

Allgemeine Einleitung.

Wenn ein brauchbares Verfahren entdeckt wird, eine sogenannte willkürliche Function in eine Reihe der Form:

$$A_0 \varphi_0(x) + A_1 \varphi_1(x) + \dots$$

zu entwickeln, wo $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots$ bestimmte mit jener zu entwickelnden Function ausser Zusammenhang stehende Functionen sind, die Grössen $A_0, A_1, \dots$ aber von x unabhängige Coefficienten vorstellen: so wird eine solche Entwicklung, welche der willkürlichen Function gleichsam eine Uniform anzieht, und ihren besonderen Character in die constanten Coefficienten verlegt, stets die Aufmerksamkeit der Analysten auf sich lenken, und zwar um so nachhaltiger, je einfacher die Functionen φ und die Coefficienten A zusammengesetzt sind. Daher waren auch die allereinfachsten Reihenentwicklungen, die Potenzreihen und die trigonometrischen Reihen von jeher bevorzugter Gegenstand mathematischer Speculation, so dass die Analysis den Untersuchungen, welche man über diese Formeln oder doch mit ihrer Hülfe angestellt hat, ihre merkwürdigsten Gebiete verdankt.¹⁾

1) Die im Texte angeführten Reihen bleiben die merkwürdigsten Formeln der Analysis, trotz der *Loi suprême* von Wronski, von dessen Bestrebungen ich durch mündliche Mittheilungen Richelots und durch Aufsätze des Herrn Abel Transon (Nouv. Ann. de Math. II Serie, Tome XIII) Kunde habe. Herr Abel Transon spricht sein Befremden darüber aus, dass die Mathematiker keine besondere Vorliebe für die Wronskischen „Gesetze“ an den Tag legen. Ich muss das Urtheil der Mathematiker in Schutz nehmen. Betrachten wir Wronski's allgemeinstes Ergebniss, dass er irgend eine Function $f(x)$ in jede Reihe der Form $A_0 \varphi_0(x) + A_1 \varphi_1(x) + \dots$ zu entwickeln lehrt, welcher Art die Functionen $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ auch sein mögen, so liegt, wie mir scheint, die Sache so: Ist die Möglichkeit der Entwicklung nachgewiesen oder wahrscheinlich gemacht, so ist Wronski's Coefficientenbildung, weil sie für alle Reihen dieselbe ist, und daher im gegebenen Fall äusserst verwickelt ausfallen muss, im Allgemeinen unbrauchbar. Man versuche z. B. die Coefficienten der Entwicklung nach Kugelfunctionen auf diese Weise zu bestimmen. Steht dagegen die Möglichkeit der Entwicklung selbst in Frage, so ist die Form der Coefficienten

Abb. d. II. Cl. d. k. Ak. d. Wiss. XII. Bd II. Abth. A

Die Potenzreihen und die trigonometrischen Reihen, so ungleich ihr äusserer Eindruck auch sein mag, lassen sich doch als verschiedene Erscheinungsformen ein und derselben unendlichen Operation auffassen, als welche man nach Belieben eine von ihnen betrachten kann. Wenn man aber genauer zusieht, so erkennt man, dass diese Verwandtschaft mehr in den Bezeichnungen liegt, und dass zwischen den Potenzreihen und den trigonometrischen Reihen, wenn bei beiden die Voraussetzungen gemacht werden, welche ihre Eigenthümlichkeiten zur Geltung bringen, dem Sinne nach ein tiefer Unterschied waltet. Um es kurz zu sagen, die trigonometrischen Reihen sind ein Grenzfall der Potenzreihen, bei dem aber Voraussetzungen zulässig sind, ja in den Vordergrund treten, die der allgemeine Fall ausschliesst, wodurch sich dann das Imaginäre als das eigentliche Gebiet der Potenzreihen erweist, während die trigonometrischen Reihen, so weit an ihnen etwas Besonderes ist, dem Reellen angehören. Führen wir dies nun genauer aus.

wieder zu verwickelt, um die Convergenzprüfung der Reihe, in der sie auftreten, zu ermöglichen.

Aus diesen Gründen scheint, wenigstens vor der Hand, den Wronski'schen Ergebnissen nur ein formales Interesse zugesprochen werden können.

Von Anwendungen, die auf andere Reihenformen führen, abgesehen, wird man indessen Wronski darin nur beipflichten können, dass er das Hauptgewicht auf die Form $A_0\varphi_0(x) + A_1\varphi_1(x) + \dots$ legt, in der das Argument gleichsam aus der individuellen Function, die nur noch in den Coefficienten A steckt, herausgeholt ist. Entwicklungen anderer Gestalt giebt es die Fülle. Eine solche will ich als Beispiel hier anführen. Wenn in der Formel

$$\pi f(x) = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_A^B d\alpha f(\alpha) \frac{\sin h(\alpha - x)}{\alpha - x}$$

statt h geschrieben wird $\frac{2n+1}{2}$, so hat man wegen $\sin \frac{2n+1}{2} u = \sin \frac{u}{2} \left(1 - 2 \sum_{p=1}^n \cos pu\right)$:

$$\pi f(x) = \frac{1}{2} \int_A^B \varphi(\alpha, x) f(\alpha) d\alpha + \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \cos px \int_A^B \varphi(\alpha, x) \cos p\alpha f(\alpha) d\alpha + \sin px \int_A^B \varphi(\alpha, x) \sin p\alpha f(\alpha) d\alpha \right\}$$

wo $\varphi(\alpha, x) = 2 \frac{\sin \frac{\alpha - x}{2}}{\alpha - x}$. Diese Reihe ist ihrer Form wegen merkwürdig. Sie geht in die Fouriersche Reihe über, wenn den beliebigen Grössen A, B die Werthe $-\pi, +\pi$ ertheilt werden, und Eins statt φ gesetzt wird.

Bekanntlich kann eine Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{p=0}^{p=\infty} (u_p z^p + v_p z^{-p})$$

als trigonometrische Reihe geschrieben werden, indem man $\varrho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ für z einführt. Diese Umformung, durch die man die Function $F(\varphi) = f(z)$ nach $\sin$ und $\cos$ der Vielfachen der reellen Grösse φ entwickelt erhält, ist es nicht, die wir hier brauchen, da es den Charakter einer trigonometrischen Reihe offenbar nicht verändert, wenn nur ihre Coefficienten complex sind. Sie lässt sich dann ja aus zwei reellen Reihen derselben Art zusammensetzen. Lehrreicher ist es umgekehrt die trigonometrische Reihe als Potenzreihe aufzufassen, indem man setzt:

$$f(z) = \sum_{p=0}^{p=\infty} (a_p \cos pz + b_p \sin pz) = F(\zeta) = \sum_{p=0}^{p=\infty} (u_p \zeta^p + v_p \zeta^{-p}),$$

$$\text{wo } \zeta = e^{-iz}, u_p = \frac{a_p + ib_p}{2}, v_p = \frac{a_p - ib_p}{2}.$$

Untersuchen wir die Convergenz der so erhaltenen Potenzreihe:

$$F(\zeta) = \sum_{p=0}^{p=\infty} (u_p \zeta^p + v_p \zeta^{-p}).$$

Es ist $\text{mod } u_p = \text{mod } v_p = \sqrt{a_p^2 + b_p^2}$. Bezeichnet man mit R die grösste Zahl für die $R^p \sqrt{a_p^2 + b_p^2}$ nicht mit p unendlich wird, so ist die Reihe $F(\zeta)$ convergent im Ringgebiet zwischen den um $\zeta = 0$ als Mittelpunkt gezogenen Kreisen mit den Halbmessern $\frac{1}{R}$ und R , falls nämlich $R > 1$.

Ist $R < 1$, so giebt es keine Convergenz, und ist $R = 1$, so artet der Convergenzring in eine Kreisperipherie aus. Da nun $\text{mod } \zeta = e^y$, so erhalten wir, $R = e^y$ gesetzt, für $f(z)$ folgendes Convergenzgebiet: Es ist eingeschlossen zwischen den Geraden $x = \pm Y$, unter Y den grössten Werth von y verstanden, für den noch $\sqrt{a_p^2 + b_p^2} e^{py}$, oder $a_p e^{py}$, $b_p e^{py}$ nicht mit p unendlich werden. Ist dieser Werth Y gleich Null, so artet das Gebiet in eine Linie aus, und ist Y negativ, so giebt es keine Convergenz. Was aber für $R = 1$ oder $Y = 0$ in jener Ausartungsperipherie oder für $f(z)$ in der Ausartungsline $y = 0$ stattfindet, bedarf einer besonderen Untersuchung. Die Functionentheorie im engeren Sinne lehrt uns darüber nichts.

Die Untersuchung der Convergenz einer Potenzreihe in der Ausartungslinie ihres Convergenzringes bildet den eigentlichen Gegenstand der Theorie der trigonometrischen Reihen.

Denn wenn die Reihe $f(z)$ ein Convergenzgebiet hat, so sind in diesem Gebiet die Function $f(z)$ und deren Ableitungen stetig. Umgekehrt, wenn $f(z)$ oder deren Ableitungen unstetig sind, so kann dies nicht innerhalb eines Convergenzgebietes stattfinden. Die Convergenz von $f(z)$ wird sich auf die Ausartungslinie $y = 0$ beschränken müssen. Es folgt hieraus, dass die Fälle, in welchen die trigonometrischen Reihen uns besonders merkwürdig erscheinen, lediglich der Analysis des Reellen angehören. Die Thetareihen z. B., welche in der Jacobischen Form wie trigonometrische Reihen aussehen, sind ihrem Wesen nach Potenzreihen und haben vom Standpunkte der Theorie der trigonometrischen Reihen aus gar kein Interesse.

* * *

Nachdem wir jetzt die trigonometrischen Reihen in zwei Klassen eingetheilt haben, die erstere, mit Convergenzgebieten, welche wir als Potenzreihen auffassen und ausscheiden, die zweite, mit einer Convergenzlinie, welche wir als echte trigonometrische Reihen ansehen, so ist noch mit einigen Worten auf die engere Benennung: Fouriersche Reihen einzugehen.

