Ueber den

Einfluss dioptrischer Fehler des Auges

auf das

Resultat astronomischer Messungen.

Von

H. Seeliger.

In einer Zeit, wo die astronomischen Messungen einen hohen Grad von Feinheit erlangt haben und wo man bestrebt ist nicht nur die zufälligen Beobachtungsfehler durch Vervollkommnung der instrumentalen Hülfsmittel auf das äusserste Mass von Kleinheit zurückzuführen, sondern auch die persönlichen und in systematischer Weise auftretenden Fehler eingehend zu studieren, dürfte es nicht unangemessen sein, den Einfluss der Fehler des dioptrischen Apparates des Auges auf astronomische Messungen zu untersuchen. Die folgenden Blätter enthalten eine Beleuchtung der Sachlage für Augen, deren Hornhaut mit „Astigmatismus“ behaftet ist, ein Fall, der häufig genug vorkommt. Dass aus dieser Fehlerquelle systematisch wirkende Fehler entstehen können, hat bereits Herr Abbe in einer sehr lesenswerthen und wichtigen Note[1]) bemerkt. Dort wird auch auf den Einfluss der Abweichungen der angewandten Oculare von einer vollkommenen Gestalt, welcher in ähnlicher Weise wirkt, aufmerksam gemacht. In der folgenden Untersuchung beschränke ich mich indess strenge auf das in der Ueberschrift genannte Thema. Dieselbe ist in vier Abschnitte getheilt. Im ersten werden einige dioptrische Ueberlegungen in einer Form ausgeführt, wie sie weiterhin verwendet werden. Der zweite Abschnitt enthält die Grundlage der Theorie der Abbildung in einem astigmatischen Auge und deren Anwendung unter Anderm auf die Messungen mit einem Höheninstrumente. Im dritten und vierten Abschnitt wird schliesslich das Heliometer und das Fadenmikrometer behandelt.

---

1) Ueber mikrometrische Messung mittelst optischer Bilder. Sitzungsberichte der Jenáischen Gesellschaft für Medicin und Naturwissenschaft 1878.

§ 1.

Es sollen zunächst einige Festsetzungen über die dioptrische Wirkung astronomischer Fernröhre getroffen werden. Hierbei werden wir uns kurz fassen können, weil die anzuführenden Formeln sich leicht aus der allgemein bekannten Gauss'schen Theorie der Cardinalpunkte eines Linsensystems ableiten lassen.

Das Objectiv mit der Brennweite f, darf als unendlich dünn betrachtet werden. Die beiden Hauptebenen desselben fallen also zusammen. Für das Ocular wird diese Annahme nicht erlaubt sein. Die Entfernung seiner beiden Hauptebenen sei H und zwar positiv gezählt, wenn die erste Hauptebene näher beim Objectiv steht als die zweite. Die Hauptbrennweite des Oculares sei φ. Ferner werde eine Ebene A senkrecht zur optischen Axe des Systems und in einer Entfernung e vom zweiten Hauptpunkte des Oculares (negativ in der Richtung zum Objectiv hin gezählt) gelegt. In diese Ebene wird später die Hornhaut des beobachtenden Auges gelegt werden. Die Strahlen eines Sternes, also eines unendlich entfernten Objectes, werden nach erfolgter Brechung im Fernrohr aus der Ebene A eine Figur herausschneiden, welche bestimmt werden soll. Die Richtung nach dem Sterne bilde mit der optischen Axe des Objectives den Winkel x. Ist x sehr klein, so wird die genannte Figur offenbar ein Kreis sein. Die Entfernung seines Mittelpunktes von der Axe sei z und sein Radius δ. Die Stellung des Oculars werde durch die Entfernung ξ seiner ersten Hauptebene vom Brennpunkte des Objectives angegeben. z ist die Entfernung von der Axe, in welcher derjenige Strahl nach seiner Brechung die Ebene A schneidet, der vor der Brechung durch den optischen Mittelpunkt des Objectives geht und es werde positiv gezählt, wenn es auf derselben Seite der Ebene liegt, welche senkrecht zu der Ebene, in welcher der Lichtstrahl bleibt, und durch die optische Axe gelegt wird. Es findet sich dann leicht:

$$z = -\operatorname{tg} x \cdot \left\{(f+\xi)\left(1-\frac{e}{\varphi}\right)+e\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Für praktische Zwecke wird es meistens genügen $\xi = \varphi$ zu setzen, in welchem Fall:

$$z = -\operatorname{tg} x \cdot \left\{f \cdot \frac{\varphi - e}{\varphi} + \varphi\right\}$$

wird.

Bringt man noch ein rechtwinkliges Coordinatensystem in Anwendung, dessen ξ-Axe in der optischen Axe und dessen $\eta\zeta$-Ebene senkrecht darauf liegt und ist π der Winkel zwischen der $\xi\zeta$-Ebene und der Ebene, welche durch die ξ-Axe und die Richtung nach dem Sterne geht, so sind die Coordinaten des Mitelpunktes des genannten Kreises:

$$\left.\begin{array}{l}\eta = z \sin \pi \\ \zeta = z \cos \pi\end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Zur Bestimmung von δ wird man in bekannter Weise so verfahren: Man verfolge einen Strahl, welcher vom Rande des Objectives zum Brennpunkte desselben geht. Derselbe wird nach der Brechung im Ocular die Ebene A in einem Punkte schneiden, der um δ von der Systemaxe absteht. Ist also d der Radius der freien Objectivöffnung, so wird:

$$\delta = \frac{d}{f} \cdot \left\{ \xi + e \left(\frac{\varphi - \xi}{\varphi} \right) \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Ist $e = \varphi$ so ergibt sich hieraus die bekannte Formel, welche die Vergrösserung des Fernrohres bestimmt.

Es soll nun die analoge Aufgabe für das Heliometer behandelt werden. Die Ebene A wird hier von den austretenden Strahlen in einem Halbkreise geschnitten, dessen Radius wieder (sehr nahe) durch die Formel (3) bestimmt wird.

In der Rotationsaxe des Heliometers liege die optische Axe des Oculares, während sich die Heliometerhälften senkrecht dagegen bewegen sollen. Es werde nun die X-Axe eines Coordinatensystemes in die optische Axe des Oculares gelegt und der Anfang der Zählung der x-Coordinaten in die Ebene A, negativ in der Richtung zum Objectiv. Die Y- und Z-Axe seien beliebig in einer dazu senkrechten Ebene gelegen. Sind dann X_0 Y_0 Z_0 die Coordinaten des Mittelpunktes M der betreffenden Objectivhälfte, welche einen Stern im Punkte S, dessen Coordinaten x y z seien, abbildet, so wird $x - X_0 = f$ die Brennweite des Objectives. Um nun die Coordinaten η_0 ζ_0 des Mittelpunktes des genannten Halbkreises zu finden, haben wir die Coordinaten des Durchschnittspunktes zu suchen zwischen dem durch die Punkte M und S gehenden Strahl nach seiner Brechung im Ocular und der Ebene A. Zu diesem Zwecke hat man bekanntlich folgende Construction auszuführen: Der Strahl MS schneide die erste Hauptebene des Oculares im Punkte p′. Man ziehe hierauf durch p′ eine Parallele zur optischen Axe, welche die zweite Hauptebene in p″ schneidet. Durch p″ ziehe man eine Parallele zu der Verbindungsgeraden zwischen S′ und dem ersten Hauptpunkte, so schneidet diese die Ebene A in dem gesuchten Punkte. S′ ist hierbei der Durchschnittspunkt des Strahles MS mit der ersten Brennebene des Oculares. Uebersetzt man diese Construction in analytische Zeichen, bezeichnet mit $\eta_o\ \zeta_o$ die gesuchten Coordinaten, während die übrigen Buchstaben die frühere Bedeutung haben, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} \eta_o &= y\left\{1+\frac{\xi+e}{f}-\frac{e(f+\xi)}{f\varphi}\right\}-\frac{Y_0}{f}\left\{\xi+e-\frac{\xi e}{\varphi}\right\} \\ \zeta_o &= z\left\{1+\frac{\xi+e}{f}-\frac{e(f+\xi)}{f\varphi}\right\}-\frac{Z_0}{f}\left\{\xi+e-\frac{\xi e}{\varphi}\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (4)$$

Ist weiter π der Winkel, den die Schnittlinie des Heliometerobjectives (von welcher angenommen wird, dass sie immer durch die Rotationsaxe gehe) mit der Z-Axe bildet, so wird die Gleichung der geradlinigen Begrenzung des auf A erzeugten hellen Halbkreises sein:

$$(\eta-\eta_o)\cos\pi-(\zeta-\zeta_o)\sin\pi=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

denn diese ist offenbar parallel der Schnittlinie und geht jedenfalls durch den Punkt η_o, ζ_o.

Da von den Fehlern der Linsen abgesehen werden soll, scheinen die aus dem Oculare tretenden Strahlen von einem Punkte zu kommen. Da dieser virtuelle Vereinigungspunkt im Folgenden vorkommt, so soll seine Lage bestimmt werden. Das zuletzt erwähnte Coordinatensystem soll jetzt und im Folgenden stets angewandt werden. Es liege also die X-Axe in der optischen Axe des Oculares, der Anfang in der Ebene A und die positive Richtung gehe vom Objective fort. Es seien ferner stets x y z die Coordinaten des vom Objective entworfenen Sternbildes, $x_1\ y_1\ z_1$ die Coordinaten des virtuellen Vereinigungspunktes der aus dem Oculare austretenden Strahlen. Dann findet sich aus den Grundregeln der Gauss'schen Theorie:

$$\left.\begin{aligned} -x_1 &= e + \frac{\varphi\xi}{\varphi-\xi} \\ y_1 &= -y \cdot \frac{x_1+e}{\xi} = y \cdot \frac{\varphi}{\varphi-\xi} \\ z_1 &= -z \cdot \frac{x_1+e}{\xi} = z \cdot \frac{\varphi}{\varphi-\xi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Zum Schlusse sei noch erwähnt, dass die in diesem Paragraphen eingeführten Bezeichnungen im Folgenden stets beibehalten werden sollen.

§ 2.

Wird das Bild eines Sternes durch ein Fernrohr beobachtet, so tritt an die Stelle der Ebene A die Hornhaut des menschlichen Auges und die auf dieselbe auffallenden Strahlen erzeugen auf der Netzhaut das Bild, welches wahrgenommen wird. Das menschliche Auge ist aber in optischer Beziehung ein durchaus nicht vollkommener Apparat und die Bilder auf der Netzhaut entsprechen also auch nicht ganz den abgebildeten Gegenständen. Ein fehlerfreies Auge kann man im Grossen und Ganzen ersetzen[1]) durch eine Kugelfläche, welche die lichtbrechende Substanz des Glaskörpers umschliesst. Die Strahlen eines leuchtenden Punktes werden in einem solchen Apparat (nur kleine Einfallswinkel vorausgesetzt, welche Einschränkung im Folgenden durchweg beibehalten werden soll) wieder in einem Punkte vereinigt. Diese Wirkung tritt nun aber erfahrungsgemäss nur in Ausnahmefällen strenge ein, vielmehr werden die Strahlen eines Punktes in der Regel nirgends im Auge wieder in einem Punkte vereinigt. Diese Unvollkommenheit des Auges wird als Astigmatismus bezeichnet. Derselbe besteht also darin, dass Strahlenbündel, welche auf verschiedene Theile der Hornhaut auffallen, sich in verschiedenen Punkten vereinigen. Der Hauptsache nach wird man nun, wie aus den Erfahrungen der Ophthalmologen hervorzugehen scheint, den Einflusss des Astigmatismus überblicken können, wenn man das schematische Auge bestehen lässt aus dem lichtbrechenden Medium, welches vorne (an Stelle der Hornhaut) begrenzt wird von einer von der Kugel verschiedenen

1) Vergl. Helmholtz, Handbuch der physiologischen Optik, 1. Auflage pg. 69.

Oberfläche. Wir haben also die Brechung von Strahlen an einer beliebigen Grenzfläche zu verfolgen. Da ferner durch die Bewegung der Augen immer erreicht wird, dass die gebrochenen Strahlen auf den sogenannten gelben Fleck, also immer auf denselben Theil der Netzhaut, auffallen, so wird es vollständig gerechtfertigt sein, die Netzhaut als das Stück einer Ebene zu betrachten, welche mit dem Augapfel fest verbunden ist.

