

Der
primäre und sekundäre
longitudinale Elastizitätsmodul
und die
thermische Konstante des Letzteren.

Von
Andreas Miller
in München.

(Mit 2 Tafeln.)

Aus den Abhandlungen der k. bayer. Akademie der Wiss. II. Cl. XV. Bd. III. Abth.

München 1886.
Verlag der k. Akademie
in Commission bei G. Franz.



I. Einleitung.

§ 1. In einer früheren Untersuchung¹⁾ wurde für sechs Metalle, zwei Legierungen und zwei organische Substanzen gezeigt, dass diese Stoffe während der Dehnung ihre Elastizität vorübergehend ändern, dass also ein gespannter Draht unmittelbar nach der Deformation einen anderen longitudinalen Elastizitätsmodul als vor derselben besitzt. Um mich daher leichter verständlich machen zu können, muss ich hier eine unterscheidende Benennung in der Art neu einführen, dass ich den der elastischen Reaktion²⁾ vor der Deformation entsprechenden longitudinalen Elastizitätsmodul (E-M) den „primären“ (P. E-M) und den der elastischen Reaktion, welche der Deformation folgt, entsprechenden longitudinalen Elastizitätsmodul zum Unterschiede von dem „gewöhnlichen“ (E-M) den „sekundären“ (S. E-M) nenne.

Meine oben erwähnte Untersuchung hat nämlich ergeben, dass man einen Körper durch mehrmals ununterbrochen wiederholtes An- und Abspannen bei konstanter Temperatur in einen Zustand versetzen kann, in dem er sich vorübergehend wie ein vollkommen elastischer Körper³⁾ verhält: Der diesem elastischen Zustande entsprechende sekundäre Elastizitätsmodul ändert sich aber, wie im weiteren Verlaufe dieser Abhandlung gezeigt werden soll, einfach proportional der Temperatur. Er steht somit zur letzteren in wesentlich einfacherer Beziehung, als diejenige ist, welche

1) A. Miller, Sitzungsbericht der mathematisch-physikalischen Klasse d. k. bayer. Akademie der Wissenschaften. 1885. Heft 1. S. 9.

NB. In Zukunft soll (1885. Heft 1) vorstehendes Zitat der Kürze halber ersetzen.

2) Thomson und Tait, Handbuch der theoretischen Physik, deutsche Uebersetzung von Helmholtz und Wertheim. Bd. I. 2. Teil. § 658.

3) Thomson und Tait, Bd. I, Teil 2. § 672.

Herr Prof. *F. Kohlrausch* und *E. F. Loomis* sowohl, als *Pisati* für den gewöhnlichen E-M nachgewiesen haben. Die Zahl, welche die Aenderung des sekundären longitudinalen Elastizitätsmoduls für 1°C des Temperaturzuwachses, bezogen auf den S. E-M bei 0° , angibt, heisse ich die „thermische Konstante“ (T. K.) des S. E-M. Damit glaube ich vorläufig den Titel der Arbeit verständlich gemacht und ihr Hauptziel bezeichnet zu haben.

§ 2. Die Grösse, welche man gewöhnlich als longitudinalen Elastizitätsmodul (E-M) bezeichnet, wird aus der ersten Dehnung eines Drahtes berechnet. Dass diese von den nachfolgenden Dehnungen an Grösse verschieden ausfällt, wenn letztere auf die erste ununterbrochen folgen, und die Messvorrichtung die genügende Empfindlichkeit besitzt, mag nachstehende Uebersicht zeigen. Diese Dehnungsversuche wurden bei ein und demselben Metall zum Teil an verschiedenen Tagen, jedenfalls aber mit Unterbrechungen von $5'$ bis 40^h angestellt. Dabei war die ständige Belastung für dasselbe Metall konstant. Die Temperatur schwankte innerhalb eines Grades, so dass sie für unseren Fall als ein konstantes Element des Versuches betrachtet werden darf. Sie war die gewöhnliche Temperatur des Arbeitslokales, die zwischen 0° und 10°C betrug. Die Dehnungen sind in Skalenteilen einer Spiegelvorrichtung — 1 Skalenteil = 2^{mm} — angegeben.

Uebersicht.

Kupfer :		Platina :		Silber :	
Dehnung :		Dehnung :		Dehnung :	
1 ^{te}	5 ^{te}	1 ^{te}	5 ^{te}	1 ^{te}	5 ^{te}
137,6	135,1	51,8	50,9	80,0	78,5
137,0	135,0	51,5	51,0	79,7	78,6
137,6	135,3	51,7	50,9	79,3	78,5
137,2	135,2	51,5	51,0	79,66	78,53 = Mittel
137,1	135,1	51,62	50,95 = Mittel		
137,7	135,1				
137,5	135,0				
137,8	135,0				
137,44	135,10 = Mittel				

Man sieht, dass die 1. Dehnung stets grösser als die 5. ist, und dass man sonach für die physikalische Konstante, welche gewöhnlich als

longitudinaler Elastizitätsmodul bezeichnet wird, einen kleineren Wert erhalten muss, als für jene, die ich den sekundären Elastizitätsmodul nenne.

Das Verhältnis:

$$\frac{137,44 - 135,10}{137,44} = 0,016; \quad \frac{51,62 - 50,95}{51,62} = 0,013; \quad \frac{79,66 - 78,53}{79,66} = 0,014;$$

bei obenbezeichneten Metallen ist nahehin konstant.

Zum Unterschiede vom primären und sekundären E-M soll deshalb hier unter „Elastizitätsmodul“ (E-M) der gewöhnliche, aus der ersten Dehnung berechnete, verstanden sein. Ganz unrichtig wäre es jedoch aus obiger Uebersicht zu schliessen, die elastische Reaktion, welche der Verschiebung der Moleküle entspricht, sei während der 5. Dehnung grösser als vor der 1.¹⁾ Allein noch ein Umstand ist hervorzuheben. Während die grösste und kleinste 1. Dehnung bei Kupfer um 0,44 und 0,36 Sktl., bei Silber um 0,36 und 0,34 Sktl., bei Platina um 0,12 und 0,18 Sktl. vom Mittel abweicht, weichen die 5. Dehnungen hievon bezw. nur um die Werte 0,1 und 0,2; 0,03 und 0,07; 0,05 und 0,05 Sktl. ab. Der Elastizitätsmodul (E-M) ist somit selbst bei konstanter Temperatur Schwankungen unterworfen, indes der sekundäre im allgemeinen als konstant betrachtet werden kann (1885. Heft 1).