So pflegt man die trigonometrischen Reihen

$$f(x) = \sum_{p=0}^{p=\infty} (a_p \cos px + b_p \sin px)$$

zu nennen, wenn ihre Coefficienten durch die Ausdrücke:

$$\pi a_0 = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} df(\alpha), \quad \pi a_p = \int_{-\pi}^{+\pi} df(\alpha) \cos p\alpha, \quad \pi b_p = \int_{-\pi}^{+\pi} df(\alpha) \sin p\alpha$$

darstellbar oder richtiger dargestellt sind. Wir wissen gegenwärtig, unter welchen genaueren Bedingungen dies möglich ist, und wissen

namentlich, dass die Integrirbarkeit von $f(x)$ dazu ausreicht.^{II)} Jene Benennung erfreut sich indessen keineswegs geschichtlicher Berechtigung, sondern die als Fouriersche zu bezeichnenden Reihen müssten anders umgrenzt werden.

Die vorstehende Bestimmung der Coefficienten der trigonometrischen Reihe rührt eben nicht von Fourier her, sondern der Form nach von Lagrange^{III)}, und ist mit vollem Bewusstsein zuerst von Euler gegeben^{IV)}. Euler's scharf gedachte aber zu beschränkte Vorstellung war, dass jede Function $f(\sin x, \cos x)$, die nach Potenzen von $\sin x, \cos x$ sich entwickeln lässt, auch in eine nach Vielfachen von x fortschreitende Sinus oder Cosinusreihe entwickelbar sei, und er hat die Coefficienten dieser Entwicklungen wirklich in der heute bekannten Form schon dargestellt.

Fourier's Coefficientenbestimmung ist jedenfalls nicht besser als die Eulersche und beide scheinen mir sogar weniger befriedigend als die ursprüngliche von Lagrange.^{V)} Fourier's bahnbrechender Schritt war vielmehr die durch überzeugende Beispiele bestätigte Divination, dass die trigonometrischen Reihen auch unstetige Functionen darstellen, und dass man die zu entwickelnde Function vom Argument in beliebiger Weise abhängig annehmen darf — natürlich innerhalb des Functionsbegriffs seiner Epoche. Um diesen Schritt gehörig zu würdigen, muss man sich in der einschlägigen Literatur des vorigen Jahrhunderts umsehen. Man kann auf Grund der obigen Ueberlegungen die Schöpfung Fourier's der Eulerschen gegenüber kurz so kennzeichnen: Die von Euler gemeinten Reihen haben ein Convergenzgebiet, die von Fourier in die Analysis eingeführten haben nur eine Convergenzlinie. Indessen es würde misslich sein, die einmal gebräuchlich gewordene Bezeichnung: Fouriersche Reihen so zu verschieben, wie es nach dem Gesagten

II) Abhandl. d. k. bayer. Akad. der W. II. Cl. XII. Bd. I. Abth.

III) Miscell. Taurin. Tom. III, pag. 260.

IV) Nov. Act. Acad. scient. Petrop. Tom. XI, 1798. Ich verdanke diese Nachweisung Herrn W. Borchardt.

V) Dirichlet giebt im I. Bande des Dowe'schen Repertoriums die Lagrangesche Coefficientenbestimmung wieder, und zeigt an einem Beispiel, dass sie ungenau ist. Der Grund der Ungenauigkeit ist aber die nicht als berechtigt nachgewiesene Häufung zweier Grenzübergänge, nämlich erstens in den Coefficienten von der Summe zum Integral, zweitens von der endlichen Gliederzahl zur unendlichen.

VI

geschichtlich Rechtens wäre, und ich verzichte daher auf Vorschläge in dieser Richtung.

Um noch einen anderen mathematischen Ausdruck zu erwähnen, dem die nachfolgenden Betrachtungen gelten, so theilt Fourier mit Niemand den Ruhm, die nach ihm genannte Formel:

$$\pi f(x) = \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} d\beta f(\beta) \cos \alpha(\beta - x)$$

entdeckt zu haben. Wiewohl wir die näheren Umstände, auf denen ihre Eigenthümlichkeit beruht, jetzt völlig durchschauen, so erfüllen ihre Leistungen uns doch stets von Neuem mit Bewunderung, wie wir vom Anblick einer vorbeistürmenden Locomotive immer wieder mächtig ergriffen werden, wenn wir ihren Mechanismus auch noch so genau kennen.

* * *

In den gesicherten Besitzstand der Analysis wurden die Fourierschen Reihen

$$2\pi f(x) = \sum_{p=-\infty}^{p=\infty} \left(\sin px \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) \sin p\alpha + \cos px \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) \cos p\alpha \right)$$

eingereiht durch die berühmte Abhandlung von Lejeune-Dirichlet im IV. Bande des Crelle'schen Journals pag. 157. Es möchte diese Abhandlung die erste sein, in der die Nothwendigkeit erkannt wurde, innerhalb der Mannigfaltigkeit voraussetzungsloser Functionen, auch im Reellen, gewisse Classen mit noch immerhin höchst allgemeinen Charakteren auszusondern. Hierin liegt in meinen Augen der hohe Werth jener Abhandlung, namentlich gegenüber anderen gleichzeitigen oder früheren Versuchen, die Fouriersche Entwicklung zu beweisen.

Während also Dirichlet den Functionsbegriff dem Gegenstande entsprechend zu beschränken lehrte, war er doch frei von den seit ihm veralteten Vorstellungen über das Wesen und die Stetigkeit der Functionen. So sind seiner natürlichen und sachgemässen Ausdrucksweise

jene *portions de fonctions* gewichen, welche aus der Anschauung entspringen mochten, als ob eine Function gleichsam ein einheitlicher Organismus sei, aus dessen Stücken man allerdings, wie seit Fourier zugegeben werden musste, neue Functionen zusammensetzen könne, die aber den ungeheuerlichen Character ihrer Entstehung an der Stirne trügen.

Wenn die Entwicklung des modernen Functionsbegriffs unstreitig von den Fourierschen Entdeckungen ihren Ausgang nahm, so wird man gerechter Weise die bewusste Förderung jenes Begriffs und der damit zusammenhängenden Principien der Integralrechnung u. s. w. auf Fourier's grossen Schüler zurückführen müssen, der mehr als irgend einer seiner Zeitgenossen, besonders durch seine Untersuchungen über die Darstellungsformeln für willkürliche Functionen, zur Läuterung dessen beigetragen hat, was man die Metaphysik der Analysis zu nennen pflegt.

* * *

Die Gültigkeit der Fourierschen Entwicklung ist von Dirichlet bewiesen worden für den Fall, wo die darzustellende Function $f(x)$ im Intervall $-\pi \dots +\pi$ nicht unendlich viele Maxima hat, eine Bedingung, welche ich die Dirichletsche genannt habe. Nicht im Geringsten beeinträchtigt es die Bedeutung seiner Leistung, wenn er in einer Ankündigung am Schlusse seiner Abhandlung, den Gültigkeitsbereich der Fourierschen Entwicklung, wie aus dem IV. Capitel dieser Abhandlung folgt, überschätzt hat, indem er sie auf alle Functionen anwendbar erklärt, welche (in seinem Sinne) integrirbar seien, also jedenfalls auf alle stetigen Functionen. Er scheint dies unter der Herrschaft einer jener Täuschungen niedergeschrieben zu haben, die in diesen abstrakten Gebieten nur zu oft uns das ersehnte Gestade in unmittelbarer Nähe vorspiegeln, um uns, sobald das Trugbild sich aufgelöst hat, in tiefster Rathlosigkeit über den nunmehr einzuschlagenden Weg und in banger Ungewissheit über die Richtigkeit unserer Voraussetzungen zurückzulassen. Indessen soll Dirichlet den Glauben an den von ihm behaupteten Satz doch nicht verloren haben; auch ist ja dieser Glaube an die Entwickelbarkeit wenigstens aller stetigen Func-

VIII

tionen in Fouriersche Reihen, bis auf den heutigen Tag ein Stück der mathematischen öffentlichen Meinung geblieben^{VI)}.

Um so höher wird man es Herrn Lipschitz anrechnen müssen, dass er jene Convergenzfrage, so viel ich weiss, seit Dirichlet zuerst, wieder zum Gegenstand einer Veröffentlichung gemacht hat, in welcher er eine Erweiterung der Dirichletschen Bedingung mit dessen Methoden findet, und die Möglichkeit andeutet, dass eine dieser erweiterten Bedingung nicht genügende Function auch nicht entwickelbar sei^{VII)}.

* * *

In der Richtung der Bestrebungen des Verfassers, der sich mit der allgemeinen Theorie der Darstellungsformeln für willkürliche Functionen beschäftigte, und über den Gültigkeitsumfang seiner Ergebnisse natürlich möglichst genau sich zu unterrichten wünschte, lag es, auch die Convergenz der Fourierschen Darstellungen auf das eingehendste zu untersuchen.

Er will den Leser nicht davon unterhalten, wie er zuerst von der Allgemeingültigkeit der Entwickelbarkeit der Functionen in trigonometrische Reihen fest überzeugt war, wie er hundert schliesslich als fehlerhaft sich ergebende Versuche machte, sie zu beweisen, wie er, *après maint labeur et usage* lediglich aus der Dauer und der Viel-

VI) Um nur auf Riemann mich zu berufen, so findet man bei ihm zwei Stellen (Dissert. pag. 1, „neuere Untersuchungen haben indessen gezeigt, etc.“ und Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigon. Reihe, pag. 16, „In der That für alle Fälle der Natur, etc.“), die schwerlich anders sich deuten lassen, als so, dass Riemann mindestens alle stetigen Functionen durch trigonometrische Reihe darstellbar annahm.

Die Angabe, dass Dirichlet den Glauben an seinen Satz nicht verloren zu haben scheine, schöpfe ich aus einer mündlichen Mittheilung des Hrn. Weierstrass.

