$11)\qquad \begin{aligned} &\xi_k + \lambda \Sigma \psi_{ki} \xi_i + \xi x_k = o, \; k = 1, 2, 3, 4 \\ &\Sigma \xi_i f_i = o, \\ &\Sigma \psi_{ki} \xi_i f_k = o, \end{aligned}$$

genügen. Die Verbindungslinie der den beiden Wurzeln λ_1, λ_2 zugehörigen Puncte ζ_i bildet nach 10) ein zu dem Strahlensysteme x y in Bezug auf X conjugirtes, dessen Brennfläche eben von jenen Puncten gebildet wird; die Puncte ζ_i bilden daher die reciproke Fläche der Brennfläche. Auch analytisch ist dies leicht zu erkennen. Denn durch Differentiation der Gleichungen 10) entsteht

$$\begin{aligned} d\zeta_k + \lambda \Sigma(\psi_{ikl} \zeta_i dx_l + \psi_{ik} d\zeta_i) + d\lambda \Sigma \psi_{ik} \zeta_i \\ + d\zeta f_k + \zeta \Sigma f_{kl} dx_l = o, \end{aligned}$$

multiplicirt man diese 4 Gleichungen mit den x_k und addirt, so entsteht

$$\Sigma(x_k + \lambda y_k) d\zeta_k = o,$$

woraus hervorgeht, dass die Tangentenebene der von den Puncten ζ gebildeten Fläche die Polarebene des Punctes z ist.

Bezeichnet man ferner die zu $\lambda_1 \lambda_2$ gehörigen Werthe der ζ_i, ξ_i durch obere entsprechende Indices, so ist nach 10), 11)

$$\begin{aligned} \Sigma \zeta_k^1 \xi_k^2 + \lambda_1 \Sigma \psi_{ik} \zeta_i^1 \xi_k^2 = o, \\ \Sigma \zeta_k^1 \xi_k^2 + \lambda_2 \Sigma \psi_{ki} \xi_i^2 \zeta_k^1 = o, \end{aligned}$$

d. h. es wird

$$12)\qquad \begin{aligned} \Sigma \zeta_k^1 \xi_k^2 = o, \; \Sigma \psi_{ik} \zeta_i^1 \xi_k^2 = o, \\ \Sigma \zeta_k^2 \xi_k^1 = o, \; \Sigma \psi_{ik} \zeta_i^2 \xi_k^1 = o. \end{aligned}$$

Differentiirt man die Gleichungen 6), so entsteht allgemein für die Fortschreitungsrichtung dz auf der Brennfläche

$$\varrho\, d z_i + z_i\, d\varrho = d x_i + \lambda \Sigma \psi_{ik}\, d x_k + y_i\, d\lambda,$$

woraus durch Multiplication mit den ζ_i und Addition nach 10) wird

$$\Sigma \zeta_i\, d z_i = o.$$

Die Gleichung der Tangentenebene der Brennfläche im Puncte z_i ist also, wie auch aus der reciproken Beziehung hervorgeht,

$$13) \qquad \Sigma \zeta_i X_i = o.$$

Die Bedingung, dass dieselbe durch einen willkürlichen Punct a gehe, ist also

$$14) \qquad \Sigma \zeta_i a_i = o.$$

Setzt man ferner

$$\lambda = -\frac{\alpha_x}{\alpha_y},$$

so erhält man die Anzahl der Kanten des Tangentenkegels der Brennfläche mit der Spitze a, welche sich auf die Schnittpuncte seiner Berührungscurve mit der willkürlichen Ebene $\alpha_z = o$ stützen, d. h. die Zahl R. Die Gleichung 14) aber hat die Form

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 + \lambda \psi_{ik} & a_i \\ f_k & o \end{vmatrix} = o.$$

Setzt man nun für λ den angegebenen Werth, so liefern die drei Gleichungen

$$f = o, \quad \Delta = o, \quad \Delta' = o$$

$n(3s + n - 1)^2 - 6ns$ Lösungen. Aber von diesen sind diejenigen als unwesentlich zu entfernen, für die die sämmtlichen ζ_i, d. h. die nach der letzten Verticalreihe von Δ' genommenen Unterdeterminanten verschwinden. Die Anzahl derselben beträgt, wie eine einfache und auf bekannte Methoden zurückführbare Abzählung lehrt, deren Ausführung hier übergangen werden mag,

$$n[8s^2 + 2n(n-1)] - 6sn.$$

Somit ergibt sich:

Der Rang der Brennfläche, d. h. die Ordnung ihres Tangentenkegels oder die Classe ihrer ebenen Schnittcurve ist gleich

$$R = n\,[s^2 + 4\,s\,(n-1) + (n-1)^2].$$

Die gefundenen Zahlen characterisiren vollständig die Singularitäten des Tangentenkegels und des ebenen Schnittes. So erhält man z. B.: die Anzahl der Wendungskanten des Tangentenkegels

$$w = s\,n\,(8\,s + 7\,n - 16) + n\,(n+1)\,(n-4),$$

die Zahl seiner Rückkehrkanten

$$\varrho = 4\,s\,n\,(2\,s + 4\,n - 7) + 4\,n\,(n-1)\,(n-2),$$

die Zahl der Spitzen der ebenen Schnittcurve

$$r = s\,n\,(14\,s + 7\,n - 16) + n\,(n-1)\,(n-2),$$

die Zahl der Wendungspuncte derselben

$$i = 4\,s\,n\,(2\,s + 4\,n - 7) + 4\,n\,(n-1)\,(n-2);$$

Die Zahl der Rückkehrkanten des Tangentenkegels ist also gleich der Zahl der Inflexionen auf der ebenen Schnittcurve der Brennfläche.

Sind insbesondere die ψ_i Functionen $n-1$. Ordnung, so erhält man demnach die folgenden characteristischen Zahlen, die namentlich auch für die projective Centrafläche erster Art gelten

$$\begin{aligned}
N &= 2\,n\,(n-1)\,(2\,n-1),\\
M &= 2\,n\,(n^2-n-1),\\
R &= 6\,n\,(n-1)^2,\\
2\,p - 2 &= 4\,n\,(n-1)\,(5\,n-8) - 2\,n\,(n^2-n+1),\\
2\,\pi - 2 &= 2\,n\,(n-1)\,(10\,n-17),\\
w &= 2\,n\,(n-2)\,(4\,n-5),\\
i = \varrho &= 4\,n\,(n-1)\,(7\,n-11),\\
r &= 2\,n\,(n-1)\,(11\,n-16),\\
\sigma &= 6\,n\,(n-1)\,(5\,n-8);
\end{aligned}$$

die letzte Zahl giebt die Ordnung der parabolischen Curve auf der Centrafläche; r ist die Ordnung der Rückkehrcurve derselben.

Diese letzteren Zahlen habe ich bereits im XVI. Bande der Mathematischen Annalen, allerdings auf einem viel weitläufigeren Wege, hergeleitet. Sie gelten auch für die Centrafläche zweiter Art, bei welcher an Stelle der Functionen ψ_i lineare Functionen der f_i zu setzen sind (vgl. § IX). Erst ganz neuerdings habe ich bemerkt, dass Herr Bäcklund mit Hülfe synthetischer Methoden den ebenen Schnitt und Tangentenkegel der Centrafläche zweiter Art bereits früher untersucht hatte, (Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-academiens handlingar, Stockholm 1872, 1873); die von demselben gefundenen Zahlwerthe geben eine erwünschte Bestätigung der obigen ganz allgemeinen Analyse.

§ II.

Rückkehr und parabolische Curve auf den in § I behandelten Flächen.

Zu einer genaueren Untersuchung der auf der Brennfläche befindlichen singulären Curven (Rückkehrcurve, parabolische Curve, Doppelcurve etc.) reichen die vorhergehenden Betrachtungen nicht aus. Auf eine vollständige Behandlung dieser Fragen mit Hülfe algebraischer Methoden, namentlich soweit sie die Doppelcurve betreffen, wird man wohl verzichten müssen; einem Theile derselben lässt sich aber auf dem folgenden Wege näher treten.

Ein Punct der Rückkehrcurve entsteht, wenn drei unendlich benachbarte Strahlen des Systems sich in einem Puncte schneiden; Spitzen der Rückkehrcurve entsprechen dem Fall, wo vier solche Strahlen durch einen Punct gehen. Die erstere Configuration lässt sich auf folgende Art analytisch characterisiren. Die Gleichungen I, 11) ordnen jedem Puncte der Fläche f zwei Puncte ξ_i zu. Dieselben geben die Richtungen dx an, nach denen man auf f fortschreiten muss, um zu dem Fusspuncte eines unendlich nahen Strahles zu gelangen, welcher (xy) im correspondirenden Puncte $z = x + \lambda y$ der Brennfläche trifft. Denn die Gleichung

$$\Sigma f_i \, dx_i = o$$

und die Bedingung

$$\begin{vmatrix} x_i \\ \psi_i \\ d\,x_i \\ \Sigma\,\psi_{ik}\,d\,x_k \end{vmatrix} = 0,$$

welche aussagt, dass α, y, $x + d\,x$, $y + d\,y$, sich in einer Ebene befinden, sind erfüllt, wenn man setzt

$$1)\qquad d\,x_i = \alpha\,\xi_i + \beta\,x_i.$$

Nimmt man anstatt der Gleichungen I, 6) die der Form nach allgemeineren

$$2)\qquad \varrho\,z_i = \nu\,x_i + \lambda\,f_i,$$

so wird an Stelle von I, 7) treten

$$3)\qquad \frac{d\varrho}{\varrho}(\nu\,x_i + \lambda\,f_i) = \nu\,d\,x_i + x_i\,d\,\nu + \lambda\,d\,y_i + y_i\,d\,\lambda.$$

Man erhält nun aus 1) und I, 11)

$$\begin{aligned} d\,y_i = \Sigma\,\psi_{ik}\,d\,x_k &= \alpha\,\Sigma\xi_k\,\psi_{ik} + \beta\,s\,\psi_i \\ &= \beta\,s\,\psi_i - \alpha\,(\xi_i + \xi f_i). \end{aligned}$$

Trägt man diese Werthe in 3) ein, so entstehen durch Vergleichung der Coefficienten von x_i und y_i auf beiden Seiten die folgenden Relationen

$$\frac{d\varrho}{\varrho}\,\nu = \nu\,\beta + d\,\nu - \xi\,\alpha,$$

$$\frac{d\varrho}{\varrho}\,\lambda = \lambda\,s\,\beta + d\,\lambda,$$

oder

$$4)\qquad d\,\lambda = \lambda\,\beta\,(1 - s) + \frac{\lambda}{\nu}(d\,\nu - \xi\,\alpha).$$

Die Bedingungen dafür, dass ein weiterer unendlich benachbarter Strahl durch denselben Punct 2) der Brennfläche geht, erhält man, wenn man die Gleichungen 3) unter Annahme eines constanten z_i von neuem differentiirt, in der Form

$$\begin{aligned} 5)\qquad \frac{d^2\varrho}{\varrho}(\nu\,x_i + \lambda\,y_i) = \nu\,d^2x_i + x_i\,d^2\nu + 2\,d\,\nu\,d\,x_i + 2\,d\,\lambda\,\Sigma\psi_{ik}\,d\,x_k \\ + \lambda\,\Sigma\,\psi_{ikl}\,d\,x_k\,d\,x_l + y_i\,d^2\lambda + \lambda\,\Sigma\psi_{ik}\,d^2x_k; \end{aligned}$$

multiplicirt man wieder mit dem ζ_i und addirt, so entsteht aus den Gleichungen 5), da nach I, 10)

$$\nu \Sigma \zeta_i d^2 x_i + \lambda \Sigma \psi_{ik} \zeta_i d^2 x_k = -\nu \zeta \Sigma f_i d^2 x_i,$$

wird, und

$$\Sigma f_i d^2 x_i + \Sigma f_{ik} dx_i dx_k = o,$$

ist,

$$6) \qquad \nu \zeta \Sigma f_{ik} dx_i dx_k + 2 d\nu \Sigma \zeta_i dx_i + 2 d\lambda \Sigma \zeta_i \psi_{ik} dx_k$$
$$+ \lambda \Sigma \psi_{ikl} \zeta_i dx_k dx_l = o.$$

In diese Relation sind noch die Verhältnisse der dx_i aus 1) einzuführen. Man erhält durch einfache Rechnungen

$$\Sigma(\nu \zeta f_{ik} + \lambda \psi_{ikl} \zeta_i) dx_k dx_l = \alpha^2 (\zeta \nu \Sigma f_{lk} \xi_l \xi_k + \lambda \Sigma \psi_{ikl} \xi_i \xi_l \xi_k)$$
$$+ 2 \alpha \lambda \beta (s-1) \Sigma \zeta_k \xi_l \psi_{kl},$$
$$\Sigma \psi_{ik} dx_k \zeta_i = \alpha \Sigma \zeta_i \xi_k \psi_{ik},$$
$$\Sigma \zeta_i dx_i = \alpha \Sigma \zeta_i \xi_i.$$

Da aber nach I, 9)

$$\nu \Sigma \zeta_i \xi_i + \lambda \Sigma \psi_{ik} \zeta_i \xi_k = o,$$

so folgt aus 6)

$$\alpha^2 (\zeta \nu \Sigma f_{lk} \xi_l \xi_k + \lambda \Sigma \psi_{ikl} \zeta_i \xi_l \xi_k) + 2 \alpha \beta (s-1) \lambda \Sigma \zeta_i \xi_k \psi_{ik}$$
$$- 2 \frac{d\nu}{\nu} \lambda \alpha \Sigma \psi_{ik} \zeta_i \xi_k + 2 d\lambda \alpha \Sigma \zeta_i \xi_k \psi_{ik} = o.$$

Trägt man endlich den Werth 4) von $d\lambda$ ein, so entsteht

$$F = \zeta \nu \Sigma f_{ik} \xi_i \xi_k + \lambda \nu \Sigma \psi_{ikl} \zeta_i \xi_l \xi_k - 2 \lambda \xi \Sigma \psi_{ik} \zeta_i \xi_k = o,$$

als Bedingung für diejenigen Puncte auf der Fläche f, für welche einer der beiden auf dem zugehörigen Strahle befindlichen Brennpuncte der Rückkehrcurve der Brennfläche angehört.

Man kann diese Bedingung noch auf einem ganz anderen Wege erhalten; doch mag jetzt wieder $\nu = 1$ gesetzt werden. Bezeichnet man nämlich die Unterdeterminanten in der Determinante

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 1+\lambda\psi_{11} & \lambda\psi_{21} & \lambda\psi_{31} & \lambda\psi_{41} & f_1 \\ \lambda\psi_{12} & 1+\lambda\psi_{22} & \lambda\psi_{32} & \lambda\psi_{42} & f_2 \\ \lambda\psi_{13} & \lambda\psi_{23} & 1+\lambda\psi_{33} & \lambda\psi_{43} & f_3 \\ \lambda\psi_{14} & \lambda\psi_{24} & \lambda\psi_{34} & 1+\lambda\psi_{44} & f_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & o \end{vmatrix} = o,$$

durch $\varDelta_{ik}$; i, k = 1, 2, 3, 4, 5, so erkennt man, dass die Proportionen bestehen

$$\begin{aligned}
\zeta_1\xi_1 : \zeta_2\xi_1 : \zeta_3\xi_1 : \zeta_4\xi_1 : \zeta\xi_1 &= \varDelta_{11} : \varDelta_{21} : \varDelta_{31} : \varDelta_{41} : \varDelta_{51},\\
\zeta_1\xi_2 : \zeta_2\xi_2 : \zeta_3\xi_2 : \zeta_4\xi_2 : \zeta\xi_2 &= \varDelta_{12} : \varDelta_{22} : \varDelta_{32} : \varDelta_{42} : \varDelta_{52},\\
\zeta_1\xi_3 : \zeta_2\xi_3 : \zeta_3\xi_3 : \zeta_4\xi_3 : \zeta\xi_3 &= \varDelta_{13} : \varDelta_{23} : \varDelta_{33} : \varDelta_{43} : \varDelta_{53},\\
\zeta_1\xi_4 : \zeta_2\xi_4 : \zeta_3\xi_4 : \zeta_4\xi_4 : \zeta\xi_4 &= \varDelta_{14} : \varDelta_{24} : \varDelta_{34} : \varDelta_{44} : \varDelta_{54},\\
\zeta_1\xi : \zeta_2\xi : \zeta_3\xi : \zeta_4\xi : \zeta\xi &= \varDelta_{15} : \varDelta_{25} : \varDelta_{35} : \varDelta_{45} : \varDelta_{55};
\end{aligned}$$

man kann also, wenn der Symmetrie halber ζ und ξ durch ζ_5 und ξ_5 bezeichnet werden, allgemein

$$\zeta_i\xi_k = \mu\varDelta_{ik},$$

setzen. Differentiirt man nun die Gleichungen I, 6) zweimal, so entsteht

$$7)\quad \begin{aligned} d\varrho z_i + \varrho\, d z_i &= d x_i + \lambda\, d y_i + d\lambda\, y_i;\\ d^2\varrho z_i + 2\, d\varrho\, d z_i + \varrho\, d^2 z_i &= d^2 x_i + 2\, d\lambda\, d y_i + \lambda\, d^2 y_i + d^2\lambda\, y_i. \end{aligned}$$

Nimmt man in diesen Gleichungen $d^2 z_i \equiv d z_i$, so entspricht die Richtung, nach welcher man alsdann auf f fortzuschreiten hat, einer Haupttangente der Brennfläche. Multiplicirt man unter dieser Voraussetzung die Gleichungen 7) mit ζ_i, i = 1, 2, 3, 4 und addirt, so entsteht nach I, 10)

$$\Sigma\zeta_i d^2 x_i + 2\, d\lambda\, \Sigma\zeta_i\, d y_i + \lambda\, \Sigma\zeta_i\, d^2 y_i = o;$$

oder, wenn man

$$d y_i = \Sigma\psi_{ik}\, d x_k,$$

$$d^2 y_i = \Sigma\psi_{ikl}\, d x_k\, d x_l + \Sigma\psi_{ik}\, d^2 x_k,$$

setzt:

$$\Sigma\zeta_i d^2 x_i + \lambda\, \Sigma\psi_{ik}\zeta_i d^2 x_k + \lambda\, \Sigma\psi_{ikl}\zeta_i\, d x_k\, d x_l + 2\, d\lambda\, \Sigma\zeta_i\psi_{ik}\, d x_k = o,$$

oder nach I, 10)

$$8)\quad \zeta\,\Sigma f_{ik}\, d x_i\, d x_k + \lambda\, \Sigma\psi_{ikl}\zeta_i\, d x_k\, d x_l + 2\, d\lambda\, \Sigma\zeta_i\psi_{ik}\, d x_k = o.$$

Differentiirt man nun auch die Gleichung $\Delta = o$, so ergiebt sich unter Benutzung der zuvor aufgeführten Unterdeterminanten Δ_{ik}

$$\Sigma(d\lambda\psi_{ik} + \lambda\psi_{ikt}dx_t)\Delta_{ik} + \Sigma\Delta_{i5}dx_i + \Sigma f_{ik}dx_k\Delta_{5i} = o,$$

oder

$$9)\quad d\lambda\Sigma\zeta_i\xi_k\psi_{ik} + \lambda\Sigma\psi_{ikt}\zeta_i\xi_k dx_t + \zeta\Sigma dx_i\zeta_i + \zeta\Sigma f_{ik}\xi_i dx_k = o.$$

Verbindet man mit den Gleichungen 8) und 9) noch die beiden

$$\Sigma p_i dx_i = o, \quad \Sigma f_i dx_i = o,$$

wo die p_i willkürliche Coefficienten bedeuten, so erhält man die beiden Richtungen, welche den Haupttangenten der Brennfläche auf der Fläche f entsprechen, ausgedrückt durch eine zwischen den dx, $d\lambda$ bestehende quadratische Relation. Die Bedingung, unter der diese Richtungen coincidiren, liefert Puncte, welche entweder der parabolischen oder der Rückkehrcurve auf der Brennfläche entsprechen. Beide Curven zugleich sind also characterisirt durch das Verschwinden der 8 reihigen Determinante, in welcher die Indices i, k in den ersten vier Horizontal- und Verticalreihen gleich 1, 2, 3, 4 zu setzen sind:

$$\begin{vmatrix} \zeta f_{ik} + \lambda\Sigma\psi_{tik}\zeta_t, & \Sigma\zeta_s\psi_{sk}, & \lambda\Sigma\psi_{tmk}\zeta_t\xi_m + \zeta\Sigma f_{tk}\xi_t + \xi\zeta_k, & f_k, & p_k, \\ \Sigma\zeta_s\psi_{si}, & o & \Sigma\psi_{st}\zeta_s\xi_t & o & o \\ \lambda\Sigma\psi_{tmk}\zeta_t\xi_m + \zeta\Sigma f_{ti}\xi_t + \xi\zeta_i, & \Sigma\psi_{st}\zeta_s\xi_t & o & o & o \\ f_i & o & o & o & o \\ p_i & o & o & o & o \end{vmatrix}$$

Diese Determinante lässt sich durch folgende Transformationen in zwei Factoren zerlegen, von denen der eine F ist, während der andere, welcher durch G bezeichnet werden soll, sich auf die Puncte der parabolischen Curve bezieht. Multiplicirt man nämlich die ersten vier Reihen mit den ξ_i und subtrahiert von der sechsten, so treten an Stelle der in dieser befindlichen Elemente die folgenden

$$\begin{array}{c} \xi\zeta_1 \\ \xi\zeta_2 \\ \xi\zeta_3 \\ \xi\zeta_4 \\ o \\ \xi\zeta_1,\ \xi\zeta_2,\ \xi\zeta_3,\ \xi\zeta_4,\ o,\ -\lambda\Sigma\psi_{tmi}\zeta_t\xi_m\xi_i - \zeta\Sigma f_{kt}\xi_k\xi_t - 2\xi\Sigma\zeta_i\xi_i,\ o,\ -\Sigma\xi_i p_i \\ o \\ -\Sigma\xi_i p_i. \end{array}$$

Multiplicirt man ferner die fünfte Reihe mit $(s-1)\lambda$ und subtrahiert wieder die Summe der ersten vier mit den x_i multiplicirten von derselben, so werden alle Terme in dieser Reihe bis auf einen gleich Null, und es kann demnach der Factor $(\Sigma p_i x_i)^2$ abgesondert werden. Endlich addire man noch einmal die mit den x_i multiplicirten vier ersten Reihen zur nunmehrigen fünften Reihe. Den Gleichungen

$$\begin{aligned}\Sigma(\zeta f_{ik} + \lambda \psi_{tik} \zeta_t) x_i &= (n-1)\zeta f_k + \lambda(s-1)\Sigma \psi_{tk}\zeta_t \\ &= (n-s)\zeta f_k - (s-1)\zeta_k,\end{aligned}$$

zufolge lässt sich dann bewirken, dass in dieser Reihe alle Terme bis auf den einen

$$\lambda \Sigma \psi_{tmi} \zeta_t \xi_m \xi_i + \zeta \Sigma f_{ti} \xi_t \xi_i + 2\xi \Sigma \zeta_i \xi_i,$$

gleich Null werden, womit die ganze Determinante in diesen Factor und den folgenden

$$10)\qquad G = \begin{vmatrix} \zeta f_{ik} + \lambda \Sigma \psi_{tki} \zeta_t & f_k \\ f_i & o \end{vmatrix},$$

zerfällt. Da endlich nach I, 10)

$$\Sigma \zeta_i \xi_i + \lambda \Sigma \zeta_i \psi_{ik} \xi_k = o,$$

so wird der Werth jenes ersten Factors

$$\lambda \Sigma \psi_{tmi} \zeta_t \xi_m \xi_i + \zeta \Sigma f_{ik} \xi_i \xi_k - 2\lambda \xi \Sigma \zeta_i \xi_k \psi_{ik},$$

welcher in der That mit dem oben durch F bezeichneten Ausdrucke identisch ist.