§ 3. *Wertheim*²⁾ hat seine umfangreichen Untersuchungen über den longitudinalen E-M auch auf dessen Aenderung durch die Wärme ausgedehnt. Es scheint jedoch dabei nicht beabsichtigt gewesen zu sein, den gesetzmässigen Zusammenhang beider Elemente der Beobachtung zu ermitteln. Dagegen scheinen die Versuche, welche *Pisati*³⁾ mit Eisen- und Stahldrähten anstellte, auch bezüglich des longitudinalen E-M darauf abgezielt zu haben.

Eingehende Untersuchungen über den zahlenmässigen Zusammenhang der Elastizität mit der Temperatur liegen hinsichtlich der Torsionselastizität vor. *Pisati*³⁾, und früher schon Herr Professor *F. Kohlrausch* und

1) A. Miller, Wiedemann's Annalen der Physik u. Chemie. Bd. 25. 1885. S. 451.

2) *Wertheim*, Poggendorff's Annalen, Ergänzungsband II. 1848.

3) *G. Pisati*, Gaz. chim. ital. VI. 1876. VII. 1877.

NB. Trotz vielfacher Bemühungen habe ich das Original dieser Abhandlung 3) nicht einsehen können. Meine Kenntniss über diese Arbeit beschränkt sich auf einen Bericht in den Beiblättern Bd. I. 1877.

F. E. Loomis ¹⁾ haben die Aenderung, welche der Elastizitätsmodul durch die Temperatur erfährt, bestimmt und gefunden, dass sie nicht nur von der Aenderung der Temperatur, sondern auch von deren Höhe abhängig ist. Nach den Resultaten der zuletzt genannten Forscher wächst die Aenderung des E-M für 1°C mit der Temperatur, worin sich eine wesentliche Verschiedenheit in dem Verhalten des gewöhnlichen und sekundären E-M der Wärme gegenüber ausspricht.

§ 4. Ich habe mich schon früher beim Eisen mit dem Einfluss der Wärme auf jenes physikalische Element, welches ich jetzt mit dem Namen sekundärer E-M bezeichne, beschäftigt ²⁾. Die gefundenen Resultate schienen mir interessant genug, mich der Mühe zu unterziehen, auch das Verhalten anderer Körper nach dieser Richtung zu studieren. Diese Arbeit liess aber auch keinen Zweifel darüber, dass, um ein Verständnis der dabei zutage tretenden Erscheinungen zu gewinnen, vorerst der primäre und sekundäre Elastizitätsmodul bei gewöhnlicher und konstanter Temperatur untersucht werden müsse. Die hierüber von mir erzielten Resultate sind in (1885. Heft 1) niedergelegt.

II. Der Apparat.

§ 5. Es ist derselbe, den ich in einer anderen Abhandlung (1882. Heft 4. § 6) genauer beschrieben habe, und von dem sich dort auch eine vollständige Abbildung befindet. Der Raumersparnis halber werde ich mich hier kurz fassen und auf eine schematische Zeichnung beschränken.

Die Vorrichtung besteht im Wesentlichen in einem ungleichnamigen Hebel DD_1 (Schnellwage) — Fig. 1 —, der an dem eichenen, an beiden Enden in der starken Mauer einer Fensternische eingekeilten Balken A mittels einer sehr starken, eisernen Stange AC aufgehängt ist. Es sind überhaupt alle Teile desselben aus Eisen verfertigt und im Verhältnis

1) *F. Kohlrausch* u. *F. E. Loomis*, Poggendorff's Annalen, Bd. 141. 1870.

2) A. Miller, Sitzungsbericht der mathematisch-physikalischen Klasse d. k. bayer. Akademie der Wissenschaften. 1882. Heft 4.

NB. Künftig soll (1882. Heft 4) dieses Zitat ersetzen.

zu den untersuchten Drähten sehr kräftig konstruiert. Unter der Unterstützungsschneide C des Hebels ist senkrecht zu DD₁ ein Stäbchen mit einer Schraube X angebracht, um den Hebelarm DD₁ in's indifferente Gleichgewicht, das er während der Versuche stets besass, bringen zu können. Zu gleichem Zwecke dient auch das an einem Gewinde verstellbare Gegengewicht Z. Bei D befindet sich eine Schneide, an der mittels einer eisernen Doppelstange die Klemme E aufgehängt ist. Die andere Klemme F ist in einem schweren Stein eingelassen, der auf einer sehr dicken Umfassungsmauer ohne Berührung mit dem Bodengebälk aufliegt. Wenn der Draht an den Klemmen scharf umgebogen wird, so genügt ein mittels Schrauben hervorgebrachter, schwacher Druck der Klemmbacken, der eine kaum merkbare Abplattung des Drahtes bewirkt, um letzteren genügend festzuhalten. Q ist ein Belastungsstück — Anfangsbelastung, ständige Belastung —, das während einer Versuchsgruppe beständig an einer Stelle des Hebels bleibt, indes das Belastungsstück P mittels der Kurbel L und der Schraube K langsam und möglichst gleichmässig gehoben und gesenkt werden kann, wodurch abwechselungsweise Spannung und Abspannung des zu untersuchenden Körpers bewirkt wird. Um den Draht wenigstens während kurzer Zeiten keinen erheblichen Temperaturschwankungen auszusetzen, geht er durch ein mit Baumwolle verstopftes Rohr, das wieder mit zwei Blechrohren MM, von denen das äussere in einem dicken Filzmantel eingehüllt, umgeben ist. Diese eben erwähnte, in der Figur 1 nur in grossen Zügen angedeutete Umhüllung des Drahtes dient nämlich auch dazu, den Draht durch Einleiten von Wasserdampf höheren Temperaturen aussetzen zu können.