VII) Borch. Journ. 63. Bd. p. 286. Die im Texte gemeinte Muthmassung (auf der letzten Seite des Aufsatzes), auf welche Hr. Lipschitz schwerlich Gewicht legt, dass möglicherweise schon eine Function, für welche $\frac{1}{x}(f(x) - f(0 + 0))$ nicht verschwindet, für $x = 0$ nicht darstellbar sein könne, trifft in der That zu. Die durch Fouriersche Reihen nicht darstellbaren Functionen beginnen da, wo $\lambda(x)(f(x) - f(0 + 0))$ für $x = 0$ nicht verschwindet, und $\lambda(x)$ so langsam, oder langsamer unendlich wie $\frac{1}{x}$ wird. Im Fall, wo $\lambda(x)$ wie $\frac{1}{x}$ unendlich wird, bleibt die Fouriersche Reihe aber endlich. (Diese Abh. Art. 40, Schluss.)

seitigkeit seiner erfolglosen Anstrengungen die Ueberzeugung schöpfte, dass die Dirichletsche Behauptung falsch sei, und wie auf solche Weise er endlich auf den Weg geführt wurde, den er von vorneherein hätte einschlagen sollen, nämlich seine Untersuchung genau da anzufangen, wo Dirichlet die seinige, soweit sie gedruckt ist, hatte fallen lassen, d. i. bei den Functionen mit unendlich vielen Maximis. Aber eben nicht die schwer zu bewältigenden allgemeinen Voraussetzungen über die Beschaffenheit der darzustellenden Function waren zu Grunde zu legen, sondern es galt, das Problem möglichst zu vereinfachen, also zu beginnen mit der Untersuchung der Entwickelbarkeit einer Function, wie etwa $\varphi(x) \cos \psi(x)$, wo $\varphi(x)$ und $\psi(x)^{-1}$ für $x = 0$ ohne Maxima verschwinden, und zusammengesetztere Functionen erst dann herbeizuziehen, wenn mit den einfacheren die Grenze der Darstellbarkeit durch trigonometrische Reihen nicht erreicht wurde. Als für diesen Zweck dienliche, nächst zusammengesetztere Functionen waren, wie einige Ueberlegung zeigt, solche der Form $\varphi(x) \cos \mathcal{P}(x)$ anzusehen, wo $\mathcal{P}(x)$, statt wie $\psi(x)$ ohne Maxima unendlich zu werden, vielmehr in geeigneter Weise mit unendlich vielen Maximis unendlich wird. Die auf die Darstellbarkeit der Functionen bezüglichen Ergebnisse der angedeuteten Untersuchung waren kurzgefasst folgende:

Alle Functionen $\varphi(x) \cos \psi(x)$ sind, unter den obigen Bestimmungen über $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, für $x = 0$ darstellbar, wogegen man bei Einführung der Function $\varphi(x) \cos \mathcal{P}(x)$ sogleich ein Gebiet zum Theil nicht darstellbarer Functionen betritt.

So wurde denn der durch das Convergenzproblem zu bohrende Tunnel an beiden Enden, an dem der Convergenz und an dem der Divergenz, gleichzeitig in Angriff genommen, und es gelang — mit Hülfe einer gewissen neuen Rechnungsart sogar verhältnissmässig leicht — dem practischen Bedürfniss jedenfalls vollauf zu genügen, und auch eine vor der Hand wohl befriedigende theoretische Einsicht in diese dunklen Fragen zu gewinnen. Eine vollständige Einsicht keineswegs. Vielmehr möchten gerade die nachfolgenden Untersuchungen hinreichenden Grund zu der Vermuthung enthalten, dass unsere analytischen Hilfsmittel noch nicht ausreichen, um die allgemeine nothwendige Bedingung für die Darstellbarkeit einer Function aufzustellen. Vielleicht

aber gelangt man sogar dahin, überhaupt am Vorhandensein solcher Bedingungen zu zweifeln. (Diese Abh. Schluss des II. Cap.)

Es wird dem Leser nicht unwillkommen sein, wenn der Abhandlung ein etwas eingehender Bericht über ihren Inhalt vorangeschickt wird, der jedoch seinerseits eingeleitet werden mag durch eine kurze Uebersicht dessen, was über die Darstellbarkeit einer Function durch trigonometrische Reihen bereits festgestellt ist.

* * *

Ueber den gegenwärtigen Stand der Convergenzfrage der Fourierschen Darstellungsformeln.

Um zuerst die Aufgaben, mit denen wir uns beschäftigen wollen, scharf auszusprechen, gehen wir aus von der Sinus-Cosinus-Reihe:

$$\begin{aligned} \pi F(x) &= \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(\sin px \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha \varphi(\alpha) \sin p\alpha + \cos px \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha \varphi(\alpha) \cos p\alpha \right) \\ &= \lim_{n=\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha \varphi(\alpha) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(\beta-x)}{2 \sin \frac{\beta-x}{2}} \\ &= \lim_{h=\infty} \int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} d\alpha \varphi(x+2\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\sin \alpha}, \quad h = 2n+1. \end{aligned}$$

Wenn wir h unendlich werden lassen, ohne auf seine Form $2n+1$ Rücksicht zu nehmen, und wir erhalten ein bestimmtes Resultat, so können wir für die besondere Form $2n+1$ kein anderes Resultat erhalten, und dürfen von der Einführung dieser Form absehen. Wenn wir aber für $h = 2n+1 = \infty$ eine divergente Grenze erhalten, so wird sie auch divergent sein, wenn wir über h gar nichts voraussetzen.

Es wird sich um Werthe x handeln, die dem Intervall $-\pi < x < +\pi$ angehören, so dass $\frac{\pi - x}{2} = a$, $-\frac{\pi + x}{2} = -b$, $\varphi(x + 2\alpha) = f(\alpha)$ gesetzt, der

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{-b}^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\sin \alpha}$$

zu untersuchen ist. Wir vereinfachen die Frage, indem wir

$$\int_{-b}^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\sin \alpha} = \int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\sin \alpha} + \int_0^b d\alpha f(-\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\sin \alpha}$$

schreiben und den Limes der Integrale rechts einzeln bestimmen. Diese Untersuchung reducirt sich aber ersichtlich auf die des einen Integrals:

$$\int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\sin \alpha}.$$

Kennen wir die Bedingungen für $f(x)$, unter denen dieser Limes den Werth $\frac{\pi}{2}f(0)$ erhält, so wird das Convergenzproblem gelöst sein mit Ausnahme des besonderen Falles, wo die Integrale $\int_0^a$, $\int_{-b}^0$ beide an der Grenze divergiren, jedoch so dass ihre Summe convergirt, ein Fall, der hier kein Interesse bietet.

Nehmen wir $a < \frac{\pi}{2}$ an, und $0 < \varepsilon < a$, so ist:

$$\begin{aligned} \int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\sin \alpha} &= \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^a \\ &= \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} \int_0^\varepsilon d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} + \left(1 - \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon}\right) \int_0^\varepsilon d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} \end{aligned}$$

B*

$$+ \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} \int_{\varepsilon}^{\bar{a}} d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} + \frac{a}{\sin a} \int_a^{\bar{a}} d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}, \quad 0 \leq \bar{a} \leq \varepsilon, \quad \varepsilon \leq \bar{a} \leq a.$$

Wenn nun für positive a, b, c die Gleichungen gelten:

$$\lim_{h=\infty} \int_b^c d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = 0 \dots \quad \text{I}$$

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = \frac{\pi}{2} f(0), \dots \quad \text{II}$$

so muss, wie aus dem Obigen hervorgeht, die Fouriersche Entwicklung richtig sein. Wenn dagegen für gewisse Functionen $f(x)$ zwar die erste Formel eintrifft, dagegen der Limes $h = \infty$ von

$$\int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

zwischen endlichen oder unendlichen Grenzen unbestimmt ist, und dies so, dass der Limes jedes Integrals $\int_0^{\bar{a}} d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$, im Fall $\bar{a} < a$, dem absoluten Werthe nach nicht über den Limes des Integrals $\int_0^a$ sich erheben kann; so wird, weil $1 - \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon}$ beliebig klein gedacht werden darf, die Fouriersche Entwicklung divergiren.

Dieselben Integrale I, II entscheiden über die Richtigkeit der Fourierschen Formel:

$$\int_0^{\infty} d\alpha \int_A^B d\beta f(\beta) \cos \alpha(\beta - x) = \pi f(x),$$

wie dem Leser früherer Abhandlungen des Verfassers bekannt ist.

In diesen Abhandlungen ist weiter gezeigt, dass jene Sätze I, II besondere Fälle dieser sind:

$$\lim_{h=\infty} \int_b^c d\alpha f(\alpha) \varphi(\alpha, h) = 0 \dots \dots \quad \text{Ia}$$

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha f(\alpha) \varphi(\alpha, h) = f(0) \lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha \varphi(\alpha, h) \dots \dots \quad \text{IIa.}$$

Die Function $\varphi(x, h)$ betreffend, setzt der erste Satz voraus, dass $\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha \varphi(\alpha, h)$ zwischen irgend welchen dem Intervall $b \dots c$ angehörigen Grenzen Null ist, der zweite, dass $\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha \varphi(\alpha, h)$ von a unabhängig ist.

Diese beiden Sätze nenne ich den ersten und den zweiten Hauptsatz der Theorie der darstellenden Integrale.

Die Bedingungen, welche die beiden Hauptsätze der Function $f(x)$ auferlegen, habe ich unter den allgemeinsten Voraussetzungen über $\varphi(x, h)$ eingehender Prüfung unterworfen in einer Abhandlung: Borch. Journ. Bd. 79, pag. 38. Wie ich in dieser Abhandlung bemerkte, hat vermuthlich jedes darstellende Integral seine eigene Theorie und ganz besonders gilt dies von den Integralen I und II. Den Gültigkeitsbereich dieser speciellen Formeln festzustellen, ist der Gegenstand der vorliegenden Abhandlung. Folgendes sind die bereits für diesen Gültigkeitsbereich aufgestellten Regeln.

* * *

Der erste Hauptsatz

$$\lim \int_b^c d\alpha f(\alpha) \sin \alpha h = 0 \quad \text{I}$$

$$\lim \int_b^c d\alpha f(\alpha) \varphi(\alpha, h) = 0 \quad \text{Ia}$$

gilt, so oft die Function $f(x)$ integrirbar ist, offenbar eine nothwendige Bedingung. Wird sie in einem Punct unendlich, so gilt der Satz, wenn das Integral $\int f(\alpha) d\alpha$ über die Unendlichkeitsstelle unbedingt convergirt, eine Bedingung, welche, wie Beispiele lehren, nicht die nothwendige ist.

Für endliche Functionen $f(x)$ ist also der Gültigkeitsbereich dieses Satzes so gross, wie man es nur erwarten konnte.

Der andere Hauptsatz:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = \frac{\pi}{2} f(0) \quad \text{II}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^a d\alpha f(\alpha) \varphi(\alpha, h) = f(0) \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^a d\alpha \varphi(\alpha, h) \quad \text{IIa}$$

auferlegt in jedem $x = 0$ ausschliessenden Intervall der Function $f(x)$ ebenfalls nur die Bedingung der Integrirbarkeit. Weiter hat die Analyse verschiedene Annäherungsweisen der Function $f(x)$ an $x = 0$ ergeben, bei denen der zweite Hauptsatz immer stattfindet, von denen indessen keine nothwendig ist. Ich führe sie an, mit den allgemeinsten ($f(x)$ am wenigsten einschränkenden) Bedingungen beginnend.