Die Bedingung für die parabolische Curve der Brennfläche ist also

$$G = o.$$

Entwickelt man G nach Potenzen von λ, so wird der Coefficient von λ^3

$$\begin{vmatrix} \Sigma \psi_{tki} \zeta_t & f_k \\ f_i & o \end{vmatrix};$$

bezeichnet man ferner die Unterdeterminanten der Hesse'schen Determinante, genommen nach den Elementen f_{ik}, durch H_{ik}, so wird der Coefficient von λ^2

$$-\left(\frac{s-1}{n-1}\right)^2 \zeta \Sigma \zeta_t \psi_{tk} \zeta_m \psi_{mi} H_{ik},$$

während die übrigen Coefficienten verschwinden, so dass die Bedingung $G = o$ durch folgende Gleichung repräsentirt ist

$$\lambda \begin{vmatrix} \Sigma \psi_{tki} \zeta_t & f_k \\ f_i & o \end{vmatrix} - \left(\frac{s-1}{n-1}\right)^2 \zeta \Sigma \zeta_t \psi_{tk} \zeta_m \psi_{mi} H_{ik} = o,$$

der auch noch mit Hilfe von I, 10) manche andere Formen gegeben werden können.

§ III.

Der Hauptschnitt der Fläche in Bezug auf das Strahlensystem.

Auf der Brennfläche liegen ausser den beiden Berührungscurven mit den Flächen f und Φ, der durch das Verschwinden der Discriminante von I, 4) characterisirten Curve vierpunctiger Berührung, etc. . . . noch andere Curven, deren Betrachtung von Interesse scheint. Nur eine derselben möge hier noch genauer betrachtet werden.

Die beiden Richtungen auf der Fläche f, welche zu den benachbarten sich schneidenden Strahlen des Systems gehören, sind bestimmt durch die Gleichung

$$o = \begin{vmatrix} x_i \\ \psi_i \\ d x_i \\ \Sigma \psi_{ik} d x_k \end{vmatrix} = \Sigma A_{mn} d x_m d x_n,$$

wobei

$$2 A_{mn} = \begin{vmatrix} x_i \\ \psi_i \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial x_m} \\ \psi_{in} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_i \\ \psi_i \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial x_n} \\ \psi_{im} \end{vmatrix},$$

und

$$A_{mn} = A_{nm},$$

ist. Die Fläche

$$1) \qquad \Sigma A_{mn} z_m z_n = o,$$

ist eine Kegelfläche K, welche durch den Punct y geht und deren Spitze sich in x befindet, wie aus den Gleichungen

$$2)\qquad \begin{aligned} \Sigma A_{mn} x_n &= 0, \\ \Sigma A_{mn} \psi_m \psi_n &= 0, \end{aligned}$$

hervorgeht. Die Coefficienten A_{mn} genügen überdies den Gleichungen

$$3)\qquad \begin{aligned} \Sigma A_{mn} \psi_m \psi_{nt} \psi_t = 0,\ \Sigma A_{mn} \psi_{mn} = 0, \\ \Sigma A_{mn} \psi_{mt} \psi_t \psi_{nk} \psi_k = \Theta, \end{aligned}$$

falls

$$4)\qquad \Theta = \begin{vmatrix} x_i \\ \psi_i \\ \Sigma \psi_{it} \psi_t \\ \Sigma \psi_{in} \psi_{nk} \psi_k \end{vmatrix},$$

gesesetzt wird.

Bezeichnet man die Unterdeterminanten der Determinante der ψ_{ik} nach den Elementen ψ_{ik} durch Ψ_{ik}, so ist

$$5)\qquad \Sigma A_{mn} \Psi_{mn} = 0,$$

und endlich wird

$$6)\qquad \Sigma A_{nn} = (\psi_{21} - \psi_{12})(x_3 \psi_4 - x_4 \psi_3) + (\psi_{13} - \psi_{31})(x_2 \psi_4 - x_4 \psi_2) + \ldots;$$

verschwindet also z. B., wenn $\psi_{ik} = \psi_{ki}$, d. h. wenn die ψ_i Differentialquotienten ein und derselben Function sind. Soll der Kegel K in ein Ebenenpaar zerfallen, so ist

$$2 A_{mn} = \alpha_m \beta_n + \alpha_n \beta_m.$$

Durch Anwendung der Gleichungen 2), 3) folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} \alpha_x \beta_n + \alpha_n \beta_x &= 0, \\ \Sigma \alpha_i \psi_i \Sigma \beta_k \psi_k &= 0, \\ \Sigma \alpha_i \psi_i \Sigma \beta_n \psi_{nt} \psi_t + \Sigma \beta_i \psi_i \Sigma \alpha_n \psi_{nt} \psi_t &= 0, \\ \Theta &= \Sigma \alpha_n \psi_{nk} \psi_k \Sigma \beta_m \psi_{mk} \psi_k. \end{aligned}$$

Da nun die β_i den α_i nicht proportional sein können, so folgt

$$\begin{aligned} \alpha_x = 0,\ \beta_x &= 0, \\ \Sigma \alpha_i \psi_i &= 0, \\ \Sigma \alpha_n \psi_{nt} \psi_t &= 0, \end{aligned}$$

welche Bedingungen auch $\Theta = 0$ nach sich ziehen. Die Bedingung Θ ist aber auch umgekehrt hinreichend, wenn der Kegel in ein Ebenenpaar zerfallen soll, und zwar lassen sich die Gleichungen dieser Ebenen dann immer, wie aus den eben angegebenen Relationen für die α_i folgt, rational, ohne Auflösung einer quadratischen Gleichung, angeben. Dies lässt sich auf folgendem Wege zeigen.

Wenn Θ verschwindet, so gibt es Werthe der α_i, welche den Gleichungen

$$7)\quad \begin{aligned} &\Sigma \alpha_i x_i = 0, \\ &\Sigma \alpha_i \psi_i = 0, \\ &\Sigma \alpha_i \psi_{it} \psi_t = 0, \\ &\Sigma \alpha_i \psi_{in} \psi_{nk} \psi_k = 0, \end{aligned}$$

genügen. Die α_i sind also den Determinanten der Matrix

$$7\text{a})\quad \left\| \begin{matrix} x_i \\ \psi_i \\ \Sigma \psi_{it} \psi_t \end{matrix} \right\|,$$

gleich. Schreibt man aber an Stelle der letzten 3 Gleichungen 7)

$$\begin{aligned} &\Sigma \alpha_s \psi_{si} x_i = 0, \\ &\Sigma \alpha_s \psi_{si} \psi_i = 0, \\ &\Sigma \alpha_s \psi_{si} \psi_{it} \psi_t = 0, \end{aligned}$$

so erkennt man, dass

$$8)\quad \alpha_i = \lambda\, \Sigma \alpha_s \psi_{si},$$

wird. Demzufolge ist für beliebige Werthe der Coefficienten c_i

$$2\, \Sigma A_{mn} \psi_m c_n = \Sigma c_i \alpha_i.$$

Ferner wird

$$2\, \Sigma A_{mn} \psi_{np} \psi_p c_m = \left| \begin{matrix} x_i \\ \psi_i \\ c_i \\ \Sigma \psi_{in} \psi_{np} \psi_p \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} x_i \\ \psi_i \\ \Sigma \psi_{ip} \psi_p \\ \Sigma \psi_{im} c_m \end{matrix} \right|,$$

$$= \sigma\, \Sigma c_i \alpha_i + \Sigma c_m \psi_{im} \alpha_i,$$

wo σ einen Proportionalitätsfactor bedeutet. Dieser Werth geht aber nach 8) über in

$$(\sigma + \lambda)\, \Sigma c_i \alpha_i.$$

Mithin wird

$$\Sigma c_m A_{mn} \{\psi_{np} \psi_p - (\sigma + \lambda) \psi_n\} = o,$$

aus welcher Beziehung hervorgeht, dass der Kegel K den Punct

$$u_i = \Sigma \psi_{ip} \psi_p - (\sigma + \lambda) \psi_i,$$

ebenfalls zur Spitze hat, und demgemäss in 2 Ebenen zerfallen muss. Demnach folgt:

Der Kegel K (1) zerfällt längs der Curve $2n[3s - 1]$ Ordnung $f = o$, $\Theta = o$ rational in die beiden Focalebenen der Brennfläche, welche zu seiner Spitze gehören.

Die Fläche Θ hat, wie eine einfache Betrachtung zeigt, die Curve von der Ordnung

$$(1 + 7 s^2 - 2 s)$$

für welche die Matrix 7a) verschwindet, zur Doppelcurve. Demnach besitzt die Curve $f = o$, $\Theta = o$, welche man als einen Hauptschnitt von f bezeichnen kann, im Ganzen

$$n (1 + 7 s^2 - 2 s)$$

Doppelpuncte.

Die Form Θ lässt sich noch auf eine andere Weise erhalten. Denn die Bedingungen 8) drücken aus, dass die Gleichung vierten Grades

$$\Omega = \left| 1 + \lambda \psi_{ik} \right| = o, ^{1)}$$

erfüllt ist, d. h. dass sie mit der Gleichung zweiten Grades $\varDelta = o$, eine gemeinsame Wurzel hat, da auch $\Sigma \alpha_i x_i = \Sigma \alpha_i \psi_i = o$ ist. Daraus folgt:

Die Form Θ ist ein Factor der Resultante R der Formen $\varDelta$ und Ω.

Der andere Factor lässt sich leicht ebenfalls angeben. Setzt man nämlich

$$\Sigma \xi_i f_i = o,$$
$$\Sigma \xi_k \psi_{ki} f_i = o,$$
$$\Sigma \xi_k \psi_{kn} \psi_{ni} f_i = o,$$
$$\Sigma \xi_s \psi_{sk} \psi_{kn} \psi_{ni} f_i = o,$$

1) Nur die Elemente der Hauptdiagonale enthalten den Summanden 1.

so folgt

$$\xi_i + \mu \Sigma \xi_k \psi_{ki} = o;$$

demnach ist auch die Form

$$\Theta' = \begin{vmatrix} f_i \\ \Sigma \psi_{ki} f_i \\ \Sigma \psi_{kn} \psi_{ni} f_i \\ \Sigma \psi_{sk} \psi_{kn} \psi_{ni} f_i \end{vmatrix},$$

ein Factor der Resultante R. In der That ist auch Θ' eine Form $6(s-1)+4(n-1)$ Ordnung, während R von der Ordnung $8(s-1) + 4(s+n-1)$ ist, so dass die Summe der Ordnungen von Θ und Θ' gleich der von R ausfällt. Beachtet man ferner, dass die Resultante R von der Form

$$R = P^2 - Q^2 \Psi,$$

ist, wo Ψ die Discriminante von Δ bedeutet, so folgt aus der Gleichung

$$\Theta \Theta' \equiv P^2 - Q^2 \Psi,$$

Jede der beiden Curven $f = o$, $\Theta \Theta' = o$, berührt die auf f durch $\Psi = o$ ausgeschnittene Curve ψ, welche einer Curve vierpunctiger Berührung Ψ auf der Brennfläche entspricht, in allen gemeinsamen Puncten. Die Curve ψ scheidet auf f diejenigen Puncte, dessen reelle Puncte der Brennfläche zugehören von solchen, denen nur imaginäre Puncte entsprechen.

§ IV.

Die projective Centrafläche erster Art.

Man kann die beiden in § 2) entwickelten Formen F und G zu einer weiteren Untersuchung der ihnen entsprechenden singulären Curven auf der Brennfläche verwenden. Doch sehe ich hiervon zunächst ab, da die Elimination der in ihnen mit ζ und ξ bezeichneten Grössen nicht auf einfache Bildungen führt. Für die projectiven Centraflächen, bei denen $\psi_i = f_i$ zu setzen ist, treten besondere Vereinfachungen ein; nur diese sollen hier erörtert werden, da die Verfolgung des allgemeinen Falles ein geringeres Interesse zu bieten scheint. Setzt man, wie in § I, 8) für $\psi_i = f_i$

$$1)\quad \frac{\varDelta}{n-1} = -\begin{vmatrix} 1+\lambda f_{ik} & f_i \\ f_k & o \end{vmatrix} = A + B\lambda + C\lambda^2,$$ [1]

so wird nach der daselbst ausgeführten Entwickelung

$$2)\quad \begin{aligned} A &= \Sigma f_i^2, \\ B &= \Sigma f_i^2 \Sigma f_{ii} - \Sigma f_i f_k f_{ik}, \\ (n-1)^2 C &= -XH, \end{aligned}$$

falls H die Hesse'sche Determinante von f bezeichnet. Für den Coefficienten B erhält man auch die folgende Darstellung

$$3)\quad (n-1)^2 B = -X\Sigma H_{ii} + \Sigma x_i \alpha_k H_{ik},$$

wobei wieder H_{ik} die zu f_{ik} gehörige Unterdeterminante von H bezeichnet. Die letztere Gleichung folgt aus einer allgemeinen Identität, welche auch bei anderen Gelegenheiten mit Nutzen gebraucht werden kann (vgl. z. B. § X). Setzt man nämlich

$$4)\quad \begin{aligned} \Omega &= \left| 1 + \lambda f_{ik} \right| \\ &= 1 + \lambda\Sigma f_{ii} + \lambda^2 \varepsilon + \lambda^3 \Sigma H_{ii} + \lambda^4 H, \end{aligned}$$

so lässt sich der Ausdruck $\varDelta$ in doppelter Weise durch einfache Umformungen nach Potenzen von λ entwickeln. Man erhält so z. B.

---

1) Die Gleichung $\varDelta = o$ besitzt einen invarianten Character. Wählt man für X die Form

$$X = \Sigma a_{ik} x_i x_k,$$

so ist für ψ_i zu setzen

$$\psi_i = \Sigma f_s \alpha_{is}, \quad f_k = \Sigma \psi_i a_{ik},$$

wo die α_{is} die durch die Determinante δ von X dividirten Coefficienten der zugeordneten Form von X sind. An Stelle der Gleichung des Textes tritt dann die folgende

$$\frac{\varDelta}{n-1} = -\begin{vmatrix} a_{ik} + \lambda f_{ik} & f_i \\ f_k & o \end{vmatrix} = A + B\lambda + C\lambda^2$$

wobei

$$\frac{A}{\delta} = \Sigma f_i f_k \alpha_{ik}$$

$$\frac{B}{\delta} = \Sigma f_i f_k \alpha_{ik} \Sigma f_{mn} \alpha_{mn} - \Sigma f_{ik} f_s f_t \alpha_{is} \alpha_{sk}$$

$$C = -\frac{HX}{(n-1)^2}$$

zu setzen ist.

$$\Delta = A + \lambda B + \lambda^2 (\Sigma (f_{sk} f_s)(f_{tk} f_t) + A\varepsilon - \Sigma f_{ii} \Sigma f_i f_k f_{ik}) + \frac{\lambda^3 n f H}{n-1}$$

und auf einem anderen Wege

$$\Delta = A + \frac{\lambda}{(n-1)^2}\left\{n(n-1) f\varepsilon + \Sigma x_i x_k H_{ik} - X \Sigma H_{ii}\right\}$$

$$+ \frac{\lambda^2}{(n-1)^2}\left\{n(n-1) f \Sigma H_{ii} - X H\right\} + \lambda^3 \frac{n}{n-1} f H;$$

so dass allgemein die Identitäten bestehen

$$(n-1)^2 (A \Sigma f_{ii} - \Sigma f_i f_k f_{ik}) = n(n-1) f\varepsilon + \Sigma x_i x_k H_{ik} - X \Sigma H_{ii},$$

$$(n-1)^2 \{\Sigma (f_{sk} f_s)(f_{tk} f_t) + A\varepsilon - \Sigma f_{ii} \Sigma f_{ik} f_i f_k\} = n(n-1) f \Sigma H_{ii} - X H,$$

aus denen für $f = o$ wieder die Gleichung 2) folgt.

Bezeichnet man die beiden Wurzeln von $\Delta = o$, wie früher, durch λ_1, λ_2, die zugehörigen Werthe der ζ_i (I, 10) in entsprechender Weise, so folgt

$$5) \qquad \Sigma \zeta_i^1 \zeta_i^2 = o,$$
$$\Sigma \zeta_i^1 \zeta_i^2 f_{ik} = o.$$

Eine Vergleichung der beiden Gleichungssysteme I, 10), 11) zeigt ferner, dass

$$6) \qquad \xi_i = -\zeta x_i - (n-1)\lambda \zeta_i \frac{\xi}{\zeta};$$

in der That erfüllen diese Werthe der ξ_i die Gleichungen

$$\xi_i + \lambda \Sigma \xi_k f_{ik} + \xi x_i = o, \ \Sigma \xi_i f_i = o,$$

wenn die ζ_i den Gleichungen

$$7) \qquad \zeta_i + \lambda \Sigma \zeta_k f_{ik} + \zeta f_i = o, \ \Sigma \zeta_i x_i = o, \ \Sigma \zeta_i f_i = o$$

genügen. Die Gleichungen 5) liefern nunmehr das übrigens bekannte Resultat:

Die Richtungen der projectiven Krümmungslinien, welche durch den Punct x gehen, bilden das gemeinsame harmonische Strahlenpaar zu den Haupttangenten der Fläche f und den beiden Tangenten von X, welche von x in der Tangentenebene an X gehen. Die Richtungen der Krümmungslinien stehen daher im allgemeinen aufeinander senkrecht. Eine Ausnahme hievon tritt nur ein für die Curve ψ (§ 3), wo die Krümmungslinien Spitzen haben, und für die Curve $X = o$, $f = o$.

Für die Puncte der Curve $X = o$, $f = o$ fällt die Richtung der einen Krümmungslinie mit der Tangente dieser Curve zusammen, sie entspricht dem endlichen Wurzelwerthe λ. Die Curve $X = o$, $f = o$ ist also eine algebraische Krümmungslinie der Fläche; die Richtung der anderen Krümmungslinie hat zur Tangente die vierte harmonische Gerade zu jener und den beiden Haupttangenten der Fläche; sie gehört zu dem Werthe $\lambda = \infty$. — Für die Puncte der parabolischen Curve von f fällt die Richtung einer Krümmungslinie zusammen mit der der parabolischen Tangente, sie gehört zu der Wurzel $\lambda = \infty$; der andere ist wieder durch den vierten harmonischen Strahl zu diesem und den beiden an X gezogenen Tangenten bestimmt. — In den Puncten $H = o$, $X = o$, $f = o$ sind daher die Richtungen der Krümmungslinien durch die parabolische Tangente und die der Tangente der Curve $f = o$, $X = o$ gegeben.

Ist dagegen $A = o$, so ist der Wurzel $\lambda = o$ entsprechend $\zeta_i = f_i$ zu setzen; d. h. der betreffende Strahl des Systems, die projective Normale, liegt in der Tangentenebene und liefert die Richtung einer Krümmungslinie, während die andere Krümmungslinie bestimmt ist durch die Fortschreitungsrichtung $d x_i$, welche der Gleichung

$$\Sigma f_{ik} f_i d x_k = o,$$

genügt, d. h. sie fällt mit der Tangente an die Curve $f = o$, $A = o$ zusammen. Diese letztere ist also eine zweite algebraische Krümmungslinie der Fläche f. In den Puncten $H = o$, $A = o$, $f = o$ endlich besteht das System der Krümmungslinientangenten aus der parabolischen Tangente, welche zugleich Tangente der algebraischen Krümmungslinie ist, und der Richtung des Strahles $(x_i f_i)$.

Die Centrafläche berührt, wie aus § 1 folgt, die Fläche f längs der algebraischen Krümmungslinie $2n(n-1)$. Ordnung $f = o$, $A = o$. Sie berührt die reciproke Fläche von f längs der Curve $2n(n-1)$. Ordnung, welche der algebraischen Krümmungslinie $2n$. Ordnung $X = o$, $f = o$ entspricht, und die gemeinschaftlichen Tangentenebenen berühren zugleich die Fläche X in den Puncten dieser letzteren Curve. Endlich entspricht der parabolischen Curve $H = o$, $f = o$ eine Rückkehrcurve $4n(n-1)(n-4)$. Ordnung auf der reciproken Fläche; die Centrafläche enthält auch diese Curve, ohne die Rückkehrtangentenebene zu berühren.