Fig. 2 stellt einen Durchschnitt des Blechmantels dar, durch den der Versuchsdraht geht. Der Weg, den der im Gefässe G entwickelte Wasserdampf nimmt, ist aus der Figur 2 ebenfalls leicht zu sehen. Er steigt im mittleren Raume auf, sinkt im äusseren herab, von wo er durch das Rohr S in's Freie strömt. Der Versuchsdraht geht durch den mittleren Raum, der durch in der Mitte ausgebohrte Korkstöpseln verschlossen ist. In diesen Bohrungen ist der Draht mit Baumwolle umgeben. Hiedurch wird nicht nur ein genügender Abschluss des Raumes gegen aussen hergestellt, sondern auch jeder nennenswerte seitliche Druck auf den Draht, der Fehler erzeugen könnte, vermieden.

Ferner ist H ein Thermometer mit Zehntelgradteilung zur Bestimmung der Temperatur des Drahtes. Sehr empfindliche, ebenfalls in Zehntelgrade geteilte Thermometer sind auch bei U und W — Fig 1. — in die Eisenteile des Apparats eingelassen, um die Temperatur derselben anzugeben, die wegen der an den Ablesungen anzubringenden Korrekturen ermittelt werden muss. Die Temperatur des Zimmers wurde stets gemessen. Dasselbe ist indess sehr günstig gelegen, indem es vom direkten Sonnenlichte nur im Hochsommer kurze Zeit beschienen wird; Temperaturschwankungen in demselben innerhalb kurzer Zeit rühren zunächst von den anwesenden Personen, Lampen etc. her.

NN bezeichnet eine vertikale Spiegelskala und R das Ablesungsfernrohr, welches auf dem Spiegel B senkrecht steht. In der durch die Achse von R gelegten horizontalen Ebene befindet sich der Nullpunkt der Skala. Sie wird von einer verstellbaren Lampe beleuchtet. Fernrohr und Skala sind mittels dreier starker, eiserner Träger an einer dicken Kirchenmauer festgemacht. Um den Moment, in welchem P frei hängt oder nur von dem Tischchen I getragen wird, genau zu fixieren, ist ein elektrisches Läutwerk, in dessen Schliessungsbogen die Strecke CI liegt, angebracht.

Die Entfernung des Spiegels B von der Skala NN beträgt 2806 Skalenteile, $CD = 35,4$ Sktl. Die Länge der Eisenstange U wurde zu 250, jene von W zu 160 Sktl. in Rechnung gezogen. (1 Skalenteil = 2^{mm}). Da 0,1 Skalenteil noch mit ziemlicher Sicherheit geschätzt werden konnte, so werden von dem Apparate Längenveränderungen des Drahtes von $0,001^{\text{mm}}$ mit entsprechender Sicherheit angegeben.

Vorversuche, welche ich anstellte, überzeugten mich, dass zu einer Befürchtung, es möchte aus einer möglichen, selbst sehr schwachen Durchbiegung des Balkens A eine Fehlerquelle entstehen, kein Grund vorhanden ist. Ich verweise in der Beziehung auf (1885. Heft 1. III. § 10).

III. Beobachtungsweise.

§ 6. Diese ist dieselbe, wie sie in (1885. Heft 1. § 6) für Beobachtungen bei gewöhnlicher Lufttemperatur beschrieben worden ist. Die Versuche wurden hier bei Temperaturen zwischen 0° und 100° C ausgeführt, und die Beobachtungsweise war auch bei den höheren Tem-

peraturen die gleiche wie bei niederen. Um sich leicht ein Bild von der Beobachtungsart zu verschaffen, lasse ich eine ausführliche Tabelle über einige aufeinanderfolgende Versuchsgruppen eines Metalls folgen.

Tabelle.

Untersuchte Substanz: Silber.

$\pi_1 = 2,4633 \text{ kg.}$ $k = 1,92.$

$d_1 = 1,099^{\text{m.}}$

$\pi_2 = 4,7406 \text{ kg.}$ $\alpha = 0,00001868.$

$q = 0,3197^{\text{qmm.}}$

$d = 0,638^{\text{mm.}}$

N	ν	z	v	$t_0 \text{ u. } t_1$	$T_0 \text{ u. } T_1$	$\tau_0 \text{ u. } \tau_1$	a_ν	b_ν	c_ν	λ	l	ϱ	δ	Dat.			
Ia	1	7' 20"	1,3	5,7	6,6	6,5	— 55,8	1,9	— 54,8			28,1	619,2	23/84			
	2							2,0	— 54,7								
	3							2,0	— 54,4								
	4							2,1	— 54,3		14,6						
	5			5,8 5,8	6,9	6,7		2,1	— 54,2								
I	1	6' 40"	1,5	97,1	18,8	10,5	102,0	165,0	104,7			70,9	625,6	23/84			
	2							165,7	105,0								
	3							166,0	105,3								
	4							166,2	105,7		36,3						
	5			97,1 97,1	19,9	11,1		166,7	105,8								
II	1	7' 0"	1,4	81,5	16,1	10,8	74,0	134,0	72,3			87,2	596,4	23/84			
	2							131,3	70,4								
	3							129,0	68,1								
	4							126,8	66,0		45,4						
	5			74,5 73,1	14,2	10,8		124,5	64,0								

u. s. w.

- 1) d_1 ist die Länge des geprüften Drahtstückes zwischen den Klemmen;
- 2) d der mittels einer Mikrometerschraube gemessene Durchmesser und
- 3) q der Querschnitt des Drahtes.
- 4) α ist der mittlere thermische Ausdehnungskoeffizient des untersuchten Drahtindividuums bei der konstanten Belastung π_1 .
- 5) Die ständige Belastung des Drahtes zum Geradehalten betrug $\pi_1 \text{ kg}$ auf das qmm.