1. Unter gewissen Beschränkungen, welche $\varphi(x, h)$ betreffen, und $\varphi(x, h) = \frac{\sin xh}{x}$ nicht ausschliessen, gilt der zweite Hauptsatz, wenn das Integral

$$\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha d\beta f(\beta)$$

unbedingt convergirt. ^{VIII)}

2. Unter keinen anderen Einschränkungen von $\varphi(x, h)$, als denen, welche der allgemeine Satz IIa vorschreibt, findet er statt, so oft das Integral

VIII) Borch. Journ. Bd. 79, pag. 38, Art. 9.

$$\int_0^a d\alpha f'(\alpha)$$

absolut convergirt.^{IX)}

3. Aus der Bedingung 1 folgt (diese Abh. Art. 26, und Borch. Journ. 79. Bd. pag. 62), dass der zweite Hauptsatz stattfindet, wenn

$$\lim_{x=0} \frac{f(x) - f(0+0)}{\tau(x)}$$

nicht unendlich ist, wo unter $\tau(x)$ die ohne Maxima Null werdende Function gedacht ist, welche die Grenze der Convergenz und Divergenz des Integrals

$$\int_0^a d\alpha \frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$$

bildet.^{X)} Diese Bedingung enthält die oben erwähnte des Hrn. Lipschitz.

4. Die alte Dirichletsche Bedingung lautet, dass der zweite Hauptsatz gilt, wenn $f(x) - f(0+0)$ von einem hinreichend kleinen Werthe von x an ohne Maxima mit x verschwindet.

Es ist zu bemerken, dass von den beiden letzteren Bedingungen keine die andere vollständig enthält.

Schliesslich hebe ich noch hervor, dass man Satz II oder die Frage nach dem Werth des darin vorkommenden Integral-Limes als zur Theorie des ersten Hauptsatzes gehörig betrachten kann, indem man II schreibt:

IX) Ebenda. Art. 8.

X) Die Einführung dieser Function $\tau(x)$ kann als im Widerspruch mit dem Schluss angesehen werden, dass es keine Function giebt, welche die Grenze zwischen Convergenz und Divergenz bildet. Ein Widerspruch ist indessen hier nicht vorhanden. Die genauere Erörterung dieser etwas subtilen Frage werde ich demnächst an anderem Orte geben. Hier nur in der Kürze die Andeutung, dass die Function τ zu den von der Seite der Divergenz, wie von der Seite der Convergenz her sich ihr nähernden Functionen in ähnlicher Beziehung steht, wie der Kreis zu den ihm umschriebenen und eingeschriebenen Linien. Practisch braucht man übrigens unter τ nicht die Grenze der Convergenz und Divergenz selbst sich vorzustellen, sondern es genügt, darunter eine Function sich zu denken, die der Grenze näher liegt, als alle anderen in den gerade vorgelegten Calcul eingehenden.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^a d\alpha \frac{f(\alpha)}{\alpha} \sin \alpha h .$$

Es würde sich dann um den Limes von

$$\int_b^c d\alpha f(\alpha) \varphi(\alpha, h)$$

handeln, wenn für einen zwischen b und c gelegenen Werth von x gleichzeitig $f(x)$ unendlich und $\varphi(x, h)$ Null wird, eine Auffassung, die im Folgenden ihre Berücksichtigung findet.

* * *

Eingehender Bericht über die folgende Untersuchung.

Die Aufgabe, den Limes $\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ für $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)$

zu untersuchen, führt, wie viele andere Convergenzprobleme auf die Aufgabe, die Stärke des Null- oder Unendlichwerdens nicht explicite gegebener Functionen zu bestimmen. Beispielsweise fällt man bei der obigen Grenzbestimmung u. A. auf folgende Gleichung:

$$\psi(\alpha + \delta) - \psi(\alpha) - \delta \psi'(\alpha) = \text{constans}$$

für eine unbekannte Function $\delta = \chi(\alpha)$, deren Nullwerden für $\alpha = 0$ zu beurtheilen ist (Art. 14).

Nahe liegt es, $\psi(\alpha + \delta)$ nach Potenzen von δ zu entwickeln, bei den ersten Gliedern die Entwicklung abzubrechen, und anzunehmen, dass δ wie die Wurzel aus $\psi''(\alpha)^{-1}$ Null wird, ein Ergebniss, dass sich für einzelne Functionen ψ als richtig erweist. Dieser Schluss, bei dem ich anfangs umsomehr mich beruhigen zu dürfen glaubte, als er bei einer ähnlichen Gelegenheit auch von Riemann gemacht wird,^{XI)} zwang

XI) Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch e. trigon. R. Art. 13.

jedoch Divergenz der Fourierschen Entwicklung bei Functionen anzunehmen, für welche sich die Convergenz der Entwicklung anderweitig feststellen liess, also musste der Schluss, allgemein zu reden, unrichtig sein.

Zwischen dieser Wahrnehmung und einer wirklich genügenden Auflösung der angeführten und der ihr ähnlichen Gleichungen, lag indessen noch ein weiter Weg. Es handelte sich, wie der Erfolg zeigt, um die Aufstellung einer neuen Rechnungsart, die ich, dieser ihrer ersten grösseren Anwendung vorgreifend, in den Annalen von Clebsch und Neumann, Th. VIII, S. 363 auseinandergesetzt habe, und Infinitärrechnung nenne. An der Hand der a. a. O. erörterten Methoden bieten sich neue analytische Erscheinungen dar, deren eigenthümlichste wohl die überall auftretende, fast zur Regel werdende Unstetigkeit der Gesetze ist, welche die Geschwindigkeit des Unendlichwerdens der Functionen bestimmen, wie denn z. B. die Auflösung obiger Gleichung $\psi(\alpha + \delta) - \psi(\alpha) - \delta\psi'(\alpha) = \text{constans}$ drei Formen hat, jenachdem nämlich $\psi(\alpha)$ rascher, gleich rasch, oder langsamer als der $\log \frac{1}{\alpha}$ unendlich wird.

Die im Folgenden besonders zur Anwendung kommenden Formeln aus der angeführten Abhandlung habe ich kurz zusammengestellt pag. 1—6.

Jene Rechnungsart einmal gefunden und sorgfältig durchdacht, war die Bahn frei, und da ich nun über viel weiterreichende Mittel wie früher verfügte, so habe ich mir die Genugthuung nicht versagt, auch allgemeinere Aufgaben als das nackte Convergenzproblem der Fourierschen Reihen zu untersuchen. Ich habe festgestellt den Limes $_{h=\infty}$ des Integrals

$$\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin h(\alpha + c)$$

für jeden Werth von c , für beliebiges Null- oder Unendlichwerden von $\sigma(\alpha)$, und beliebiges Unendlichwerden von $\psi(\alpha)$.

Für $c = 0$ findet sich diese Untersuchung in den Art. 1—17. Ihre Ergebnisse enthält die Tabelle Art. 17. Den Fall $c > 0$ erörtert Art. 18, und am Schluss findet man die bezüglichen Ergebnisse gleichfalls in eine Tabelle geordnet. Der ersten Untersuchung, welche bei den

XVIII

mannigfachen Fällen, die sie umfasst, etwas zusammengesetzt ausfallen musste, ist eine kurze Uebersicht über ihren Gang vorausgeschickt, pag. 7—11.

* * *

Die in den Tabellen Art. 17 und 18 enthaltenen Grenzergebnisse haben das Angenehme, dass sie uns in den Stand setzen, die für die beiden Hauptsätze der Theorie gefundenen Gültigkeitsbedingungen an einer hinreichend umfassenden Functionenklasse, für welche die nothwendigen Bedingungen der Darstellbarkeit bekannt sind, mit aller Schärfe zu vergleichen. Dies geschieht für den ersten Hauptsatz im zweiten, für den zweiten Hauptsatz im dritten Capitel. Da die allgemeinsten unter jenen Gültigkeitsbedingungen die Untersuchung gewisser Integrale auf die Art ihrer Convergenz, ob sie absolut oder bedingt sei, erheischen, so ist diese Untersuchung auch ein wesentlicher Theil des Inhalts der erwähnten Capitel, namentlich des dritten. Die Vergleichung der Tragweite der verschiedenen Gültigkeitsbedingungen wird durch die Figuren auf Tafel I und II übersichtlich gemacht.

Nehmen wir zu den drei ersten Capiteln noch die erste Hälfte der „Schlussbetrachtungen“ dieser Abhandlung hinzu, so sind deren Ergebnisse, so weit sie nur die Darstellbarkeit der Functionen durch trigonometrische Reihen betreffen, kurzgefasst diese:

Wenn für einen Punct x_1 die Differenz

$$f(x_1) - \lim_{x=x_1} f(x)$$

auf die Form $\varphi(x_1 - x) \cos \psi(x_1 - x)$ gebracht werden kann, wo $\varphi(x)$ und $\psi(x)^{-1}$ für $x = 0$ ohne Maxima Null werden, so ist $f(x_1)$ darstellbar. Diese Bedingung gestattet bedeutende Erweiterungen, theils indem man für die Function $\varphi(x) \cos \psi(x)$ eine Summe solcher Functionen $\sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p(x) \cos \psi_p(x)$ einführt, theils indem man den Cosinus durch eine trigonometrische Reihe ersetzt. Von diesen Erweiterungen handelt der erste Theil der Schlussbetrachtungen, wo sie indessen, da sie nicht ganz kurz zu erledigen sind, auch wohl noch kein sehr hervorragendes Interesse bieten, nicht vollständig durchgeführt werden.

Zu erwähnen ist noch der im Art. 32 zur Sprache kommende Fall der Nichtdarstellbarkeit einer Function, wo sie nämlich in einem Punkte unendlich wird, während ihre trigonometrische Entwicklung in diesem Punkte convergirt.