In den Puncten der Curve ψ, welche bestimmt ist durch

$$8) \qquad f = o, \quad \Psi = B^2 - 4AC = o,$$

fallen die Richtungen der Krümmungslinien zusammen. Diese Curve $n(6n-8)$. Ordnung zerlegt f in zwei Gebiete; in dem einen sind die Richtungen der Krümmungslinien reell, in dem anderen imaginär; längs derselben haben, wie schon bemerkt, die Krümmungslinien Spitzen; die projective Normale berührt die Centrafläche vierpunctig. Das Verschwinden der Discriminante von $\varDelta$ drückt aber bekanntlich aus, dass die betreffenden Werthe von ζ_i den beiden Bedingungen

$$\Sigma \zeta_i^2 = o,$$
$$\Sigma \zeta_i \zeta_k f_{ik} = o,$$

genügen. Die Curve ψ ist daher auch der Ort der Puncte auf f, deren eine Haupttangente die Fläche X berührt.

Auf ψ wird es noch eine endliche Zahl von Puncten geben, in denen beide Haupttangenten von f gleichzeitig X berühren. Diese Puncte, die Kreispuncte von f, sind daher Doppelpuncte von ψ und dadurch bestimmt, dass für Werthe der y_i, welche der Gleichung

$$\Sigma y_i f_i = o$$

genügen, die beiden Formen

$$\Sigma f_{ik} y_i y_k$$

und

$$X \Sigma y_i^2 - (\Sigma x_i y_i)^2$$

bis auf einen Factor ϱ identisch werden.

Für die Kreispuncte bestehen daher die Relationen

$$\varrho (X[ik] - x_i x_k) = f_{ik} + \alpha_i f_k + \alpha_k f_i,$$
$$i, k = 1, 2, 3, 4;$$

wobei [i k] an Werth Null für $i \lessgtr k$ hat, für $i = k$ aber gleich o zu setzen ist. Da alsdann

$$\Sigma f_{ik}\, d x_k = \varrho\,(X\, d x_i - x_i\, \Sigma x_k\, d x_k) - f_i\, \Sigma \alpha_k\, d x_k,$$

wird, so sind die Gleichungen II, 3) für jedes $d x_i$ erfüllt, welches der Gleichung $\Sigma f_i\, d x_i = o$ genügt, falls

$$\nu + \lambda\, \varrho\, X = o,$$

genommen wird. Die Kreispuncte geben also zu Hauptpuncten des Systems der Normalen Veranlassung; jede benachbarte Normale begegnet der Normale des Kreispunctes in demselben Puncte der Centrafläche, der ersichtlich ein Doppelpunct derselben wird. Zu einem Kreispuncte gehören unendlich viele auf einer Geraden gelegenen Puncte ζ_i der Reciprokalfläche der Centrafläche; man erhält daraus unmittelbar den folgenden Satz:

Jedem Kreispuncte entspricht auf der Reciprokalfläche der Centrafläche eine gerade Linie mit constanter Tangentialebene.

Die Anzahl der Kreispuncte selbst würde man mit Hülfe der obigen Bedingungen wohl nicht leicht ermitteln können. Sie lässt sich mittelst des von Herrn Schubert zuerst allgemein axiomatisch formulierten „Principes der Erhaltung der Anzahl“ leicht gewinnen. Degenerirt nämlich X in einen Kegelschnitt, so gehen die Puncte, in denen beide Haupttangenten von f dieselbe berührten, über in diejenigen, für welche jene Geraden gleichzeitig den Grenzkegelschnitt treffen, d. h. in die eigentlichen Kreispuncte von f, und diejenigen Puncte, in denen der Grenzkegelschnitt selbst die Fläche f trifft. Demnach beträgt die Anzahl der projectiven Kreispuncte

$$K = n\,[10\, n^2 - 28\, n + 24].$$

Eine analytische Bestimmung dieser Zahl kann man auf folgendem Wege erhalten. Die in § III behandelte Kegelfläche

$$K = \Sigma A_{mn}\, z_m\, z_n = o,$$

welche zu jedem Puncte der Fläche f gehört, hat für den vorliegenden

Fall die bemerkenswerthen invarianten und einer einfachen geometrischen Deutung fähigen Eigenschaften

$$\begin{aligned}&\Sigma A_{ii} = o,\\&\Sigma A_{ik} H_{ik} = o,\\&\Sigma A_{ik} f_{ik} = o,\\&\Sigma A_{ik} f_i f_k = o.\end{aligned}$$

Zerfällt K in das Product zweier Ebenen $\alpha_z \beta_z$, so ist demnach

$$8) \qquad \Sigma \alpha_i \beta_i = o,$$

$$\text{und } \alpha_z = \begin{vmatrix} z_i \\ x_i \\ f_i \\ \Sigma f_{ik} f_k \end{vmatrix}.$$

Dies Zerfallen tritt aber längs des durch $\Theta = o$, $f = o$ bestimmten Hauptschnittes $(6n - 8)$ n. Ordnung mit $n(7n^2 - 16n + 10)$ Doppelpuncten ein. Da nun für jeden Kreispunct von f der Kegel K insbesondere in die Tangentialebene von f und die Ebene α_z zerfällt, so folgt:

Der Hauptschnitt der Fläche f enthält die sämmtlichen Kreispuncte derselben.

Die Anzahl der Kreispuncte K ist demnach doppeltzählend unter der Zahl der Schnittpuncte der drei Flächen

$$\Psi = o, \; \Theta = o, \; f = o$$

enthalten. In den übrigen Schnittpuncten, welche Ψ und Θ mit f gemein haben, wird die Doppelkante des zerfallenden Kegels K sich in der Tangentenebene von f befinden, weil sämmtlichen Puncten von $\Psi = o$, $f = o$ zusammenfallende Focalebenen der Brennfläche zugehören. Verlangt man daher, dass

$$\alpha_i = \beta_i + \sigma f_i$$

sei, wie dies für die ebengenannten Puncte stattfinden muss, so erhält man aus 8) die Bedingung

$$\Sigma \alpha_i^2 = o$$

oder

$$P = X(A F - E^2) - (n - 1)^2 A^3 = o,$$

wenn für einen Augenblick

$$\Sigma (f_{ik} f_k)(f_{is} f_s) = F,$$

$$\Sigma f_i f_k f_{ik} = E,$$

gesetzt wird. Die Fläche P von der 6 (n — 1). Ordnung schneidet die Curve f = o, $\Theta = o$ in

$$12 (n - 1)(3 n - 4) n,$$

Puncten, sie hat, wie man unmittelbar sieht, die auf f liegenden Doppelpuncte von Θ gleichfalls zu Doppelpuncten. Entfernt man diese, wie es sein muss, vierfach von der eben gefundenen Zahl, so erhält man als Zahl der Puncte, in denen ψ und Θ auf f ausser den Kreispuncten sich begegnen

$$n [12 (n - 1)(3 n - 4) - 4 (7 n^2 - 16 n + 10)] = y.$$

Aber alle diese Puncte sind doppelt zu rechnen, weil in ihnen der Hauptschnitt die Curve ψ berührt. Es geht dies aus der zu Ende des § III gemachten Bemerkung hervor, nach der jene Resultate die Form

$$R = \Theta \Theta'$$

hat. In dem Falle $\psi_{ik} = f_{ik}$ aber findet man überdies durch Multiplication der Determinante Θ mit der Hesse'schen Form H unmittelbar

$$\Theta' = H \Theta.$$

Demnach ist

$$R = P^2 - \Psi G^2 = \Theta^2 H,$$

d. h. es ist die Form Θ die Quadratwurzel aus der durch H dividirten Resultante R der Formen Δ und Ω.

Sonach wird

$$2 K = n (6 n - 8)^2 - 2 y = n (20 n^2 - 56 n + 48),$$

und zugleich hat man den Satz:

Der Hauptschnitt der Fläche f geht durch die Kreispuncte derselben und berührt die Ortscurve der Spitzen der Krümmungslinien in allen übrigen

$$4 n (2 n - 1)(n - 2)$$

Puncten, wo er dieselbe trifft.

Eine andere Bestimmung der Anzahl der Kreispuncte wird sich im folgenden § ergeben.

§ V.

Die Rückkehrcurve der Centrafläche.

In § IV ist gezeigt worden, dass

$$\xi_i = \xi\, x_i + \lambda\,(n-1)\,\zeta_i\,\frac{\xi}{\zeta},$$

zu setzen ist. Werden diese Werthe in die Form F (§ II) eingeführt, so ergiebt sich, falls der unwesentliche Factor $(n-1)^2\lambda^2\frac{\xi^2}{\zeta^2}$ fortgelassen wird, nach einigen einfachen Reductionen

$$1)\qquad F = 3\,\zeta\,\Sigma\,\zeta_i\,\zeta_k\,f_{ik} + \lambda\,\Sigma\,\zeta_i\,\zeta_k\,\zeta_t\,f_{ikt} = 0.$$

Setzt man hier

$$\zeta_i = \eta_i + \sigma\,x_i,$$

und wählt für σ den Werth

$$\sigma = -\frac{\zeta}{\lambda\,(n-2)},$$

so tritt an Stelle von F die einfache Form

$$2)\qquad F = \Sigma\,\eta_i\,\eta_k\,\eta_t\,f_{ikt} = 0,$$

und zugleich wird

$$3)\qquad \xi_i \equiv \eta_i + \frac{1}{n-2}\,\zeta_i,$$

$$x_i \equiv \eta_i - \zeta_i,$$

Die Puncte ξ, η, ζ sind durch folgende Construction bestimmt. Zu jedem Puncte x der Fläche f gehört ein Büschel von Flächen zweiter Ordnung

$$\Sigma\,y_i^2 + \lambda\,\Sigma\,y_i\,y_k\,f_{ik} = 0,$$

gebildet von der Fläche X und der Polarfläche P_2 von f. In demselben befinden sich, den beiden Wurzeln λ_1, λ_2 von Δ entsprechend, zwei Flächen, welche die Tangentenebene von f berühren; die Berührungspuncte sind die beiden Puncte ζ_i. Der Punct ξ_i liegt auf der Geraden $(x\,\zeta)$, zugleich aber auf der Polarebene des Punctes f_i in Bezug auf P_2, da

$$\Sigma\,\xi_k\,f_i\,f_{ik} = 0.$$

Construirt man nun auf der Geraden $(x\zeta)$ den Punct η so, dass das Doppelverhältniss

$$(x\ \zeta\ \xi\ \eta)$$

den constanten Werth

$$\frac{n-1}{n-2}$$

hat, so wird x zu einem Puncte der Rückkehrcurve der Centrafläche gehören, wenn η auf der dritten Polarfläche 2) von x liegt.

Für die Fläche dritter Ordnung ergiebt sich daraus die einfache Beziehung:

Die Rückkehrcurve der Centrafläche der Fläche dritter Ordnung ist dadurch characterisirt, dass der Punct η der Fläche dritter Ordnung selbst angehört, und die Puncte ζ, η liegen nach 3) harmonisch zu ξ und x.

Zur weiteren Behandlung der Form F ist es erforderlich, dieselbe von den ζ_i zu befreien, deren Producte den Unterdeterminanten der symmetrischen Determinante

$$\varDelta' = \begin{vmatrix} 1+\lambda f_{ik} & f_i \\ f_i & o \end{vmatrix} = -\frac{\varDelta}{(n-1)\lambda},$$

proportional sind.

Zu diesem Zwecke setze ich

$$-\left\{\sum_1^5 (\alpha_i\,\zeta_i)\right\}^2 = \begin{vmatrix} 1+\lambda f_{ik} & f_i & \alpha_i \\ f_k & o & \alpha_5 \\ \alpha_k & \alpha_5 & o \end{vmatrix}$$

$$= -\alpha_5^2\,\Omega - 2\,\alpha_5 \binom{f}{\alpha} + \binom{f\,\alpha}{f\,\alpha},$$

wobei zur Abkürzung für die ein- oder zweimal geränderte Determinante Ω die eingeklammerten Ausdrücke gesetzt sind, und zugleich die Grösse ζ durch ζ_5 der Symmetrie halber bezeichnet worden ist. Man erhält dann, wenn

$$\binom{f\,\alpha}{f\,\alpha} = L + M\lambda + N\lambda^2,$$

gesetzt wird, durch ein analoges Verfahren wie früher,

$$L = A \Sigma \alpha_i^2 - (\Sigma \alpha_i f_i)^2,$$

$$(n-1)^2 N = - H \alpha_x^2,$$

$$(n-1)^2 M = - X \Sigma \alpha_i \alpha_k H_{ik} - \alpha_x^2 \Sigma H_{ii} + 2 \alpha_x \Sigma \alpha_i x_k H_{ik}.$$

Mithin wird

$$4)\qquad \zeta_i \zeta_k = A [ik] - f_i f_k$$

$$+ \frac{\lambda}{(n-1)^2}\Big[x_i \Sigma x_m H_{km} + x_k \Sigma x_m H_{im} - x_i x_k \Sigma H_{ii} - X H_{ik}\Big] - \frac{\lambda^2}{(n-1)^2} H x_i x_k.$$

Vermöge dieser Formel kann man die Quadrate und Producte der ζ_i in F entfernen. Um die alsdann noch linear vorkommenden ζ_i und ζ in einer symmetrischen Weise zu eliminiren, sollen in der Form

$$F' = F \sum_1^4 a_i \zeta_i,$$

welche nur Verbindungen der ζ zu zweien enthält, dieselben nach 4) eingesetzt werden. Dadurch erhält freilich F' den unwesentlichen Factor $\Sigma a_i \zeta_i$, in dem die a_i völlig willkürliche Coefficienten bedeuten mögen. Derselbe stellt gleich Null gesetzt, diejenigen Puncte auf f dar, für welche einer der Puncte ζ in einer willkürlichen Ebene liegt, oder anders ausgedrückt, für die eine der Focalebenen der Centrafläche durch einen willkürlichen Punct a_i geht. Diese Curve ist daher die in § I betrachtete, welche eindeutig auf die Berührungscurve des Tangentenkegels der Centrafläche mit der Spitze a_i bezogen ist; ihre Gleichung ist gegeben durch

$$f = o,$$

$$6)\qquad \Pi = \begin{vmatrix} x_i \\ a_i \\ f_i \\ A \Sigma a_k f_{ik} - \Sigma a_s f_s \Sigma f_k f_{ik} \end{vmatrix} = o,$$

ihre Ordnung ist $4 n (n-1)$; sie hat die Fusspuncte der $n (n^2 - n + 1)$ von a_i auf f gefällten Normalen zu Doppelpuncten.

Diese Curve lässt sich auch doppelt zählend durch das System der Gleichungen

$$f = o,$$

$$(\Sigma a_i \zeta_i)^2 = o,$$

ausdrücken. Man erhält aber aus 4)

$$7)\qquad (\Sigma a_i \zeta_i)^2 = A \Sigma a_i^2 - (\Sigma a_i f_i)^2$$

$$+ \frac{\lambda}{(n-1)^2}\left[2\, a_x \Sigma a_i x_k H_{ik} - a_x^2 \Sigma H_{ii} - X \Sigma a_i a_k H_{ik}\right] - \frac{\lambda^2}{(n-1)^2} H a_x^2.$$

Die Gleichung 7) kann man benutzen, um den Rang der Centrafläche auf's Neue zu bestimmen. Jedem Puncte der Curve Π entspricht ein durch die Wurzel λ von $\Delta = o$ bestimmter Punct z der Centrafläche. Soll derselbe auf der willkürlichen Ebene $\alpha_z = o$ liegen, so ist zu setzen

$$\lambda = -\frac{\alpha_x}{\alpha_f}.$$

Trägt man diesen Werth in 7) und in Δ ein, so ergeben sich zwei Formen $4(n-1)$. Ordnung, also im Ganzen

$$16\, n\, (n-1)^2$$

Lösungen. Von diesen sind aber vierfach zählend die des Systems

$$\alpha_x = o,\ \alpha_f = \Sigma \alpha_i f_i = o,\ f = o,$$

und einfach die von

$$\Sigma \alpha_i f_i = o,\ f = o,\ H = o,$$

zu entfernen. Demnach ist die Ordnung der Berührungscurve des Tangentenkegels der Centrafläche

$$\tfrac{1}{2}\{16\, n\, (n-1)^2 - 4\, n\, (n-1) - 4\, n\, (n-1)\, (n-2)\} = 6\, n\, (n-1)^2,$$

wie oben gefunden wurde.

Die Curve Π geht durch alle Kreispuncte der Fläche f einfach hindurch, weil jedem eine lineare Reihe von Puncten ζ entspricht, aus welcher immer je einer in einer willkürlichen Ebene $a\,\zeta = o$ liegt. Diese Bemerkung führt zu einer sehr einfachen Bestimmung der Anzahl der Kreispuncte von f, wie zunächst gezeigt werden soll.

Irgend zwei Curven Π und Π', welche den willkürlichen Puncten a und b entsprechen, schneiden sich in $16\, n\, (n-1)^2$ Puncten. Unter diesen befinden sich die K Kreispuncte von f, ferner die $2\, n\, (n^2 - n - 1)$ Puncte, welche die ihnen auf der Centrafläche entsprechenden Curven π und π' gemein haben (Classe der Centrafläche). Endlich werden Π und Π' auch dann einen Punct x gemein haben, wenn von den beiden Focalebenen der Centrafläche, die zu x gehören, die eine durch a, die andere durch b geht. Diese Configuration wird ausgedrückt durch die folgenden Gleichungen, in denen ζ_i^1 und ζ_i^2 die beiden Puncte der Reciprokalfläche der Centrafläche bezeichnen:

$$8)\qquad \Sigma a_i \zeta_i^1 = o,\ \Sigma x_i \zeta_i^1 = o,\ \Sigma f_i \zeta_i^1 = o,$$

$$9)\qquad \Sigma \zeta_i^1 \zeta_i^2 = o,\ \Sigma b_i \zeta_i^2 = o,\ \Sigma x_i \zeta_i^2 = o,\ \Sigma f_i \zeta_i^2 = o.$$

Aus den Gleichungen 8) ergeben sich die Verhältnisse der ζ_i^1; aus den Gleichungen 9) folgt

$$\begin{vmatrix} \zeta_i^1 \\ x_i \\ b_i \\ f_i \end{vmatrix} = o.$$

Trägt man in diese letztere Determinante die Verhältnisse der ζ_i^1 ein, so erhält man die Bedingung

$$10)\qquad A\,(X\,\Sigma a_i\, b_i - a_x\, b_x) - X\,\Sigma a_i\, f_i\,\Sigma b_i\, f_i = o,$$

welche von der 2 n Ordnung ist. Die Gleichungen $f = o$, sowie 6) und 10) bestimmen also

$$8\, n^2\, (n - 1)$$

Puncte, von denen aber abzuziehen sind diejenigen, welche den Doppelpuncten von Π entsprechen (es sind dies einfache Puncte von 10)) und die des Systemes

$$X = o,\ a_x = o,\ f = o,$$

sowie des Systemes

$$\Sigma a_i\, f_i = o,\ f = o,\ A = o,$$

welche ebenfalls die Gleichungen befriedigen. Mithin wird die gesuchte Anzahl

$$8\, n^2 (n - 1) - 2\, n\, (n^2 - n + 1) - 2\, (n - 1)^2\, n - 2\, n = 2\, n\, (n + 1)\, (2\, n - 3)$$

Hieraus ergibt sich die Anzahl der Kreispuncte

$$K = 16\, n\, (n - 1)^2 - 2\, n\, (n^2 - n + 1) - 2\, n\, (n + 1)\, (2\, n - 3)$$
$$= 2\, n\, (5\, n^2 - 14\, n + 12).$$

Nebenbei sei noch bemerkt:

Es giebt $2n(n+1)(2n-3)$ Normalen der Fläche, für welche eine der beiden Focalebenen der Centrafläche (Hauptkrümmungsebenen von f) durch einen, die andere durch einen zweiten willkürlichen Punct geht.

Ich wende mich nun zur weiteren Entwickelung der Form F'. Man erhält zunächst

$$-\binom{f}{a} = M + N\lambda + \frac{T}{n-1}\lambda^2 + \frac{a_x}{n-1} H \lambda^3,$$

falls zur Abkürzung

$$\begin{aligned} & M = \Sigma a_i f_i, \\ & N = M \Sigma f_{ii} - \Sigma a_i f_k f_{ik}, \\ 11) \quad & T = a_x \Sigma H_{ii} - \Sigma a_m x_n H_{mn}, \end{aligned}$$

gesetzt wird. Demnach ergiebt sich

$$11\text{a)} \qquad \zeta \Sigma a_i \zeta_i = M + N\lambda + \frac{T}{(n-1)}\lambda^2 + \frac{a_x}{n-1} H \lambda^3.$$

Ferner wird

$$\Sigma f_{ik} \zeta_i \zeta_k = B - 2\lambda \frac{HX}{(n-1)^2},$$

nämlich gleich dem Differentialquotienten von $\varDelta$ nach λ, was übrigens auch durch Anwendung der Ausdrücke 4) bestätigt werden kann. Endlich erhält man durch wiederholte Anwendung der Gleichungen 4)

$$11\text{b)} \qquad \Sigma \zeta_i \zeta_k \zeta_t \zeta_m f_{ikt} a_m = a + b\lambda + c\lambda^2 + d\lambda^3,$$

wo

$$d = 2\frac{n-2}{(n-1)^4} H^2 X a_x,$$

$$c = \frac{n-2}{(n-1)^2} H B a_x + \frac{X}{(n-1)^4}(4(n-2)HT - U),$$

falls noch zur Abkürzung

$$12) \qquad -U = X \Sigma a_m f_{ikt} H_{tm} H_{ik} - a_x \Sigma H_{tp} H_{ik} f_{ikt} x_p,$$

gesetzt wird.