6) Diese Belastung π_1 wurde successive durch Herabschrauben des Tischchens I auf $\pi_1 + \pi_2$ kg für das qmm vermehrt und durch Hinaufschrauben desselben wieder auf π_1 vermindert. Die Spannung des Drahtes verändert sich also ununterbrochen successive zwischen den Grenzen π_1 und $\pi_1 + \pi_2$. Fünf solche ununterbrochen aufeinanderfolgende „Versuchsreihen“ bilden eine Versuchsgruppe“.

$$7) k = \frac{\pi_2}{\pi_1}.$$

8) N ist die Ordnungszahl der Versuchsgruppe und

9) ν jene einer Versuchsreihe.

10) a_1 (d. i. a_ν für $\nu = 1$) ist die Anzahl der Skalenteile, welche unmittelbar vor Beginn der Versuchsgruppe N bei der ständigen Belastung π_1 abgelesen worden ist.

11) b_ν ist die Anzahl der Skalenteile, welche bei der Spannung $\pi_1 + \pi_2$ abgelesen wurde.

12) c_ν ist die Anzahl der bei der beständigen Belastung π_1 abgelesenen Skalenteile vom Ende der 1. Versuchsreihe an, so dass für die einzelnen Reihen $a_{\nu+1} = c_\nu$ ist.

Die Zahlen b_ν und c_ν wurden jedesmal sofort beim Eintreten der Spannungen $\pi_1 + \pi_2$ beziehungsweise π_1 abgelesen.

13) t_0 bedeutet die mittlere Temperatur des untersuchten Drahtes am Anfange, t_1 jene am Ende der Versuchsgruppe.

14) T_0 die Temperatur des unteren Apparatteiles W beim Beginne, T_1 am Ende der Gruppe.

15) Die gleiche Bedeutung hat τ_0 und τ_1 für den oberen Apparatteil U.

16) Die zwischen t_0 und t_1 stehende Zahl ist die für die Zeit zwischen der 4. und 5. Beobachtungsreihe berechnete, mittlere Temperatur t des Drahtes.

17) z die Dauer der Versuchsgruppe in Minuten und Sekunden, mittels einer stellbaren Sekundenuhr gemessen.

18) v ist die mittlere Geschwindigkeit in Skalenteilen, mit welcher der Fernrohrzeiger über die Skala hinweggleitet.

19) In der letzten Rubrik ist das Datum der Versuchsgruppe angegeben.

20) λ ist die aus den Werten b_4, b_5, c_3, c_4, c_5 berechnete mittlere Dehnung des Drahtes, welche für die 4. und 5. An- und Abspannung als gleich angenommen werden durfte. Die in dieser Rubrik eingetragenen Zahlen geben das 1000fache der von π_2 hervorgebrachten Dehnung in mm für 1^m Drahtlänge an.

21) l ist das 1000fache der Verlängerung in mm, welche 1^m des Drahtes bei der Spannung π_1 während einer Versuchsgruppe vorübergehend erfahren hat.

22) $\varrho = kl.$

23) $\delta = \lambda - \varrho.$

IV. Bestimmung von in § 6 angeführten, nicht direkt messbaren Grössen.

§ 7. Einige Umstände verursacht die Bestimmung der Temperatur des Drahtes. Es lag nahe, den zu prüfenden Körper selbst als thermometrische Substanz zu verwenden. Ich habe auch die Wärmeausdehnungskoeffizienten aller untersuchten Drähte bestimmt und mit Beziehung dieser und der Zeigerverschiebungen die Temperaturen berechnet. Allein trotz der sorgfältigsten Korrekturen ergaben sich bei einzelnen Substanzen so erhebliche Abweichungen von der gemessenen Temperatur des Raumes, durch den der Draht im Dampfmantel ging, dass mir dieses Verfahren zu unzuverlässig schien, um es hier anzuwenden, obwohl gerade es am sichersten zur Bestimmung der wahren Temperatur des Drahtes führen müsste, wenn der Einfluss der elastischen Nachwirkung desselben mit Sicherheit eliminiert werden könnte.

§ 8. Ich ging nun darauf aus, die mittlere Temperatur des Raumes, durch den der Draht geht, zu bestimmen, da nämlich angenommen werden kann, dass dieser wegen seiner Dünne eine mit jenem gleiche Temperatur besitzt. Da jedoch das Thermometer H, dessen Gefäss in der Mitte des Raumes sitzt, die mittlere Temperatur desselben voraussichtlich nicht angibt, und die Anbringung zweier weiterer Thermometer an den Enden der Röhre wegen der notwendig gleichzeitigen Ablesung fortgesetzt noch zwei Beobachter erfordert haben würde, so beschränkte ich mich darauf, ein für allemal die Abweichung der mittleren Temperatur des Raumes, also

auch des Drahtes, von der Temperatur in der Mitte des Raumes zu bestimmen, so dass bei den Versuchen zum Zweck der Ermittlung der Temperatur des Drahtes nur mehr die Angabe des Thermometers H abzulesen war.

Zu dem Zwecke wurden ausser dem Instrumente H in der Röhre auch an jedem Ende derselben ein Thermometer angebracht, das ebenfalls die Ablesung auf $0,1^{\circ}$ genau gestattete.

Die Angaben dieser Thermometer wurden auf die eines Normalthermometers, das vorher einer genauen Prüfung unterzogen ward, auf graphischem Wege zurückgeführt. Während der Erkaltung des Raumes von 100° auf etwa 10° C waren gleichzeitige Beobachtungen an den 3 Instrumenten angestellt. Aus den Angaben eines jeden Thermometers wurde die jeweilige wahre Temperatur an den 3 Stellen des Raumes nach einem gleich nachher zu erörterndem Verfahren ermittelt.