* * *

Der Rest der Abhandlung, das vierte Capitel und die zweite Hälfte der Schlussbetrachtungen beschäftigt sich mit der Darlegung der Bedingungen, unter denen die trigonometrische Entwicklung einer endlichen und stetigen Function für einzelne Punkte divergirt. Es wird im

IV. Capitel zuerst gezeigt, dass der $\lim_{h \rightarrow \infty} \int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ zwischen unendlichen Grenzen schwankt, wenn für $f(x)$ eine Function $\sin \Psi(x)$ genommen wird, die in Strecken, welche bei Annäherung an $x = 0$ gegen Null abnehmen, periodisch ist, aber mit gleichfalls gegen Null abnehmenden Perioden, so dass beim Wachsthum von h die Perioden von $\sin \alpha h$ unbegrenzt oft in aufeinanderfolgenden Strecken denen von $\sin \Psi(x)$ gleich werden (Art. 34). Alsdann weise ich nach, dass sich eine ohne Maxima verschwindende Function $\varphi(x)$ angeben lässt, so dass auch für $f(x) = \varphi(x) \sin \Psi(x)$ jener Limes verschwindet.

Nachdem dies in Ordnung gebracht ist, tritt die Frage nach den günstigsten Bedingungen für die Divergenz in den Vordergrund, und es ergibt sich, dass für eine stetige Function die trigonometrische Reihe, durch eine Function ihrer Gliederzahl dividirt, welche rascher als der Logarithmus unendlich wird, stets Null zur Grenze hat, aber durch den Logarithmus oder eine langsamer unendlich werdende Function der Gliederzahl dividirt, zwischen endlichen oder unendlichen Grenzen schwanken kann.

Bei dieser Gelegenheit zeigt sich noch, dass die divergenten trigonometrischen Reihen erst bei Functionen erscheinen, deren Differenzen $f(x_1) - \lim_{x \rightarrow x_1} f(x)$ für einzelne Punkte x_1 so langsam oder langsamer wie der reciproke Logarithmus von $\frac{1}{x - x_1}$ verschwinden.

Die im vorstehenden gemeinten Functionen $\varphi(x)$ sin $\Psi(x)$ konnten zwar selbst stetig gemacht werden, aber es war noch zu zeigen, dass die unbegrenzt vielen Unstetigkeiten ihrer Differentialquotienten in der Nähe von $x = 0$ auf die erhaltenen Resultate ohne Einfluss seien. Zu diesem Behuf wird im Art. 41 die Function sin $\Psi(x)$ durch eine gleiches leistende mit beliebig vielen, in den folgenden Artikeln durch eine mit allen ihren Differentialquotienten stetige ersetzt. Diese Function beweist zwar, was sie soll, ist aber nicht einfachen Baues. Ich zweifle nicht, dass schon ganz gewöhnliche aus trigonometrischen und Exponentialfunctionen zusammengesetzte Functionen für einzelne Argumente nicht darstellbar seien, habe dergleichen Beispiele aber erst aufzusuchen angefangen, als ich des Gegenstandes und der Art der Behandlung, die er erheischt, zu müde war, um noch hinreichende Ausdauer für diese Nachforschungen übrig zu haben.

In den Schlussbetrachtungen wird aus der für den Argumentwerth $x = 0$ nicht darstellbaren Function $\varphi(x)$ cos $\Psi(x)$ eine andere abgeleitet, die zwar durchweg stetig ist, deren trigonometrische Entwicklung aber in jedem kleinsten Intervall Punkte besitzt, in denen sie divergirt.

Inhaltsverzeichnis.

Allgemeine Einleitung	Seite I
Ueber den gegenwärtigen Stand der Convergenzfrage der Fourierschen Darstellungsformeln	X
Eingehender Bericht über die folgende Untersuchung	XVI

Hülffssätze aus dem Infinitärreclül	1
---	---

I. Capitel.

Untersuchung des Limes $\lim_{h=\infty} \left(J = \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin h\alpha \right)$.

Kurze Uebersicht über den Gang dieser Untersuchung	7
--	---

Artikel

1. Durch die Zerlegung des Integrals J, zu der die Untersuchung naturgemäss zuerst ihre
Zuflucht nimmt, ergibt sich auch sogleich ihre natürliche Eintheilung 11

A.

Untersuchung des $\lim J$ im Falle $\psi(\alpha) \lesssim \frac{1}{\alpha}$.

2. Allgemeine Behandlung des Limes J für $\psi(\alpha) \lesssim \frac{1}{\alpha}$ 13
3. Nähere Angabe der ersten Zerlegung von J in $J' + J''$ 14
4. Der Limes des Integrals $J' = \int_0^{\alpha'} d\alpha \cos \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ unter der Annahme $\psi(\alpha) < \frac{1}{\alpha}$ 14
5. Der Limes des Integrals J' im Falle $\psi(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ 17
6. Der Limes des Integrals $J'' = \int_{\alpha'}^a d\alpha \cos \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ für $\psi(\alpha) \lesssim \frac{1}{\alpha}$ 17

XXII

Artikel		Seite
7. Der Limes des Integrals $J_1'' = \int_{\alpha'}^a d\alpha \frac{\sin \eta}{\alpha}$ für $\eta = \psi(\alpha) + \alpha h$ und $\psi(\alpha) \gtrsim \frac{1}{\alpha}$		18
8. Der Limes des Integrals $J_2'' = \int_{\alpha'}^a d\alpha \frac{\sin \chi}{\alpha}$, $\chi(\alpha) = \psi(\alpha) - \alpha h$		20
9. Zusammenfassung der bisherigen Resultate		21
10. Bestimmung des $\lim_0 \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin \alpha h$ für den Fall $\psi(\alpha) \gtrsim \frac{1}{\alpha}$, wenn die Voraus-		
setzung $\sigma(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ fallen gelassen wird, Annahme: $\alpha \sigma(\alpha) \lesssim 1$		22
11. Fortsetzung. Annahme $\alpha \sigma(\alpha) > 1$		23
	B.	
Untersuchung des $\lim_{h=\infty} J = \lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin \alpha h$ falls $\psi(\alpha) > \frac{1}{\alpha}$ ist.		
12. Voraussetzungen, die der Untersuchung zu Grunde gelegt werden		24
13. Ueber den Limes des Integrals $J_2 = \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \sin \chi$, wo $\chi = \psi(\alpha) - h\alpha$		25
14. Ueber den Limes des Integrals $J_1 = \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \sin \eta$, wo $\eta = \psi(\alpha) + h\alpha$		27
15. Nachweis der Divergenz des $\lim_0 \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \sin \eta$, $\eta = \psi(\alpha) + h\alpha$, im Falle $\psi(\alpha) > \frac{1}{\alpha}$, $\sigma(\alpha) > \psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}$		31
16. Schlussbemerkung über den Limes von $J = \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin \alpha h$, falls $\sigma(\alpha) = \gamma(\alpha) \psi'(\alpha)$, $\gamma(\alpha) < 1$, $\psi(\alpha) > \frac{1}{\alpha}$ ist		35
17. Zusammenfassung der Resultate der bisherigen Untersuchung		36
18. Ueber die Grenzwerte ähnlicher Integrale, namentlich des Integrals $\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin h(\alpha+c)$		37
19. Uebersicht über die Verwendung der obigen Resultate in den beiden folgenden Capiteln		40
	II. Capitel.	
	Prüfung der Regeln für die Gültigkeit des ersten Hauptsatzes, falls die willkürliche Function unendlich wird.	
20. Die Regeln für die Gültigkeit des ersten Hauptsatzes		43

Artikel		Seite
21. Allgemeine Regeln über die Convergenz eines Integrals der Form $\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)$		44
22. Vergleichung der allgemeinen Regeln I und II mit den besonderen Regeln III und IV (Art. 20)		47
23. Kurze Uebersicht über die Ergebnisse dieses Capitels, nebst einigen Bemerkungen, welche ihre graphische Darstellung veranlasst		50

III. Capitel.

**Prüfung der Regeln für die Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes,
welcher dem Convergenzbeweis für die Fourier'schen Reihen zu
Grunde liegt.**

24. Angabe der Regeln für die Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes	53
25. Unter welchen Umständen ist für $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)$ das Integral $\int_0^a d\alpha f(\alpha)$ absolut convergent?	55
26. Untersuchung der Bedingungen für ϱ und ψ in $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)$, welche das Integral $\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha d\beta f(\beta)$ absolut convergent machen. Es wird die Bedingung $\varrho(\alpha) \asymp r(\alpha)$ aufgestellt, und, um sie auf ihre Nothwendigkeit zu prüfen, wird zuerst eine Substitution für $f(\alpha)$ eingeführt, welche für $\psi(\alpha) > r(\alpha)^{-1}$ gilt	57
27. Nachweis, dass die Substitution des vorigen Art. für $f(\alpha)$ die Prüfung der Nothwendigkeit der Bedingung $\varrho(\alpha) \asymp r(\alpha)$ gestattet	59
28. Nachweis der Nothwendigkeit der Bedingung $\varrho(\alpha) \asymp r(\alpha)$ für $\psi(\alpha) > r(\alpha)$	60
29. Die nothwendige Bedingung für die absolute Convergenz von K wird für das Intervall $1 < \psi(\alpha) < 1 \frac{1}{\alpha}$ mit Hülfe einer anderen Substitution für $f(\beta)$ aufgestellt	61
30. Bemerkungen über diese Bedingung für die absolute Convergenz von K im Falle $1 < \psi(\alpha) < 1 \frac{1}{\alpha}$	65
31. Graphische Darstellung der Bedingungen für den zweiten Hauptsatz	66
32. Bemerkungen über die Ergebnisse der obigen Vergleichung der Bedingungen für den zweiten Hauptsatz	68
33. Allgemeine Bemerkungen über das Convergenzproblem der Fourierschen Reihen	70

IV. Capitel.

**Darstellung der Bedingungen, unter denen die Fourierschen Reihen
divergiren.**

34. Auseinandersetzung des Grundgedankens dieser Untersuchung	72
35. Beschreibung der einzuführenden schematisirten Function	75
36. Es wird zuerst die Divergenz des $\lim_{\alpha} \int_0^a d\alpha \sin \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ nachgewiesen	77

XXIV

Artikel	Seite
37. Alsdann wird eine hinreichend langsam Null werdende Function eingeführt, damit auch	
$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^a d\alpha \varphi(\alpha) \sin \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ divergirt	79
38. Untersuchung der Frage, wie stark das Integral $\int_0^a d\alpha \sin \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ bei seiner Divergenz	
mit h unendlich wird	81
39. Verallgemeinerung des Functionen-Schema $\psi(x)$	82
40. Ueber die allgemeine Frage: Wie rasch kann überhaupt das Integral $\int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ mit h	
unendlich werden	84
41. Stetigmachung der schematisirten Function ψ . Sie wird zunächst mit beliebig vielen Differentialquotienten stetig gemacht	87
42. Stetigmachung der Function ψ . Sie wird durch eine mit allen ihren Differentialquotienten stetige ersetzt	88
43. Stetigmachung etc. Einführung der mit ihren sämtlichen Differentialquotienten stetigen Function	
44. Stetigmachung etc. Nachweis, dass, ψ_2 an die Stelle von ψ gesetzt, das Fouriersche Integral gleichfalls einen divergenten Limes hat	92

Schlussbetrachtungen.