Aus der Form $F' = F \Sigma a_i \zeta_i$ lässt sich daher vermöge der Bedingung $\varDelta = o$ die vierte Potenz von λ entfernen, und man erhält so

$$13) \qquad F' = \alpha + \beta\lambda + \gamma\lambda^2 + \delta\lambda^3,$$

wo

$$\begin{aligned} & \alpha = 3BM, \\ & \delta = pBa_xH + qHX + rX, \end{aligned}$$

ist; p ist ein numerischer Coefficient, dessen Werth für das Folgende gleichgültig ist.

Ich benutze die Form F′ zunächst zu einer directen Bestimmung der Ordnung der Rückkehrcurve. Setzt man, wie früher

$$\lambda = -\frac{\alpha_x}{\alpha_f},$$

so wird F′ vom Grade 7 n — 8. Subtrahiert man von der Anzahl der Lösungen des Systems

$$F' = o, \ \varDelta = o, \ f = o,$$

noch die Ordnung der Curve π, d. h. den Rang der Centrafläche, und die 6 fach genommenen Lösungen von

$$f = o, \ \alpha_x = o, \ \Sigma \alpha_i f_i = o,$$

so erhält man

$$4n(n-1)(7n-8) - 6n(n-1) - 6n(n-1)^2 = 2n(n-1)(11n-16),$$

wie früher gefunden wurde.

Eliminirt man andererseits aus den Gleichungen

$$F' = o, \ \varDelta = o,$$

den Parameter λ, so erhält man nach Beseitigung der Curve Π eine Gleichung, welche auf f eine eindeutig auf die Rückkehrcurve R bezogene Curve ϱ ausschneidet. Sie enthält die Fusspuncte derjenigen Normalen, auf denen einer der beiden Krümmungsmittelpuncte zugleich Punct der Rückkehrcurve der Centrafläche ist, und mag als das Bild von R bezeichnet werden. Die fragliche Resultante hat die Form

$$14) \qquad S = \begin{vmatrix} 3BM & \beta & \gamma & \delta & o \\ o & 3BM & \beta & \gamma & \delta \\ A & B & C & o & o \\ o & A & B & C & o \\ o & o & A & B & C \end{vmatrix} = o;$$

da sie vom Grade 20 n — 28 ist und zugleich den unwesentlichen Factor Π enthalten muss, so ergiebt sich:

Das Bild der Rückkehrcurve ist eine Curve von der Ordnung

$$8n(2n-3)$$

welche vollständiger Schnitt von f mit einer Fläche $8(2n-3)$. Ordnung ist.

Mit Hülfe der Formen F und S ist es möglich, das Verhalten der Rückkehrcurve zu den anderen auf der Centrafläche liegenden Curven zu discutiren.

Zunächst mögen einige allgemeine Bemerkungen angeführt werden. Einer beliebigen Curve c auf der Fläche f entspricht eine Curve C auf der Centrafläche; jedem Puncte von c entsprechen zwei Puncte von C; jedem Puncte von C im allgemeinen ein Punct von c. Die beiden Puncte von C, welche zu einem Puncte von c gehören, fallen zusammen, so oft c der Curve ψ auf f begegnet, welche durch die Discriminante $\Psi = o$ von Δ auf f ausgeschnitten wird. Bezeichnet man die Zahl dieser Puncte durch y, so besteht zwischen den Geschlechtern P und p der Curven C und c die Beziehung

$$-y = 4(p-1) - 2(P-1).$$

Einer Spitze oder einem Doppelpuncte von c werden im allgemeinen wieder zwei derartige Singularitäten bei C entsprechen; auch können aus gewissen Punctpaaren von c Doppelpuncte auf C hervorgehen. Insbesondere wird C eine Spitze erhalten, wenn c in einem Puncte von ϱ diejenige Krümmungslinie berührt, für welche der Krümmungsmittelpunct auf der Centrafläche zugleich ein Punct ihrer Rückkehrcurve R ist.[1]) In jedem anderen Puncte den c mit ϱ gemeinsam hat, muss dagegen eine Berührung von C mit der Rückkehrcurve R eintreten. Einer Curve c, welche der vollständige Schnitt von f mit einer Fläche m. Ordnung ist, entspricht also auf der Centrafläche eine Curve C von der Ordnung $4\,m\,n\,(n-1)$, ohne Spitzen, vom Geschlechte

$$1 + 2\,p - 2 + (3\,n - 4)\,m\,n,$$

wobei

$$2\,p - 2 = m\,n\,(m + n - 4),$$

welche die Rückkehrcurve in $8\,m\,n\,(2\,n-3)$ Puncten berührt. —

---

1) Man vergleiche die Betrachtungen in Herrn Zeuthen's Arbeit, Sur deux surfaces, dont les points etc. ., Math. Annalen Bd. IV, S. 22 ff.

Da einem Kreispuncte von f eine lineare Reihe von Puncten ζ_i angehört, so ergiebt sich unmittelbar aus der Betrachtung von F, welches die ζ im dritten Grade enthält:

Die den Kreispuncten entsprechenden Doppelpuncte der Centrafläche sind dreifache Puncte der Curve R, die Kreispuncte selbst sind dreifache Puncte ihres Bildes ϱ.[1])

Bringt man die soeben angeführten Betrachtungen über das Verhalten von Curven c und C zur Rückkehrcurve auf die Zweige dieses letzteren selbst zur Anwendung, welche durch einen der Doppelpuncte der Centrafläche gehen, so schliesst man weiter:

Durch jeden der $n(10n^2 - 28n + 24)$ Doppelpuncte gehen drei Zweige der Rückkehrcurve, deren gemeinsame Tangente die Normale des zugehörigen Kreispunctes ist.

Ich gehe nach diesen Bemerkungen zur weiteren Discussion der auf f und der Centrafläche liegenden Curven über.

Erstens. Verhalten der Curve vierpunctiger Berührung Ψ zur Rückkehrcurve R, sowie der entsprechenden Curven ψ und ϱ.

Jedem Puncte von ψ, bestimmt durch die Gleichungen

$$f = o, \quad \Psi = (n-1)^2 B^2 + 4HAX = o,$$

entspricht ein Punct von Ψ auf der Centrafläche. Die Normalen in benachbarten Puncten von ψ schneiden sich nur dann, wenn ψ zugleich die Richtung einer Krümmungslinie von f hat. Dann aber berührt die Curve Ψ auf der Centrafläche die betreffende Normale. Spitzen können daher auf Ψ nicht auftreten, da zu dem Auftreten dieser Singularität eben noch nicht genügt, dass zwei benachbarte Normalen sich schneiden. Dagegen treten Spitzen bei der Rückkehrcurve R im allgemeinen auf, wenn die Curve ϱ eine Krümmungslinie von f berührt. Eine Ausnahme machen hierbei nur diejenigen Puncte von ϱ, welche dann zugleich noch Puncte von ψ sind; eine nähere Untersuchung zeigt, dass wenn in diesem Falle die Richtung von ϱ mit einer Krümmungslinie zusammenfällt, hierdurch nur bedingt wird, dass R die betreffende Normale berührt.

1) Die Tangentenrichtungen von ϱ im Kreispuncte sind die der drei durch diesen Punct gehenden Krümmungslinien von f.

Zu den Puncten, in denen ψ die Richtung einer Krümmungslinie berührt, (die man leicht auch vollständig untersuchen kann) gehören insbesondere die Puncte

$$f = o, \; A = o, \; B = o; \; f = o, \; X = o, \; B = o;$$

welche mit den Buchstaben P_1, P_2, bezeichnet werden sollen. In den Puncten P_1 sind die beiden Wurzeln λ gleich Null; die Richtung der Normale f_i ist hier zugleich Richtung der Krümmungslinie; die Curven ψ und Ψ gehen beide durch den Punct P_1 und haben zur gemeinsamen Tangente die genannte Normale. Da die Form S (14) von der Gestalt

$$15) \qquad S = B^2 Z + A Y,$$

ist, so berührt auch ϱ dieselbe Richtung, und gleiches wird mit der Rückkehrcurve R der Fall sein.

In den Puncten P_1 haben demnach die vier Curven Ψ, ψ, R, ϱ, zur gemeinsamen Tangente die Richtung f_i der algebraischen Krümmungslinie $f = o$, $A = o$.

Etwas ähnliches findet statt in den Puncten P_2. Hier sind beide Werthe von λ unendlich; der betreffende Punct z_i von Ψ gegeben durch

$$z_i = \lambda f_i + x_i \nu, \; \nu = o.$$

Mithin wird

$$dz_i = d\lambda f_i + \lambda \Sigma f_{ik} \, dx_k + x_i \, d\nu,$$

und man bestätigt leicht, dass Ψ wieder die Normale in z_i berührt. Denn die Curve ψ berührt die Krümmungslinie, deren Richtung dx_i gegeben ist durch

$$\Sigma x_i \, dx_i = o, \; \Sigma f_i \, dx_i = o.$$

Da aber wegen $X = o$, $B = o$ auch

$$\Sigma x_i x_k H_{ik} = o,$$

ist es gestattet zu setzen

$$dx_i = \alpha \Sigma x_k H_{ik},$$

so dass

$$dz_i = d\lambda f_i + x_i (d\nu + \alpha \lambda H),$$

wird, woraus die angegebene Eigenschaft folgt. Auch hier wird

$$16) \qquad S = XY' + B^2 Z',$$

d. h. die Curve ϱ berührt ψ etc. . Somit hat man:

In den Puncten P_2 berühren sich die Curven ψ, ϱ, in den entsprechenden Krümmungscentren die Curven Ψ und R.

Wenn endlich Ψ verschwindet, ohne dass λ gleich o oder ∞ ist, so reducirt sich F auf die Form

$$\Sigma \zeta_i \zeta_k \zeta_t f_{ikt} = o.$$

Das heisst:

Ein Punct von Ψ gehört auch der Curve R an, wenn die Haupttangente von f, welche X berührt, zugleich vierpunctige Tangente dieser Fläche ist.

Nun bilden die vierpunctigen Tangenten von f, wie bekannt, eine Regelfläche von der Ordnung[1])

$$2\,n(n-3)(3\,n-2)$$

auf welcher, wie man leicht zeigen kann,[2]) $4\,n(n-3)(3\,n-2)$ Erzeugende liegen, die eine Fläche zweiten Grades X berühren. Im Schnitte der Curven ϱ und ψ sind aber diese Puncte P_3 doppelt zu zählen, da die Form F auch durch

$$3\,\zeta \sqrt{\Psi} + \lambda\, \Sigma \zeta_i \zeta_k \zeta_t f_{ikt}$$

dargestellt werden kann, so dass auch hier die Curve ϱ die ψ berührt.

Ausser den doppelt zählenden Puncten P_1, P_2, P_3 und den Kreispuncten K haben die Curven ϱ und ψ keine gemeinsamen Puncte. Denn die Zahl der letzteren beträgt

$$8\,(2\,n-3)(6\,n-8)\,n$$

und dies ist in der That gleich

$$8\,n(n-3)(3\,n-2) + 4\,n(n-1)(3\,n-4) + 4\,n(3\,n-4)$$
$$+ 6\,n(10\,n^2 - 28\,n + 24),$$

oder gleich

$$2\,(P_1 + P_2 + P_3 + 3\,K)$$

---

1) Vgl. Salmon-Fiedler A. Geometrie. S. 635.

2) Vgl. z. B. meine Arbeit in den Mathemat. Annalen, Bd. XXIII, S. 399.

Somit folgt:

Die Curven ψ und ϱ berühren sich in allen gemeinsamen Puncten, die Kreispuncte ausgenommen, in denen ψ einen doppelten, ϱ einen dreifachen Punct hat.

In den entsprechenden Puncten berühren sich die Curven R und Ψ vierpunctig; in den Doppelpuncten der Centrafläche endlich haben die beiden Zweige von Ψ mit den drei Zweigen von R eine gemeinsame Tangente.

Zweitens. Verhalten der Curve ϱ und der parabolischen Curve h von f. Die beiden Curven schneiden sich in $32\,n(n-2)(2n-3)$ Puncten, welche sich in folgender Weise vertheilen. Wenn $H = o$ ist, so ist entweder $\lambda = \infty$ oder $\lambda = -\frac{A}{B}$. Im ersten Falle muss wieder, da F verschwinden soll

$$\Sigma y_i y_k y_t f_{ikt} = o,$$

sein, wobei y die Richtung der parabolischen Tangente von f bedeutet. Es führt das auf die $2(n-2)(11n-24)$ Puncte, in denen die parabolische Tangente von f zugleich vierpunctige Tangente ist. Im anderen Falle wird F' von der Ordnung $13n-17$, falls $H = o$ gesetzt und der zuvor angegebene Werth von λ eingetragen wird. Von den so entstehenden $4n(n-2)(13n-17)$ Puncten sind aber diejenigen zu entfernen, welche demselben Werthe von λ in dem Schnittpunctsysteme $H = o$, $\Pi = o$ entsprechen. Die Zahl derselben beträgt, wie man leicht durch Betrachtung von 7) findet, $2n(n-2)(5n-6)$. — Endlich gehören zu dem Schnittpunctsysteme von h und ϱ noch die Puncte $f = o$, $H = o$, $X = o$, wie die Betrachtung von S (14) unmittelbar lehrt. In der That ist nun

$$32\,n(n-2)(2n-3) = 2\,n(n-2)[11n-24+26n-34-5n+6+4].$$

In den $2n(n-2)(11n-24)$ „Asymptotenpuncten“ von f berührt[1]) nun bekanntlich h gleichzeitig die parabolische Tangente, d. h. die Richtung einer Krümmungslinie, für welche das Krümmungs-

1) Vgl. Salmon-Fiedler. An. Geometrie, Theil II, S. 632; die Bezeichnung dieser Puncte als Asymptotenpuncte ist ursprünglich nur bei der Fläche dritter Ordnung üblich.

centrum einen Punct der Rückkehrcurve der Centrafläche bildet. Auch in den Puncten $X = o$, $f = o$, $H = o$ giebt die Richtung der parabolischen Tangente Veranlassung zum Rückkehrpunct der Centrafläche, aber die Curve h berührt diese Richtung nicht. Somit folgt:

Die Curve H auf der Centrafläche, welche der parabolischen Curve h auf f entspricht, begegnet der Rückkehrcurve R in $2n(n-2)(11n-24)$ Puncten mit Spitzen und berührt sie in $8n(n-2)$ weiteren Puncten, sie ist daher von der Ordnung $4n(n-1)(n-2)$, vom Geschlechte $2n(n-2)(5n-12)+1$ und vom Range $2n(n-2)(3n-4)$.[1])

Dass die Asymptotenpuncte von f in Bezug auf jede Fläche zweiten Grades einen Punct von R bedingen, erklärt sich leicht aus dem Umstande, dass in ihnen drei consecutive Tangentenebenen von f zusammenfallen, deren gemeinsamer Pol den Punct von R bildet. Nicht so unmittelbar ersichtlich scheint es, dass auch die Puncte $f = o$, $X = o$, $H = o$ sich ähnlich verhalten; es soll dies durch eine directe Untersuchung bestätigt werden.

Wählt man einen solchen Punct zur Ecke $x_1 = x_2 = x_3 = o$, seine Tangentenebene zur Seite $x_1 = o$, seine parabolische Tangente zur Kante $x_1 = x_2 = o$ des Coordinatentetraeders, so kann man die Gleichung der Fläche zweiten Grades in der Form

$$a x_1^2 + b x_2^2 + 2 x_3 x_4 = o$$

annehmen; die Kante $x_1 = o$, $x_3 = o$ ist Tangente der anderen Krümmungslinie. Die Gleichung der Fläche f ist

$$f = x_4^{n-1} x_1 + x_4^{n-2}(x_2^2 + x_1 c_x) + x_4^{n-3}\varphi + x_4^{n-4}\psi + \ldots;$$

die Coordinaten des Poles y einer Tangentenebene sind gegeben durch

$$\begin{aligned} f_1 &= a y_1, \\ f_2 &= b y_2, \\ f_3 &= y_4, \\ f_4 &= y_3; \end{aligned}$$

1) Diese Zahlen gibt auch Salmon, An. Geometrie, Theil II, S. 648.

und der Ecke $x_1 = x_2 = x_3$ entspricht das zur parabolischen Tangente gehörige Krümmungscentrum $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Sollen durch diesen Punct überhaupt Strahlen des Systems gehen, so ist zu setzen

$$\begin{aligned} P_1 &= b\, x_2\, f_4 - x_3\, f_2 = 0, \\ P_2 &= b\, x_2\, f_3 - x_4\, f_2 = 0, \\ P_3 &= x_3\, f_3 - x_4\, f_4 = 0, \end{aligned}$$

oder für $x_4 = 1$

$$\begin{aligned} P_1 &= b\, x_2\, [x_2^2 + c_x\, x_1 + 2\,\varphi + 3\,\psi \ldots] + x_3\, [2\, x_2 + x_1\, c_2 + \varphi_2 + \psi_2 \ldots] = 0, \\ P_2 &= b\, x_2\, [x_1\, c_3 + \varphi_3 + \psi_3 + \ldots] \quad - \quad [2\, x_2 + x_1\, c_2 + \varphi_2 + \psi_2 \ldots] = 0, \\ P_3 &= x_3\, [x_1\, c_3 + \varphi_3 + \psi_3 + \ldots] \quad + \quad [x_2^2 + c_x\, x_1 + 2\,\varphi + 3\,\psi \ldots] \quad = 0. \end{aligned}$$

Die Fläche P_1 schneidet f in einer Curve mit Doppelpunct, dessen Tangentenrichtungen $x_1 = x_3 = 0$ und $x_1 = x_2 = 0$ wird. Setzt man für den letzteren Zweig der Schnittcurve die Entwickelung

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1\, x_3^3 + p_2\, x_3^4 + \ldots, \\ x_2 &= q_1\, x_3^2 + q_2\, x_3^3 + \ldots, \end{aligned}$$

voraus, so wird $p_1 + \varphi_{333} = 0$, $2\, q_1 + 3\, \varphi_{332} = 0$, wo φ_{333}, φ_{332} die Coefficienten von x_3^3, $x_3^2\, x_2$ in der Form φ bedeuten. Dieselbe Entwickelung ergiebt sich aber auch für die Schnittcurve von P_2 und f, während die Schnittcurve von P_3 und f zur Spitzentangente die parabolische Tangente hat. Es gehen mithin durch die Ecke $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ drei unendlich nahe Normalen, wie zu zeigen war.

Drittens. Die $16\,n(2\,n - 3)$ Schnittpuncte von ϱ mit der algebraischen Krümmungslinie $X = 0$, $f = 0$, vertheilen sich in folgender Weise. Die Puncte $H = 0$, $X = 0$, $f = 0$, sind wie vorhin gezeigt, Puncte von ϱ, aber die der Krümmungslinie von f auf der Centrafläche entsprechende „geodätische" Linie geht hier nicht durch einen Punct der Rückkehrcurve. Ferner gehören zu diesen Puncten nach 16) doppeltzählend die Puncte $X = 0$, $B = 0$; die geodätische Curve berührt hier die Rückkehrcurve R vierpunctig. Endlich hat man den Fall $\lambda = -\frac{A}{B}$ zu berücksichtigen. Für denselben wird F' nach Entfernung des Factors B von der Ordnung $10\,n - 13$, so dass $n\,(20\,n - 26)$ Puncte dieser Art vorhanden sind. Aber der Ausdruck $\Sigma(a_i\, \zeta_i)$ (7), welcher in

F' als Factor enthalten ist, liefert $n(8n-10)$ Puncte, welche zu entfernen sind. In der That wird nun

$$16n(2n-3) = 8n(n-2) + 2n(6n-8) + n(12n-16).$$

Somit folgt

Die der algebraischen Krümmungslinie $X = o$, $f = o$ entsprechende geodätische Curve auf der Centrafläche berührt die Rückkehrcurve R in den $n(6n-8)$ Puncten, wo R und Ψ sich berühren, und ausserdem noch in $4n(3n-4)$ weiteren Puncten. In Uebereinstimmung damit steht es, dass diese Curve von der Ordnung $6n(n-1)$, vom Range $2n(7n-8)$, vom Geschlechte $n(n-2)+1$ ist und keine Spitzen enthält.

Viertens. Die Schnittpuncte von ϱ mit der algebraischen Krümmungslinie $f = o$, $A = o$ bestehen aus den $2n(n-1)(3n-4)$ doppeltzählenden Puncten $B = o$, $A = o$, $f = o$ und aus $2n(n-1)(13n-18)$ weiteren; nur die ersteren sind solche, in denen die entsprechende Curve auf der Centrafläche, welche hier mit der Curve $f = o$, $A = o$ selbst zusammenfällt, die Rückkehrcurve berührt.

Fünftens. Bestimmung der Classe der Rückkehrtangentenebenen der Centrafläche.