Auf diesen Voraussetzungen beruht die folgende Untersuchung. Dieselben dürften gegenwärtig, wo diese Fragen zum ersten Male besprochen werden, ausreichend sein, weil eben der Astigmatismus der Hornhaut der bei weitem am häufigsten vorkommende Fehler ist. Modifikationen der hier gegebenen Behandlung können aber sehr wohl nothwendig werden.

Die nun zu behandelnde Aufgabe, die Brechung eines Lichtstrahles beim Uebergang in ein anderes von einer beliebigen Fläche begrenztes Medium zu verfolgen, ist schon öfter behandelt worden. Ich habe darauf verzichtet auf fremde Darstellungen zurückzugreifen, weil sich mir ohne Schwierigkeiten die Grundgleichungen in einer Form darboten, die mir für den angestrebten Zweck nichts zu wünschen zu lassen scheinen. Als specieller Fall ergeben sich aus ihnen Formeln, welche Reusch in seiner verdienstvollen Schrift: „Theorie der Cylinderlinsen“ [1]) abgeleitet hat. Ein daselbst angewendeter Kunstgriff, hat auch hier durch Einführung der Gleichung (4) Verwendung gefunden.

Fällt ein Strahl E auf ein Element der Trennungsfläche zweier Medien, der mit der Normalen der Fläche den Winkel β bildet, so wird der in derselben Ebene gelegene gebrochene Strahl G mit der Normalen den Winkel α bilden und es ist

$$\sin\beta = n \sin\alpha$$

wenn n den Brechungsexponenten bedeutet. Man lege der Betrachtung ein beliebiges rechtwinkeliges Coordinatensystem X, Y, Z zu Grunde. Ferner werde um den Punkt, in welchem der auffallende Strahl die Fläche trifft, als Mittelpunkt eine Kugel mit beliebigem Radius gelegt und ausserdem in denselben ein dem früheren parallel gerichtetes Coordinatensystem X_0 Y_0 Z_0. Jede Richtung wird dann durch einen Punkt der Kugel repräsentirt, nämlich

1) Leipzig 1868.

den Durchschnittspunkt beider. Dieser Punkt werde mit demselben Buchstaben bezeichnet, wie die betreffende Richtung, so dass z. B. X_o der Punkt ist, in welchem die X_o-Axe die Kugel schneidet. Nennt man nun weiter $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ die Winkel, welche die Normale, der einfallende und gebrochene Strahl mit der Z_o-Axe bildet, ψ, ψ_1, ψ_2 die Winkel, welche die Projectionen dieser drei Richtungen auf die $Y_o\,X_o$-Ebene mit der X_o-Axe bilden und σ den Winkel bei N in dem sphärischen Dreiecke $N\,E\,Z_o$, so ergiebt sich:

$$\sin\beta \sin\sigma = \sin\gamma_1 \sin(\psi_1 - \psi)$$
$$\sin\alpha \sin\sigma = \sin\gamma_2 \sin(\psi_2 - \psi)$$

woraus

$$n = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\sin\gamma_1 \sin(\psi_1 - \psi)}{\sin\gamma_2 \sin(\psi_2 - \psi)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Sind weiter $x_o\,y_o\,z_o$ die Coordinaten des Kugelmittelpunktes also der Eintrittsstelle des Strahles, ferner $x_1\,y_1\,z_1$ und $x_2\,y_2\,z_2$ die Coordinaten eines Punktes des einfallenden resp. des gebrochenen Strahles, welcher von der Grenzfläche um die Strecke ϱ_1 resp. ϱ_2 absteht, so ist

$$\begin{array}{l|l} x_1 - x_0 = \varrho_1 \sin\gamma_1 \cos\psi_1 & x_2 - x_0 = \varrho_2 \sin\gamma_2 \cos\psi_2 \\ y_1 - y_0 = \varrho_1 \sin\gamma_1 \sin\psi_1 & y_2 - y_0 = \varrho_2 \sin\gamma_2 \sin\psi_2 \\ z_1 - z_0 = \varrho_1 \sin\gamma_1 & z_2 - z_0 = \varrho_2 \sin\gamma_2 \end{array}$$

Wenn nun noch $\varphi(x, y, z) = 0$ die Gleichung der Trennungsfläche ist, so findet man für die Richtungswinkel der Normalen im Punkte $x_o\,y_o\,z_o$:

$$\sin\gamma \cos\psi = C \cdot \varphi'(x_o)$$
$$\sin\gamma \sin\psi = C \cdot \varphi'(y_o)$$
$$\cos\gamma \qquad = C \cdot \varphi'(z_o)$$
$$C^2 = \frac{1}{\varphi'^2(x_0) + \varphi'^2(y_0) + \varphi'^2(z_0)}$$

Mit Hülfe dieser Gleichung lässt sich (1) schreiben:

$$n = \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \cdot \frac{(y_1 - y_0)\,\varphi'(x_0) - (x_1 - x_0)\,\varphi'(y_0)}{(y_2 - y_0)\,\varphi'(x_0) - (x_2 - x_0)\,\varphi'(y_0)} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Vertauschen wir hierin überall die y mit z, so muss (2) offenbar ungeändert bleiben. Es muss also auch:

$$n = \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \cdot \frac{(z_1 - z_0)\,\varphi'(x_0) - (x_1 - x_0)\,\varphi'(z_0)}{(z_2 - z_0)\,\varphi'(x_0) - (x_2 - x_0)\,\varphi'(z_0)} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Etwas einfacher kann man die beiden letzten Gleichungen schreiben, wenn man die völlig willkührlichen Strecken ϱ_1, ϱ_2 so wählt, dass:

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Dann ergiebt sich also:

$$\left.\begin{array}{l} (x_2 - x_1)\,\varphi'(y_0) = (y_2 - y_1)\,\varphi'(x_0) \\ (x_2 - x_1)\,\varphi'(z_0) = (z_2 - z_1)\,\varphi'(x_0) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Die Gleichungen (4) und (5) bestimmen den gebrochenen Strahl, wenn der einfallende gegeben ist. Die Gleichungen des ersteren sind:

$$\frac{x - x_0}{x_2 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_2 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_2 - z_0}$$

Ich werde nun, wie es auch sonst bei ähnlichen Untersuchungen zu geschehen pflegt[1]), annehmen, dass nur sehr wenig gegen die X-Axe geneigte Strahlen in Betracht zu ziehen seien, wenn man unter der X-Axe die Sehrichtung des Auges versteht. Dann wird es in erster Annäherung erlaubt sein, die Quadrate von y und z gegenüber den in Frage kommenden x-Coordinaten zu vernachlässigen. Legt man ferner das Coordinatensystem so, dass der Anfang in die Fläche zu liegen kommt, so wird man sich bei der nicht bedeutenden Krümmung der Hornhaut erlauben dürfen, $x_0 = o$ zu setzen. Für die Praxis werden diese Annahmen schon desshalb ausreichend sein, weil bei stärkeren Vergrösserungen, die doch meistens bei Präcisionsbeobachtungen in Anwendung kommen, der auf die Hornhaut auffallende Lichtkegel sehr schmal sein wird. Es kommt also nur ein kleines und zwar nahe immer dasselbe Stück der Hornhaut zur Verwendung. Jetzt reducirt sich aber die Gleichung (4) auf

$$x_2 = n\,x_1$$

Die Gleichungen (5) werden jetzt:

$$y_2 - y_1 = (n - 1) \cdot x_1 \cdot \frac{\varphi'(y_0)}{\varphi'(x_0)}$$

$$z_2 - z_1 = (n - 1) \cdot x_1 \cdot \frac{\varphi'(z_0)}{\varphi'(x_0)}$$

1) So auch bei Reusch a. a. O.

und der gebrochene Strahl wird bestimmt durch:

$$y - y_0 = x\left\{\frac{n-1}{n}\cdot\frac{\varphi'(y_0)}{\varphi'(x_0)} + \frac{y_1 - y_0}{n\,x_1}\right\}$$

$$z - z_0 = x\left\{\frac{n-1}{n}\cdot\frac{\varphi'(z_0)}{\varphi'(x_0)} + \frac{z_1 - z_0}{n\,x_1}\right\}$$

Es wäre aber unnöthig, diese Formeln, so einfach sie auch sind, anzuwenden. Der kleine Theil der Fläche $\varphi = o$, welcher bei astronomischen Beobachtungen in Frage kommen kann, wird nämlich sachgemäss durch das Stück einer Fläche vom 2. Grade zu ersetzen sein. Man wird dadurch wenigstens unter gewöhnlichen Umständen keine neuen Ungenauigkeiten einführen, weil ohnehin schon die zweiten Potenzen von y und z vernachlässigt worden sind und ausserdem $x_0 = o$ gesetzt worden ist. Man wird also setzen dürfen, da $\varphi = o$ werden muss für $x = y = z = o$:

$$\varphi = a_{00}x^2 + 2a_{01}xy + 2a_{02}xz + 2a_{03}x + a_{11}y^2 + 2a_{12}yz + 2a_{13}y + \\ + a_{22}z^2 + 2a_{23}z$$

Für $x_0 = o$ wird hieraus:

$$\varphi'(x_0) = 2a_{01}y_0 + 2a_{02}z_0 + 2a_{03}$$
$$\varphi'(y_0) = 2a_{11}y_0 + 2a_{12}z_0 + 2a_{13}$$
$$\varphi'(z_0) = 2a_{12}y_0 + 2a_{22}z_0 + 2a_{23}$$

Man hat nun die Quotienten $\frac{\varphi'(y_0)}{\varphi'(x_0)}$ und $\frac{\varphi'(z_0)}{\varphi'(x_0)}$ zu entwickeln und die Glieder zweiter Ordnung fortzulassen. Hierbei soll indessen die auf durchaus plausiblen Annahmen beruhende Bedingung festgehalten werden, dass a_{03} nicht unendlich klein sei. Das Resultat der einfachen Rechnung lässt sich dann so zusammenfassen. Man setze:

$$\left.\begin{array}{l|l}
(n-1)\cdot\frac{a_{13}}{a_{03}} = \alpha & (n-1)\cdot\frac{a_{23}}{a_{03}} = \alpha' \\[2ex]
(n-1)\cdot\frac{a_{11}a_{03} - a_{01}a_{13}}{a^2_{03}} = \beta & (n-1)\cdot\frac{a_{12}a_{03} - a_{01}a_{23}}{a^2_{03}} = \beta' \\[2ex]
(n-1)\cdot\frac{a_{12}a_{03} - a_{02}a_{13}}{a^2_{03}} = \gamma & (n-1)\cdot\frac{a_{22}a_{03} - a_{02}a_{03}}{a^2_{03}} = \gamma'
\end{array}\right\}\quad(6)$$

Dann werden die Gleichungen des gebrochenen Strahles:

$$\left.\begin{aligned} n(y - y_0) &= x\left\{\alpha + \frac{y_1}{x_1} + \left(\beta - \frac{1}{x_1}\right)y_0 + \gamma z_0\right\} \\ n(z - z_0) &= x\left\{\alpha' + \frac{z_1}{x_1} + \beta' y_0 + \left(\gamma' - \frac{1}{x_1}\right)z_0\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (7)$$

Giebt man hier dem x einen bestimmten Werth C, so sind y und z die Coordinaten des Durchschnittes der diesem x entsprechenden zur yz-Ebene parallelen Ebene mit dem gebrochenen Strahl.

Zur Bestimmung dieser Coordinaten setze man also:

$$\left.\begin{array}{l|l} m = \dfrac{y_1 + \alpha x_1}{n x_1} \cdot C & m' = \dfrac{z_1 + \alpha' x_1}{n x_1} C \\ p = 1 + \dfrac{\beta x_1 - 1}{n x_1} C & p' = \dfrac{\beta' \cdot C}{n} \\ q = \dfrac{\gamma \cdot C}{n} & q' = 1 + \dfrac{\gamma' x_1 - 1}{n x_1} C \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (8)$$

wodurch man erhält:

$$\left.\begin{aligned} y &= m + p\, y_0 + q\, z_0 \\ z &= m' + p' y_0 + q' z_0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Dieses sind die höchst einfachen Grundgleichungen, welche den folgenden Betrachtungen zu Grunde liegen.