I. Verallgemeinerung der im Capitel I für die Entwickelbarkeit nach Fourierschen Reihen gefundenen Bedingung	95.
II. Erweiterung der Form der nichtdarstellbaren Functionen	99

Untersuchungen

über die

Convergenz und Divergenz

der

Fourierschen Darstellungsformeln.

Von

Paul du Bois-Reymond.

Mit drei lithographirten Tafeln.

Untersuchungen

Convergenz und Divergenz

Fourierschen Darstellungformeln

Paul du Bois-Reymond

Mit drei lithographirten Tafeln

Untersuchungen
über die
**Convergenz und Divergenz der Fourierschen
Darstellungsformeln.**

Hulfssätze aus dem Infinitärcalcul.

Bezeichnungen und einfache Operationen des Infinitärcalculs, die im
Folgenden zur Anwendung kommen.

I.

Es handelt sich nur um Functionen, die nicht unendlich viele Maxima und Minima haben. Wenn der Quotient $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ für irgend einen numerischen Werth von x (wohin auch ∞ zu rechnen) einen unendlich grossen, oder einen endlichen von Null verschiedenen, oder einen verschwindenden Limes hat, so bezeichnen wir dies mit:

$$\varphi(x) > \psi(x) , \varphi(x) \sim \psi(x) , \varphi(x) < \psi(x) .$$

Im Falle $\varphi(x) \geq \psi(x)$ sagen wir, wenn beide Functionen unendlich werden: das Unendlich von $\varphi(x)$ ist grösser resp. kleiner als das von $\psi(x)$, und wenn sie verschwinden, sagen wir das Gleiche von der Null dieser Functionen.

Relationen wie $\varphi(x) \gtrsim \psi(x)$ heissen infinitäre Gleich- oder Ungleichheiten. Falls zwei Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ einen endlichen gleichen Limes haben, soll dies kurz durch:

$$\varphi(x) \overline{\sim} \psi(x)$$

bezeichnet werden.

II.

Man kann jede infinitäre Gleich- oder Ungleichheit mit einer beliebigen Function an beiden Seiten multipliciren, auf beliebige Potenzen erheben oder logarithmiren.

Man kann in der infinitären Gleich- oder Ungleichheit

$$\lambda(x) \varphi_1(x) + \mu(x) \gtrsim \psi(x)$$

die linke Seite ersetzen durch $\varphi_1(x)$, wenn $\mu(x) < \varphi_1(x)$, $\lambda(x) \sim 1$ ist.

Man kann die infinitären Gleich- oder Ungleichheiten differenziren und integriren mit folgenden Ausnahmen: Wenn in $\varphi(x) \gtrsim \psi(x)$ die linke Seite einen endlichen Limes hat, ist die Relation im Allgemeinen nicht differenzirbar, und die Ungleichheit $\varphi(x) > \psi(x)$ ist dann nicht integrirbar, wenn $\int \varphi(x) dx$ einen endlichen Limes hat, weil sich alsdann daraus $\int \varphi(x) dx \sim \int \psi(x) dx$ ergibt.¹⁾

In Bezug auf das Unendlich der Functionen, wenn ihr Argument unendlich wird, hebe ich noch den Begriff der Infinitärtypen hervor. So nenne ich eine Function t , welche die Gleichheit $tf'(x) \sim f(x)$ erfüllt. Zum Typus wird man die einfachste, dieser Gleichheit genügende Function wählen.

Ueber Grenzwerthe von Ausdrücken der Form $\frac{f(a + \varphi(x))}{f(a)}$

III.

Zu Grunde lege ich den Satz: Es sei $\lambda(a) > 1$ für $a = 0$ und ebenso $\lambda(a) < 1$, so hat man:

1) Siehe: Borch. Journ. Bd. 74, pag. 297 und Ann. v. Cl. und N. Bd. VIII, pag. 373 Anm.

$$\frac{\lambda\left(\alpha + \frac{\alpha u}{\lambda(\alpha)}\right)}{\lambda(\alpha)} \xrightarrow{\infty} 1. \text{ 2)}$$

Hieraus wollen wir einige Schlüsse ziehen.

IV.

Es sei $\psi(\alpha) > 1\frac{1}{\alpha}$, oder wie durch Differentiation folgt

$\psi'(\alpha) = \frac{\mu(\alpha)}{\alpha}$, $\mu(\alpha) > 1$, so hat man:

$$\frac{\psi'\left(\alpha + \frac{u}{\psi'(\alpha)}\right)}{\psi'(\alpha)} \xrightarrow{\infty} 1$$

Denn setzt man in vorstehendem Ausdruck $\frac{\mu(\alpha)}{\alpha}$ statt $\psi'(\alpha)$, so findet man:

$$\frac{\alpha}{\alpha + \frac{\alpha u}{\mu(\alpha)}} \cdot \frac{\mu\left(\alpha + \frac{\alpha u}{\mu(\alpha)}\right)}{\mu(\alpha)}$$

V.

Es sei wieder $\psi(\alpha) > 1\frac{1}{\alpha}$, so ist auch:

$$\frac{\psi''\left(\alpha + \frac{u}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\psi''(\alpha)} \xrightarrow{\infty} 1.$$

Denn aus $\psi(\alpha) > 1\frac{1}{\alpha}$ folgt auch zweimalige Differentiation: $\psi''(\alpha) = \frac{\mu_1(\alpha)}{\alpha^2}$, $\mu_1(\alpha) > 1$, woraus diese Formel sich ergibt.

VI.

Endlich unter derselben Voraussetzung $\psi(\alpha) > 1\frac{1}{\alpha}$ sei $1 < \sigma(\alpha) < \psi'(\alpha)$, so ist auch:

2) Ann. v. Cl. und N. Bd. VIII, pag. 381.

$$\frac{\sigma\left(\alpha + \frac{u_1}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\sigma(\alpha)} \approx 1.$$

Beweis: Man hat:

$$\frac{\sigma\left(\alpha + \frac{u_1}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\sigma(\alpha)} = 1 + u \frac{\sigma'(\alpha)}{\sigma(\alpha)\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sigma'\left(\alpha + \frac{u}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\sigma'(\alpha)}, \quad 0 \leq u_1 \leq u,$$

und es ist zu zeigen, dass

$$1. \frac{\sigma'(\alpha)}{\sigma(\alpha)\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}} < 1, \quad 2. \frac{\sigma'\left(\alpha + \frac{u_1}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\sigma'(\alpha)} \approx 1.$$

Um die erste Formel zu beweisen, d. i. um zu beweisen, dass

$$\sigma'(\alpha) < \sigma(\alpha)\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}},$$

führen wir ein $\sigma(\alpha) = \gamma(\alpha)\psi'(\alpha)$, $\gamma(\alpha) < 1$, wodurch vorstehende Ungleichheit wird (in etwas abgekürzter Schreibweise):

$$\gamma'\psi' + \gamma\psi'' < \gamma\psi'\psi''^{\frac{1}{2}}$$

Nun werde ich zeigen, dass unter obigen Voraussetzungen stets

$$\gamma\psi'' > \gamma'\psi'$$

ist. Aus $\sigma = \gamma\psi' > 1$ folgt:

$$\psi' > \frac{1}{\gamma}$$

oder

$$\ln\psi' > \frac{1}{\gamma}$$

Durch Differentiation folgt:

$$\frac{\psi''}{\psi'} > \frac{\gamma'}{\gamma},$$

und durch Multiplication mit $\gamma\psi'$ ergibt sich $\gamma\psi'' > \gamma'\psi'$. Die zu beweisende Ungleichheit $\gamma'\psi' + \gamma\psi'' < \gamma\psi'\psi''^{\frac{1}{2}}$ kürzt sich somit zu $\gamma\psi'' < \gamma\psi'\psi''^{\frac{1}{2}}$ d. i. zu

$$\psi''^{\frac{1}{2}} < \psi'$$

ab. Aber wenn man dies schreibt:

$$\frac{\psi''}{\psi'^2} < 1 ,$$

und integriert, so folgt gerade $\frac{1}{\psi'} < \alpha$ oder

$$\psi' > \frac{1}{\alpha}$$

wie dies in der That aus der Differentiation von $\psi > \frac{1}{\alpha}$ folgt.

Zweitens war der Limes:

$$\frac{\sigma' \left(\alpha + \frac{u_1}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}} \right)}{\sigma'(\alpha)} \overline{\infty} 1 , \quad 0 \leq u_1 \leq u$$

zu beweisen. Dies ist sehr einfach. Aus $\sigma(\alpha) < \psi'(\alpha)$ folgt $\sigma'(\alpha) < \psi''(\alpha)$, und daher findet wegen V die vorstehende Formel a fortiori statt.

Infinitäre Auflösung einiger Gleichungen.

VII.

Es sei δ bestimmt durch die Gleichung

$$\psi(\alpha + \delta) - \psi(\alpha) \pm \frac{\delta C}{\alpha} = \pm N ,$$

wo $\psi(\alpha) < \frac{1}{\alpha}$, so findet man:

$$\delta = \frac{u N \alpha}{C} , \quad u \overline{\infty} 1 .$$

Für $\psi(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha}$ ist

$$\delta = u p \alpha , \quad u \overline{\infty} 1 ,$$

wo p der Gleichung:

$$\psi_1(o) \frac{1}{1+p} \pm p C = \pm N , \quad \psi_1(o) \overline{\infty} \frac{\psi(\alpha)}{\frac{1}{\alpha}}$$

genügt.³⁾

3) Ann. v. Cl. u. N. Bd. VIII, pag. 412.

VIII.

Es sei δ bestimmt durch diese Gleichung:

$$\psi(\alpha + \delta) - \psi(\alpha) \pm \delta \psi'(\alpha) v = N,$$

wo $\psi(\alpha) > \frac{1}{\alpha}$, $v < 1$ sei, so ist:

$$\delta = \frac{uN}{\psi'(\alpha)}, \quad u \approx 1 \text{ . } ^4)$$

IX.