Soll die Tangentenebene der Centrafläche in einem Puncte ihrer Rückkehrcurve durch einen Punct a gehen, so hat man mit der Gleichung

$$\Sigma \zeta_i a_i = o$$

oder $\Pi = o$ die Gleichung $F = o$ zu verbinden, in der λ durch den Werth

$$\lambda = -\frac{\Sigma a_i \zeta_k f_{ik}}{\Sigma a_i f_i},$$

ersetzt ist, so dass

$$17) \qquad F = 3\,\Sigma a_i \zeta_k f_{ik}\, \Sigma f_i f_k f_{ik} - \Sigma a_i f_i\, \Sigma \zeta_i \zeta_k \zeta_t f_{ikt} = o,$$

wird; die Verhältnisse der ζ_i sind dabei aus den Unterdeterminanten der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} x_i \\ a_i \\ f_i \end{matrix} \right\| .$$

zu entnehmen. So erhält man, den Gleichungen

$$f = o, \ \Pi = o, \ F = o,$$

entsprechend $4n(n-1)(5n-4)$ Lösungen; von diesen sind die den doppelten resp. dreifachen Puncten von Π und F entsprechenden $6n(n^2-n+1)$ zu entfernen. Ferner sind die $2n(n-1)^2$ Puncte zu entfernen, für die

$$f = o, \ \Sigma a_i f_i, \ \Sigma a_i \zeta_k f_{ik} = o,$$

wird. Endlich werden für die $2n$ Puncte, in denen

$$f = o, \ X = o, \ a_x = o,$$

die ζ_i den x_i proportional. Es verschwindet dann (6) auch Π; von dem Ausdrucke F aber lässt sich zeigen, dass

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \mu f_i,$$

wird. Entfernt man demnach diese Puncte doppelt zählend, so ergiebt sich als Classe der Rückkehrtangentenebenen[1])

$$\begin{aligned}\sigma &= 4n(n-1)(5n-4) - 6n(n^2-n+1) - 2n(n-1)^2 - 4n \\ &= 2n(n-2)(6n-1).\end{aligned}$$

In der That wird für $\zeta_i = x_i$, wenn verschwindende Terme fortgelassen werden, aus 17)

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_m} &= 6\,\Sigma a_i \zeta_k f_{ik}\, \Sigma \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_m} \zeta_k f_{ik} + 3\,\Sigma a_i \zeta_k f_{ik}\, \Sigma \zeta_i \zeta_k f_{ikm} \\ &\quad - 3\,\Sigma a_i f_i\, \Sigma \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_m} \zeta_k \zeta_t f_{ikt} - \Sigma a_i f_i\, \Sigma \zeta_i \zeta_k \zeta_t f_{iktm} \\ &= \Sigma a_i f_i \left\{ 3n(n-1)\, \Sigma f_i \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_m} - (n-1)(n-2)(n+6) f_m \right\}.\end{aligned}$$

Aus der Gleichung

$$\Sigma \zeta_i f_i = o,$$

aber folgt

---

1) Für $n = 2$ wird diese Zahl gleich Null; vgl. § VIII.

$$\Sigma \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_m} f_i + \Sigma \zeta_i f_{im} = o,$$

oder für $\zeta_i = x_i$

$$\Sigma \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_m} f_i = -(n-1) f_m;$$

womit gezeigt ist, dass die Fläche 17) in den $2n$ Puncten $X = o$, $f = o$, $a_x = o$ die Fläche f berührt.

Sechstens. Das Geschlecht der Rückkehrcurve R. Die Curve ϱ kann, da sie eindeutig auf R bezogen ist, dazu dienen das Geschlecht von R und damit eine weitere für die Theorie der Centrafläche wichtige Zahl zu bestimmen.

Man sieht unmittelbar, dass die Spitzen von R, deren Entstehung früher besprochen wurde, bei der Abbildung ϱ sich auflösen. Demnach entsprechen nur den singulären Puncten von R in den Doppelpuncten der Centrafläche wieder singuläre, nämlich dreifache Puncte von ϱ, deren Tangentenrichtungen nicht zusammenfallen. Andererseits wird ϱ eine gewisse Zahl von Doppelpuncten enthalten, denen auf R keine solchen entsprechen, nämlich an allen Stellen, wo beide auf einer Normalen befindlichen Puncte der Centrafläche der Rückkehrcurve angehören. Spitzen sind auf ϱ nicht vorhanden; sie könnten nur dadurch entstehen, dass jene beiden Puncte zusammenfallen; die Puncte von R, wo ein Zusammenfallen überhaupt stattfindet, sind oben untersucht und geben zu Spitzen noch nicht Veranlassung.

Die Zahl der Doppelpuncte von ϱ lässt sich nun aber, wie folgt, bestimmen. Man betrachte die Gleichungen

$$\Delta = o, \quad F = o.$$

Sind dieselben für beide Wurzeln von Δ gleichzeitig erfüllt, so sind beide Puncte der Centrafläche Puncte von R. Die Bedingungen aber, unter denen zwei Gleichungen ein Paar gemeinsamer Wurzeln haben, sind bekannt. Sind nämlich in den beiden Gleichungen

$$a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + \ldots \quad = o,$$
$$a_0' t^{m'} + a_1' t^{m'-1} + \ldots = o,$$

die a_0, a_0' von den Graden μ, μ', die a_k, a_k' von den Geraden $\mu + k\alpha$,

$\mu' + k\alpha$ in den Coordinaten x_i, so wird nach Salmon[1]) für eine Curve Σ von der Ordnung

$$18)\quad W = \tfrac{1}{2} m (m-1) \mu'^2 + \tfrac{1}{2} m' (m'-1) \mu^2 + (m'-1)(m-1) \mu \mu' + \tfrac{1}{2} m (m-1)(2m'-1) \mu' \alpha + \tfrac{1}{2} m' (m'-1)(2m-1) \mu \alpha + \tfrac{1}{2} m m' (m'-1)(m-1) \alpha^2,$$

ein paar gemeinsamer Wurzeln auftreten. Legt man nun die Gleichung

$$\Delta = 0,$$

und die Gleichung dritten Grades

$$F' = 0,$$

zu Grunde, so entsprechen die Durchschnittspuncte der Curve Σ mit f:

Erstens, dem beregten Falle selbst, wo beide Puncte zu R gehören, d. h. den Doppelpuncten von ϱ;

Zweitens, dem Falle, wo ein Doppelpunct der Curve Π stattfindet. Denn man überzeugt sich leicht, dass die Form F' in diesem Falle den Factor Δ besitzt. In einem Doppelpuncte von Π ist nämlich

$$a_i = \varrho x_i + \sigma f_i,$$

und hieraus ergiebt sich

$$\zeta \Sigma a_m \zeta_m = \sigma \Delta - \frac{\lambda \varrho}{n-1} \Delta,$$

$$\zeta_t \Sigma \zeta_m a_m \equiv x_t \varrho \Delta,$$

woraus das Gesagte hervorgeht.

Drittens entstehen Doppelpuncte, wenn die Curven Π und ϱ sich so durchsetzen, dass der eine Punct der Centrafläche zu R, der andere zu der Π entsprechenden Curve gehört. Nun schneidet Π die Curve ϱ in $32 n (2n-3)(n-1)$ Puncten. Von diesen sind aber diejenigen zu entfernen, für welche das zu Π gehörige Krümmungscentrum Rückkehrpunct der Centrafläche wird. Da Π die Curve ist, für welche die Tangentenebenen der Centrafläche in den entsprechenden Puncten durch den Punct a_i gehen, so ist die Zahl dieser abzurechnenden Puncte gleich der

---

1) Salmon-Fiedler An. Geometrie, Theil II, S. 594.

der Klasse der Rückkehrtangentenebenen. Entfernt man noch 3 fach zählend die Kreispuncte, so sind die übrigen

$$s = 32\,n\,(2\,n - 3)(n - 1) - 2\,n\,(n - 2)(6\,n - 1) - 3\,n\,(10\,n^2 - 28\,n + 24)$$

Durchschnittspuncte von der verlangten Beschaffenheit. Man erhält demnach

$$n\,w - 6\,n\,(n^2 - n + 1) - s$$

Puncte. Aber auch von diesen sind die Kreispuncte K noch zu entfernen. Denn in diesen erhalten alle Producte $\zeta_i\,\zeta_k$ den Factor $(\lambda - \lambda_0)$; demnach F' gleichzeitig mit $\varDelta$ den Factor $(\lambda - \lambda_0)^2$. Diese Puncte sind also für die Curve Σ singulär; ich nehme an, dass sie zweifach von der obigen Zahl in Abzug zu bringen sind.

Demnach ist die Zahl der Doppelpuncte des vollständigen Schnittes ϱ gleich

$$\tau = n\,w - 6\,n\,(n^2 - n + 1) - s - 2\,K;$$ [1])

in der Formel 18) für w sind dabei die speciellen Werthe

$$m = 2,\ \mu = 4\,n - 6,$$
$$m' = 3,\ \mu' = 7\,n - 11,$$
$$\alpha = -(n - 2)$$

zu benutzen. Endlich wird das Geschlecht von R

$$4\,n\,(2\,n - 3)(17\,n - 28) + 1 - 3\,K - \tau.$$

§ VI.

Ueber die projective Evolute einer algebraischen Curve.

Die Untersuchungen der vorigen § enthalten zugleich die Grundlage für eine wenigstens der Form nach neue Theorie der projectiven Evolute, (Quasi-Evolute nach Cayley), einer Curve n. Ordnung f, d. h. der Umhüllungscurve der Verbindungslinien ihrer Puncte x mit den Polen y ihrer Tangenten in Bezug auf einen Kegelschnitt; man kann auch hier zwei Arten von Evoluten unterscheiden, je nachdem der Kegelschnitt allgemein ist oder in ein Punctpaar degenerirt.

1) Für $n = 2$ wird $\tau = 12$; es sind dies die 12 „Scheitelpuncte" der Fläche zweiten Grades, für die in der That die angegebene Configuration eintritt.

Wird zur Untersuchung der Evolute erster Art der letztere in der Form

$$1) \qquad X = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = o,$$

vorausgesetzt, so erhält man als Punct der Evolute, welcher zu dem Puncte x_i auf f gehört,

$$2) \qquad z_i = x_i + \lambda f_i,$$

falls λ aus der linearen Gleichung

$$3) \qquad A - \lambda \frac{H X}{(n-1)^2} = o; \; A = \Sigma f_i^2,$$

bestimmt wird. Jedem Puncte x_i von f ist so ein Punct f_i der reciproken Polare n (n — 1). Ordnung, ferner ein Punct z_i der Evolute, endlich ein Punct ζ_i der Reciprokalcurve der Evolute in Bezug auf X zugeordnet. Letzterer ist bestimmt durch die Gleichungen

$$4) \qquad \begin{aligned} &\Sigma \zeta\, x_i = o, \\ &\Sigma \zeta_i f_i = o, \end{aligned}$$

so dass die ζ_i aus der Matrix

$$5) \qquad \left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{matrix} \right\|$$

zu entnehmen sind. Statt der Gleichungen 4) kann man analog den Gleichungen I 10), 11) auch die folgenden

$$6) \qquad \begin{aligned} &\zeta_i + \lambda \Sigma \zeta_k f_{ik} + \zeta f_i = o; \; i, k = 1, 2, 3; \\ &\Sigma \zeta_i x_i = o, \\ &\Sigma \zeta_i f_i = o, \\ &\xi_i + \lambda \Sigma \xi_k f_{ik} + \xi x_i = o, \\ &\Sigma \xi_i f_i = o, \\ &\Sigma \xi_i f_k f_{ik} = o, \end{aligned}$$

Zunächst hat man aus 2) und 3)

Die projective Evolute berührt die Curve f in den 2n(n — 1) Puncten A = o, f = o; sie berührt die reciproke Polare in den 2 n Puncten, welche zu X = o, f = o gehören; sie geht endlich durch die 3 n (n — 2) Spitzen dieser Curve, welche den Wendungspuncten H = o, f = o entsprechen.

Die Spitzen der Evolute sind auch hier bestimmt durch die Bedingung

$$7)\qquad F = 3\,\zeta\,\Sigma\,\zeta_i\,\zeta_k\,f_{ik} + \lambda\,\Sigma\,\zeta_i\,\zeta_k\,\zeta_t\,f_{ikt} = o$$

welche ganz wie in § V weiter behandelt werden kann. Aus den Gleichungen 6) folgt zunächst

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 1 + \lambda\,f_{ik} & f_i \\ f_k & o \end{vmatrix} = o,$$

welche Gleichung sich in den 3 Formen entwickeln lässt

$$8)\qquad \begin{aligned} &X\,\Sigma\,H_{ii} - \Sigma\,x_i\,x_k\,H_{ik} + (n-1)^2\,\lambda\,X\,H = o,\\ &A - \lambda\,(\Sigma\,f_i\,f_k\,f_{ik} - A\,\Sigma\,f_{ii}) = o,\\ &(n-1)^2\,A - \lambda\,X\,H = o, \end{aligned}$$

so dass vermöge $f = o$ die Identitäten bestehen

$$9)\qquad (n-1)^2\,(\Sigma\,f_i\,f_k\,f_{ik} - A\,\Sigma\,f_{ii}) = X\,H,\quad X\,\Sigma\,H_{ii} - \Sigma\,x_i\,x_k\,H_{ik} = -(n-1)^2\,A.$$

Aus der Betrachtung der Form

$$\begin{vmatrix} 1 + \lambda\,f_{ik} & f_i & a_i \\ f_k & o & o \\ a_k & o & o \end{vmatrix}$$

findet man ferner

$$10)\qquad \zeta_i\,\zeta_k \equiv A\,(i\,k) - f_i\,f_k - \lambda\,\frac{H\,x_i\,x_k}{(n-1)^2}$$

also

$$\begin{aligned} &\Sigma\,\zeta_i^2 \equiv A,\\ &\Sigma\,\zeta_i\,\zeta_k\,f_{ik} \equiv A\,\Sigma\,f_{ii} - \Sigma\,f_i\,f_k\,f_{ik} = -\frac{H\,X}{(n-1)^2},\\ &\Sigma\,\zeta_i\,\zeta_k\,\zeta_t\,f_{ikt} \equiv A\,\Sigma\,f_{iit}\,\zeta_t - \Sigma\,f_i\,f_k\,f_{ikt}\,\zeta_t. \end{aligned}$$

Setzt man endlich nach 6)

$$\lambda\,\Sigma\,\zeta_i\,f_k\,f_{ik} + \zeta\,A = o,$$

so nimmt die Gleichung $F = o$, wenn man die Verhältnisse der ζ_i aus 5) einsetzt, die Form an

$$3\,X\,H \begin{vmatrix} \Sigma\,f_k\,f_{ik} \\ x_i \\ f_i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A\,\Sigma\,f_{kki} - \Sigma\,f_k\,f_t\,f_{ikt} \\ x_i \\ f_i \end{vmatrix} = o.$$

Da nach 9) die zweite Determinante durch X theilbar ist, so wird

$$\frac{F}{X} = 0$$

eine Gleichung $6n - 9$. Ordnung, welche aus f die $3n(2n-3)$ Puncte ausschneidet, die zu Spitzen der Evolute gehören.

Setzt man in 7)

$$\zeta_i = \eta_i + \sigma x_i; \; \sigma = -\frac{\zeta}{(n-2)} \lambda,$$

so wird

$$F \equiv \Sigma \eta_i \eta_k \eta_t f_{ikt} = 0.$$

Da ferner

$$\xi_i = \zeta_i + \zeta \frac{x_i}{(n-1)} \lambda; \; x_i \equiv \eta_i - \zeta_i,$$

$$\eta_i = \zeta_i + \zeta \frac{x_i}{(n-2)} \lambda; \; \xi_i \equiv \eta_i + \frac{1}{n-2} \zeta_i,$$

so wird auch hier das Doppelverhältniss der Puncte $(\eta\, \zeta\, x\, \xi)$ gleich $-(n-2)$. Berücksichtigt man noch die ganz so wie früher abzuleitende Construction der Puncte ζ_i, ξ_i, so ergiebt sich insbesondere für die Curven dritter Ordnung der folgende Satz:

Wird die Tangente der Curve dritter Ordnung f im Puncte x_i durch die Polare von f_i in Bezug auf den Kegelschnitt X in ζ_i, durch die Polare von f_i in Bezug auf den Polarkegelschnitt von x_i in ξ_i geschnitten, und ist der Tangentialpunct η_i von x_i der vierte harmonische Punct zu ζ_i und x_i, ξ_i, so ist die Gerade (x_i, f_i) Rückkehrtangente der projectiven Evolute erster Art.

Ganz ähnliche Verhältnisse finden für die Evolute zweiter Art [1]) statt; es erscheint überflüssig, hierauf weiter einzugehen.

§ VII.

Die parabolische Curve der Centrafläche.

Die in § II, 10 entwickelte Form G, welche vom dritten Grade in λ ist, reducirt sich für $\psi_i = f_i$, wenn die ersten 4 Reihen mit den x_i multiplicirt von der letzten in geeigneter Weise subtrahirt werden, auf

1) Für die eigentliche Evolute findet sich die Form F gebildet bei Salmon-Fiedler, Theorie der höheren ebenen Curven S. 113.

$$\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^2 \frac{\lambda^2}{\zeta^2} \begin{vmatrix} \zeta f_{ik} + \lambda \Sigma \zeta_t f_{ikt} & \Sigma \zeta_s f_{is} \\ \Sigma \zeta_s f_{ks} & o \end{vmatrix}.$$

Man erhält hieraus leicht

$$1) \quad G \equiv -\lambda H \Sigma \zeta_k \zeta_i \zeta_t f_{ikt} + \Sigma \zeta_i \zeta_k f_{ik} (H \zeta + \lambda \Sigma \zeta_t H_{ik} f_{ikt}).$$

Die Bedingung $G = o$ lässt sich noch in einer anderen Form aufstellen, die bei manchen Betrachtungen bequemer ist. Eine parabolische Ebene der Centrafläche enthält drei unendlich benachbarte Normalen von f. Diese Configuration wird ausgedrückt durch die Gleichungen

$$2) \qquad \begin{aligned} d^2 x_i &= p x_i + q f_i + r d x_i, \\ d^2 y_i &= s x_i + t f_i + u d x_i. \end{aligned}$$

Setzt man in der zweiten Gleichung 2)

$$d^2 y_i = \Sigma f_{ikt} d x_t d x_k + \Sigma f_{ik} d^2 x_k,$$

und führt die Werthe der $d^2 x_k$ aus der ersten Gleichung 2) ein, so ergiebt sich durch Elimination der p, r, s, t, u die Bedingung

$$3) \qquad \begin{vmatrix} \Sigma f_{ikt} d x_t d x_k + q \Sigma f_k f_{ik} \\ x_i \\ f_i \\ d x_i \end{vmatrix} = o.$$

Aus den Gleichungen 2) folgt noch

$$\Sigma f_i d^2 x_i = -\Sigma f_{ik} d x_i d x_k = q A,$$

womit q bestimmt ist. Führt man in 3) an Stelle der $d x_i$ die Ausdrücke $\alpha x_i + \beta \zeta_i$ (vgl. § II, 1) ein, welche zur Wurzel λ von Δ gehören, so entsteht die Form

$$4) \qquad \begin{vmatrix} A \Sigma f_{ikt} \zeta_k \zeta_t - \Sigma f_{kt} \zeta_k \zeta_t \Sigma f_m f_{mi} \\ x_i \\ f_i \\ \zeta_i \end{vmatrix} = o.$$

Da nach § IV, 5)

$$\begin{aligned} \Sigma \zeta_i' x_i &= o, \\ \Sigma \zeta_i' f_i &= o, \\ \Sigma \zeta_i' \zeta_i &= o, \end{aligned}$$

falls man mit ζ_i' den der anderen Wurzel λ' von Δ zugehörigen Punct der Reciprokalfläche der Centrafläche bezeichnet, so kann die Bedingung 4) in der einfacheren Gestalt

$$5) \qquad \Gamma = A\,\Sigma\,\zeta'_t\,\zeta_k\,\zeta_i\,f_{ikt} - \Sigma\,f_{ik}\,\zeta_i\,\zeta_k\,\Sigma f_k\,f_{ik}\,\zeta'_i = 0$$

geschrieben werden. Die Uebereinstimmung der beiden Gleichungen $G = 0$, $\Gamma = 0$ erkennt man durch folgende Transformation.

Ersetzt man die Producte der $\zeta_i\,\zeta_k$ nach § V, 4) und setzt zugleich nach § V, 7)

$$\lambda'\,\Sigma\,f_k\,f_{ik}\,\zeta'_i + \zeta'\,A = 0,$$

sowie zur Abkürzung

$$A\,\Sigma\,f_{tii} - \Sigma\,f_i\,f_k\,f_{ikt} = p_t,$$

so wird

$$\frac{\lambda'\Gamma}{A} = \lambda'\,\Sigma\,p_t\,\zeta'_t - \frac{\lambda\,\lambda'\,X}{(n-1)^2}\,\Sigma\,H_{ik}\,f_{ikt}\,\zeta'_t + \zeta'\left(B - 2\,\frac{HX\lambda}{(n-1)^2}\right),$$

falls

$$6) \qquad \Sigma\,\zeta_i\,\zeta_k\,f_{ik} = B - 2\,\frac{HX\lambda}{(n-1)^2},$$

gesetzt wird. Da ferner

$$H\,\lambda\,\lambda'\,X = -A\,(n-1)^2,$$

$$A = -\left(B\,\lambda' - \lambda'^2\,\frac{HX}{(n-1)^2}\right),$$

$$B - 2\,\frac{HX\lambda'}{(n-1)^2} = -\left(B - 2\,\frac{HX\lambda}{(n-1)^2}\right),$$

ist, so wird

$$\frac{\lambda'\Gamma}{A} = \lambda'\,\Sigma\,p_t\,\zeta'_t - \frac{1}{H}\left(B\,\lambda' - \lambda'^2\,\frac{HX}{(n-1)^2}\right)\Sigma\,H_{ik}\,f_{ikt}\,\zeta_t - \zeta'\left(B - 2\,\frac{HX\lambda'}{(n-1)^2}\right)$$

$$= \lambda'\left(\Sigma\,p_t\,\zeta'_t - \frac{\lambda'\,X}{(n-1)^2}\,\Sigma\,H_{ik}\,f_{ikt}\,\zeta'_t\right)$$

$$- \frac{1}{H}\left(\lambda'\,\Sigma\,H_{ik}\,f_{ikt}\,\zeta'_t + \zeta'\,H\right)\left(B - 2\,\frac{\lambda'\,HX}{(n-1)^2}\right),$$

und dieser Ausdruck geht, wenn man wieder nach § V, 4) die Producte der $\zeta_i'\,\zeta_k'$ einführt, über in

$$\frac{\lambda'\Gamma}{A} = \lambda'\,\Sigma\,\zeta_i'\,\zeta_k'\,\zeta_t'\,f_{ikt} - \frac{1}{H}\,\Sigma\,\zeta_i'\,\zeta_k'\,f_{ik}\,(\lambda'\,\Sigma\,H_{ik}\,f_{ikt}\,\zeta_t' + \zeta'\,H).$$

Vertauscht man daher in G die Wurzel λ mit λ' und bezeichnet die so entstandene Form durch (G), so folgt die Identität

$$7)\qquad H\lambda'\Gamma = -A\,(G),$$

womit die Uebereinstimmung beider Bedingungen $\Gamma = o$, $(G) = o$ nachgewiesen ist. Jede derselben stellt also die Bedingung für das Auftreten parabolischer Ebenen nicht rein dar; die eine enthält, wie aus 7) hervorgeht, gewissermassen den Factor H, die andere den Factor A, und es scheint nicht möglich einfache Formen zu bilden, die von dieser Unvollkommenheit befreit sind.