Es gehe nun von einem leuchtenden Punkte $x_1\, y_1\, z_1$ ein schmales Strahlenbündel aus. Da sämmtliche Strahlen nur wenig gegen die X-Axe geneigt sein sollen, so werden dieselben die Hornhaut innerhalb eines Kreises treffen, dessen Radius δ und dessen Mittelpunktcoordinaten η_0, ζ_0 in § 1 bestimmt worden sind. Nach der Brechung werden sämmtliche Strahlen innerhalb einer Fläche liegen, deren Durchschnitt mit der Ebene $x = C$, als welche von nun ab die Netzhaut verstanden werden soll, eine Ellipse ist. In der That haben wir aus (9) y_0 und z_0 zu eliminiren mit Hülfe der Gleichung:

$$(y_0 - \eta_0)^2 + (z_0 - \zeta_0)^2 = \delta^2$$

woraus als Gleichung der genannten Ellipse hervorgeht:

$$\left.\begin{aligned}(p'q - pq')^2\delta^2 = [(p'y - pz) - (mp' - m'p) - (p'q - pq')\,\zeta_0]^2 \\ + [(q'y - qz) - (mq' - m'q) + (p'q - pq')\,\zeta_0]^2\end{aligned}\right\} \quad (9_a)$$

Die Coordinaten $\eta_1\ \zeta_1$ des Mittelpunktes dieser Ellipse lassen sich ohne weiteres hinschreiben:

$$\left.\begin{aligned}\eta_1 &= m + (p\,\eta_0 + q\,\zeta_0) \\ \zeta_1 &= m' + (p'\eta_0 + q'\zeta_0)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Nach bekannten Regeln findet sich, wenn a und b die beiden halben Hauptaxen der Ellipse (9_a) bedeuten:

$$\left.\begin{aligned}ab &= \pm(pq' - p'q)\,\delta^2 \\ a^2 + b^2 &= \delta^2\{p^2 + q^2 + p'^2 + q'^2\}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Ihr Flächeninhalt ist also $= o$ wenn:

$$pq' - p'q = o \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Dieses findet statt, wenn sich die Ellipse auf eine gerade Linie zusammenzieht. In der That zerfällt jetzt die Gleichung der Ellipse in die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned}p'y - pz &= mp' - m'p \\ q'y - qz &= mq' - m'q\end{aligned}$$

welche nur eine Gerade darstellen, weil die zweite Gleichung aus der ersten mit Hülfe von (12) identisch folgt:

Die Bedingung (12) schreibt sich mit Hülfe von (8):

$$o = 1 + \frac{(\beta + \gamma')\,x_1 - 2}{n\,x_1}\,C + \frac{(\beta x_1 - 1)(\gamma' x_1 - 1) - \beta'\gamma\,x_1^{\,2}}{n^2\,x_1^{\,2}} \cdot C^2$$

Für zwei im Allgemeinen von einander verschiedene C wird sich also die Ellipse in eine Gerade zusammenziehen, durch welche sämmtliche Strahlen gehen. Es giebt demnach zwei in verschiedenen zur X-Axe senkrechten Ebenen gelegene gerade Brennlinien.

Ist die Fläche φ eine Kugel:

$$(x - r)^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

so wird $p = q'$, $p' = q = o$. Die Bedingung (12) wird hier einfach $p = o$ und jetzt findet bekanntlich eine völlige Vereinigung der Strahlen statt, wenn C die Bedingung

$$\gamma = o \text{ oder } -\frac{1}{x_1} + \frac{n}{C} = \frac{n-1}{r}$$

erfüllt, welche Formel mit den ersten Resultaten der Dioptrik übereinstimmt.

Im Allgemeinen wird also ein leuchtender Punkt ausserhalb des Auges auf der Netzhaut durch eine Zerstreuungsellipse dargestellt und der Mittelpunkt dieser ist durch (10) gegeben. Man wird nun offenbar den Ort des leuchtenden Punktes dorthin verlegen, wo er sich befinden würde, wenn sein Bild bei vollständig punktförmiger Vereinigung im Mittelpunkte der genannten Zerstreuungsellipse wäre.

Die hier besprochenen Verhältnisse werden nun auch bei der Beobachtung mit astronomischen Fernrohren auftreten. Die Strahlen, welche das Ocular verlassen, kommen (von den Fehlern des Oculares abgesehen) aus einem Punkte, welcher in der deutlichsten Sehweite vom Auge entfernt ist. Dadurch, dass nur ganz bestimmte Strahlen, nämlich diejenigen, welche vom Objective gesammelt worden sind, in's Auge gelangen, hat der aus dem Oculare austretende Strahlenkegel eine kleine Oeffnung, und der Radius δ des auf der Hornhaut beleuchteten kleinen Kreises, sowie sein Mittelpunkt ist in § 1 bestimmt worden. Befindet sich nun im Brennpunkte desselben Fernrohres eine Marke, z. B. ein Fadenkreuz, so wird der Ort des eingestellten Objectes dadurch bestimmt, dass das Fadenkreuz mit dem Bilde eines Punktes des Objectes zur Deckung gebracht wird. Beide werden auf der Netzhaut als Zerstreuungsellipsen dargestellt, und die Beobachtung besteht darin, dass die Mittelpunkte dieser zur Deckung gebracht werden. Nennen wir $\eta\ \zeta$ und $\eta_o\ \zeta_o$ die Coordinaten der Mittelpunkte der genannten Ellipsen für den Stern, resp. das Fadenkreuz, so wird die Beobachtung das Resultat hervorbringen:

$$\eta = \eta_o, \qquad \zeta = \zeta_o$$

und mit Hülfe von (10)

$$\left.\begin{aligned} m + \sigma &= m_o + \sigma_o \\ m' + \sigma' &= m_o' + \sigma_o' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

worin unter σ die in der genannten Formel vorkommenden Klammergrössen verstanden sind, und alle sich auf das Fadenkreuz beziehenden Grössen durch den Index o kenntlich gemacht wurden.

Es soll der Einfachheit wegen angenommen werden, dass das Fadenkreuz sich genau im Brennpuncte des Objectives befinde. Bezeichnet dann $x_1\, y_1\, z_1$ und $x_1^\circ\, y_1^\circ\, z_1^\circ$ die Coordinaten der Vereinigungspunkte der aus dem Oculare austretenden Strahlen, so wird also $x_1 = x_1^\circ$ gesetzt werden müssen und die Formel (8) giebt mit (13):

$$\left.\begin{aligned} y_1 - y_1^\circ &= (\sigma_o - \sigma) \cdot \frac{n\, x_1}{C} \\ z_1 - z_o' &= (\sigma_o' - \sigma') \frac{n\, x_1}{C} \end{aligned}\right\}$$

und die Coordinaten des in der Brennebene des Objectives entstehenden Sternbildes $x\, y\, z$, sowie die des Fadenkreuzes $x^\circ\, y^\circ\, z^\circ$ sind entsprechend § 1, 6 durch die Gleichungen verbunden

$$\left.\begin{aligned} y - y^\circ &= (\sigma_o - \sigma) \frac{n\, x_1}{C} \cdot \frac{\varphi - \xi}{\varphi} \\ z - z^\circ &= (\sigma_o - \sigma') \frac{n\, x_1}{C} \cdot \frac{\varphi - \xi}{\varphi} \\ - x_1 &= e + \frac{\varphi\, \xi}{\varphi - \xi} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Da im Allgemeinen die hier vorkommenden Differenzgrössen $\sigma_o - \sigma$, $\sigma_o' - \sigma'$ von Null verschieden sind, so werden also vom Auge des Beobachters und dem angewandten Instrumente abhängige constante, sogenannte persönliche, Fehler entstehen. Es wird sich nun fragen, ob diese Fehler irgendwie bemerkbare Beträge erreichen können. Um ganz bestimmte Verhältnisse vor Augen zu haben, möge es sich darum handeln, mit einem Meridiankreise Declinationsbestimmungen zu machen. Dann soll die y-Coordinate so gewählt werden, dass ihr positives Wachsthum einer Declinationszunahme entspricht. Wir wollen ferner annehmen, was in der That sehr nahe stattfinden wird, dass $e = \varphi$ sei, dann ist die Correction der vom Faden angegebenen Declination δ

$$\Delta\delta = -(\sigma_o - \sigma) \frac{n}{C} \cdot \varphi$$

Denkt man sich weiter den Fall, dass die Axe des vom Sterne ausgesandten Strahlenkegels genau in der X-Axe des Coordinatensystems liege, so wird $\sigma = 0$ und

$$\sigma_0 = p\,\eta_0' + q\,\zeta_0'$$

wo η_0' und ζ_0' die Coordinaten des Mittelpunktes des vom Fadenkreuze auf der Hornhaut beleuchteten Kreises bedeutet. Oft (vergl. § 4) wird angenommen werden können, dass $\eta_0'\,\zeta_0'$ zusammenfallen mit den Coordinaten des Mittelpunktes des Diaphragmas, welches das Ocular zum Auge zu abzuschliessen pflegt. Setzt man der Einfachheit wegen voraus, dass $\zeta_0' = 0$ sei, so wird also:

$$\varDelta\,\delta = -\,p\,\eta_0' \cdot \frac{n}{C} \cdot \varphi$$

und wenn man $\varDelta\,\delta$ in Secunden, gemessen im Bogenmass am Himmel, ausdrückt:

$$\varDelta\,\delta = -\,p \cdot \eta_0' \cdot \frac{n}{C} \cdot \frac{\varphi}{f} \cdot 206265''$$

In § 3 wird beispielsweise ein schematisches Auge behandelt werden, bei welchem φ durch ein Paraboloid gegeben ist. Es wird dort gezeigt werden, dass

$$p\,\frac{n}{C} = \frac{\xi_0 - \xi}{\varphi \cdot \varphi}$$

wo ξ_0 die Entfernung der ersten Hauptebene des Oculares vom Brennpunkte des Objectives bedeutet, wenn die eine der beiden Brennlinien (pg. 677) genau auf die Netzhaut fällt. $\xi_0 - \xi$ ist im Mittel eine gewisse constante Grösse.

Setzt man noch $\varphi = 10$, $f = 2000$ (alles in Millimetern) so wird:

$$\varDelta\,\delta = -\,\eta_0\,(\xi_0 - \xi) \cdot (10.''3)$$

Nimmt man aber den gewiss nicht zu hoch gegriffenen Werth $\xi_0 - \xi = 0.05$, $\eta_0 = 0.5$ so wird

$$\varDelta\,\delta = -\,0''26.$$

Eine Correction, die schon sehr in's Gewicht fallen dürfte.

Die durch (14) angegebene Formel giebt also unter ganz plausiblen Annahmen sehr merkbare Correctionen. Die Grösse dieser Correction hängt wesentlich von den Quantitäten p, q, p', q' ab, diese aber wieder von der Beschaffenheit der Fläche $\varphi = o$. Diese Fläche ändert aber ihre Lage gegen das feste Coordinatensystem, je nachdem die Sehrichtung sich gegen die Primärstellung[1]) des Auges verschiebt. Im Allgemeinen wird die Correction (14) von der Lage des Beobachters gegen das Fernrohr abhängen, also mit der Declination (oder der Zenitdistanz) variiren. Diese Variation wird indess meistens nicht sehr merkbar werden, wenn nur auf eine bequeme Stellung des Kopfes geachtet wird; denn in der Nähe der Primärlage, welches eben die bequemste Stellung des Auges ist, ist die sogenannte Raddrehung des Auges nur gering, und die Fläche φ ändert ihre Lage gegen das Coordinatensystem nur wenig.

Am merklichsten werden indess diese Einflüsse im Zenith. Wenn man hier einmal mit den Füssen nach Süd liegend, das andere Mal in umgekehrter Lage beobachtend die Declination bestimmt, so werden beide Bestimmungen um den doppelten Betrag, den die Formel (14) angiebt, von einander abweichen. In unserem Beispiele wird diese Differenz $0''52$.

Solche Differenzen sind nun in der That oftmals von Beobachtern notirt worden; ihre Erklärung dürfte im Vorhergehenden vollständig enthalten sein; es folgt übrigens daraus, dass man bei der Benützung von Nullpunkten, welche aus Nadirbeobachtungen erhalten werden, einigermassen vorsichtig sein muss.

Für das normale Auge fallen bei ganz correcter Einstellung des Oculares alle Correctionsglieder fort. Die letzte Bedingung wird freilich kaum zu erreichen sein; jedenfalls aber wird man keinen Grund haben, anzunehmen, dass im Mittel aus vielen Beobachtungen sich eine bemerkbar falsche Stellung des Oculares herausstellen wird. Es scheint also doch wohl räthlich zu sein, dass ein astigmatisches Auge mit passender Brille bewaffnet vor das Fernrohr tritt. Jedenfalls wird dann stets, weil die Raddrehungen des Auges, wie erwähnt, immer klein sein werden, eine wesentliche Verkleinerung der persönlichen Fehler eintreten.