Es sei endlich δ bestimmt durch:

$$\psi(\alpha + \delta) - \psi(\alpha) - \delta \psi'(\alpha) = N.$$

Man findet für $\psi(\alpha) > \frac{1}{\alpha}$:

$$\delta = u \sqrt{\frac{2N}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}}}, \quad u \approx 1 \text{ . } ^5)$$

4) Ebenda.

5) Ann. v. Cl. u. N. Bd. VIII, pag. 407 sqq.

I. Capitel.

Untersuchung des Limes $\lim_{h=\infty} \left(J = \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin h\alpha \right)$

Kurze Uebersicht über den Gang dieser Untersuchung.

Da die Untersuchung des Limes $\left(J = \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin h\alpha \right)$ etwas zusammengesetzter Natur ist, so wird es für Leser, die sich nicht darin zu vertiefen beabsichtigen, erwünscht sein, nicht allein über ihre Resultate eine Uebersicht zu erhalten, wie sie die Tabelle des Art. 17 zu gewähren bestimmt ist, sondern auch mit ihrem Gang im Allgemeinen sich bekannt machen zu können. Solchen Lesern aber, welche die Untersuchung jenes Limes genauer studieren wollen, wird eine kurze Zusammenstellung ihrer Hauptstationen eine nicht von der Hand zu weisende Erleichterung bieten.

Um Functionen von übersichtlicheren Schwankungen unter Art. 1. suchen zu können, zerlegt man das Integral J zuerst so:

$$J = \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin h\alpha = \frac{1}{2}J - \frac{1}{2}J_2, \dots \quad I$$

$$J_1 = \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \sin \eta, \quad J_2 = \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \sin \chi$$

wo

$$\begin{aligned} \eta &= \eta(\alpha) = \psi(\alpha) + h\alpha \\ \chi &= \chi(\alpha) = \psi(\alpha) - h\alpha. \end{aligned}$$

Dann ergibt sich aber alsbald, dass diese Zerlegung nur dann erlaubt ist, wenn $\psi(\alpha)$ rascher unendlich wird, als der $\log \frac{1}{\alpha}$: es sei denn, dass $\sigma(\alpha)$ um ein Gewisses langsamer unendlich werde als $\frac{1}{\alpha}$, wodurch aber gerade die für die Fourierschen Reihen interessantesten Annahmen ausgeschlossen würden. Somit zerfällt die Untersuchung in zwei Theile: 1. wenn $\psi(\alpha)$ ebenso langsam oder langsamer unendlich wird, wie der $\log \frac{1}{\alpha}$, 2. wenn $\psi(\alpha)$ rascher unendlich wird.

A Der Untersuchung erster Theil: $\psi(\alpha)$ wird nicht rascher unendlich wie der $\log \frac{1}{\alpha}$.

Hier kann man von der Zerlegung I des Integrals J erst Gebrauch machen, nachdem man von J ein Theilintegral mit der Grenze Null abgetrennt und für sich untersucht hat. Der Rest kann dann mit Hülfe der Zerlegung I untersucht werden. Es wird

also $J = \int_0^a$ in die Integrale $\int_0^{\alpha'} + \int_{\alpha'}^a$ zerlegt werden, und die

Kunst besteht nun darin, α' so sich auszusuchen, dass der Limes des Theilintegrals ohne Mühe sich feststellen lässt. Dies leistet
 Art. 2, 3. die Bestimmung $\alpha'h = C$, wo C ungemein gross zu denken ist, dabei aber h so gross angenommen wird, dass α_1 zwischen 0 und a fällt. Indessen muss das Integral von 0 bis α' noch einmal gespalten werden. Auch ist es vortheilhaft, die Untersuchung zunächst unter der einfacheren Annahme durchzuführen, dass $\sigma(\alpha) = 1$ ist, so dass man im Ganzen hat:

$$J = \int_0^a d\alpha \cos \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = \int_0^{\frac{\epsilon}{h}} d\alpha \cos \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} + \int_{\frac{\epsilon}{h}}^{\alpha'} d\alpha \cos \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\alpha'}^a d\alpha \frac{\sin[\psi(\alpha) + \alpha h]}{\alpha} - \frac{1}{2} \int_{\alpha'}^a d\alpha \frac{\sin[\psi(\alpha) - \alpha h]}{\alpha}.$$

Wenn ε hinreichend klein ist, ist der Limes des ersten Integrals rechts beliebig nahe der Null, wenn C in $\alpha'h = C$ hinreichend gross, ist der Limes des zweiten Integral nicht ausserhalb des Intervalls $-\frac{\pi}{2} \dots + \frac{\pi}{2}$ anzutreffen, aber auch kein bestimmter. Der Limes des dritten und vierten Integrals nähert sich der Null. Wenn dann statt $\sigma(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ wieder eine allge-Art. 6, 7, 8, 9 meinere Hypothese eingeführt wird, z. B. gesetzt wird $\sigma(\alpha) = \text{Art. 10.} = \frac{\varrho(\alpha)}{\alpha}$, so bleibt Null der Limes der drei übrigen Integrale und der des zweiten ist wieder enthalten im Intervall $-\varrho(0)\frac{\pi}{2} \dots + \varrho(0)\frac{\pi}{2}$, womit der Fall $\psi(\alpha) < l\frac{1}{\alpha}$ erledigt ist. Für $\psi(\alpha) \sim l\frac{1}{\alpha}$ wird der Limes direct und zwar unter der Annahme $\varphi(\alpha) = l\frac{1}{\alpha}$ Art. 5. berechnet. Es ergibt sich ein etwas anderer Ausdruck für die Grenze des den Limes einschliessenden Integrals.

Der Untersuchung zweiter Theil: $\psi(\alpha)$ wird rascher B unendlich wie $l\frac{1}{\alpha}$.

Hier darf man also setzen:

$$\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin h\alpha = \frac{1}{2} \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \sin \eta - \frac{1}{2} \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \sin \chi, \quad \text{Art. 12.}$$

wo $\eta = \psi(\alpha) + \alpha h$, $\chi = \psi(\alpha) - \alpha h$. Auch über $\sigma(\alpha)$ verlangt die Untersuchung Annahmen, und zwar, $\sigma(\alpha) = \gamma(\alpha)\psi'(\alpha)$ gesetzt, die Annahme, dass $\gamma(\alpha)$ für $\alpha = 0$ verschwindet. Es zeigt sich indessen später, dass diese Annahme in Wahrheit keine Beschränkung enthält. Ausserdem ist auch $\sigma(0) = \infty$ vorausgesetzt, weil sonst $\lim J$ nach allgemeinen Sätzen Null ist. Führt man

die Grössen η und χ als Veränderliche in die obigen Integrale rechts ein, so ist dabei folgendes zu bemerken. Das zweite Integral nach χ wird:

$$\int_{\chi(0)=\infty}^{\chi(a)} d\chi \cdot \frac{\chi(\alpha)\psi'(\alpha)}{\psi'(\alpha)-h} \sin \chi,$$

weil $\chi(\alpha)$ von $\alpha = 0$ bis $\alpha = a$ abnimmt. Anders verhält sich $\eta(\alpha)$, das von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \alpha_1$ (wo α_1 durch $\eta'(\alpha_1) = \psi'(\alpha_1) + h = 0$ bestimmt ist) abnimmt und dann wieder bis $\alpha = a$ zunimmt, so dass man das erste Integral als Summe zweier Integrale schreiben muss. Die Untersuchung des Integrals nach χ wird aber ihrerseits dadurch weniger einfach gemacht, dass die Function:

$$\sigma(\alpha) \frac{d\alpha}{d\chi} = \frac{\chi(\alpha)\psi'(\alpha)}{\psi'(\alpha)-h}$$

Art. 13. zwischen den Grenzen des Integrals ein Maximum für $\alpha = \alpha^*$ hat. Es wird sonach wieder eine Zerlegung des ursprünglichen Integrals J in vier Theile nöthig und man hat also zu setzen:

$$J = \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin h\alpha = \frac{1}{2} \int_{\eta(0)=\infty}^{\eta(\alpha_1)} d\eta \dots + \frac{1}{2} \int_{\eta(\alpha_1)}^{\eta(a)} d\eta \dots \\ - \frac{1}{2} \int_{\chi(0)=\infty}^{\chi(\alpha^*)} d\chi \dots + \frac{1}{2} \int_{\chi(\alpha^*)}^{\chi(a)} d\chi \dots$$

Irgend eines dieser vier Integrale, z. B. das erste, hat also jetzt die Form:

$$\int d\eta f(\eta) \sin \eta,$$

wo $f(\eta)$ zwischen den Grenzen der Integration kein Maximum oder Minimum mehr hat, also dass das Integral in eine Schaar alternirender, ihrem absoluten Werthe nach abnehmender Theile zerfällt, deren Summe eingeschlossen ist zwischen dem grössten dieser Theile, und der Differenz des grössten und zweitgrössten, was erlaubt, den Limes der vier Integrale zu berechnen.

Man findet, dass die beiden Integrale nach χ unter den über $\sigma(\alpha)$ und $\psi(\alpha)$ gemachten Voraussetzungen, den Limes Null haben. Auch die Integrale nach η haben den Limes Null, wenn noch die fernere Hypothese hinzutritt, dass die Grösse

$$\frac{\gamma(\alpha) \psi'(\alpha)}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}}$$

Art. 14.

mit α verschwindet. Wenn jedoch diese Grösse unendlich wird, Art. 15. so lässt sich zeigen, dass die nach η genommenen Integrale für $h = \infty$ zwischen unendlichen Grenzen hin und her schwanken, womit die Untersuchung ihren Abschluss findet.

I. Durch die Zerlegung des Integral J, zu der die Untersuchung naturgemäss zuerst ihre Zuflucht nimmt, ergibt sich auch sogleich ihre natürliche Eintheilung.