Die Bedingung $\Gamma = o$ kann man, falls

$$\zeta_i' = \eta_i' + \sigma x_i;\ \sigma = -\frac{\zeta'}{(n-2)}\lambda',$$

gesetzt wird, in der Form

$$7\,a)\qquad \Sigma\,\eta_k'\,\zeta_k\,\zeta_i\,f_{ikt} = o,$$

schreiben. Setzt man noch

$$\zeta_i = \eta_i + \tau x_i,$$

so geht dieselbe, wegen

$$\Sigma\,\eta_i'\,\eta_k\,f_{ik} = o,\ \Sigma\,\eta_i'\,f_i = o,$$

über in

$$8)\qquad \Sigma\,\eta_t'\,\eta_i\,\eta_k\,f_{ikt} = o,$$

welche eine gewisse Analogie mit der Bedingung § V, 2) für die Rückkehrcurve zeigt; die Formen 7a) und 8) sind überhaupt mehrfacher geometrischer Deutungen fähig. Für die Fläche dritter Ordnung $f = o$ wird insbesondere aus 8)

$$\Sigma\,\eta_t'\,\frac{\partial f}{\partial \eta_t} = o.$$

Das heisst:

W e n n die T a n g e n t e n e b e n e der F l ä c h e d r i t t e r O r d n u n g in d e m j e n i g e n P u n c t e η, w o d i e s e l b e v o n d e r T a n g e n t e d e r e i n e n d u r c h e i n e n P u n c t x g e h e n d e n K r ü m m u n g s l i n i e g e t r o f f e n w i r d, d e n a u f d e r T a n g e n t e d e r a n d e r e n K r ü m m u n g s l i n i e l i e g e n d e n P u n c t η' (vgl. dessen Construction § V) e n t h ä l t, s o i s t die durch die Normale in x und den Punct η bestimmte Ebene eine parabolische Ebene der Centrafläche.

Bei der Bildung der Form

$$9)\qquad G' = G\,\Sigma\, a_i\,\zeta_i = o,$$

sollen dieselben Bezeichnungen, wie früher, für die Ausdrücke T, U (§ V, 11), 12)) beibehalten werden. Man erhält:

$$\Sigma f_{ikt}\,\zeta_t\,\zeta_m\,H_{ik}\,a_m = V + \frac{\lambda}{(n-1)^2}(U - 4(n-2)\,T\,H) - 4\,\lambda^2\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^2 H^2 a_x,$$

falls

$$10)\qquad V = A\,\Sigma\, a_t\,H_{ik}\,f_{ikt} - \Sigma\, a_i\,f_i\,\Sigma f_t\,f_{ikt}\,H_{ik},$$

zur Abkürzung gesetzt wird. Somit wird nach § V, 11 a), 11 b)

$$\begin{aligned} G' = {} & \left(B - 2\,\frac{\lambda\,H\,X}{(n-1)^2}\right)\Big[H\left(M + N\lambda + T\,\frac{\lambda^2}{n-1} + a_x\,\frac{H\,\lambda^3}{n-1}\right) \\ & \qquad + \lambda\,V + \frac{\lambda^2}{(n-1)^2}(U - 4(n-2)\,T\,H) - 4\,\lambda^2\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^2 H^2 a_x\Big] \\ & - H\left[2\,\lambda^4\,\frac{(n-2)}{(n-1)^4}\,H^2\,a_x\,X + \lambda^3\left(\frac{n-2}{(n-1)^2}\,H\,B\,a_x + \frac{X}{(n-1)^4}(4(n-2)\,T\,H - U)\right)\right] \\ & \qquad - \lambda^2\,b\,H - \lambda\,a\,H, \\ = {} & \lambda^4\,\varepsilon + \lambda^3\,\delta + \lambda^2\,\gamma + \lambda\,\beta + \alpha, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 2\,\frac{(2n-5)}{(n-1)^4}\,H^3\,X\,a_x, \\ \delta &= -\frac{(4n-9)}{(n-1)^2}\,B\,a_x\,H^2 - 2\,\frac{H^2\,X}{(n-1)^3}\,T - \frac{X\,H}{(n-1)^4}(U - 4(n-2)\,T\,H), \\ \gamma &= \frac{H\,B\,T}{n-1} - 2\,\frac{H\,X\,N}{(n-1)^2} + \frac{B}{(n-1)^2}(U - 4(n-2)\,T\,H) - 2\,\frac{H\,X\,V}{(n-1)^2} - b\,H, \\ \alpha &= B\,M\,H, \end{aligned}$$

ist. Führt man in G′ die Gleichung $\varDelta = o$ ein, so kann man, wie eine Vergleichung der Coefficienten δ und γ zeigt, G′ in die Form

$$11)\qquad G' = \lambda^3\,H^2(s\,B\,a_x + t\,T\,X) + \lambda^2\,H\,\gamma' + \lambda\,\beta' + B\,M\,H = o,$$

bringen, in der s und t numerische Coefficienten bedeuten. Ich benutze die Form G' zunächst, um die in § I bestimmte Ordnung der parabolischen Curve auf einem neuen Wege zu ermitteln. Setzt man

$$\lambda = -\frac{\alpha_x}{\alpha_f}, \quad \alpha_f = \Sigma \alpha_i f_i,$$

so wird G' von der Ordnung $(11n - 16)$. Von den $4n(n-1)(11n-16)$ Lösungen der Gleichungen

$$G' = o, \ f = o, \ \varDelta = o,$$

sind aber sechsfach zählend die von

$$\alpha_f = o, \ f = o, \ \alpha_x = o,$$

und doppeltzählend, wie aus der Form von G' hervorgeht, die von

$$H = o, \ f = o, \ \alpha_f = o,$$

zu entfernen. Subtrahirt man endlich noch den Rang der Centrafläche, so wird

$$4n(n-1)(11n-16) - 6n(n-1) - 8n(n-1)n - 2 - 6n(n-1)^2$$
$$= 6n(n-1)(5n-8),$$

wie bereits in § I angegeben wurde.

Die eindeutige Abbildung s der parabolischen Curve S der Centrafläche auf die Fläche f ist bestimmt durch die Resultante der Formen G' und $\varDelta$,

$$12) \qquad W = \begin{vmatrix} BHM & \beta' & H\gamma' & H^2\alpha' & o \\ o & BHM & \beta' & H\gamma' & H^2\alpha' \\ A & B & HX' & o & o \\ o & A & B & HX' & o \\ o & o & A & B & HX' \end{vmatrix}$$

in welcher

$$(n-1)^2 X' = -X,$$
$$\alpha' = sBa_x + tTX,$$

gesetzt ist. Entfernt man aus W den Factor H^2 und Π, so ergiebt sich:

Die parabolische Curve S der Centrafläche ist eindeutig bezogen auf eine Curve s von der Ordnung $8n(2n-3)$, welche der vollständige Schnitt von f mit einer Fläche von der

Ordnung $8(2n-3)$ ist. Beide Curven haben dreifache Puncte, welche den Kreispuncten von f entsprechen.

Eine weitere Betrachtung der Formen W, G′ zeigt: Die Curve s trifft die Curve ψ in $8n(6n-8)(2n-3)$ Puncten. Diese bestehen aus den sechsfach zählenden Kreispuncten, den doppeltzählenden Berührungspuncten vierpunctiger Tangenten von f, welche X berühren, und endlich aus den doppeltzählenden Puncten $A = o$, $B = o$, $f = o$; $X = o$, $B = o$, $f = o$.

Daher folgt:

Die Rückkehrcurve R und die parabolische Curve S der Centrafläche berühren sich in den genannten

$$4n(4n^2 - 13n + 6),$$

auch der Curve Ψ angehörigen Puncten vierpunctig.[1])

Ich untersuche noch die Durchschnittspuncte von s mit der parabolischen Curve h von f. Aus der Form W findet man zunächst, dass die Puncte $A = o$, $H = o$, $f = o$ einfachzählend hierher gehören; in der That wird auch G Null, wenn $H = o$, $\lambda = o$. Zur Bestimmung der übrigen Schnittpuncte ist die Form Γ geeigneter, da sie von dem Factor H befreit ist. Soll die Richtung der parabolischen Tangente y_i, welche durch die Gleichungen

$$13)\qquad \Sigma y_i f_{ik} = o, \; k = 1, 2, 3, 4;$$

bestimmt ist, mit der Normale eine parabolische Ebene der Centrafläche bilden, so ist in Γ $\zeta_i = y_i$ zu setzen, und man erhält aus 5)

$$14)\qquad \Sigma \zeta_i' H_{ik} f_{ikt} = \Sigma \zeta_i' \frac{\partial H}{\partial x_i} = o.$$

Dies liefert den folgenden Satz:

Die parabolische Tangente bildet mit der Normalen eine parabolische Ebene der Centrafläche, wenn die Richtung der anderen Krümmungslinie in diesem Puncte in die Tangente der parabolischen Curve fällt.

---

1) Es sind dies übrigens nicht die einzigen Puncte, welche jene Curven gemein haben; wie bekannt, findet in solchen im allgemeinen immer eine Berührung statt.

Es ist leicht, die Zahl dieser Puncte zu bestimmen. Denn aus den Gleichungen

$$\Sigma \zeta_i' x_i = o,\ \Sigma \zeta_i' y_i = o,\ \Sigma \zeta_i' f_i' = o,$$

entsteht an Stelle von 14)

$$\left| \begin{array}{c} \frac{\partial H}{\partial x_i} \\ x_i \\ f_i \\ y_i \end{array} \right| = o,$$

welche in den y_i lineare Gleichung in Verbindung mit den Gleichungen 13) eine Curve von der Ordnung

$$4(n-2)(5n-9) + 6(n-2)^2$$

liefert, welche f in den gesuchten

$$2n(n-2)(13n-24)$$

Puncten schneidet.

Soll dagegen die andere Krümmungslinienrichtung in einem parabolischen Puncte von f zu einer parabolischen Ebene der Centrafläche Veranlassung geben, so muss man zu der Gleichung 4) zurückkehren. Da jetzt

$$15)\qquad \Sigma \zeta_i x_i = o,\ \Sigma \zeta_i y_i = o,\ \Sigma \zeta_i f_i = o,$$

so wird

$$\Sigma (\zeta_i)^2 \equiv \left| \begin{array}{c} x_i \\ f_i \\ y_i \\ \zeta_i \end{array} \right|.$$

Multiplicirt man die Determinante 4) mit dieser letzteren Determinante, so sondert sich dieselbe als Factor wieder aus, und man erhält nach Abtrennung des Factors A die Bedingung

$$\Sigma y_i x_i \Sigma \zeta_i \zeta_k f_{ik} + X \Sigma y_i \zeta_t \zeta_k f_{ikt} = o.$$

Ersetzt man die ζ_i durch die ihnen entsprechenden Unterdeterminanten aus den Gleichungen 15), und die Producte $y_i y_k$ durch die Unterdeterminanten H_{ik}, so entsteht hieraus eine Gleichung von der Form

$$\Sigma y_i p_i = o,$$

in welcher die p_i die x_i in der $6n-7$. Ordnung enthalten; man erhält also in Verbindung mit 13) eine Curve der Ordnung $4(n-2)(6n-7) + 6(n-2)^2$, welche f in den gesuchten

$$10n(n-2)(3n-4)$$

Puncten schneidet. In der That ist nun

$$32(n-2)n(2n-3) = 8n(n-1)(n-2) + 10n(n-2)(3n-4) \\ + 2n(n-2)(13n-24)$$

so dass hiermit alle Schnittpuncte von s und h erschöpft sind.

Ich untersuche endlich die Klasse der parabolischen Ebenen der Centrafläche.

Soll die Tangentenebene in einem parabolischen Puncte durch den willkürlichen Punct a_i gehen, so hat man die Gleichungen

$$16) \quad \begin{aligned} &\Sigma \zeta_i x_i = o, \ \Sigma \zeta_i a_i = o, \ \Sigma \zeta_i f_i = o, \\ &\lambda \Sigma a_i f_{ik} \zeta_i + \zeta \Sigma a_i f_i = o, \end{aligned}$$

mit $G = o$ zu verbinden. Man hat also in

$$G \equiv - H \Sigma a_i f_i \Sigma \zeta_i \zeta_k \zeta_t f_{ikt} \\ + \Sigma \zeta_i \zeta_k f_{ik} [H \Sigma \zeta_i f_{ik} a_i - \Sigma a_i f_i \Sigma \zeta_t H_{ik} f_{ikt}] = o,$$

die Verhältnisse der ζ_i aus 16 zu substituiren. Dadurch wird G von der Ordnung $(9n-12)$ und man erhält aus den Gleichungen

$$G = o, \ \Pi = o, \ f = o,$$

$$12n(n-1)(3n-4) - 6n(n^2 - n + 1) - 2n(n-1)^2 - 4n$$

Lösungen. Aber von diesen sind noch diejenigen zu entfernen, welche den Gleichungen

$$H = o, \ \Sigma \zeta_i \zeta_k f_{ik} = o, \ \Pi = o,$$

gleichzeitig genügen. Die Zahl derselben lässt sich in folgender Weise bestimmen.

Multiplicirt man den Ausdruck $\Sigma \zeta_i \zeta_k f_{ik}$, welcher nach 16) die Form

$$P = - \begin{vmatrix} f_{ik} & f_i & x_i & a_i \\ f_k & o & o & o \\ x_k & o & o & o \\ a_k & o & o & o \end{vmatrix}$$

annimmt, mit dem Quadrate der nicht verschwindenden Determinante,

$$\begin{vmatrix} x_i \\ y_i \\ f_i \\ a_i \end{vmatrix},$$

in welcher die y_i durch die Gleichungen 13) bestimmt sind, so erhält P das Quadrat des Factors

$$\{\Sigma y_i x_i \Sigma a_i x_i - X \Sigma a_i y_i\}.$$

Denselben Factor weist aber auch die Form Π (§ V, 6) auf, wie man erkennt, wenn man Π mit derselben Determinante multiplicirt, welche letztere diesen Factor nicht besitzt, wie sich aus der Bildung ihres Quadrates ergiebt. Es verschwindet mithin P quadratisch, Π einfach, sobald dieser Factor verschwindet. Derselbe liefert mit den Gleichungen 13) eine Curve von der Ordnung

$$6(n-2)^2 + 8(n-2) = 2(n-2)(3n-2),$$

welche der Fläche f in den doppelt aus der obigen Zahl zu entfernenden Zahl von Puncten begegnet. Man erhält dann als Classe der parabolischen Ebenen

$$\begin{aligned} 12n(n-1)(3n-4) - 6n(n^2-n+1) - 2n(n-1)^2 - 4n \\ - 4n(n-2)(3n-2) = 2n(n-2)(8n-5), \end{aligned}$$

welche Zahl mit der in § I bestimmten übereinkommt. Trotzdem habe ich die soeben ausgeführte Betrachtung nicht übergehen wollen, da sie zugleich zur Bestätigung der im vorigen § ausgeführten Bestimmung der Classe der Rückkehrtangentialebenen der Centrafläche dient.

Endlich kann man auch die Anzahl der Doppelpuncte von s und damit das G e s c h l e c h t der p a r a b o l i s c h e n C u r v e S bestimmen. Ich gehe hierauf, sowie auf andere Fragen, nicht mehr ein, da die Darlegung lediglich in einer Wiederholung der analogen Betrachtungen des § V bestehen würde.

§ VIII.

Die Centrafläche der Fläche zweiten Grades.

Obwohl die projective Centrafläche der Flächen zweiten Grades schon ausführlich behandelt ist, wird es doch nicht unangemessen sein, diesen Fall in seinem Zusammenhange mit den allgemeinen Entwickelungen des letzten § zu besprechen, da dieselben auf ganz anderen Gesichtspuncten beruhen, wie z. B. die Untersuchungen von Clebsch über das Normalenproblem bei den Flächen zweiten Grades. Ueberdies finden bei den letzteren in Folge ihrer geradlinigen Erzeugung ganz besondere Verhältnisse statt.

Wird der Einfachheit halber f in der canonischen Form

$$1)\qquad f = \Sigma a_i x_i^2 = o$$

vorausgesetzt, so reduciren sich nach V, 1) und VI, 1) die beiden Formen F und G gleichzeitig auf ein und dieselbe Form

$$F = G = \Omega \Sigma \zeta_i \zeta_k f_{ik} = o.$$

Die parabolische Curve der Centrafläche fällt hier also mit ihrer Rückkehrcurve zusammen.[1]) Ueberdies zerfällt diese Curve 24. Ordnung in 12 getrennte Theile, die also Kegelschnitte sein müssen. Denn die Determinante Ω liefert gleich Null gesetzt vier Werthe von λ, welchen die vier in dem Büschel $X + \lambda f = o$ enthaltenen Kegel zugehören; ein Theil des Bildes der Rückkehrcurve besteht also aus den Berührungscurven der von den Ecken des X und f gemeinsamen Polartetraeders an f gelegten Tangentenkegel (den vier Hauptschnitten von f); dem entsprechend besteht dieser Theil

1) Im allgemeinen wird die Hesse'sche Fläche eine Rückkehrcurve der Originalfläche zur vierfachen Curve haben, längs deren drei der Tangentialebenen mit der Rückkehrtangentenebene zusammenfallen, während die vierte von derselben verschieden ist. Die Rückkehrcurve zählt daher 11 fach als uneigentliche parabolische Curve. Sie ist daher als parabolische Curve zu betrachten, wenn die Hesse'sche Fläche die gegebene Fläche 12- oder mehrfach zählend längs derselben durchsetzt. Insbesondere tritt dies immer ein, wenn die Rückkehrcurve vom Character der Rückkehrkante einer Developpabelen ist, wie dies zuerst von Herrn Rohn analytisch erörtert ist (Ueber das Verhalten der Hesse'schen Fläche in vielfachen Puncten etc. Mathematische Annalen XXIII, S. 106).

der Rückkehrcurve aus vier Kegelschnitten. Der andere, durch das Verschwinden der Discriminante von Δ characterisirte Theil des Bildes der Rückkehrcurve[1]) fällt gleichzeitig mit der Curve ψ zusammen, für welche die beiden Krümmungshalbmesser gleich werden, und besteht aus den 8 Erzeugenden von f, welche X berühren.

Die Gleichung $\Delta = o$ wird nämlich

$$2) \qquad \Sigma \frac{a_i^2 x_i^2}{\lambda - a_i} = o.$$

Ihre Discriminante ist die Resultante von 2) und

$$3) \qquad \Sigma \frac{a_i^2 x_i^2}{(\lambda - a_i)^2} = o.$$

Nimmt man an Stelle der Gleichungen 1), 2), 3) die folgenden, welche sich durch einfache Combination derselben ergeben

$$4) \qquad \Sigma a_i x_i^2 = o,$$

$$\Sigma \frac{a_i x_i^2}{\lambda - a_i} = o,$$

$$\Sigma \frac{a_i x_i^2}{(\lambda - a_i)^2} = o,$$

so erhält man als Bild des eben bezeichneten Theiles der Rückkehrcurve die 8 Geraden mit dem Parameter λ

$$\begin{aligned} & a_1 x_1^2 : a_2 x_2^2 : a_3 x_3^2 : a_4 x_4^2 = \\ & (\lambda - a_1)^2 (a_2 - a_3)(a_3 - a_4)(a_4 - a_2) \\ & :(\lambda - a_2)^2 (a_1 - a_3)(a_3 - a_4)(a_4 - a_1) \\ & :(\lambda - a_3)^2 (a_2 - a_1)(a_1 - a_4)(a_4 - a_2) \\ & :(\lambda - a_4)^2 (a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1), \end{aligned}$$

welche zu je zweien sich in je einem der 16 in den Hauptschnitten

---

1) In den Arbeiten von Clebsch und Herrn Caspary über diesen Gegenstand werden diese 8 Kegelschnitte nur als osculierende der Fläche bezeichnet; bei Salmon-Fiedler, An. Geometrie Theil II, S. 342, findet sich die richtige Darstellung. Es ist nicht uninteressant zu vergleichen, wie der verschiedene Character der Rückkehrcurven erster und zweiter Art sich in der Betrachtung dieses § und in der analytischen Untersuchung von Clebsch darstellt.

liegenden Kreispuncten begegnen. Die Hauptschnitte sind überdies dadurch characterisirt, dass die Gleichung der Fläche

$$\Theta = \begin{vmatrix} x_i \\ a_i x_i \\ a_i^2 x_i \\ a_i^3 x_i \end{vmatrix} = o$$

sich hier auf $x_1\ x_2\ x_3\ x_4 = o$ reducirt.