§ 3.

Ich werde jetzt die Theorie der Messung mit dem Heliometer auseinandersetzen. Hier gehen von den Vereinigungspunkten der Strahlen nicht vollständige Lichtkegel aus, sondern die erleuchtete Figur auf der

1) Vgl. Helmholtz a. a. O. § 27.

Hornhaut des Auges ist ein Halbkreis. Es soll hierbei von der Beugung des Lichtes an der Schnittfläche abgesehen werden, ein Umstand, der übrigens auf die Heliometermessungen nicht ohne Einfluss ist.

Da das auf der Netzhaut von einem leuchtenden Punkte entworfene Bild die Form einer Halbellipse hat, so ist die Frage von Wichtigkeit, welchen Punkt derselben man als Bildpunkt des Sternes betrachten darf. Im allgemeinen wird man von diesem nur sagen können, dass er im Inneren der Halbellipse liege. Es scheint indess eine plausible Annahme zu sein, wenn man den Schwerpunkt der überall als gleich hell betrachteten Figur mit jenem Punkte identificirt. Dieselbe Annahme ist auch sonst schon, so von Bessel in seiner Theorie des Königsberger Heliometers, mit Erfolg gemacht worden, und sie soll im Folgenden verfolgt werden.

Ich lege wieder das am Ende des § 1 definirte Coordinatensystem zu Grunde. Die Coordinaten des vom Heliometerfernrohr entworfenen (virtuellen) Sternbildes seien x_1 y_1 z_1. Die Schnittlinie der den Stern abbildenden Objectivhälfte bilde mit der Z-Axe den Winkel π. Bezeichnet weiter η, ζ die laufenden Coordinaten und η_0 ζ_0 diejenigen des Mittelpunktes des auf der Hornhaut entworfenen erleuchteten Halbkreises, so ist nach § 1, 5, die Gleichung der geradlinigen Begrenzung des letzteren:

$$(\eta - \eta_0)\cos\pi - (\zeta - \zeta_0)\sin\pi = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Der Strahl, welcher durch den Punkt dieser Geraden (η, ζ) hindurchgeht, schneidet nach seiner Brechung die Netzhaut in dem Puncte (y, z), der nach § 2, 9 gegeben ist durch:

$$y = m + p\,\eta + q\,\zeta$$
$$z = m' + p'\eta + q'\zeta$$

Setzt man nun

$$\eta' = m + p\,\eta_0 + q\,\zeta_0$$
$$\zeta' = m' + p'\eta_0 + q'\zeta_0$$

so sind nach § 2, 10, η', ζ' die Coordinaten des Mittelpunktes der Halbellipse auf der Netzhaut. Subtrahirt man diese Gleichungen von einander und benutzt (1) so wird:

$$(y - \eta')(q'\cos\pi + p'\sin\pi) = (z - \zeta')(q\cos\pi + p\sin\pi).$$

Dieses ist also die Gleichung der geradlinigen Begrenzung der Halbellipse. Bezieht man Alles auf den Mittelpunkt derselben, indem man in ihn ein Coordinatensystem, parallel zu dem früheren legt, also setzt:

$$y - \eta' = Y; \quad z - \zeta' = Z \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

worin Y und Z die neuen Coordinaten bedeuten, so wird die vorige Gleichung:

$$(q' Y - q Z) \cos \pi + (p' Y - p Z) \sin \pi = o \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

während die Gleichung der Ellipse auf der Netzhaut selbst auf dasselbe Coordinatensystem bezogen nach § 1, 9_a lautet:

$$(p'q - p q')^2 \delta^2 = (p'Y - p Z)^2 + (q'Y - q Z)^2.$$

Es soll nun der Schwerpunkt $(Y_0 Z_0)$ der durch diese Gleichung und durch (3) bestimmten Halbellipse gesucht werden.

Die Gerade (3) geht durch den Mittelpunkt der Ellipse. Der halbe Durchmesser a', welcher in ihr liegt, ergiebt sich leicht so: Die Coordinaten Y, Z des Durchschnittspunktes von (3) und der Ellipse finden sich:

$$Y = \pm \delta \{ q \cos \pi + p \sin \pi \}$$
$$Z = \pm \delta \{ q' \cos \pi + p' \sin \pi \}$$

und also:

$$a'^2 = \delta^2 [(q \cos \pi + p \sin \pi)^2 + (q' \cos \pi + p' \sin \pi)^2].$$

Sind weiter a und b die Halbaxen der Ellipse, b' der zu a' conjugirte Durchmesser, welcher mit a' den Winkel ω bildet, so ist

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2; \qquad a b = a' b' \sin \omega$$

woraus sich ergiebt:

$$b'^2 = \delta^2 \{ (p \cos \pi - q \sin \pi)^2 + (p' \cos \pi - q' \sin \pi)^2 \}$$

und

$$b'^2 \sin^2 \omega = \frac{\delta^2 (p'q - p q')^2}{(q \cos \pi + p \sin \pi)^2 + (q' \cos \pi + p' \sin \pi)^2}.$$

Schliesslich muss noch der Winkel φ bestimmt werden, welchen b' mit der positiven Richtung der Y-Axe bildet. Es ist aber $\operatorname{tg} \varphi$ gleich $\frac{dZ}{dY}$ für den Endpunkt des Durchmessers a' genommen, woraus man erhält:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{p' \cos \pi - q' \sin \pi}{p \cos \pi - q \sin \pi}$$

Man weiss, dass der Schwerpunkt der Halbellipse in dem zu a' conjugirten Durchmesser und zwar um die Strecke $\frac{2}{3\pi} \cdot b' \sin\omega$ vom Mittelpunkt entfernt liegt, so dass also:

$$Y_0 = \frac{2}{3\pi} \cdot b' \sin\omega \cdot \cos\varphi;\quad Z_0 = \frac{2}{3\pi} b' \sin\omega \cdot \sin\varphi$$

oder auch:

$$(4)\quad \begin{cases} Y_0 = \pm \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{\delta^3}{a' b'} (p' q - p q') (p \cos\pi - q \sin\pi) \\ Z_0 = \pm \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{\delta^3}{a' b'} (p' q - p q') (p' \cos\pi - q' \sin\pi) \end{cases}$$

In diesen Formeln gilt gleichzeitig das obere und untere Vorzeichen. Die Coordinaten $\eta_1\, \zeta_1$ des Schwerpunktes, bezogen auf das ursprüngliche Coordinatensystem sind schliesslich:

$$(5)\quad \begin{cases} \eta_1 = m + p\,\eta_0 + q\,\zeta_0 + Y_0 \\ \zeta_1 = m' + p'\eta_0 + q'\zeta_0 + Z_0 \end{cases}$$

wobei zu erinnern ist, dass η_0 und ζ_0 nach § 1, 4 zu bestimmen sind.

Nach diesen Vorbereitungen werde ich nun die Messungen mit dem Heliometer betrachten, hierbei aber nur auf directe Pointirungen, wie sie bei grösseren Distanzen angewendet werden, Rücksicht nehmen. Die gewöhnliche Methode der Ausmessung von Doppelsternen enthält ein wesentlich neues Moment, das der Schätzung. Von den Fehlern des Heliometers soll ganz abgesehen werden. Die beiden Objectivhälften mögen sich also stets in einer zur Rotationsaxe senkrechten Ebene so bewegen, dass die Schnittlinie genau durch die Rotationsaxe geht und der Coincidenzpunkt in der Rotationsaxe liegt. Es falle ferner diese Axe mit unserer X-Axe zusammen.

Der Mittelpunkt der ersten Objectivhälfte ($X_0\, Y_0\, Z_0$) stehe um d_0 von der Axe ab und bilde einen Stern im Punkte x y z ab. d_0 und der, wie früher bezeichnete, Neigungswinkel π der Schnittlinie gegen die Z-Axe, ergeben sich durch directe Ablesung am Instrument. Bezeichnet nun P und δ Positionswinkel und Distanz zwischen Stern und dem Punkte am Himmel, nach welchem die Rotationsaxe hingeht, wobei P von der positiven ZX-Ebene nach der positiven YX-Ebene gezählt wird, und f die Brennweite des Objectives, so ist

$$\begin{aligned} f\cos\delta &= X_0 - x \\ f\sin\delta\sin P &= Y_0 - y \\ f\sin\delta\cos P &= Z_0 - z \end{aligned}$$

Es soll nun gleich die Vereinfachung eingeführt werden, welche durch Vernachlässigung von δ^3 entsteht. Es wird so:

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{l|l} \delta\sin P = \dfrac{Y_0 - y}{X_0 - x} & d_0\cos\pi = Z_0 \\[2ex] \delta\cos P = \dfrac{Z_0 - z}{X_0 - x} & d_0\sin\pi = Y_0 \end{array} \right.$$

Für die zweite Objectivfläche, die einen zweiten Stern abbildet und sich in entgegengesetzter Richtung, wie die erste, bewegt, sollen dieselben Bezeichnungen mit einem Strich versehen angewendet werden. Man hat also:

$$(7)\quad \left\{ \begin{array}{l|l} \delta'\sin P = \dfrac{Y_0' - y'}{X_0 - x} & d_0'\cos\pi = Z_0' \\[2ex] \delta'\cos P = \dfrac{Z_0' - z'}{X_0 - x} & d_0'\sin\pi = Y_0' \end{array} \right.$$

In diesen Formeln kann nun weiter $X_0 - x = f$ gesetzt werden. Nennt man schliesslich D die wahre Distanz der beiden Sterne, d die abgelesene, P den Positionswinkel an dem Punkte, nach welchem die Rotationsaxe zeigt, und π den abgegebenen Positionswinkel, so ist:

$$(8)\quad \left\{ \begin{array}{l} f\cdot D\sin P = d\sin\pi + (y' - y) \\ f\cdot D\cos P = d\cos\pi + (z' - z) \end{array} \right.$$

Die Pointirung liefert nun die Gleichungen:

$$\eta_1 = \eta_1', \qquad \zeta_1 = \zeta_1'$$

wo η_1' und ζ_1' die Einstellungspunkte der Netzhautbilder des zweiten Sternes bedeuten. Aus dieser Bedingung müssen die Differenzen $y' - y$ und $z' - z$ abgeleitet werden.

Setzt man zur Abkürzung

$$\left. \begin{array}{l} \dfrac{1}{f}\cdot\left(\xi + e - \dfrac{\xi e}{\varphi}\right) = V \\[2ex] 1 + \dfrac{\xi + e}{f} - \dfrac{e(f+\xi)}{f\varphi} = W \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

so geben die Gleichungen § 1, 4:

$$\left.\begin{aligned} \eta_0' - \eta_0 &= (y' - y)\,W + d\sin\pi\cdot V \\ \zeta_0' - \zeta_0 &= (z' - z)\,W + d\cos\pi\cdot V \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Da weiter die in § 2 eingeführten Grössen p, q, p′ und q′ nur von den x-Coordinaten abhängen und diese für beide Bilder als gleich angenommen werden dürfen, so ergeben die obigen Bedingungen mit Hülfe von (5) und den Werthen für m und m′ aus § 2, 8:

$$o = \eta_1' - \eta_1 = (y_1' - y_1)\,\frac{C}{n\,x_1} + p(\eta_0' - \eta_0) + q(\zeta_0' - \zeta_0) + 2\,Y_0$$

$$o = \zeta_1' - \zeta_1 = (z_1' - z_1)\,\frac{C}{n\,x_1} + p'(\eta_0' - \eta_0) + q(\zeta_0' - \zeta_0) + 2\,Z_0$$

Hierin haben Y_0 und Z_0 die durch Formel (4) gegebene Bedeutung, und es ist klar, dass diese für die zweite Objectivhälfte das umgekehrte Zeichen haben, wie für die erste, wesshalb eine Addition eintritt. Führt man noch mit Hülfe von § 1, 6 die Coordinaten der von den Objectivhälften entworfenen reellen Sternbilder ein, so schreiben sich die beiden letzten Gleichungen:

$$y' - y = [p(\eta_0' - \eta_0) + q(\zeta_0' - \zeta_0) + 2\,Y_0]\,\frac{n\,x_1}{C}\cdot\frac{\xi - \varphi}{\varphi}$$

$$z' - z = [p'(\eta_0' - \eta_0) + q'(\zeta_0' - \zeta_0) + 2\,Z_0]\,\frac{n\,x_1}{C}\cdot\frac{\xi - \varphi}{\varphi}$$

und wenn mit Hülfe von (10) die η und ζ eliminirt werden und der Kürze wegen gesetzt wird:

$$A = \frac{n}{C}\cdot f\cdot V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

$$(y' - y)[1 - A\,W\,p] - (z' - z)\,A\,W\,q = A\,V\,d\,[p\sin\pi + q\cos\pi] + 2\,A\,Y_0$$
$$-(z' - z)\,A\,W\,p' + (z' - z)[1 - A\,W\,q'] = A\,V\,d\,[p'\sin\pi + q'\cos\pi] + 2\,A\,Z_0$$