Selbst bei den höchsten Temperaturen wich keine derselben an den Enden der Röhre 2° C von dem Mittel aus den Temperaturen an den 3 beobachteten Stellen ab, so dass dieses Mittel als die mittlere Temperatur des Raumes betrachtet werden durfte. Nachstehende Tabelle zeigt den Verlauf der Temperatur in der Mitte des Raumes und denjenigen der mittleren Temperatur desselben. Die Differenz f_4 beider Werte wurde graphisch dargestellt.

Tabelle.

Temperatur in der Mitte.	Mittlere Temperatur.	f_4
6,15	6,13	— 0,02
34,70	34,06	— 0,64
42,88	42,05	— 0,83
60,67	59,56	— 1,11
74,36	72,45	— 1,91
81,02	80,02	— 1,00
87,87	89,84	+ 1,97
99,46	98,16	— 1,30

§ 9. Zur Auffindung der wahren Temperatur in der Mitte des Raumes aus den Ablesungen am Thermometer H bedurfte es mehrfacher Korrekturen. Es musste angenommen werden, dass der Quecksilberfaden vom Null-Punkte der Skala an nicht mehr die Temperatur des Gefässes

habe. Die nach § 27 des Leitfadens der praktischen Physik von *F. Kohlrausch* berechneten Korrekturen f_1 wurden graphisch dargestellt.

Ferner war das Thermometer H wenig zuverlässig; es wurde nach dem Normalthermometer geaicht und die Differenzen f_2 wurden ebenfalls graphisch so dargestellt, dass noch $0,01^\circ \text{C}$ geschätzt werden konnte.

Da das Thermometer H wegen der Grösse seiner Quecksilbermasse der Temperaturabnahme des Raumes nicht folgte, war hiewegen eine weitere Korrektur veranlasst. Bei dieser diente mir das Verfahren des Herrn Prof. *F. Kohlrausch*¹⁾ zum Vorbilde. Aus dem Newton'schen Erkaltungsgesetze ergibt sich die Korrektur

$$f_3 = -\frac{1}{h} \cdot \frac{\partial(\eta_0 - \eta_1)}{\partial z},$$

worin η_0 und η_1 die Ablesungen am Thermometer H beim Beginn und am Ende einer Versuchsgruppe N, und z die Dauer der letzteren in Minuten bedeutet. Als Mittel aus 7 Beobachtungen unter Zuhilfenahme eines wegen der Kleinheit seiner Quecksilbermasse sehr empfindlichen Thermometers ergab sich die Konstante $\frac{1}{h} = 3,20$. Man erhält sonach bei Berücksichtigung der Vorzeichen t_0 und t_1 aus den Formeln:

$$t_0 = \eta_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4$$

$$t_1 = \eta_1 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4$$

Für die Temperatur t zwischen der Versuchsreihe 4 und 5, die dem λ entspricht, ist zu bemerken, dass sie um $\frac{1}{5} (t_0 - t_1)$ höher liegt als t_1 , sonach

$$t = t_1 + \frac{1}{5} (t_0 - t_1) \text{ ist.}$$

Die Ablesungen an den 2 Thermometern, deren Behälter in die Apparatteile W und U versenkt waren, also die Grössen T_0 , T_1 und τ_0 , τ_1 bedurften keiner Korrektur.

§ 10. Die mittlere Geschwindigkeit v , bezogen auf die Sekunde, berechnet sich aus:

$$v = \frac{5}{z} [(b_1 - a_1) + (b_5 - a_5)],$$

wobei z die mittels einer Sekundenuhr beobachtete Dauer einer Versuchsgruppe N ist.

1) *F. Kohlrausch*, Poggendorff's Annalen Bd. 141. 1870. S. 486.

V. Die Berechnung der Werte λ , l , φ und δ .

§ 11. Hinsichtlich der Theorie des Apparates muss ich mir der Raumersparnis wegen gestatten auf [1882. Heft 4. § (8—11)], sowie (1885. Heft 1. V) zu verweisen. Ich werde mich hier darauf beschränken, die Formeln, wie sie sich für die vorliegenden Fälle gestalten, mit den Zahlenwerten der Konstanten des Apparates anzuführen. Zu den in § 6 aufgeführten Bezeichnungen sind für das Folgende noch einige hinzuzufügen:

1) n_0 und n_1 sind die Anzahl von Skalenteilen, welche bei den Temperaturen (t_0, T_0, τ_0) und (t_1, T_1, τ_1) abgelesen worden sind.

2) $n = n_1 - n_0$.

3) l_1 ist die Verlängerung, welche 1^m des Drahtes nach 5 maliger An- und Abspannung bei der Belastung π_1 vorübergehend zeigt, und zwar in Skalenteilen angegeben.

4) λ_1 entspricht genau der in § 6 Ziff. 20 angegebenen Erklärung, nur mit dem Unterschiede, dass die Einheit von λ_1 ein Skalenteil, und das Resultat nicht vertausendfacht ist.

§ 12. Demnach ist:

$$\alpha = \frac{1}{d_1 (t_1 - t_0)} \cdot \left[0,0063079 (n_1 - n_0) - 0,000\,000\,000\,3 (n_1^3 - n_0^3) \right] - \frac{1}{d_1 (t_1 - t_0)} \left[0,002 (T_1 - T_0) + 0,003 (\tau_1 - \tau_0) \right] \quad \text{A)}$$

$$t_1 = t_0 + \frac{1}{d_1 \alpha} \left[0,0063079 (n_1 - n_0) - 0,000\,000\,000\,3 (n_1^3 - n_0^3) \right] - \frac{1}{d_1 \alpha} \left[0,002 (T_1 - T_0) + 0,003 (\tau_1 - \tau_0) \right] \quad \text{B)}$$

$$n = 158,533 d_1 \alpha (t_1 - t_0) + 0,3 (T_1 - T_0) + 0,5 (\tau_1 - \tau_0) \quad \text{C)}$$

wenn das Glied mit dem Faktor $n_1^3 - n_0^3$ in B) vernachlässigt werden darf.

$$l_1 = \frac{1}{d_1} \left[(c_5 - a_1) - n \right] \quad \text{D)}$$

für den Meter in Skalenteilen.

$$\lambda_1 = \frac{1}{d_1} \cdot \frac{1}{2} \left[(b_4 + b_5) - c_4 - \frac{c_3 + c_5}{2} \right] \quad \text{E)}$$

für den Meter in Skalenteilen.