Bezeichnet man die 8 Rückkehrkegelschnitte, welche den Erzeugenden entsprechen als Rückkehrcurve erster Art, die 4 anderen als solche zweiter Art, so hat man noch:

Einem beliebigen ebenen Schnitte der Fläche zweiten Grades entspricht auf ihrer Centrafläche eine Curve 8. Ordnung vom Geschlechte 3, welche jede der Rückkehrcurven erster Art in einem, jede der Rückkehrcurven zweiter Art in zwei Puncten berührt. Einer Erzeugenden der Fläche entsprechen daher Curven vierter Ordnung vom Geschlechte 1, jede derselben berührt vier der Rückkehrcurven erster Art, sowie die von der zweiten Art in je einem Puncte. Die Centrafläche kann demnach auf zwei verschiedene Arten durch solche Curven erzeugt werden, deren Umhüllungscurven ihre Rückkehrcurve bilden; doch ist hier nicht der Ort, um auf diese Erzeugung näher einzugehen.

§ IX.

Die projective Centrafläche zweiter Art.

Man kann die Centrafläche zweiter Art als einen Grenzfall der Centrafläche erster Art ansehen,[1]) und ich werde mich daher auf wenige Bemerkungen beschränken. Wird als „absolutes Gebilde" der Kegelschnitt betrachtet, welcher durch die „absolute" oder „unendlich ferne" Ebene

$$1) \qquad a_x = o,$$

aus der Fläche zweiten Grades $X = o$ ausgeschnitten wird, so hat man

1) Wollte man dies auch in der analytischen Darstellung zum Ausdruck bringen, so wäre von einer Fläche n. Classe f auszugehen

unter der Normale der Fläche diejenige Gerade zu verstehen, welche den Fusspunct x mit dem in $a_x = o$ gelegenen Puncte

$$2)\qquad \psi_i = y_i = a_i\,\psi - C\,f_i,$$

verbindet, wo

$$3)\qquad \begin{aligned}\psi &= \Sigma\, a_i\, f_i,\\ C &= \Sigma\, a_i^2,\end{aligned}$$

gesetzt ist. C verschwindet nicht, falls nicht eine speciellere Massbestimmung vorausgesetzt ist, bei welcher der absolute Kegelschnitt in ein Linienpaar degenerirt, wovon hier abgesehen wird.

Da

$$\psi_{ik} = a_i\,\Sigma\, a_s\, f_{sk} - C\,f_{ik},$$

so wird die Gleichung $\varDelta = o$ nach § I die Form annehmen

$$4)\qquad \varDelta = A\,C - \psi^2 + \lambda\,C\,B - \frac{\lambda^2\,C^2}{(n-1)^2}\,a_x^2\,H = o,$$

wo

$$5)\qquad B = (\psi^2 - A\,C)\,\Sigma f_{ii} + A\,\Sigma\, a_i\, a_k\, f_{ik} - 2\,\psi\,\Sigma\, f_i\, a_k\, f_{ik} + C\,\Sigma\, f_i\, f_k\, f_{ik},$$

und der zugehörige Punct der Centrafläche durch

$$6)\qquad z_i = x_i + \lambda\,\psi_i,$$

gegeben ist.

Die Bestimmung der Grössen ζ_i, ξ_i, (§ I, 10), 11)) kann man auf die einer Grösse y_i zurückführen, welche den Gleichungen

$$7)\qquad \begin{aligned} y_i - C\,\lambda\,\Sigma f_{ki}\, y_k + \sigma\, f_i + \tau\, a_i &= o,\\ \Sigma\, a_i\, y_i &= o,\\ \Sigma\, f_i\, y_i &= o,\\ \Sigma\, y_i\, x_i + \tau\,\Sigma\, a_i\, x_i &= o,\end{aligned}$$

genügt. Setzt man nämlich

$$8)\qquad \begin{aligned}\zeta_i &= y_i + \tau\, a_i,\\ \xi_i &= y_i - \frac{\sigma\, x_i}{(n-1)\,\lambda\, C},\end{aligned}$$

so wird

$$\zeta_k + \lambda\,\Sigma\,\zeta_i\,\psi_{ik} + \sigma\, f_k = o;$$

also wird die früher mit ζ bezeichnete Grösse

$$\zeta = \sigma,$$

und ebenso ergiebt sich aus den vermöge 7), 8) bestehenden Gleichungen

$$\xi_k + \lambda \Sigma \xi_t \psi_{kt} + \frac{\sigma x_k}{(n-1) C \lambda} = o,$$

$$\xi = \frac{\sigma}{(n-1) C \lambda}.$$

Die aus 7) zur Bestimmung von λ sich ergebende Determinantengleichung

$$9) \quad \begin{vmatrix} 1 - \lambda C f_{ik} & f_i & a_i \\ f_k & o & o \\ a_k & o & o \end{vmatrix} = o,$$

liefert entwickelt wieder die Gleichung 4).

Die geometrische Bedeutung der Gleichungen 7), 8) ist folgende. Die Puncte ζ bilden bekanntlich die reciproke Fläche der Centrafläche, während a_i der Pol der Ebene a_x in Bezug auf X ist. Die (in $a_x = o$ gelegenen) Puncte y entstehen demnach durch Projection der Reciprokalfläche der Centrafläche auf die unendlich ferne Ebene vom Puncte a_i aus. Da der Pol a_i selbst ein n (n — 1) facher Punct jener letzteren Fläche ist, so entspricht also der Gleichung

$$\Sigma p_i y_i = o,$$

ein ebener Schnitt dieser Reciproken, welcher einen n (n — 1) fachen Punct in a_i hat.

Vermöge y_i drückt sich nun die Bedingung § II für diejenigen Puncte auf f, welche zu Rückkehrpuncten der Centrafläche gehören, aus durch die Gleichung

$$10) \qquad F = -\lambda C \Sigma y_i y_k y_t f_{ikt} + 3 \sigma \Sigma y_i y_k f_{ik} = o,$$

welche sich für

$$y_i = \eta_i + \frac{\sigma x_i}{(n-2) \lambda C},$$

reducirt auf

$$\Sigma \eta_i \eta_k \eta_t f_{ikt} = o,$$

und ebenso ergiebt sich für die Bedingung der parabolischen Puncte aus § II

$$11)\qquad G = H C \lambda \Sigma y_i y_k y_t f_{ikt} + \Sigma y_i y_k f_{ik} (\sigma H - \lambda C \Sigma y_t H_{ik} f_{ikt}) = o,$$

so dass die mit F und G bezeichneten Formen sich ungeändert erhalten.

Der Schnitt der Centrafläche mit der Ebene $a_x = o$ besteht bekanntlich — was übrigens unmittelbar aus 6) folgt — aus einer Curve $n(n-1)$. Ordnung, welche gleichzeitig Rückkehr- und parabolische Curve derselben ist, und von der reciproken Curve von $f = o$, $a_x = o$ in Bezug auf den absoluten Kegelschnitt (imaginärer Kreis) gebildet wird; die Coordinaten derselben sind

$$z_i = a_i \psi - f_i C \text{ für } a_x = o,\ f = o;$$

ferner aus einer Curve $3n(n-1)$. Ordnung

$$z_i = x_i + \lambda [a_i \psi - f_i C],$$

wo λ aus $\varDelta = o$ für $a_x = o$ zu entnehmen ist, nämlich der **projectiven Evolute** des Schnittes von f mit $a_x = o$; endlich aus der Curve $4n(n-1)(n-2)$. Ordnung

$$y_i = a_i \psi - f_i C,\ f = o,\ H = o,$$

welche der parabolischen Curve auf f entspricht.[1])

Der übrige Theil der Rückkehrcurve ist also eine Curve der Ordnung

$$11\, n (n-1)(2n-3)$$

welche eindeutig bezogen ist auf eine Curve $n(16n-25)$. Ordnung, die selbst der vollständige Schnitt einer Fläche $16n-25$. Ordnung mit f ist. Und ebenso ist der übrige Theil der parabolischen Curve von der Ordnung $n(n-1)(30n-49)$; die eindeutige Abbildung desselben von derselben Ordnung wie die der Rückkehrcurve.

Ueberhaupt werden, wie man sieht, alle Resultate der früheren Untersuchungen mit Hülfe der eingeführten Coordinaten y sich auf den vorliegenden Fall übertragen lassen. Im Folgenden sollen nur noch einige Verhältnisse erörtert werden, welche für die Centraflächen zweiter Art charakteristisch sind.

---

1) Das gegenwärtige für die Singularitäten des unendlich fernen Schnittes der Centrafläche wichtige Verhalten dieser Curven ist durch den Satz in § VI ausgesprochen.

Bezeichnet man die Gleichung 4) durch

$$4\,a)\qquad \alpha + \beta\,\lambda + \gamma\,\lambda^2 = 0,$$

so wird die Discriminante

$$\Psi = \beta^2 - 4\,\alpha\,\gamma = 0$$

diejenigen Puncte auf f bestimmen, deren eine Haupttangente den absoluten Kegelschnitt schneidet. In den Kreispuncten, deren Zahl $n\,[10\,n^2 - 28\,n + 22]$ ist, finden daher Doppelpuncte der mit Ψ, ψ bezeichneten Curven statt. Es sind dies aber nicht die einzigen Doppelpuncte von ψ, wie man bisher angenommen zu haben scheint.[1]) Der in § X, 6) gegebene Werth des Coefficienten $B\,C = \beta$ zeigt, dass die Fläche $\Psi = 0$ in den 2 n Puncten $x = 0$, $f = 0$, $a_x = 0$ ebenfalls Doppelpuncte besitzt, und dass zu diesen noch $3\,n\,(n-2)$ weitere hinzukommen, bestimmt durch die Gleichungen

$$a_x = 0,\; f = 0,\; \Sigma a_i\, a_k\, H_{ik} = 0,$$

d. h. durch diejenigen Puncte in der Curve $a_x = 0$, $f = 0$, für welche eine der Haupttangenten von f in die Ebene $a_x = 0$ fällt, d. h. die Wendepuncte derselben.

Das heisst:

Der Ort derjenigen Puncte, denen untereinander gleiche Werthe der Hauptkrümmungshalbmesser zugehören, ist eine Curve der Ordnung $n\,(6\,n - 8)$, welche in den Kreispuncten, den Wendepuncten des unendlich fernen Schnittes und den Schnittpuncten desselben mit dem imaginären Kreise Doppelpuncte hat.

Die soeben erwähnten 2 n Schnittpuncte des imaginären Kreises mit f, welche ich als secundäre Kreispuncte von f bezeichne, spielen in Rücksicht auf das Normalenproblem völlig die Rolle der eigentlichen Kreispuncte. Denn der Kegel K, welcher die Richtungen der beiden Krümmungslinien auf der Tangentenebene von f ausschneidet, wird

---

1) Herr Fiedler scheint zuerst die in die Kreispuncte fallenden Doppelpuncte von ψ bemerkt zu haben. Salmon-Fiedler. A. Geometrie Theil II, S. XXIX der Literatur-Nachrichten.

$$12)\quad \begin{vmatrix} x_i \\ a_i\,\psi - f_i\,C \\ z_i \\ a_i\,\Sigma\, a_s\, f_{sk}\, z_k - C\,\Sigma\, f_{ik}\, z_k \end{vmatrix} = o;$$

seine Gleichung geht für $a_x = o$, $X = o$, über in

$$\Sigma\, a_i z_i\, \Sigma\, z_i f_i = o.$$

Auch für die secundären Kreispuncte existiren also unendlich viele benachbarte Normalen, welche die Normale in demselben Doppelpuncte der Centrafläche schneiden. Dementsprechend giebt es eine lineare Reihe von Werthen ζ_i, welche hier von der Form $a_i + \varrho\, x_i$ ist. Jedem der $2n$ secundären Kreispuncte γ der Fläche entspricht auf der reciproken Centrafläche eine Gerade mit constanter Tangentialebene, welche durch γ und den $n(n-1)$ fachen Punct dieser Fläche geht.

In den $3n(n-2)$ Wendepuncten des unendlich fernen Schnittes findet eine solche Besonderheit nicht statt; die beiden Krümmungslinien fallen hier in die Richtung der Wendetangente.

Bildet man zur Untersuchung der Rückkehrcurve wie in § V die Form

$$F' = F\,\Sigma\, p_i\, y_i,$$

so ist zunächst die Form $\Sigma\, p_i\, y_i$ selbst zu untersuchen. Man erhält

$$13)\quad (\Sigma\, p_i y_i)^2 = \Sigma\, A_{ik}\, p_i\, p_k + \frac{\lambda C}{(n-1)^2}\{L\, p_x^2 + M\, a_x^2 - 2\, a_x\, p_x\, N\},$$

wo

$$L = \Sigma\, a_i\, a_k\, H_{ik},$$
$$M = \Sigma\, p_i\, p_k\, H_{ik},$$
$$N = \Sigma\, a_i\, p_k\, H_{ik},$$

$$\Sigma\, A_{ik}\, p_i\, p_k = \begin{vmatrix} A & \psi & \Sigma\, p_i f_i \\ \psi & C & \Sigma\, p_i\, a_i \\ \Sigma p_i f_i & \Sigma p_i a_i & \Sigma p_i^2 \end{vmatrix},$$

gesetzt ist. Die Gleichung

$$\Sigma\, p_i\, y_i = o,$$

stellt, wie oben bemerkt, den ebenen Schnitt der Reciproken der Centrafläche vor, welcher durch den Pol a und den Schnitt der absoluten

Ebene mit der Ebene $p_x = o$ gelegt ist. Diese Curve ist eindeutig auf die aus den Puncten x gebildete Curve bezogen, die doppelt zählend aus der Elimination von λ aus 13) und $\varDelta = o$ hervorgeht, d. h. auf eine Curve von der Ordnung $n(4n-5)$, welche selbst der vollständige Schnitt einer Fläche Π'' $4n-5$. Ordnung mit f ist, deren Gleichung die Form

$$14)\qquad \Pi'' = \begin{vmatrix} \varphi \Sigma f_{ik} p_k + \chi \Sigma f_{ki} a_k + \omega \Sigma f_{ki} f_k & . \\ p_i & \\ a_i & \\ f_i & \end{vmatrix} = o,$$

hat, wenn man

$$\varphi = \psi^2 - A C,$$
$$\chi = A \Sigma a_i p_i - \psi \Sigma f_i p_i,$$
$$\omega = C \Sigma f_i p_i - \psi \Sigma a_i p_i,$$

gesetzt wird. Die Fläche Π'' geht durch die eigentlichen Kreispuncte von f; sie hat die Curve $(n-1)^2$ Ordnung, für welche die Unterdeterminanten der ersten Horizontalreihe von 14) sämmtlich verschwinden, zur Doppelcurve, wie eine nähere Untersuchung von 14) zeigt. Jene Curve ist also vom Geschlechte

$$15)\qquad p = \tfrac{1}{2} n(4n-5)(5n-9) + 1 - n(n-1)^2;$$

ihr entspricht eindeutig auf der Centrafläche eine Curve von der Ordnung $6n(n-1)^2 - n(n-1)$. Somit hat man:

Der von einem Puncte der absoluten Ebene an die Centrafläche gelegte Tangentenkegel ist im allgemeinen von der Ordnung $n(n-1)(6n-7)$ und vom Geschlechte p (15); seine Classe ist die der Centrafläche selbst.

Um die Form F (10) näher zu untersuchen, bilde man jetzt

$$F' = F \Sigma p_i y_i.$$

Man findet dann leicht aus 13) die Gleichungen

$$16)\qquad \begin{aligned} \Sigma A_{ik} f_{ik} &= -B, \\ \Sigma A_{tm} f_t &= o, \\ \Sigma A_{tm} a_t &= o, \\ \Sigma y_i y_k f_{ik} &= -\left(B - 2\frac{H \lambda C a_x^2}{(n-1)^2}\right). \end{aligned}$$

Ferner ergiebt sich

$$\sigma \Sigma p_i y_i = C \Sigma p_i f_i - \psi \Sigma a_i p_i + \frac{\lambda C}{n-1}(p_x U - a_x V - W)$$
$$+ \frac{\lambda^2 C^2}{(n-1)^2}(p_x L - a_x N),$$

wobei U, V, W Ausdrücke sind, deren Form für das folgende gleichgültig ist. Setzt man endlich

$$\begin{aligned} 3(C \Sigma p_i f_i - \psi \Sigma a_i p_i) &= r, \\ 3(p_x U - a_x V - W) &= s, \\ p_x L - a_x N &= t, \\ a_x^2 \Sigma f_{ikt} p_m (H_{ik} A_{tm} + H_{tm} A_{ik}) - a_x p_x \Sigma A_{ik} H_{ts} a_s f_{ikt} &= u, \\ \Sigma H_{ik} f_{ikt} (a_x H_{tm} p_m - p_x H_{ts} a_s) &= v, \\ \Sigma A_{ik} f_{ikt} A_{tm} p_m &= w, \\ \lambda C &= \mu, \end{aligned}$$

so wird mit Hülfe von 16)

$$F' = \left(r + \frac{\mu s}{n-1} + 3\frac{\mu^2 t}{n-1}\right)\left(B - 2\mu \frac{a_x^2 H}{(n-1)^2}\right)$$
$$+ \mu w + \frac{\mu^2}{(n-1)^2}(u - B(n-2)t) + \frac{\mu^3}{(n-1)^4}(4(n-2)Ht + a_x v) a_x^2$$
$$= \alpha' + \beta' \mu + \gamma' \mu^2 + \delta' a_x^2 \mu^3 = o;$$

wo

$$\begin{aligned} \alpha' &= r B, \\ (n-1)^2 \gamma' &= u + (2n-1) t B - 2 a_x^2 \frac{H s}{n-1}, \\ (n-1)^4 \delta' &= a_x v -- 2(n+1) H t; \end{aligned}$$

mittelst dieser Ausdrücke bestätigt man leicht, dass die Ordnung der nicht ebenen Rückkehrcurve gleich $11 n(n-1)(2n-3)$ wird, wie oben angegeben wurde. Die Resultante R aus $F' = o$ und $\Delta = \alpha + \mu B + \mu^2 a_x^2 \gamma = o$, $(n-1)^2 \gamma = - H$ lässt sich von dem Factor a_x^2 befreien und liefert, wenn man noch den Factor Π'' entfernt, eine Form $16n-25$. Ordnung, welche das Bild der Rückkehrcurve auf f ausschneidet.

Auf dem unendlich fernen Schnitte $a_x = o$, $f = o$ von f müssen sich daher $n(16n-25)$ Puncte befinden, welche zu Puncten der Rückkehrcurve gehören. Diese lassen sich leicht an der Form von R nachweisen.

Setzt man nämlich $a_x = o$, so haben die übrig bleibenden Terme von R die Form

$$R = HX^2L^3R_1,$$

aus welcher aber der Factor L einmal entfernt werden muss, da derselbe für $a_x = o$ auch in Π'' enthalten ist, wie aus der in 13) gegebenen Form dieses Ausdruckes hervorgeht, wenn man berücksichtigt, dass nach § X, 6) für $a_x = o$

$$B = XL$$

wird. Jene Puncte bestehen also aus den $4n(n-2)$ parabolischen Puncten von f in der Ebene $a_x = o$,[1]) aus den doppeltzählenden secundären Kreispuncten, in denen das Bild der Rückkehrcurve selbst Doppelpuncte hat, aus den doppeltzählenden Wendepuncten von $f = o$, $a_x = o$, und endlich aus den $3n(2n-3)$ Puncten dieses Schnittes, welche Spitzen der Evolute bedingen. In der That ist dann auch

$$n(16n - 25) = n\{4(n-2) + 6n - 9 + 4 + 6(n-2)\}.$$

In ähnlicher Weise lassen sich auch die $11n(n-1)(2n-3)$ Puncte der Rückkehrcurve, welche in den unendlich fernen Schnitt der Centrafläche fallen, nachweisen.

§ X.

Ueber eine Classe algebraischer Flächen, welche die projectiven Minimalflächen als speciellen Fall enthält.

Die beiden Wurzeln der Gleichung $\Delta = o$ sind im allgemeinen nicht rational getrennt.[2]) Die Centrafläche ist daher im allgemeinen ein einziges irreducibeles Gebilde. Einen besonderen Fall bilden diejenigen Flächen, für welche die Discriminante Ψ von Δ mit Hilfe von $f = o$ das Quadrat einer rationalen Function wird; die Centrafläche besteht dann aus zwei getrennten Theilen. Wenn jene Discriminante überall mit f

1) Das Auftreten dieser Puncte ist dem der Puncte $H = o$, $f = o$, $X = o$ bei der C. Fläche erster Art zu vergleichen. Vgl. § V.

2) Eine rationale Trennung der Wurzeln tritt ein für die beiden algebraischen Krümmungslinien, die parabolische Curve und den Hauptschnitt.

verschwindet, so fallen jene Theile zusammen. Es ist dies der Fall, wenn f eine Regelfläche ist, deren Erzeugende die Fläche X berühren (den absoluten Kegelschnitt schneiden); die Differentialgleichung dieser Flächen ist[1])

$$1) \qquad (n-1)^2 B^2 + 4 X H A = N f.$$

Für eine Fläche zweiten Grades, welche X längs eines Kegelschnittes berührt, d. h. eine projective Kugel, degenerirt die Centrafläche in einen einzigen Punct, den Pol der ebenen Berührungscurve.

Die Flächen, welche der zu 1) analogen Differentialgleichung

$$B^2 + k X H A = N f,$$

genügen, d. h. für die das Doppelverhältniss der Hauptkrümmungscentra zu dem Flächenpuncte und dem Pol seiner Tangentenebene in Bezug auf X constant ist, haben einige gemeinsame Eigenschaften, die ich im Folgenden darlegen werde.[2]) Solche Flächen mögen Flächen W heissen; ich betrachte zunächst die Flächen W erster Art.

Zu denselben gehören insbesondere die der Gleichung

$$B = N f$$

entsprechenden, d. h. die projectiven Minimalflächen erster Art, bei welchen jenes Doppelverhältniss in ein harmonisches übergeht.