Um hieraus die gesuchten $y' - y$ und $z' - z$ zu bestimmen, setze man

$$\mu = A\,W$$
$$\nu = A\,V$$
$$\sigma = 1 - \mu\,p - \mu\,q' + \mu^2(p\,q' - p'\,q)$$

dann wird

$$\begin{cases} y'-y=\frac{d\nu}{\sigma}\cdot\sin\pi\,[p-\mu(pq'-p'q)]+\frac{d\nu}{\sigma}\cos\pi\cdot q+2\frac{A}{\sigma}(1-\mu q')\,Y_o+\frac{2A\mu}{\sigma}q\,Z_o \\ z'-z=\frac{d\nu}{\sigma}\cdot\sin\pi\cdot p'+\frac{d\nu}{\sigma}\cos\pi\,[q'-\mu(pq'-p'q)]+2AY_o\frac{p'\mu}{\sigma}+2A\frac{1-\mu p}{\sigma}Z_o \end{cases}$$

Aus (8) folgt weiter:

$$f\cdot D\cdot\sin(P-\pi)=(y'-y)\cos\pi-(z'-z)\sin\pi$$

$$f\cdot D\cdot\cos(P-\pi)=d+(y'-y)\sin\pi+(z'-z)\cos\pi$$

und weil $y'-y$ und $z'-z$ stets sehr klein sein werden:

$$P-\pi=\frac{1}{d}\cdot\left\{(y'-y)\cos\pi-(z'-z)\sin\pi\right\}$$

$$f\cdot D=d+(y'-y)\sin\pi+(z'-z)\cos\pi$$

Setzt man hier die zuletzt gewonnenen Werthe für $y'-y$ und $z'-z$ ein, so ergiebt sich schliesslich:

$$(12)\begin{cases} P-\pi=\frac{\nu}{\sigma}\cdot\sin\pi\cos\pi\,(p-q')+\frac{\nu}{\sigma}\cdot(q\cos^2\pi-p'\sin^2\pi) \\ \qquad\pm 2\frac{AY_0}{d\cdot\sigma}\cdot\left\{\cos\pi-\mu\,(q'\cos\pi+p'\sin\pi)\right\} \\ \qquad\pm 2\frac{AZ_0}{d\cdot\sigma}\left\{-\sin\pi+\mu\,(q\cos\pi+p\sin\pi)\right\} \\ fD-d=\frac{d\nu}{\sigma}\cdot\sin\pi\cos\pi\,(q+p')+\frac{d\nu}{\sigma}\cdot[p\sin^2\pi+q'\cos^2\pi-\mu(pq'-p'q)] \\ \qquad\pm 2\frac{AY_0}{\sigma}\,[\sin\pi-\mu\,(q'\sin\pi-p'\cos\pi)] \\ \qquad\pm 2\frac{AZ_0}{\sigma}\,[\cos\pi-\mu\,(p\cos\pi-q\sin\pi)] \end{cases}$$

Bekanntlich wird aus Rücksicht auf die Fehler des Heliometers jeder Beobachtung eine zweite zugeordnet, die dadurch entsteht, dass die beiden Hälften ihre Stellung gegen die Rotationsaxe vertauschen. Man nennt diese Operation das „Durchschrauben.“ Hierbei bleibt Alles ungeändert, nur die von Y_o und Z_o abhängigen Glieder bekommen das umgekehrte Vorzeichen, weshalb dieselben gleich mit $\pm$ angesetzt worden sind. Im Mittel aus zwei so zugeordneten Einstellungen fallen dieselben also fort.

Die allgemeinen Formeln (12) sollen nun durch zwei Beispiele näher erläutert werden.

Für das im obigen Sinne (pag. 678) normale Auge ist:

$$p' = q = o; \quad p = q' = 1 - \frac{C}{n}\frac{n-1}{r} - \frac{C}{n x_1}$$

$$\sigma = (1 - \mu p)^2$$

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} P - \pi &= \pm \frac{2 A Y_0}{d(1-\mu p)} \cos\pi \mp \frac{2 A Z_0}{d(1-\mu p)} \sin\pi \\ fD - d &= \frac{d\nu}{(1-\mu p)} p \pm \frac{2 A Y_0}{1-\mu p} \sin\pi \pm \frac{2 A Z_0}{1-\mu p} \cos\pi \end{aligned} \right.$$

Sieht man von denjenigen Gliedern ab, welche durch das Durchschrauben unschädlich gemacht werden, so ergiebt sich also, dass im Positionswinkel gar kein Fehler, in Distanz aber der Fehler

$$\varDelta d = fD - d = d \frac{p\nu}{1-\mu p}$$

übrig bleibt. Sobald aber $p = o$ ist, d. h. sobald das Ocular genau auf die deutlichste Sehweite eingestellt ist, verschwindet $\varDelta d$.

Nimmt man nun eine beliebige Ocularstellung, und es sei diese bestimmt durch ξ, während ξ_0 der deutlichsten Einstellung zukommt, so ist, (nach § 1, 6)

$$p = 1 - \frac{C}{n}\frac{n-1}{r} + \frac{C}{n} \cdot \frac{\varphi - \xi}{e\varphi + \xi(\varphi - e)}$$

und mit Berücksichtigung von (9)

$$p = 1 - \frac{C}{n}\frac{n-1}{r} + \frac{C}{n} \cdot \frac{\varphi - \xi}{f\varphi V}$$

Für $p = o$ wird $\xi = \xi_0$ und der Werth von V für $\xi = \xi_0$ werde mit V_0 bezeichnet. Es ist also:

$$o = 1 - \frac{C}{n} \cdot \frac{n-1}{r} + \frac{C}{n} \cdot \frac{\varphi - \xi_0}{f\varphi V_0}$$

Durch Subtraction findet sich leicht, wenn noch $\xi - \xi_0 = \varDelta\xi$ gesetzt wird, demnach ein positives $\varDelta\xi$ einem Herausziehen des Oculars entspricht:

$$p = -\frac{C}{n} \cdot \frac{\varDelta\xi}{f} \cdot \frac{1}{f V V_0}$$

woraus also:

$$\frac{\varDelta d}{d} = -\frac{\varDelta \xi}{f} \frac{V}{V_0 + \frac{\varDelta \xi}{f} \cdot W}$$

Da W geschrieben werden kann:

$$W = \frac{\varphi - e}{\varphi} \left\{ 1 + \frac{\xi}{f} \right\} + \frac{e}{f}$$

so wird, weil $\frac{\xi}{f}$ immer sehr klein, genügend genau:

$$W = \frac{\varphi - e}{\varphi} + \frac{e}{f} \text{ und}$$

$$V_0 + W \cdot \frac{\varDelta \xi}{f} = V + \frac{e}{f} \cdot \frac{\varDelta \xi}{f}$$

Hieraus ergiebt sich, dass, weil e gewöhnlich nicht viel von φ verschieden und $\frac{\varDelta \xi}{f}$ ein äusserst kleiner Bruch ist, in jedem Falle mit genügender Genauigkeit gesetzt werden darf:

$$\frac{\varDelta d}{d} = -\frac{\varDelta \xi}{f} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Die Distanz ändert sich also proportional mit der Ocularverschiebung, ein Resultat, das in der Praxis seit langer Zeit verwerthet wird. Hier wird aber im Allgemeinen die Sache nicht so einfach liegen als angenommen wurde, denn das Auge ist kein unveränderlicher Apparat, vielmehr ist, infolge der sich bemerkbar machenden Accommodation, p selbst mit $\varDelta \xi$ veränderlich. Es ist deshalb anzurathen, den Coefficienten der Ocularstellung empirisch zu bestimmen, was übrigens auch bereits von mehreren Seiten erkannt worden ist.[1])

Die Formel (14) lässt sich natürlich auch direct durch sehr einfache Betrachtungen verificiren. Dies ist bereits von Herrn Abbe in seiner oben citirten sehr schönen Abhandlung geschehen, während in meiner Theorie des Heliometers[2]) der Sachverhalt nicht richtig dargestellt ist. Ich benutze diese Gelegenheit, den damals begangenen Fehler zu corrigiren.

---

1) So hat Auwers eine solche Bestimmung den Heliometerbeobachtern bei den letzten Venusdurchgängen angeordnet.

2) Leipzig 1877 pag. 66 u. ff.

Was die von Y_o und Z_o abhängenden Glieder in Formel (13) betrifft, so wird für das normale Auge:

$$a' = \delta p; \qquad b' = \delta p$$

$$\left.\begin{aligned} Y_o &= \pm \frac{2}{3\pi} \cdot \delta p \cos \pi \\ Z_o &= \mp \frac{2}{3\pi} \cdot \delta p \sin \pi \end{aligned}\right| \quad \text{d. h.: } Y_o \sin \pi + Z_o \cos \pi = o$$

und in Distanz entsteht also kein Fehler. In Positionswinkel dagegen erhalten wir

$$P - \pi = \pm \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{\delta p A}{d(1-\mu p)} = \pm \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{\delta p A}{d}$$

Indem für kleine Ocularverschiebungen der Nenner $= 1$ gesetzt werden darf. Ich werde hier beispielsweise den Fall, welcher manchmal eintritt, verfolgen, in welchem $\varphi = e$ ist. Ist ϱ der Radius der freien Objectivöffnung, so ist nach § 1, 3

$$\delta = \frac{\varrho}{f} \cdot \varphi$$

ferner

$$V = \frac{\varphi}{f}; \quad A = \frac{n}{C} f V; \quad p = -\frac{C}{n} \cdot \frac{\varDelta \xi}{f} \cdot \frac{1}{f V V}$$

also:

$$P - \pi = \mp \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{\varrho}{d} \cdot \frac{\varDelta \xi}{f}$$

Wird d in Bogenminuten angesetzt mit d' bezeichnet, so ist $d = f \cdot \frac{d'}{3438}$ also:

$$(P - \pi)' = \mp \frac{(0.4244)(3438)^2}{d'} \cdot \frac{\varrho}{f} \cdot \frac{\varDelta \xi}{f}$$

Nimmt man den häufig vorkommenden Fall $\frac{\varrho}{f} = \frac{1}{30}$ so wird

$$(P - \pi)' = \mp \frac{167192}{d'} \cdot \left(\frac{\varDelta \xi}{f}\right)$$

für $\frac{\varDelta \xi}{f} = \frac{1}{1000}$ ist demnach

$$(P - \pi)' = \mp \frac{167}{d'}.$$

Eine solche bedeutende Drehung erfährt also der Positionswinkel bei veränderter Stellung des Oculares. Diese ist auch sofort bemerkbar, wenn man die Positionswinkel von Doppelsternen misst und das Ocular verschiebt. Es wäre gewiss nicht uninteressant, solche Messungen systematisch auszuführen, weil man daraus einen Schluss ziehen wird können, ob die Hypothese, die der angestellten Berechnung zu Grunde liegt, auch als richtig anerkannt werden darf, dass nämlich der Schwerpunkt der auf der Netzhaut entstehenden Lichtscheiben zum Einstellungspunkte genommen wird.