Ferner ist:

$$E_p = E_s \cdot \frac{1}{1 - \frac{e}{\lambda}} \quad \text{und} \quad E_s = E_p \left(1 - \frac{e}{\lambda}\right)$$

Während z. B. für Kupfer von 10° C bei einem gewissen elastischen Zustande des Drahtes sich $E_s = 12905$ ergab, betrug $E_p = 13873$; der selbst bei konstanter Temperatur mit der Zeit im allgemeinen veränderliche Unterschied $E_p - E_s$ hatte somit den erheblichen Wert 968.

§ 16. Die Tabellen am Schlusse der Abhandlung lassen entnehmen, dass bei konstanter Temperatur $b_1 - a_1$ die grösste Dehnung ist, indes die Verlängerung $b_5 - a_5$ die im allgemeinen kleinste und gleich den Verkürzungen $b_v - c_v$ ist. Daraus könnte man verleitet sein, den Schluss zu ziehen, wie dies *Tomlinson*¹⁾ gethan hat, es nähme der $E - M$ bei fortgesetztem Deformieren zu. Allein das gerade Gegenteil ist richtig. Ich habe mir bereits früher gestattet, einige Bemerkungen²⁾ zur eben erwähnten Arbeit zu machen, muss jedoch hier nochmal kurz auf die Frage, ob von der 1. zur 5. An- und Abspannung eine Erniedrigung oder Erhöhung des $E - M$ stattfindet, eingehen, um einer, wie mir scheint, ziemlich allgemein bestehenden Ansicht entgegen zu treten.

Ist nämlich E' der $E - M$, welcher dem Zustande des Drahtes während oder nach der 1. Belastung mit $\pi_1 + \pi_2$ entspricht, sowie l' die Längenzunahme, welche die Längeneinheit des Drahtes bei der ständigen Belastung π_1 nach der 1. Be- und Entlastung zeigt, endlich λ' die Verkürzung der Längeneinheit des Drahtes bei der 1. Entlastung, so hat man unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen:

$$E_p = \frac{\pi_1}{l_0}; \quad E_s = \frac{\pi_2}{\lambda};$$

$$E_p' = \frac{\pi_1 + \pi_2}{l_0 + l' + \lambda'}; \quad E_s = \frac{\pi_1}{l_0 + l};$$

wo l die ganze Längenzunahme der Längeneinheit des Drahtes von der 1. bis 5. Be- und Entlastung nach der hier eingeführten Bezeichnung bedeutet. Nun ergibt sich aus den beiden letzten Gleichungen:

1) *H. Tomlinson*, Phil. Trans. 1883. p. 1.

2) *A. Miller*, Annalen d. Physik etc. 1885. Bd. 25. S. 450.

$$l_0 = \frac{\pi_1 \lambda - \pi_2 l}{\pi_2}$$

und folglich:

$$E' = \frac{(\pi_1 + \pi_2) \pi_2}{\pi_1 \lambda - \pi_2 (l - l') + \pi_2 \lambda'}$$

Da aber nach den Erfahrungen, welche die Tabellen ausweisen, $\lambda' = \lambda$ genommen werden darf, so ist:

$$E' = \frac{(\pi_1 + \pi_2) \pi_2}{(\pi_1 + \pi_2) \lambda - \pi_2 (l - l')} \quad \text{oder} \quad E' = \frac{\pi_2}{\lambda - \frac{\pi_2}{\pi_1 + \pi_2} (l - l')}.$$

Weil aber bei Metallen stets $l > l'$, so ist:

$$E' > E_s.$$

Der $E - M$ ist also nicht nur nach der 1. Belastung mit π_2 kleiner als vor derselben, sondern weil auch, nahezu

$$E' = \frac{\pi_1}{l_0 + l'},$$

also $E_p > E'$ gesetzt werden darf,

$$E_p > E' > E_s.$$

Während also der Draht fortgesetzt und ununterbrochen Verlängerungen und Verkürzungen ausgesetzt ist, sinkt sein Elastizitätsmodul von der ursprünglichen Höhe E_p vor der Deformation bis zu einer gewissen Grenze E_s herab, in der angelangt, er sich wie ein vollkommen elastischer Körper verhält.

Die Dehnungen nehmen, wie ich schon (1885. Heft 1. § 44) hervorgehoben, nur deshalb scheinbar ab, weil auch π_1 infolge der Aenderung des $E - M$ durch die Deformation eine Verlängerung des Drahtes hervorbringt, die irrtümlich ebenfalls der Belastung π_2 zugeschrieben, durch dieselbe aber nur mittelbar veranlasst wird. Man geht eben bei der üblichen Methode zur Bestimmung des longitudinalen $E - M$ von der für mich zweifellos unrichtigen Ansicht aus, die ständige Belastung π_1 sei auf das Resultat von keinem Einfluss. Und dieser Irrtum wiederum entspringt aus der Vernachlässigung der elastischen Nachwirkung, von der jede Dehnung begleitet ist, oder dem „Nachwirkungsrückstande“, wie ich diese Verlängerung l in (1885. Heft 1. § 18) nannte.

Die in den Lehrbüchern der Physik meist enthaltene Vorschrift, mit der Ablesung abzuwarten, bis der Draht seine ursprüngliche Länge wieder angenommen hat, behebt die Mängel nicht, da die successive Längenänderung bei konstanter Spannung nur infolge einer Elastizitätsänderung denkbar ist.

VII. Die Versuche.

§ 17. Die untersuchten Substanzen waren:

- 1) die einfachen Metalle: Platina, Eisen, Silber, Kupfer, Zink und Blei;
- 2) die Legierungen: Messing und Neusilber; und
- 3) die organischen Stoffe: Fischbein und Kautschuk.