Beachtet man die nach IV, 2), 3) vermöge $f = o$ bestehenden Identitäten

$$2) \qquad B = A \Sigma f_{ii} - \Sigma f_i f_k f_{ik},$$
$$(n-1)^2 B = \Sigma x_i x_k H_{ik} - X \Sigma H_{ii},$$

so folgt:

---

1) Sollen die Haupttangenten der einen Schaar von f, wie dies für $\Psi = o$ stattfinden muss, X berühren, so muss die Schmiegungsebene der betreffenden Haupttangentencurve auch Tangentenebene von X sein. Da nun die Schmiegungsebene einer Haupttangentencurve mit der Tangentenebene der Fläche zusammenfällt, so muss jede Tangentenebene von f zugleich eine solche von X sein. Die obige Bedingung kann daher nur so erfüllt werden, dass die Schmiegungsebene unbestimmt wird, d. h. dass jene Schaar aus geraden Linien besteht.

2) Noch allgemeiner könnte man Gleichungen von der Form

$$B = P X + N f$$

oder ähnlich gebildete untersuchen; die folgenden Resultate gelten zum Theil auch für diese.

Eine Fläche W erster Art — allgemeiner, eine Fläche bei der überhaupt B mit $f = o$, $X = o$ verschwindet — trifft die absolute Fläche (nach 2)) nur in denjenigen Puncten, wo

$$\Sigma x_i x_k H_{ik} = o.$$

Entweder sind nun alle H_{ik} gleich Null, d. h. der Punct ist ein Osculationspunct von W.[1]) Existirt eine ganze Curve solcher Puncte, so muss dieselbe, wie man leicht sieht, eben sein; sie kann dann als Schnitt von W und X nur in geraden Linien und Kegelschnitten bestehen, längs deren eine constante Tangentenebene osculiert. Schliesst man diesen Fall, sowie die Annahme singulärer Curven, aus, so ist der Punct

$$3) \qquad z_i = \Sigma x_i H_{ik}$$

ein völlig bestimmter, und die Gerade (z x) gleichzeitig Haupttangente von W und Tangente von X, wie aus den Gleichungen

$$4) \qquad \begin{aligned} \Sigma z_i f_{ik} &= H x_k, \quad \Sigma z_i z_k f_{ik} = H \Sigma x_i x_k H_{ik}, \\ \Sigma z_i x_i &= \Sigma H_{ik} x_i x_k, \\ (n-1) \Sigma z_i f_i &= H X, \\ \Sigma z_i f_k f_{ik} &= n f H, \end{aligned}$$

hervorgeht. Daraus folgt:

Der Schnitt einer Fläche W erster Art mit der absoluten Fläche ist gleichzeitig Krümmungslinie und Haupttangentencurve von W.

Diese Behauptung erleidet nur dann eine Ausnahme, wenn z mit x zusammenfällt. Nun ist z völlig durch die Gleichungen 4) bestimmt, falls nicht alle Determinanten der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} x_i \\ f_i \\ \Sigma f_{ik} f_k \end{matrix} \right\|$$

verschwinden. Im allgemeinen kann daher z nur dann wieder auf X liegen, wenn die Determinante

1) Vgl. Rohn, a. a. O. S. 102.

$$\begin{vmatrix} (ik) & x_i & f_i & \Sigma f_s f_{si} \\ x_k & o & o & o \\ f_k & o & o & o \\ \Sigma f_s f_{sk} & o & o & o \end{vmatrix}$$

verschwindet; d. h., wenn $A^3 = o$ ist. Ist aber dies der Fall, so haben die Gleichungen 4), da nach 2) auch

$$\Sigma f_i f_k f_{ik} = o$$

sein muss, die lineare Reihe von Lösungen

$$z_i = x_i t + f_i,$$

und es wird überhaupt

$$\nu \Sigma f_k f_{ki} + \varrho x_i + \sigma f_i = o.$$

Es ist also entweder $f_i \equiv x_i$; der Punct z fällt dann mit x zusammen, und die Fläche W berührt die Fläche X längs der betrachteten Schnittcurve, welche dann nicht Haupttangentencurve von W zu sein braucht.[1]) Oder es ist f_i von x_i wesentlich verschieden; die Gerade (z x) wird dann sowohl Haupttangente von W als auch Erzeugende von X. Somit folgt:

Wenn die Tangentenebenen von W längs der Puncte x ihrer Schnittcurve mit X die letztere Fläche in einem von x verschiedenen Puncte berühren, so besteht jene Schnittcurve aus lauter Erzeugenden von X.

Setzt man andererseits $A = o$, so ist nach 2)

$$\Sigma f_i f_k f_{ik} = o.$$

Das heisst

Für die Flächen W erster Art ist die Curve $f = o$, $A = o$ gleichzeitig Haupttangentencurve und Krümmungslinie.

Setzt man endlich $H = o$, so bestehen die Gleichungen

$$\Sigma y_i f_{ik} = o, \quad H_{ik} \equiv y_i y_k;$$

mithin wird aus 2)

$$X \Sigma y_i^2 - (\Sigma x_i y_i)^2 = o,$$

oder:

---

1) Dies ist z. B. der Fall bei den oben genannten Regelflächen.

Die parabolischen Tangenten der Flächen W erster Art berühren sämmtlich die Fläche X; die Developpabele der parabolischen Ebenen ist gleichzeitig der X umschrieben; Ausnahmen können wieder eintreten, wenn die H_{ik} längs einer Osculationscurve verschwinden etc.

Für die projectiven Centraflächen zweiter Art erhält man aus der Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 - \lambda C f_{ik} & f_i & a_i \\ f_k & o & o \\ a_k & o & o \end{vmatrix}$$

als Werth des Coefficienten B von λ C, wie bereits angegeben wurde,

$$5) \quad (\psi^2 - A\,C) \Sigma f_{ii} + C \Sigma f_i f_k f_{ik} + A \Sigma a_i a_k f_{ik} - 2\,\psi \Sigma a_i f_k f_{ik}.$$

Addirt man dagegen die mit den x_i multiplicirten ersten vier Reihen zu der fünften, so entsteht

$$\lambda^2 C^2 (n-1)^2 \Delta = \begin{vmatrix} 1 - \lambda C f_{ik} & x_i & a_i \\ x_k & X & a_x \\ a_k & a_x & o \end{vmatrix};$$

mithin wird der Werth jenes Coefficienten auch durch den folgenden Ausdruck dargestellt

$$6) \quad \frac{1}{(n-1)^2} \left[a_x^2 \Sigma H_{ii} + X \Sigma a_i a_k H_{ik} - 2\,a_x \Sigma a_i x_k H_{ik} \right].$$

Versteht man wieder unter einer Fläche W zweiter Art eine solche, bei der eine der obigen analoge Differentialgleichung besteht, so gehören zu denselben die projectiven Minimalflächen zweiter Art, sowie diejenigen Flächen, bei denen das Verhältniss der Hauptkrümmungshalbmesser constant ist.

Nun folgt aus 6), wenn B überhaupt mit $f = o$ und $a_x = o$ verschwindet:

$$X \Sigma a_i a_k H_{ik} = o,$$

das heisst, Eine Fläche W zweiter Art schneidet die unendlich ferne Ebene in einer Curve, die ausser dem absoluten Kegelschnitt nur aus einem Gebilde mit lauter Wendungspuncten, d. h. einer Anzahl von Geraden bestehen kann.[1])

Eine Ausnahme kann auch hier eintreten, wenn alle H_{ik} gleich Null werden, oder überhaupt höhere Singularitäten auf W entstehen.

Ist dagegen $H = o$, und verschwindet B mit $H = o$, $f = o$, so wird wegen $H_{ik} \equiv y_i y_k$ der Ausdruck 6) die Gleichung

$$a_x^2 \Sigma y_i{}^2 + X \Sigma y^2 - 2\, a_x a_y \Sigma x_i y_i = o$$

liefern, mit anderen Worten:

Die parabolischen Tangenten der Flächen W zweiter Art schneiden sämmtlich den absoluten Kegelschnitt; die Developpabele der parabolischen Ebenen ist diesem Kegelschnitte umschrieben.[2])

Verschwindet endlich B mit $f = o$ und

$$E = \psi^2 - C\,A = o,$$

so wird nach 5)

$$A\, \Sigma a_i\, a_s\, f_{si} - 2\, \psi\, \Sigma f_i\, a_k\, f_{ik} + C\, \Sigma f_i\, f_k\, f_{ik} = o.$$

Dies bedeutet aber, dass die Krümmungslinie, welche durch den Schnitt von $f = o$, $E = o$ dargestellt wird, zugleich Haupttangentencurve von f ist. Denn schreibt man die eben angegebene Gleichung vermöge $E = o$ in der Form

$$D = \psi^2\, \Sigma a_i\, a_s\, f_{si} - 2\, \psi\, C\, \Sigma f_i\, a_k\, f_{ik} + C^2\, \Sigma f_i\, f_k\, f_{ik} = o$$

und setzt

$$z_i = a_i\, \psi - f_i\, C,$$

so wird

$$\Sigma z_i\, f_i = E = o,$$

$$\Sigma z_i\, z_k\, f_{ik} = D = o,$$

$$\Sigma z_i \frac{\partial E}{\partial x_i} = 2\, D = o.$$

---

1) Diesen Satz gab für eine eigentliche Minimalfläche zuerst Herr Geiser Math. Annalen III, 530; dass für diese Flächen die oben erwähnten Ausnahmen nicht eintreten, sondern von ganz speciellen Fällen abgesehen, der Schnitt der Flächen mit der unendlich fernen Ebene nur aus geraden Linien besteht, zeigte zuerst Herr Lie, Math. Annalen XIV, S. 400 ff.

2) Vgl. Lie, a. a. O. Satz 69.

Für die Flächen W zweiter Art ist also die eigentliche algebraische Krümmungslinie zugleich eine Haupttangentencurve.[1])

Wie man sieht, gehören die Eigenschaften, welche Herr Geiser zuerst von den algebraischen Minimalflächen (im eigentlichen Sinne) bewiesen hat, einer allgemeineren Classe von Flächen an, sowie auch ein Theil der Sätze, welche Herr Lie über Minimalflächen entwickelt hat; vielleicht habe ich Gelegenheit, an einer anderen Stelle die Theorie der projectiven Minimalflächen im weiteren Sinne genauer zu verfolgen.

§ XI.

Betrachtung einiger besonderen Fälle.

Zum Schlusse dieser Betrachtungen sollen endlich einige der Modificationen erörtert werden, welche in den characteristischen Zahlen der Centraflächen eintreten, wenn die Fläche f einen vielfachen Punct hat, oder die Fläche X, resp. die unendlich ferne Ebene berührt. Einige Andeutungen müssen hier indess genügen, da eine vollständigere Behandlung der hier in Betracht kommenden Fälle zu weit führen würde.

Wenn f einen Knotenpunct, den man sich etwa conisch denken möge, hat, — die Untersuchungen für höhere vielfache Puncte können in derselben Weise geführt werden, — so erniedrigt sich die Ordnung des Strahlensystems der Normalen um 2 Einheiten; die Classe bleibt ungeändert. Die Classe der Centrafläche erniedrigt sich um 2 Einheiten, ihre Ordnung um 6.[2]) Letzteres kann man direct aus der Betrachtung von Δ entnehmen, wenn man beachtet, dass die Hesse'sche Fläche H in jedem conischen Knoten von f dieselbe Singularität mit demselben osculirenden Kegel wie f hat. Setzt man zur Bestimmung der Ordnung

---

1) Vgl. Lie, a. a. O. Satz 68.

2) Diese Reductionen erfolgen im allgemeinen gemäss dem von Herrn Klein gegebenen Satze, Göttinger Nachrichten 1870; die weiter unten gegebenen Beispiele zeigen indess, dass derselbe bei der gewöhnlichen Auffassung nicht immer erhalten bleibt. Classe und Ordnung der Centrafläche sind übrigens für Flächen mit beliebigen Singularitäten bekannt; vgl. die Untersuchungen von Roberts und Sturm Math. Annalen VI.

in die Form

$$1)\quad \lambda = -\frac{\alpha_x}{\alpha_f}$$

$$\Delta = A + B\lambda + C\lambda^2 = 0$$

ein, so fallen demnach 6 eigentliche Lösungen für den Schnitt einer beliebigen Geraden mit der Centrafläche in den Knoten von f. Dieser Punct selbst wird ein sechsfacher Punct der Centrafläche, wie man erkennt, wenn man den Schnitt derselben mit einer durch denselben gehenden Geraden betrachtet. Auf demselben Wege findet man leicht, dass das Geschlecht des Tangentenkegels der Centrafläche sich um 7, das Geschlecht ihrer ebenen Schnittcurve um 9, endlich der Rang der Centrafläche sich um 6 Einheiten erniedrigt.

Was den letzteren Punct betrifft, so hat man z. B. für die Centrafläche erster Art nach § V, 7) die Formen

$$\Delta = 0, \; [\Sigma(a_i \zeta_i)]^2 = 0, \; f = 0$$

für den durch 1) bestimmten Werth von λ zu untersuchen. Vermöge der in § X, 5), 6), entwickelten Identität erfährt dann die ebenso wie bei § V, 7) zu bestimmende Ordnung der der Curve Π auf der Centrafläche entsprechenden Curve eine Reduction um 6 Einheiten. Vermöge der Plücker'schen Gleichungen folgt dann weiter für die Rückkehrcurve der Centrafläche eine Reduction um 24, für die Classe ihrer parabolischen Ebenen eine Reduction um 12 Einheiten.

Für die Kegelflächen zweiten Grades gelten diese Betrachtungen nicht mehr. Ueberhaupt verschwindet für eine Developpabele Fläche H überall mit f, so dass die quadratische Gleichung $\Delta = 0$ sich auf eine lineare reducirt. Die Ordnung des Strahlensystems der Normalen wird für einen Kegel zweiten Grades gleich 4, die Classe bleibt ungeändert; die Ordnung der Centrafläche reducirt sich um 6 Einheiten, sie selbst wird ein Kegel sechster Ordnung, vierter Classe, dessen ebener Schnitt auf eine Curve 6. Ordnung mit vierfachem Punct abgebildet wird, d. h. vom Geschlechte Null ist; die Zahl seiner Rückkehrkanten ergiebt sich gleich 6; man sieht, wie diese Zahlen sich in Uebereinstimmung mit den von Clebsch[1]) durch directe Rechnung gefundenen Resultaten befinden; übrigens bedarf dieser Fall kaum einer besonderen Betrachtung.

1) Clebsch, Problem der Normalen, Crelle's Journal, Bd. 62, S. 101.

Wenn die Fläche f die Fläche zweiten Grades X in einem Puncte x^0 berührt, so treten folgende Modificationen für die Centrafläche erster Art ein. Die Differentialquotienten f_i werden für diesen Punct den x_i^0 proportional. Die Classe des Strahlensystemes erniedrigt sich nicht, die Ordnung dagegen um eine Einheit, entsprechend dem ausgezeichneten Puncte. Dazu gehört weiter eine Erniedrigung der Ordnung der Centrafläche um 2 Einheiten; ihre Classe bleibt ungeändert. Die aus 1) hervorgehende Form

$$P = \alpha_f^2 A - \alpha_f \alpha_x [\Sigma f_{ii} A - \Sigma f_i f_k f_{ik}] - \alpha_x^2 \frac{H X}{(n-1)^2} = o$$

hat nämlich die Eigenschaft, dass

$$\frac{\partial P}{\partial x_m} \equiv x_m^0,$$

wird, d. h. die Fläche P berührt f in dem Puncte x^0 und für diesen Doppelpunct sind zwei Lösungen des Systemes

$$f = o, \; P = o, \quad \alpha_x \beta_f - \alpha_f \beta_x = o,$$

in Abzug zu bringen. Jener Punct selbst wird für die Centrafläche ein Doppelpunct, wie sich zeigt, wenn man

$$\alpha_x^0 = o, \; \beta_x^0 = o,$$

voraussetzt. Das Geschlecht des Tangentenkegels sowie seine Ordnung erfahren keine Aenderung; das Geschlecht des ebenen Schnittes der Centrafläche erniedrigt sich um eine Einheit, da wegen des eben bemerkten Verhaltens von P die Abbildung desselben in x^0 einen weiteren Doppelpunct erhält. Hierbei ist zunächst die Berührung von f mit X als eine gewöhnliche angenommen. Für die Centrafläche einer Fläche zweiten Grades ergeben sich nicht uninteressante Specialfälle, je nachdem dieselbe die absolute Fläche einfach, stationär, etc. . . . berührt.

Etwas anders stellen sich diese Verhältnisse bei der projectiven Centrafläche zweiter Art. Berührt f die Ebene $a_x = o$ in einem Puncte x^0, so werden die Differentialquotienten f_i für denselben den a_i proportional. Untersucht man nun die Ordnung der Centrafläche vermöge der Gleichung § VII 4a), und der Gleichungen

$$\alpha_x + \lambda\,(\alpha_a\,\psi - C\,\alpha_f) = o,$$
$$\beta_x + \lambda\,(\beta_a\,\psi - C\,\beta_f) = o,$$

so zeigt sich, dass in dem Ausdrucke

$$\begin{aligned} Q = (\alpha_a\,\psi - C\,\alpha_f)^2\,(A\,C - \psi^2) \\ - \alpha_x\,(\alpha_a\,\psi - C\,\alpha_f)\,[(\psi^2 - A\,C)\,\Sigma f_{ii} + A\,\Sigma a_i\,a_k\,f_{ik} - 2\,\psi\,\Sigma f_i\,a_k\,f_{ik} + C\,\Sigma f_i\,f_k\,f_{ik}] \\ - \alpha_x^2\,C^2\,\frac{a_x^2\,H}{(n-1)^2} = o, \end{aligned}$$

die beiden ersten Terme noch mit ihren zweiten Differentialquotienten für $x = x^0$ verschwinden, also

$$\Sigma\,\frac{\partial^2 Q}{\partial x_i\,\partial x_k}\,y_i\,y_k \equiv a_y{}^2,$$

für $x = x^0$ wird, falls dieser Punct kein parabolischer Punct von f ist. Der Schnitt von Q mit f ist also eine Curve die in x^0 einen dreifachen Punct hat; die Ordnung der Centrafläche erniedrigt sich um drei Einheiten, während die Ordnung des Strahlensystems der Normalen sich um eine Einheit reducirt. Zugleich erkennt man, dass dieser Punct selbst ein dreifacher Punct der Centrafläche wird. Das Geschlecht des ebenen Schnittes erniedrigt sich um drei Einheiten, der Rang der Fläche bleibt ungeändert, die Ordnung der Rückkehrcurve vermindert sich um 12. Die Centrafläche eines Paraboloides ist daher von der 9. Ordnung, 4. Classe, 12. Ranges; ihre Rückkehrcurve besteht aus 6 Kegelschnitten, welche den beiden Hauptschnitten und den vier Erzeugenden entsprechen, die den absoluten Kegelschnitt treffen; die Doppelcurve wird von der 12. Ordnung, — in Uebereinstimmung mit der ausführlichen Untersuchung, welche Herr Caspary[1]) über die Centrafläche des elliptischen Paraboloides angestellt hat.

Ein besonderes Interesse verdient noch die Betrachtung des Schnittes der Fläche mit der absoluten Ebene. Derselbe besteht aus der dreifach zählenden reciproken Curve von $a_x = o$, $f = o$, der Evolute der-

1) Vgl. Caspary, Ueber die Krümmungsmittelpunctsfläche des ellipt. Paraboloides, Journal von Borchardt Bd. 81 S. 143. In diesem Falle ist der dreifache Punct der Fläche ein uniplanarer, wie aus der daselbst S. 164 gegebenen Gleichung der Fläche hervorgeht; man darf wohl annehmen, dass dies im allgemeinen Falle sich ebenso verhält.

selben, und einer Curve $4n(n-1)(n-2)$. Ordnung. Nun hat aber $a_x = o$, $f = o$ in x^0 einen Doppelpunct; eine einfache Betrachtung zeigt, dass die Ordnung der Evolute für jeden Doppelpunct sich um 6 Einheiten erniedrigt; d. h. es sondern sich je dreifach zählend zwei durch den Doppelpunct gehende Gerade aus der Evolute ab, nämlich die harmonisch conjugirten zu den Tangenten im Doppelpuncte in Bezug auf die von diesen an den absoluten Kegelschnitt gehenden Tangenten.[1]) Demnach wird die Centrafläche die Ebene a_x längs jener beiden Geraden osculieren, welche keine Rückkehrcurven derselben sind. Aber auch die Ordnung der reciproken Polare von $a_x = o$, $f = o$ reducirt sich um zwei Einheiten. Da nun die Coordinaten eines Punctes derselben

$$z_i = a_i \psi - f_i C,$$

für den Punct x^0 ganz unbestimmt werden, so tritt an Stelle dieses „Fundamentalpunctes" eine gerade Linie, nämlich die Polare von x^0 in Bezug auf den absoluten Kegelschnitt. Und auch diese Gerade muss dreifach zählen, da die Erniedrigung der Ordnung der Centrafläche nur 3 Einheiten beträgt, ohne Rückkehrcurve derselben zu sein. Die Ebene $a_x = o$ osculiert demnach die Centrafläche längs des genannten Dreiseites von Geraden, bestehend aus der Polare des Berührungspunctes und dem bezeichneten durch diesen gehenden Geradenpaare.[2])

---

1) So ist z. B. die Evolute der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2, \quad a^2 - b^2 = e^2$$

dargestellt durch die Gleichung

$$[x^2 a^2 + y^2 b^2 - c^2 e^4]^3 - 27 x^2 y^2 a^2 b^2 c^2 e^4 = o;$$

sie reducirt sich für $c = o$ auf

$$(x^2 a^2 + y^2 b^2)^3 = o.$$

Uebrigens kann man sich auch vermöge der Gleichung § VI, 3) sehr leicht davon überzeugen, dass für jeden Doppelpunct die Ordnung der Evolute sich um 6 Einheiten reducirt; der Doppelpunct selbst gehört dem übrigen Theil der Evolute im allgemeinen nicht an.

2) Man vergleiche das a. a. O. von Herrn Caspary behandelte Beispiel S. 165.