Nach dieser Digression auf das normale Auge will ich nun das gewöhnliche astigmatische Auge betrachten, um auch hier numerische Werthe zu erhalten. Man kann hier bekanntlich, wie es unter Anderen auch Reusch a. a. O. that, die Hornhaut als ein Stück eines Paraboloides betrachten. Die Gleichung φ soll hier also sein:

$$\frac{y^2}{r} + \frac{z^2}{r_1} - 2x = o$$

Die weitere Rechnung ergiebt:

$$p = 1 - \frac{C}{n} \cdot \frac{n-1}{r} - \frac{C}{n x_1}$$

$$q' = 1 - \frac{C}{n} \cdot \frac{n-1}{r'} - \frac{C}{n x_1}; \quad p' = q = o$$

$$\sigma = (1 - \mu p)(1 - \mu q')$$

Und die Hauptformel (12) wird, wenn die von Y_o, Z_o abhängigen Glieder fortgelassen werden:

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} P - \pi &= \frac{\nu (p - q')}{(1 - \mu p)(1 - \mu q')} \cdot \sin \pi \cos \pi \\ f D - d &= d \nu \left\{ \frac{q'}{1 - \mu q'} + \frac{p - q'}{(1 - \mu p)(1 - \mu q')} \sin^2 \pi \right\} \end{aligned} \right.$$

Bezeichnet nun ξ_0 und ξ_1 die Werthe von ξ, für welche p resp. q Null werden, V_0 und V_1 die Werthe von V für $\xi = \xi_0$ resp. $\xi = \xi_1$, so ist (vergl. pag. 688)

$$p \nu = - \frac{\xi - \xi_0}{f} \cdot \frac{V}{V_0} \qquad q' \nu = - \frac{\xi - \xi_1}{f} \cdot \frac{V}{V_1}$$

$$p \mu = - \frac{\xi - \xi_0}{f} \cdot \frac{W}{V_0} \qquad q' \mu = - \frac{\xi - \xi_1}{f} \cdot \frac{W}{V_1}$$

Ganz ähnlich wie oben wird man hier erhalten:

$$(16)\quad \frac{p\nu}{1-\mu p} = -\frac{\frac{\xi-\xi_0}{f}}{1+\frac{e}{f}\cdot\frac{\xi-\xi_0}{f}\cdot\frac{1}{V}}; \qquad \frac{q'\nu}{1-\mu q'} = -\frac{\frac{\xi-\xi_1}{f}}{1+\frac{e}{f}\cdot\frac{\xi-\xi_1}{f}\cdot\frac{1}{V}}$$

Völlig strenge ist nach (9):

$$W = \frac{\varphi - e}{\varphi} + V$$

Setzt man weiter:

$$\xi = (1+\lambda)\varphi$$

so wird λ im Allgemeinen ein kleiner Bruch sein und

$$V = \frac{\varphi}{f}\left\{1 + \lambda\frac{\varphi - e}{\varphi}\right\}$$

Weiter ergiebt sich:

$$\frac{W}{V} = 1 + \frac{f}{\varphi}\cdot\gamma \qquad \text{wo } \gamma = \frac{\varphi - e}{\varphi + \lambda(\varphi - e)}$$

Es werden für dasselbe Auge ξ, ξ_0 und ξ_1 nur sehr wenig von einander abweichen, und demgemäss wird es erlaubt sein, λ als eine Constante zu betrachten. Demzufolge ist nun:

$$\frac{1}{1-\mu p} = \frac{1}{1+\frac{\xi-\xi_0}{\varphi}\cdot\gamma}; \qquad \frac{1}{1-\mu q'} = \frac{1}{1+\frac{\xi-\xi_1}{\varphi}\cdot\gamma}$$

oder in jedem Falle genügend genau:

$$\frac{1}{1-\mu p} = 1 - \frac{\xi-\xi_0}{\varphi}\cdot\gamma; \qquad \frac{1}{1-\mu q'} = 1 - \frac{\xi-\xi_1}{\varphi}\cdot\gamma$$

Die Nenner der Relationen (16) dürfen ohne Frage $= 1$ angenommen werden. Es soll weiter

$$\xi = \frac{\xi_0+\xi_1}{2} + \varDelta\xi$$

gesetzt werden. Jetzt geben die Gleichungen (15) sehr einfach:

$$(17)\quad \begin{cases} P - \pi = \dfrac{\xi_0-\xi_1}{2f}\sin 2\pi \\ fD - d = -d\left\{\dfrac{\varDelta\xi}{f} + \dfrac{\xi_0-\xi_1}{2f}\cos 2\pi\right\} \end{cases}$$

Aus diesen Formeln ist ersichtlich, dass das Messungsresultat sowohl in Positionswinkel als auch in Distanz abhängig ist von der Neigung der Schnittlinie des Heliometers gegen eine feste Richtung. Diese Abhängigkeit wird natürlich in Wirklichkeit, wegen der oben erwähnten secundären Einflüsse, ein complicirteres Gesetz zeigen. Von Wichtigkeit ist aber die Frage, ob die in (17) auftretenden Coefficienten für die Praxis merkliche Beträge erlangen können. Zunächst ergiebt sich, dass die von π abhängigen Glieder mit der angewandten Vergrösserung sehr rasch abnehmen, und sie werden desshalb bei starken Vergrösserungen und nicht auffallend stark astigmatischen Augen wenig Einfluss ausüben. Namentlich wird im Positionswinkel, wegen der beschränkten Genauigkeit, mit welcher die Ablesung dieser Coordinate bewerkstelligt wird, diese Fehlerquelle nicht bemerkbar sein.

Es sollen nun, um bestimmte Zahlenwerthe zu erhalten, ganz bestimmte Verhältnisse angenommen werden. Der Astigmatismus des beobachtenden Auges sei derart, dass Strahlen, welche in der XY-Ebene liegen, dann genau auf der Netzhaut sich vereinigen, wenn sie von einem Puncte in einer Entfernung von 250^{mm} von der Hornhaut ausgegangen sind. Für Strahlen, welche in der XZ-Ebene liegen, sei die analoge Entfernung 350^{mm}. Man kann dies auch so aussprechen: beide Strahlenbündel werden zu gleicher Zeit auf der Netzhaut vereinigt, wenn das eine direct vom Auge, das andere durch eine Linse von 0.88 Meter Brennweite betrachtet wird. Es liegt also ein Fall sogenannten regulären Astigmatismus vor, der, wenn auch von merklichen, so doch noch nicht von abnorm hohen Betrage ist.

Für diese Annahmen nun, und wenn φ beispielsweise zu 10^{mm} angenommen wird, findet sich

$$\begin{array}{l} \xi_0 = 9.600 \\ \xi_1 = 9.714 \end{array} \quad ; \quad \xi_0 - \xi_1 = 0.114$$

und es wird

$$(\mathrm{P} - \pi) = -\frac{392'}{2\mathrm{f}} \sin 2\pi$$

$$\frac{\varDelta \mathrm{d}}{\mathrm{d}} = -\frac{\varDelta \xi}{\mathrm{f}} + \frac{0.114}{2\mathrm{f}} \cos 2\pi$$

worin f in Millimetern auszudrücken ist. Liegt z. B. eine Vergrösserung von 100 (f = 1000) vor, so geben die letzten Formeln:

$$P - \pi = 12'' \sin 2\pi$$

$$\frac{\varDelta d}{d} = -\frac{\varDelta \xi}{1000} + (0.000057) \cos 2\pi$$

Der Positionswinkel erscheint demnach von einem völlig unmerklichen Fehler afficirt, während das bei der Distanz nicht immer der Fall ist. Hier wird z. B. für $d = 3000''$

$$\varDelta d = -3''0 \cdot \varDelta \xi + 0''17 \cdot \cos 2\pi$$

welcher Fehler freilich blos bei kleinen Vergrösserungen, oder dort, wo es auf die höchste Genauigkeit (z. B. bei Parallaxenbestimmungen, bei welchen selbst sehr kleine systematische von π abhängige Fehler verhängnissvoll werden können) ankommt, einer Ueberlegung zu unterziehen sein dürfte. Weit mehr kann das Resultat heliometrischer Messungen durch das erste Glied alterirt werden. In (17) wurde $\varDelta \xi$ von der Mittelstellung des Oculares $\xi = \frac{\xi_0 + \xi_1}{2}$, an gezählt. Diese Mittelstellung wird sich nur mit sehr beschränkter Genauigkeit ermitteln lassen, zum Theil infolge der Mitwirkung secundärer Einflüsse, wie eintretende Accommodation, sphärischer Abweichung sowohl des Objectives als auch des Oculares etc. etc. Ein kleiner Fehler in der Annahme des Nullpunctes, von welchem die Ocularverrückungen $\varDelta \xi$ zu zählen sind, wird also unvermeidlich sein, und infolge dessen wird die gemessene Distanz, wenn vom zweiten Gliede abgesehen wird, die Correction erfordern:

$$\varDelta d = (a + b \varDelta \xi) d$$

worin nun a und b Constanten sind. a wird von Beobachter zu Beobachter variiren und auch b wird dies (vergl. pg. 689) in gewissem Grade thun. Der erste Umstand bewirkt, dass der Scalenwerth für verschiedene Beobachter verschieden angenommen werden muss. Derselbe darf also nicht durch fremde Beobachtungen herbeigeschafft werden.

§ 4.

Es soll noch zum Schlusse das Fadenmikrometer behandelt werden. Die Beobachtung kann hier sehr verschiedenartig angeordnet werden.[1]) Um ganz bestimmte Verhältnisse vor Augen zu haben, soll angenommen werden, dass beide Sterne sich zu gleicher Zeit im Gesichtsfelde befinden. Zuerst mag der eine Stern fixirt und mit dem Fadenkreuz zur Deckung gebracht werden, und hierauf wird dasselbe mit dem zweiten Stern gethan. Das Auge bewegt sich also, da der Kopf des Beobachters als unbeweglich betrachtet werden soll, zwischen den beiden Messungen, und zwar dreht es sich nach bekannten Gesetzen (Listing's Gesetz.) Die Grösse dieser Drehung ist abhängig von der Grösse der Distanz, multiplicirt mit der Vergrösserung des Fernrohres. Bei kleinen Distanzen wird indess diese Drehung klein sein, und sie mag desshalb als kleine Grösse der ersten Ordnung betrachtet werden. Nach dem Früheren hängt der Einfluss des Astigmatismus des Auges auf das Messungsresultat ab von der Differenz der Coordinaten der Mittelpunkte des vom Sterne, resp. Faden auf der Hornhaut beleuchteten Kreises. Diese Differenz wird aber durch die Drehung des Auges nur um Glieder zweiter Ordnung und um solche, welche von der Raddrehung des Auges abhängen, geändert, und man wird deshalb einen nahe richtigen Ueberblick über die zu untersuchenden Fehler erlangen, wenn man von der Augenbewegung ganz absieht; denn die Raddrehung ist im allgemeinen ebenfalls sehr klein. Die Augenbewegung auch in den Gliedern zweiter Ordnung zu berücksichtigen, macht keine Schwierigkeit; die Endformeln werden aber viel complicirter. Da nun ihre Mittheilung keinen practischen Werth haben dürfte, will ich von ihnen absehen.

Bei Messung grosser Declinationsdifferenzen, bei welchen das Ocular zwischen den beiden Einstellungen verschoben werden muss, liegt die Sache anders.

---

1) Lesenswerthe Bemerkungen über die für das Fadenmikrometer wichtigen Beleuchtungseinrichtungen findet man in dem Aufsatze von W. Foerster: Ueber die Beleuchtung der Mikrometereinrichtungen in Teleskopen etc. Zeitschrift für Instrumentenkunde I (1881).

Ferner ist auf dieselbe Zeitschrift 1885 pag. 347 ff. zu verweisen, wo Herr Czapski Experimente bespricht, welche Herr Abbe gemacht hat, und die zu höchst wichtigen Folgerungen geführt haben.

Die hier auftretenden Verhältnisse werden sich durch ein Verfahren, ähnlich dem, welches am Ende des § 2 eingeschlagen wurde, übersehen lassen. Es verdient bemerkt zu werden, dass in diesem Falle nicht unbedeutende Fehler entstehen können, die indess zum Theile den Charakter zufälliger Fehler zeigen.

Es seien in Bezug auf das von uns stets gebrauchte Coordinatensystem y_1, z_1 und y_1', z_1' die Coordinaten der Vereinigungsweiten der aus dem Oculare austretenden Strahlen des ersten, resp. zweiten Sternes. welche beide in der Sehweite $-x_1$ vom Auge erscheinen, x_1, Y_1, Z_1 und x_1, Y_1', Z_1' die Coordinaten des scheinbaren Fadenkreuzes, nachdem es mit dem ersten, resp. zweiten Sterne zur Deckung gebracht worden ist, wobei eine vollständige Focusirung angenommen werden soll. Die Coordinaten der Mittelpuncte der erleuchteten Kreise auf der Hornhaut seien [1]):

η, ζ und η', ζ' für die beiden Sterne und

Y Z und Y' Z' für das Fadenkreuz in beiden Lagen.