Nur den Kupferdraht habe ich als chemisch reinen bezogen. Die übrigen Stoffe waren derart, wie sie im Handel vorkommen. Die nicht organischen Stoffe wurden, ausgenommen Zink und Blei, chemisch analysiert. Das Ergebnis dieser Analyse¹⁾ lasse ich hier folgen.

Platindraht No. II	97,11 ⁰ / ₁₀₀ Platin;
Silberdraht	98,88 ⁰ / ₁₀₀ Silber;
Kupferdraht No. II	99,88 ⁰ / ₁₀₀ Kupfer;
Eisendraht No. III	99,55 ⁰ / ₁₀₀ Eisen;
Messingdraht	{ 68,10⁰/₁₀₀ Kupfer; 31,74⁰/₁₀₀ Zink; 0,16⁰/₁₀₀ Blei;
Neusilberdraht	{ 62,86⁰/₁₀₀ Kupfer; 27,44⁰/₁₀₀ Zink; 0,12⁰/₁₀₀ Blei; 9,58⁰/₁₀₀ Nickel.

Die Versuche schlossen sich zeitlich enge an die in (1885. Heft 1.) beschriebenen an. Es wurden nämlich die in der eben zitierten Abhandlung: „Beitrag zur Kenntnis der Molekularkräfte“ dargelegten Versuche

1) Die Analyse wurde im chemischen Laboratorium unserer Anstalt, der k. Kreis-Realschule München, von meinem sehr verehrten Herrn Kollegen *Max Fuchs*, k. Reallehrer für Chemie und Naturgeschichte, ausgeführt. Ich danke ihm hiemit für seine kollegiale Freundlichkeit und Bemühung bestens.

in den aufeinanderfolgenden Versuchsgruppen entstandenen Nachwirkungsrückständen 1 bis zum Beginn der letzten Versuchsgruppe N verschwunden waren. Wird nämlich die Kontrolle zwischen den Gruppen N und N_1 vorgenommen, und bezeichnet b den wirklichen Abstand der Zeigerstellungen für den Beginn beider Gruppen und $F (= n)$ die Anzahl der Skalenteile, um welche sich die Zeigerstellung infolge der auftretenden Temperaturdifferenzen $(t_1 - t_0)$, $(T_1 - T_0)$, $(\tau_1 - \tau_0)$ geändert hat, so ist:

$$V + F - b - x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad Q),$$

worin F sich aus Gl. C) berechnet. Da $b - F = V - x$, so gibt die erste Differenz den noch bestehenden Rückstand der $E - N$ an.

VIII. Die Tabellen.

§ 19. An das Ende dieser Abhandlung sind die Versuchsergebnisse bei den einzelnen hier durchforschten Substanzen in Tabellen angefügt. Obgleich hiedurch die Arbeit nicht unwesentlich an Umfang zunimmt, glaubte ich dennoch die Versuchsergebnisse wenigstens soweit mitteilen zu sollen, dass sie in den wesentlichsten Punkten eine Kontrolle und etwaige weitere Ausnützung gestatten.

Für jede untersuchte Substanz ergeben sich 2 Tabellen. Die eine, mit A bezeichnet, gibt immer die Versuchsergebnisse bei der ersten, die andere mit B bezeichnet, bei der fünften Abkühlung an. Diese Tabellen sind der Mustertabelle in § 6 ganz konform angelegt, soweit zulässig, jedoch verkürzt. In den mit B kennbar gemachten Tabellen sind die Rubriken ν , z , $(T_0$ und $T_1)$, $(\tau_0$ und $\tau_1)$ weggelassen. Von den Temperaturen des Drahtes ist nur mehr jene t angegeben, die dem Mittel zwischen $\nu = 4$ und $\nu = 5$ jeder N entspricht. Bei den Tabellen A fehlen ausserdem auch noch die Rubriken l , φ und δ , da bei der ersten Abkühlung befürchtet werden musste, es möchten in den beobachteten Werten l auch Streckungen enthalten sein. Wie noch gezeigt werden wird, ist die Befürchtung nicht durchwegs begründet, aber jedenfalls bieten die Tabellen B ein höheres Interesse dar als die Tabellen A. Es wird nochmal daran erinnert, dass die Zahlen λ , l , φ und δ das 1000fache der von π_2 kg hervorgebrachten Verlängerungen sind, gemessen in mm, bei einer Drahtlänge von 1^m . Nur bei den organischen Substanzen sind die Verlängerungen in einfachen Skalenteilen angegeben.

3) Kupfer II. B. — Berechnet aus N I bis N VIII.

$$\gamma = -0,0009983.$$

N	t	λ'	ρ'	δ'	λ beob.	λ berech.	Δ
I ^a	10,7	77,20	2,45	5,38	71,82	—	—
I	96,9	85,00	6,28	13,76	71,24	0,7563	+ 0,0002
II	75,4	82,80	6,27	13,70	69,10	0,7363	— 0,0022
III	64,3	81,70	4,21	9,24	72,40	0,7271	— 0,0027
IV	50,7	80,80	4,06	8,89	71,90	0,7190	— 0,0003
V	40,9	79,90	3,63	7,96	71,94	0,7112	— 0,0008
VI	30,5	79,25	2,53	5,53	73,72	0,7052	+ 0,0009
VII	22,5	78,45	2,10	4,60	73,85	0,6981	— 0,0005
VIII	11,3	77,60	1,72	3,76	73,84	0,6905	— 0,0002

4) Eisen III. B. — Berechnet aus N II bis N VIII.

$$\gamma = -0,0003760.$$

N	t	λ'	ρ'	δ'	λ beob.	λ berech.	Δ
I ^a	7,5	52,51	0,02	0,03	52,48	—	—
I	97,2	54,67	1,61	2,48	52,19	—	—
II	76,4	54,73	1,82	2,80	51,93	0,8221	+ 0,0001
III	66,4	54,46	0,74	1,14	53,32	0,8180	— 0,0008
IV	57,5	54,34	0,83	1,23	53,06	0,8162	+ 0,0002
V	47,1	54,10	0,79	1,22	52,88	0,8126	— 0,0002
VI	36,9	53,84	0,73	1,12	52,73	0,8087	— 0,0009
VII	28,6	53,71	0,52	0,78	52,93	0,8067	— 0,0002
VIII	19,3	53,54	0,26	0,40	53,14	0,8042	+ 0,0000
IX	6,9	52,60	0,55	0,85	51,75	—	—