Man weiss dann nach § 2, dass

$$\begin{cases} y_1 - Y_1 = -\dfrac{n\,x_1}{C}\cdot[q(\zeta - Z) + p(\eta - Y)] \\ z_1 - Z_1 = -\dfrac{n\,x_1}{C}\cdot[q'(\zeta - Z) + p'(\eta - Y)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' - Y_1' = -\dfrac{n\,x_1}{C}\cdot[q(\zeta' - Z') + p(\eta' - Y')] \\ z_1' - Z_1' = -\dfrac{n\,x_1}{C}\cdot[q'(\zeta' - Z') + p'(\eta' - Y')] \end{cases}$$

Bezeichnet weiter D und P wahre Distanz und Positionswinkel der beiden Sterne, d und π die entsprechenden Angaben für die Stellung des Fadens und k der Scalenwerth, welcher bei der Umrechnung der Theile der Micrometertrommel in dasselbe Mass, in welchem D angegeben wird, in Frage kommt, so ist (§ 1, 6):

---

1) Hier sowie überall in den früheren und den folgenden Untersuchungen wird stets angenommen, dass der aus dem Oculare austretende Strahlenkegel nirgends, also auch nicht durch den Pupillenrand oder den Oculardeckel an seiner vollen Ausbreitung behindert werde.

$$-\mathrm{f}\cdot\mathrm{D}\sin\mathrm{P}=(\mathrm{y}_1'-\mathrm{y}_1)\cdot\frac{\varphi-\xi}{\varphi} \qquad -\mathrm{d}\sin\pi=(\mathrm{Y}_1'-\mathrm{Y}_1)\,\mathrm{k}\cdot\frac{\varphi-\xi}{\varphi}$$

$$-\mathrm{f}\cdot\mathrm{D}\cos\mathrm{P}=(\mathrm{z}_1'-\mathrm{z}_1)\cdot\frac{\varphi-\xi}{\varphi} \qquad -\mathrm{d}\cos\pi=(\mathrm{Z}_1'-\mathrm{Z}_1)\,\mathrm{k}\cdot\frac{\varphi-\xi}{\varphi}$$

Setzt man demnach zur Abkürzung:

$$\begin{cases} \mathrm{Z}_0=(\zeta-Z)-(\zeta'-Z') \\ \mathrm{Y}_0=(\eta-Y)-(\eta'-Y') \end{cases}$$

so ergeben die obigen Gleichungen durch Subtraction:

$$(1)\quad \begin{cases} \mathrm{f}\cdot\mathrm{D}\sin\mathrm{P}=\dfrac{\mathrm{d}\sin\pi}{\mathrm{k}}-\dfrac{\mathrm{n\,x}_1}{\mathrm{C}}\cdot[\mathrm{q\,Z}_0+\mathrm{p\,Y}_0]\cdot\dfrac{\varphi-\xi}{\varphi} \\ \mathrm{f}\cdot\mathrm{D}\cos\mathrm{P}=\dfrac{\mathrm{d}\cos\pi}{\mathrm{k}}-\dfrac{\mathrm{n\,x}_1}{\mathrm{C}}\cdot[\mathrm{q}'\mathrm{Z}_0+\mathrm{p}'\mathrm{Y}_0]\cdot\dfrac{\varphi-\xi}{\varphi} \end{cases}$$

Es kann noch nach § 1, 6 substituirt werden:

$$\mathrm{x}_1\cdot\frac{\varphi-\xi}{\varphi}=-\mathrm{e}\,\frac{\varphi-\xi}{\varphi}-\xi$$

Setzt man nun zur Abkürzung:

$$\mathrm{A}=-\frac{\mathrm{n\,x}_1}{\mathrm{C}}\cdot[\mathrm{q\,Z}_0+\mathrm{p\,Y}_0]\cdot\frac{\varphi-\xi}{\varphi}$$

$$\mathrm{B}=-\frac{\mathrm{n\,x}_1}{\mathrm{C}}\cdot[\mathrm{q}'\mathrm{Z}_0+\mathrm{p}'\mathrm{Y}_0]\cdot\frac{\varphi-\xi}{\varphi}$$

so wird mit ausreichender Genauigkeit:

$$(2)\quad \begin{cases} \mathrm{D}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{f}\cdot\mathrm{k}}=\varDelta\,\mathrm{d}=\dfrac{\mathrm{A}\sin\pi+\mathrm{B}\cos\pi}{\mathrm{f}} \\ \mathrm{P}-\pi=\varDelta\,\pi=\dfrac{\mathrm{A}\cos\pi-\mathrm{B}\sin\pi}{\mathrm{f\,D}} \end{cases}$$

Es sind noch die in diesen allgemeinen Gleichungen vorkommenden $\mathrm{Y}_0\,\mathrm{Z}_0$ zu ermitteln.

Zunächst kann offenbar angenommen werden, dass der erste Stern genau in der X-Axe des Coordinatensystems abgebildet werde. Es ist dann $\eta=\zeta=0$ und nach Formel § 1, 2

$$(3)\quad \begin{cases} \eta'=-\mathrm{D}\sin\mathrm{P}\left[(\mathrm{f}+\xi)\dfrac{\varphi-\mathrm{e}}{\varphi}+\mathrm{e}\right] \\ \zeta'=-\mathrm{D}\cos\mathrm{P}\left[(\mathrm{f}+\xi)\dfrac{\varphi-\mathrm{e}}{\varphi}+\mathrm{e}\right] \end{cases}$$

Zur Ableitung der analogen Grössen für das Fadenkreuz ist es nothwendig, specielle Annahmen darüber zu machen, wie der Faden sichtbar gemacht ist.

Zuerst soll der Fall behandelt werden, dass an hellen Fäden beobachtet wird. Diese senden Strahlen nach sehr verschiedenen Richtungen aus, so dass jeder Punkt der Oeffnung des vor dem Auge befindlichen Diaphragma's von Strahlen getroffen wird. Bezeichnet σ die Entfernung des Diaphragma's von dem Auge, so sind YZ die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Geraden, welche durch die Punkte x_1, Y_1, Z_1 und den Mittelpunkt des Diaphragma's geht, mit der Hornhaut, d. i. der YZ-Ebene des Coordinatensystemes. Da nur Differenzen von Coordinatenwerthen in Frage kommen, wird es die Allgemeinheit kaum beeinträchtigen, wenn angenommen wird, dass der Mittelpunkt der Diaphragmenöffnung in der X-Axe liege. Unter dieser Voraussetzung ist aber:

$$(4) \qquad \begin{array}{l|l} Y = \mathrm{Y}_1 \dfrac{\sigma}{\sigma + \mathrm{x}_1} & Y' = \mathrm{Y}_1' \dfrac{\sigma}{\sigma + \mathrm{x}_1} \\[2ex] Z = \mathrm{Z}_1 \dfrac{\sigma}{\sigma + \mathrm{x}_1} & Z' = \mathrm{Z}_1' \dfrac{\sigma}{\sigma + \mathrm{x}_1} \end{array}$$

Mit Hülfe von (3) und (4) ergiebt sich, wenn man, was erlaubt ist, hier keinen Unterschied zwischen $\mathrm{f\,D}$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{k}}$ und zwischen P und π macht:

$$\mathrm{Y}_0 = \mathrm{D} \sin \pi \cdot \Pi \cdot \mathrm{f}$$

$$\mathrm{Z}_0 = \mathrm{D} \cos \pi \cdot \Pi \cdot \mathrm{f}$$

wo

$$\mathrm{f} \cdot \Pi = (\mathrm{f} + \xi) \frac{\varphi - \mathrm{e}}{\varphi} + \mathrm{e} - \frac{\sigma}{\sigma + \mathrm{x}_1} \mathrm{f} \frac{\varphi}{\varphi - \xi}$$

und es wird jetzt:

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{f}} = -\frac{\mathrm{n\,x}_1}{\mathrm{C}} \cdot \Pi \cdot \mathrm{D} \cdot \frac{\varphi - \xi}{\varphi} \left\{ \mathrm{q} \cos \pi + \mathrm{p} \sin \pi \right\}$$

$$\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{f}} = -\frac{\mathrm{n\,x}_1}{\mathrm{C}} \cdot \Pi \cdot \mathrm{D} \cdot \frac{\varphi - \xi}{\varphi} \left\{ \mathrm{q}' \cos \pi + \mathrm{p}' \sin \pi \right\}$$

Dadurch gestalten sich die Gleichungen (2)

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathrm{d} = -\dfrac{\mathrm{n\,x}_1}{\mathrm{C}} \cdot \Pi \mathrm{D} \cdot \dfrac{\varphi - \xi}{\varphi} \left\{ (\mathrm{q} + \mathrm{p}') \sin \pi \cos \pi + \mathrm{p} \sin^2 \pi + \mathrm{q}' \cos^2 \pi \right\} \\[2ex] \Delta \pi = -\dfrac{\mathrm{n\,x}_1}{\mathrm{C}} \cdot \Pi \cdot \dfrac{\varphi - \xi}{\varphi} \left\{ \mathrm{q} \cos^2 \pi - \mathrm{p}' \sin^2 \pi + (\mathrm{p} - \mathrm{q}') \sin \pi \cos \pi \right\} \end{array} \right.$$

Um zu einer Abschätzung der durch (5) angegebenen Fehler zu gelangen, will ich den Ausdruck abkürzen bis auf jene Glieder, welche allein merklich werden können. Bezeichnet nun $(1+\varkappa)\varphi$ die Entfernung des Diaphragma's von der hinteren Hauptebene des Oculares, so ist

$$e = (1+\varkappa)\varphi + \sigma$$

Ferner findet sich mit Hülfe von § 1, 6

$$x_1 + \sigma = \frac{(\sigma - e)(\varphi - \xi) - \varphi\xi}{\varphi - \xi} = -\frac{\varphi\{\varphi + \varkappa(\varphi - \xi)\}}{\varphi - \xi}$$

und demzufolge:

$$f\Pi = (f+\xi)\cdot\frac{\varphi - e}{\varphi} + e + \frac{f\cdot\sigma}{\varphi + \varkappa(\varphi - \xi)}$$

Es wird nun ohne Frage erlaubt sein zu setzen $\varphi = \xi$, wodurch

$$f\Pi = f - \frac{e}{\varphi}f + \varphi + \frac{f\sigma}{\varphi}$$

$$= -\varkappa f + \varphi;\quad \Pi = -\varkappa + \frac{\varphi}{f}$$

Wenn nun $\varkappa$ nicht sehr klein ist und nur dann wird (5) unter sonst annehmbaren Umständen merkliche Correctionen liefern. Dann kann aber $\frac{\varphi}{f}$ als jedenfalls sehr klein fortgelassen werden und es ergiebt sich einfach $\Pi = -\varkappa$.

Ich will nun das in § 3 behandelte mit einem regelmässigen Astigmatismus behaftete Auge betrachten. Dort war

$$p' = q = o$$

Es wird also:

$$\Delta d = \Gamma\cdot D\cdot\{p\sin^2\pi + q'\cos^2\pi\}$$

$$\Delta\pi = \Gamma\cdot\{p - q'\}\cdot\sin\pi\cos\pi$$

$$\Gamma = \frac{n\,x_1}{C}\cdot\varkappa\,\frac{\varphi - \xi}{\varphi} = -\frac{n}{C}\varkappa\cdot\varphi\cdot\left\{1 + (\varkappa + \lambda)\frac{\varphi - \xi}{\varphi}\right\}$$

wenn noch $\sigma = \lambda\varphi$ gesetzt wird. In der folgenden Ueberschlagsrechnung ist einfach $\Gamma = -\frac{n}{C}\cdot\varkappa\varphi$ gesetzt worden; in der That sind meistens $\varkappa$ und λ kleine Brüche und σ hat nur einen äusserst geringen Einfluss.