5) Messing B. — Berechnet aus N I bis N IX.

$$\gamma = -0,0004726.$$

N	t	λ'	ρ'	δ'	λ beob.	λ berech.	Δ
I ^a	8,6	93,96	0,57	0,96	93,00	—	—
I	96,9	98,14	1,53	2,61	95,53	0,7741	— 0,0005
II	80,8	97,29	2,34	3,98	93,31	0,7674	— 0,0011
III	66,8	96,89	— 1,31	— 2,22	99,11	0,7642	+ 0,0010
IV	53,5	95,99	0,96	1,63	94,36	0,7571	— 0,0012
V	40,1	95,57	1,79	3,04	92,53	0,7538	— 0,0011

6) Neusilber B. — Berechnet aus N I bis N V.

$$\gamma = -0,0006536.$$

N	t	λ'	ρ'	δ'	λ beob.	λ berech.	Δ	
Ia	7,0	71,55	1,18	0,99	70,56	—	—	
I	56,3	74,51	1,92	1,58	72,93	0,2645	0,2640	+ 0,0005
II	45,4	73,61	0,82	0,68	72,93	0,2613	0,2620	— 0,0007
III	32,0	73,30	2,73	2,25	71,05	0,2602	0,2597	+ 0,0005
IV	18,7	72,36	3,80	3,15	69,21	0,2568	0,2574	— 0,0006
V	6,9	72,12	1,04	0,87	71,25	0,2560	0,2554	+ 0,0006

§ 25. Bei den Metallen Zink und Blei wurde, da die Linie B_λ es zweifelhaft erscheinen liess, ob Gl. R) anwendbar sei, γ ohne Benützung der Methode der kleinsten Quadrate auf nachfolgende Weise annähernd bestimmt, nachdem bei den übrigen Metallen erprobt worden war, dass γ auf beide Arten berechnet, in der ersten Stelle nicht abweicht. Eine höhere Genauigkeit kann aber von den Versuchsergebnissen bei diesen Metallen überhaupt nicht erwartet werden.

1) Zink B. — Berechnet aus N II und N VI ergab sich:

$$\gamma = -\frac{129,0 - 105,3}{105,3(71,6 - 4,3)} = -0,0033.$$

N	t	λ'	ρ'	δ'	λ beob.	λ berech.	Δ	
Ia	5,5	97,0	37,4	376,6	— 279,6	—	—	
I	97,2	120,6	56,9	574,2	— 453,6	0,1320	0,1527	— 0,0207
II	71,6	117,9	25,1	253,3	— 135,4	0,1290	0,1358	— 0,0068
III	40,2	105,9	67,3	677,5	— 571,6	0,1159	0,1281	— 0,0122
IV	20,1	100,3	63,1	636,9	— 536,6	0,1097	0,1111	— 0,0014
V	8,8	98,7	37,4	376,7	— 278,0	0,1080	0,1068	+ 0,0012
VI	4,3	96,2	20,2	203,2	— 107,0	0,1053	0,1052	+ 0,0001

2) Blei B. — Berechnet aus N III und N V.

$$\gamma = -\frac{86,6 - 76,7}{76,7(26,9 + 0,6)} = -0,0047.$$

N	t	λ'	ρ'	δ'	λ beob.	λ berech.	Δ	
I	74,1	523,8	104,4	207,1	316,7	0,0923	0,1053	— 0,0130
II	52,8	512,5	6,8	13,6	498,8	0,0903	0,0934	— 0,0031
III	26,9	491,5	32,9	65,3	426,2	0,0866	0,0785	+ 0,0081
IV	12,5	464,8	19,9	39,7	425,1	0,0819	0,0729	+ 0,0090
V	— 0,6	435,3	17,0	33,5	401,8	0,0767	0,0684	+ 0,0083

Tabelle XVIII.

Untersuchte Substanz: Neusilber. B.

$\pi_1 = 4,2890 \text{ kg.}$

$\kappa = 0,828.$

$d_1 = 1,094 \text{ m.}$

$\pi_2 = 3,5497 \text{ kg.}$

$\alpha_{b0} = 0,0000174.$

$q = 0,7344 \text{ qmm.}$

$d = 0,967 \text{ mm.}$

N	v	t	a _v	b _v	c _v	λ	l	q	δ	Dat.
Ia	1,5	7,0	— 20,0	2,7 2,7 2,7 2,8 2,8	— 19,3 — 19,3 — 19,3 — 19,2 — 19,2	254,0	4,2	3,5	250,5	6/1 84
I	1,3	56,3	60,0	82,9 82,0 81,2 80,6 79,9	59,4 58,8 58,0 57,2 56,8	264,5	6,8	5,6	258,9	6/1 84
II	1,2	45,4	43,8	66,6 66,0 65,2 64,8 64,0	43,5 43,0 42,3 41,8 41,0	261,3	2,9	2,4	258,9	6/1 84
III	1,3	32,0	22,0	44,8 44,3 44,0 43,8 43,3	22,0 21,7 21,2 21,0 20,7	260,2	9,7	8,0	252,2	6/1 84
IV	1,3	18,7	— 1,0	21,8 21,7 21,7 21,3 21,2	— 0,8 — 0,9 — 1,0 — 1,0 — 1,1	256,8	13,5	11,2	245,6	6/1 84
V	1,2	6,9	— 21,1	1,3 1,4 1,4 1,5 1,5	— 20,8 — 20,8 — 20,7 — 20,7 — 20,7	256,0	3,7	3,1	252,9	7/1 84

Zu A. Miller's Abhandlung.