Genügend genau wird man weiter annehmen dürfen:

$$\frac{C}{n} p = -\frac{\xi - \xi_0}{\varphi^2}; \qquad \frac{C}{n} q' = -\frac{\xi - \xi_1}{\varphi^2}$$

Wird jetzt wieder

$$\xi = \frac{\xi_0 + \xi_1}{2} + \varDelta \xi$$

angenommen, so ergiebt sich:

$$\varDelta d = \varkappa \cdot D \left\{ -\frac{\xi_1 - \xi_0}{2\varphi} \cos 2\pi + \frac{\varDelta \xi}{\varphi} \right\}$$

$$\varDelta \pi' = -\varkappa \cdot 3438 \cdot \frac{\xi_1 - \xi_0}{2\varphi} \sin 2\pi$$

und mit den Zahlen des Beispieles pag. 693:

$$\begin{cases} \varDelta d = \varkappa \cdot D \cdot [-0.0057 \cos 2\pi + 0.1 \varDelta \xi] \\ \varDelta \pi' = -19'.6\, \varkappa \sin 2\pi \end{cases}$$

Es sind also die betrachteten Fehler direct proportional mit $\varkappa$, und es wäre wichtig, sich zu vergewissern, ob diese Grösse bei den angewandten Ocularen klein ist. Bei den älteren Fraunhofer'schen Ocularen ist das durchaus nicht der Fall, und es kommen Werthe von $\varkappa$ vor, die wohl bis zu $\frac{1}{3}$ ansteigen. Die Optiker scheinen nicht den Oculardeckel nach ganz festen Principien anzubringen. Für Mikrometeroculare scheint es aber nach dem Früheren sehr wünschenswerth, den Oculardeckel möglichst nahe dem Hauptbrennpunkte des Oculares zu legen.

Als zweite Anwendung der Formeln (2) sollen die Messungen mit dunklen Fäden auf hellem Grunde betrachtet werden. Die Beleuchtung des Gesichtsfeldes mag durch einen leuchtenden Punkt im Innern des Rohres bewerkstelligt werden. Auf der Netzhaut entsteht dann eine Beugungsfigur des sehr schmalen Schirmes, als welcher der Faden anzusehen ist, von welcher bei richtiger Einstellung des Oculares nur ein dunkler Streifen sichtbar bleibt. Das Fadenbild erleidet nun durch Verstellung des Oculares mehrere in der letzten Zeit genauer studierte Veränderungen. Diese lassen sich aber auf das einfachste erklären, wenn man nur die einfachsten Vorstellungen festhält, mit welchen die Theorie der Beugung des Lichtes an schmalen Schirmen operirt.

Strenge genommen wäre also die Beugungsfigur eines sehr schmalen Schirmes abzuleiten, und hierbei auf den Astigmatismus des Auges Rücksicht zu nehmen. Der Kürze wegen will ich aber diese Untersuchung nicht ausführen, und bemerke nur, dass man die Endformeln auf dieselbe Gestalt bringen kann, die sie bei dem normalen Auge haben. Für unsere Zwecke wird es genügen, den Ort des Fadenbildes dorthin zu verlegen, wo seine Mitte sich abbildet. Diese Annahme ist natürlich nicht völlig strenge, sie wird aber wohl als nahezu richtig gelten müssen. Dass sich in der That Feld- und Fadenbeleuchtung wesentlich von einander unterscheiden, kann man, ganz abgesehen von theoretischen Erörterungen, in sehr instructiver Weise experimentell prüfen.

Beleuchtet man einen Faden in einem Mikrometerocular von der dem Beobachter abgewandten Seite durch zwei Lichtquellen, so dass das Gesichtsfeld zu gleicher Zeit von Beiden Licht erhält, so wird man zwei dunkle Bilder auf hellem Grunde sehen, deren Entfernung proportional ist der scheinbaren Entfernung der beiden Lichtquellen; nur dann, wenn das Ocular völlig scharf eingestellt ist, wird diese Entfernung Null. Bringt man nun weiter vor die Oeffnung des Oculardeckels eine drehbare excentrische Scheibe mit verschieden grossen Oeffnungen, so hat man Gelegenheit sich davon zu überzeugen, dass (unter selbstverständlichen Umständen) beide Fadenbilder auch bei sehr kleinen Oeffnungen bestehen bleiben. Man kann weiter die Beleuchtung durch eine Lichtquelle so einrichten, dass ein Theil des Gesichtsfeldes dunkel bleibt. Dann wird auch (vergl. den oben citirten Aufsatz von Herrn Dr. Czapski) ein Theil des Fadens hell auf dunklem, der andere dunkel auf hellem Grunde erscheinen. Eine Vergleichung beider Bilder giebt zu in mancher Beziehung interessanten Wahrnehmungen Veranlassung.

Man kann sich also die Sache näherungsweise so vorstellen: Jeder Punkt des Fadens sendet in dem vorliegenden Falle nur einen Strahl aus, nämlich denjenigen, welcher von der punktförmigen Lichtquelle zu ihm hinläuft. Wo dieser Strahl nach seiner Brechung im Ocular und Auge die Netzhaut durchschneidet, dort erscheint der betreffende Punkt des Fadens.

Sind A, B, C und X, Y, Z die Coordinaten der Lichtquelle und eines Punktes des messenden Fadens, A_1, B_1, C_1 und X_1, Y_1, Z_1 die Coordinaten der virtuellen Bilder, welche das Ocular von diesen beiden Punkten entwirft, so wird der aus dem Ocular tretende Strahl durch die beiden zuletzt genannten Punkte gehen müssen. Bezeichnen also x, y, z die laufenden Coordinaten, so sind seine Gleichungen:

$$\frac{x - A_1}{X_1 - A_1} = \frac{y - B_1}{Y_1 - B_1} = \frac{z - C_1}{Z_1 - C_1}$$

Für $x = o$ ergeben sich die Coordinaten $Y\,Z$ seines Durchschnittspunktes mit der Hornhaut:

$$(6) \qquad Y = B_1 - \frac{Y_1 - B_1}{X_1 - A_1} A_1; \qquad Z = C_1 - \frac{Z_1 - C_1}{X_1 - A_1} A_1$$

Um hier die Formel (2) in Anwendung zu bringen, setze man wieder voraus, dass $\eta = \zeta = o$ und η', ζ' durch (3) gegeben ist. Für die zweite Lage des Fadens ist analog zu (6):

$$Y' = B_1 - \frac{Y_1' - B_1}{X_1' - A_1} A_1; \qquad Z' = C_1 - \frac{Z_1' - C_1}{X_1' - A_1} A_1$$

und hiermit ergiebt sich sehr leicht und mit den früheren Vernachlässigungen:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta d &= -\frac{n x_1}{C} \cdot D\,\varPi \cdot [p \sin^2\pi + q' \cos^2\pi + (q + p') \sin\pi\cos\pi] \\ \varDelta\pi &= -\frac{n x_1}{C} \cdot D\,\varPi \cdot [q \cos^2\pi - p' \sin^2\pi + (p - q') \sin p \cos\pi] \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

wo

$$\varPi = \frac{A_1}{X_1 - A_1} + \left(1 + \frac{\xi}{f}\right) \frac{\varphi - e}{\varphi} \cdot \frac{\varphi - \xi}{\varphi} + \frac{e}{f} \cdot \frac{\varphi - \xi}{\varphi}$$

Bei der Beurtheilung der Frage, ob die Correctionen (7) merklich werden können, wird es nach dem Früheren ausreichen, zuzusehen, ob $\varPi$ ein nicht sehr kleiner Bruch ist. Ist dies der Fall, dann sind die aus dem Astigmatismus des Auges folgenden systematischen Fehler bei der hier angenommenen Beobachtungsart zu vernachlässigen. Dies findet nun aber gerade bei den gebräuchlichen Einrichtungen der Beleuchtung statt.

Es ist nämlich wohl immer die Entfernung der punktförmigen Lichtquelle von dem Oculare eine in Beziehung auf φ sehr beträchtliche Grösse. Dann ist aber nach § 1, 6 sehr nahe:

$$+ A_1 = - e + \varphi$$

und also:
$$\frac{A_1}{X_1 - A_1} = -\frac{(\varphi - e)(\varphi - \xi)}{\varphi^2}$$

und
$$\Pi = \frac{\varphi - \xi}{\varphi}\left\{\frac{\xi}{f}\cdot\frac{\varphi - e}{\varphi} + \frac{e}{f}\right\}$$

Es werden also unter diesen Umständen, die durch (7) angegebenen Correctionen stets zu vernachlässigen sein.

Einen ungefähren Ueberblick über die beiden behandelten Arten der mikrometrischen Beobachtung erhält man übrigens durch sehr einfache Betrachtungen, die keine Formeln in Anspruch nehmen. Namentlich lässt sich ohne weiteres einsehen, dass die im zweiten Fall eintretenden Messungsfehler immer ausserordentlich klein sein müssen.

Der Vollständigkeit wegen muss noch auf eine dritte Möglichkeit, mit dem Fadenmikrometer zu messen, aufmerksam gemacht werden. Diese tritt ein, wenn das zu messende Object ausgedehnt und so hell ist, dass es weder einer Faden- noch Feldbeleuchtung bedarf, so z. B. wenn man Details auf der Sonnen-, Mond- oder einer Planetenoberfläche ausmisst, oder wenn man ein von der Tageshelle erleuchtetes irdisches Object vor sich hat. Hier wird jeder Punkt des messenden Fadens abgebildet von denselben Strahlen, welche der mit ihm zur Coincidenz gebrachte Punkt des Objectes aussendet, und es können also unter gewöhnlichen Umständen Fehler des Auges, wenigstens von der Art der in diesem Aufsatze betrachteten, irgend einen Einfluss auf das Messungsresultat nicht erhalten.

Im Ganzen hat sich demnach ergeben, dass die Messung mit dem Fadenmikrometer nur in dem ersten, übrigens nicht schwer zu vermeidenden Falle, merkliche Fehler, welche von dem Astigmatismus des Auges herrühren, aufweist. Bekanntlich aber zeigen die Fadenmikrometermessungen vieler Beobachter sehr bedeutende Fehler, welche sowohl von der Grösse der ausgemessenen Distanz, als auch von der Neigung derselben gegen den Horizont abhängen. Ein allgemein bekanntes und sehr merkwürdiges Beispiel hiefür bildet die grossartige Reihe von Doppelsternbeobachtungen Otto Struve's.[1]) Hier steigen die persönlichen Fehler bis zu hohen Beträgen und ihre Abhängigkeit von Positionswinkel und

1) Observations de Poulkowa, Bd. IX.

Distanz ist von Struve durch äusserst complicirte Formeln dargestellt worden. Durch den Astigmatismus der Hornhaut können solche Fehler ihrer ganzen Wirkungsweise nach wohl kaum erklärt werden. Man muss also annehmen, dass dieselben dadurch zu Stande kommen, dass die Bisection des Sternbildes auf der Netzhaut, das immer eine gewisse Ausdehnung zeigt, in systematisch unrichtiger Weise ausgeführt wird. Die ganze Operation läuft in letzter Instanz doch auf eine Schätzung hinaus, und desshalb werden auftretende Fehler nichts Befremdendes haben, weil ähnliche Schätzungsfehler, die von der Lage des Beobachters gegen den Horizont abhängen, in der physiologischen Optik seit lange besprochen werden. Solche Fehler aber werden jedenfalls von der Stellung des Auges gegen die sogenannte Primärlage abhängen, und da diese wieder von der Zenithdistanz und demzufolge von der Lage des Beobachters gegen das Fernrohr abhängt, so dürfte dies zu grosser Vorsicht mahnen, Correctionsformeln, welche an künstlichen Objecten gewonnen worden sind, auf den Himmel zu übertragen.

Die grosse Wichtigkeit von Untersuchungen von der Art derjenigen O. Struve's bleibt aber bestehen, weil sie über die Grösse und Wirkungsweise der auftretenden Fehler, wenn auch nur in einem speciellen Falle, Aufschluss geben. Aber schon Versuche mit kleinen Fernröhren, ja sogar mit freiem Auge angestellt, werden auf diesem erst neuerdings, vornehmlich auf O. Struve's Anregung hin, kultivirtem Gebiete von grösstem Interesse sein.[1]) Als das beste Mittel jedoch, die genannten Fehler bei wirklichen Sternbeobachtungen zu erkennen und in seiner Gesetzmässigkeit zu verfolgen, muss ich die Anwendung eines reflectirenden Prisma's ansehen.[2]) Ich habe diese Methode angegeben, ohne zu wissen, dass dieselbe schon früher von andern Beobachtern hier und da angewandt worden ist. Ich darf aber vielleicht behaupten, die Vortheile einer solchen Einrichtung in bestimmterer Weise hervorgehoben zu haben, als dies bisher geschehen ist.

---

1) Dieselbe Meinung hat Thiele in seiner eingehenden Besprechung von O. Struve's Messungen ausgesprochen. Vergl. Vierteljahrschrift der A. G. Bd. XV, pg. 314.

2) Vergl. Ueber die Gestalt des Planeten Uranus. Sitzungsbericht der Münchener Akademie. Bd. XIV, pg. 267, 1884.