Am nächsten liegt es, die Untersuchung des Limes $h = \infty$ von

$$J = \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin h\alpha$$

an die Umformung zu knüpfen:

$$J = \frac{1}{2} J_1 - \frac{1}{2} J_2 = \frac{1}{2} \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \sin \eta - \frac{1}{2} \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \sin \chi,$$

wo, wie ich gleich bemerken will, die Functionen

$$\eta = \eta(\alpha) = \psi(\alpha) + h\alpha$$

$$\chi = \chi(\alpha) = \psi(\alpha) - h\alpha$$

im Grossen und Ganzen folgenden Verlauf haben:

Die Function $\eta(\alpha)$ wird unendlich für $\alpha = 0$. Sie hat ein Minimum für einen durch

$$\psi'(\alpha_1) + h = 0$$

bestimmte positiven Werth $\alpha = \alpha_1$, der Null wird für $h = \infty$, da $\psi'(\alpha)$ negativ ist und mit $\psi(\alpha)$ für $\alpha = 0$ unendlich werden muss. So gross wollen wir aber h von vorneherein annehmen, dass $0 < \alpha_1 < a$. Von $\alpha = \alpha_1$ an wächst $\eta(\alpha)$ bis zum Werth $\psi(a) + ah$, den wir uns mit h zugleich sehr gross vorstellen wollen. Die Function $\chi(\alpha)$ nimmt von $\chi(0) = \infty$ bis $\chi(\alpha) = \psi(a) - ha$ fortgesetzt ab.

Aus der Zerlegung

$$J = \frac{1}{2} \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \sin \eta - \frac{1}{2} \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \sin \chi = \frac{1}{2} J_1 - \frac{1}{2} J_2$$

ergiebt sich zunächst eine Eintheilung unserer Untersuchung nach dem Unendlich von $\psi(\alpha)$ bei verschwindendem α . Führen wir in J_2 statt α die Veränderliche χ ein, so folgt:

$$\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \sin \chi = \int_{\chi(0)}^{\chi(a)} d\chi \frac{d\alpha}{d\chi} \sigma(\alpha) \sin \chi = - \int_{\chi(a)}^{\infty} d\chi \frac{\sigma(\alpha) \sin \chi}{\psi'(\alpha) - h}.$$

Nun folgt aber aus:

$$\psi(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha}$$

durch Differentiation:

$$\psi'(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha^2},$$

oder $\psi'(\alpha) = -\frac{\mu(\alpha)}{\alpha}$ gesetzt, entsprechen den vorstehenden drei Zeichen die Fälle:

$$\mu(\alpha) \sim 1.$$

Dadurch wird:

$$J_2 = \int d\chi \frac{\alpha \sigma(\alpha) \sin \chi}{\alpha h + \mu(\alpha)}.$$

Unter der Annahme $\mu(\alpha) \sim 1$ ist dies Integral dann ersichtlich unbestimmt zwischen endlichen oder unendlichen Unbestimmtheitsgrenzen, falls nicht $\alpha \sigma(\alpha) < \alpha h + \mu(\alpha)$.

D. h. im günstigsten Falle darf $\sigma(\alpha)$ höchstens ein Unendlich haben, das um ein Gewisses kleiner ist als das von $\frac{1}{\alpha}$. Es ist also die Zerlegung $J = \frac{1}{2}J_1 - \frac{1}{2}J_2$ für $\mu(\alpha) \sim 1$ ohne besondere Voraussetzungen über $\sigma(\alpha)$ nicht statthaft, die jedoch gerade die interessanteren Annahmen über $\sigma(\alpha)$ ausschliessen würden. Denn setzt man, wie es die Untersuchung der Fourierschen Reihen verlangt, $\sigma(\alpha) = \frac{\varrho(\alpha)}{\alpha}$, so muss, damit das Integral convergire, $\varrho(\alpha)$ jedenfalls $\sim \mu(\alpha)$ sein, und lehrreich sind doch gerade die Fälle, wo $\varrho(\alpha)$ unbeschränkt langsam Null wird.

Falls $\mu(\alpha) > 1$, ist die Zerlegung gestattet, so lange $\sigma(\alpha) < \psi'(\alpha)$ oder $\sigma(\alpha) = \gamma(\alpha) \psi'(\alpha)$, wo $\gamma(0) = 0$, auf welche Annahme über $\sigma(\alpha)$

wir uns, wie sich zeigen wird, beschränken dürfen, ohne der Allgemeinheit der Untersuchung Eintrag zu thun.

So zerfällt ganz naturgemäss die Untersuchung des Limes (J) in die Theile

$$\psi(\alpha) \lesssim \frac{1}{\alpha} \quad \text{und} \quad \psi(\alpha) > \frac{1}{\alpha},$$

die eine verschiedene Behandlung erheischen. Wir beginnen mit der Annahme

$$\psi(\alpha) \lesssim \frac{1}{\alpha}.$$

A.

Untersuchung des $\lim J$ im Falle $\psi(\alpha) \lesssim \frac{1}{\alpha}$.

2. Allgemeine Behandlung des Limes J für $\psi(\alpha) \lesssim \frac{1}{\alpha}$.

Wir legen zuerst die Annahme $\sigma(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ zu Grunde, denn es zeigt sich, dass die übrigen erledigt werden können, wenn diese es ist. Es ist also zu untersuchen der Limes des Integrals

$$\int_0^a d\alpha \cos \psi(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\alpha},$$

wozu im Wesentlichen eine Theilung des Integrals in vier Theile erforderlich ist, nämlich erstens die Spaltung:

$$J = J' + J'' = \int_0^{\alpha'} d\alpha \cos \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} + \int_{\alpha'}^a d\alpha \cos \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha},$$

zweitens die Spaltung des Integrals $J' = \int_0^{\alpha'}$ in zwei Theile $\int_0^{\frac{\varepsilon}{h}} + \int_{\frac{\varepsilon}{h}}^{\alpha'}$,

und die Zerlegung des Integrals $\int_{\alpha'}^a$ in die Theile $\frac{1}{2} \int_{\alpha'}^a d\alpha \sin \eta - \frac{1}{2} \int_{\alpha'}^a d\alpha \frac{\sin \eta}{\alpha}$.

3. Nähere Angabe der ersten Zerlegung von J in $J' + J''$.

Was die erste Spaltung des Integrals J in die Theile

$$\int_0^{\alpha'} d\alpha \cos \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} + \int_{\alpha'}^a d\alpha \cos \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = J' + J''$$

betrifft, so setzen wir:

$$J' = \int_0^{\alpha' h} d\alpha \cos \psi\left(\frac{\alpha}{h}\right) \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

und verstehen unter α' eine Grösse, die für $h = \infty$ Null wird, jedoch so, dass $\alpha' > \alpha_1$ bleibt, unter α_1 wie im Art. 1 die Wurzel von $\psi'(\alpha_1) + h = 0$ verstanden. Setzen wir $\psi'(\alpha_1) = -\frac{\mu(\alpha_1)}{\alpha_1}$, ferner $\alpha' h = C$, so folgt aus der Vergleichung von

$$\alpha' h = C$$

$$\alpha_1 h = \mu(\alpha_1),$$

dass, um beim Wachsthum von h die Relation $\alpha' > \alpha_1$ bestehen zu lassen, während α' verschwindet, C nur grösser zu sein braucht als der grösste Werth von $\mu(\alpha)$ im Intervall $0 \leq \alpha \leq a$, so dass namentlich C unabhängig von h angenommen werden darf.

4. Der Limes des Integrals $J' = \int_0^{\alpha'} d\alpha \cos \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ unter der Annahme

$$\psi(\alpha) < 1 - \frac{1}{\alpha}.$$

Wir setzen also $C = \alpha' h$ und:

$$J' = \int_0^C d\alpha \cos \psi\left(\frac{\alpha}{h}\right) \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^C.$$

Zunächst leuchtet ein, dass das erste Integral rechts durch Verkleinerung von ε kleiner als eine beliebig kleine gegebene Grösse gemacht werden kann.

Das zweite Integral:

$$\int_{\varepsilon}^C d\alpha \cos \psi \left(\frac{\alpha}{h} \right) \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

anlangend, so sei zunächst:

$$\psi \left(\frac{\varepsilon}{h} \right) = u, \quad \psi \left(\frac{\alpha}{h} \right) = u - v$$

wo $\varepsilon \leq \alpha \leq C$. Es lässt sich, falls $\psi(\alpha) < 1$ oder in $\psi'(\alpha) = -\frac{\mu(\alpha)}{\alpha} \mu(\alpha) < 1$ angenommen wird, leicht zeigen, dass v mit $\frac{1}{h}$ verschwindet. Denn man hat:

$$\psi \left(\frac{\alpha}{h} \right) - \psi \left(\frac{\varepsilon}{h} \right) = -v$$

oder

$$(\alpha - \varepsilon) \frac{\mu \left(\frac{\alpha}{h} \right)}{\alpha} = v.$$

Da nun $\mu(\alpha)$ mit α verschwindet, $\frac{\alpha}{h}$ aber zwischen den festen von h unabhängigen Grössen ε und C liegt, so verschwindet in der That v mit h . Ausserdem wird v wachsen, während α von ε bis C zunimmt, weil $\psi \left(\frac{\alpha}{h} \right)$ dabei wächst.

Setzen wir jetzt:

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^C d\alpha \cos \psi \left(\frac{\alpha}{h} \right) \frac{\sin \alpha}{\alpha} &= \int_{\varepsilon}^C d\alpha \cos(u - v) \frac{\sin \alpha}{\alpha} \\ &= \cos u \int_{\varepsilon}^C d\alpha \cos v \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \sin u \int_{\varepsilon}^C d\alpha \sin v \frac{\sin \alpha}{\alpha} \end{aligned}$$

und nehmen h so gross an, dass $\cos v$ und $\sin v$ zwischen den Grenzen ε und C nun wachsen oder nun abnehmen, so folgt mit Hülfe des zweiten Mittelwerthesatzes, dass die Integrale

$$\int_{\varepsilon}^C d\alpha \cos v \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad \int_{\varepsilon}^C d\alpha \sin v \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

sich, während h unendlich wird, den Grenzen

$$\int_{\varepsilon}^C d\alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad 0$$

nähern. Da nun u mit h unendlich wird, $\cos u$ also zwischen den Grenzen ± 1 unbestimmt wird, so nähert sich $\int_{\varepsilon}^C d\alpha \cos \psi \left(\frac{\alpha}{h}\right) \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ mit unbegrenzt wachsendem h einer Grenze, die mit

$$j \int_{\varepsilon}^C d\alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

bezeichnet werden kann, wo j zwischen den Grenzen $+1$ und -1 völlig unbestimmt ist.

Was hiernach das Integral

$$J' = \int_0^{\varepsilon} d\alpha \cos \psi \left(\frac{\alpha}{h}\right) \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \int_{\varepsilon}^C d\alpha \cos \psi \left(\frac{\alpha}{h}\right) \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

betrifft, dessen erster Theil rechts durch Verkleinerung von ε unter jede Grenze sinkt, so muss es sich, da es ε gar nicht enthält, mit ins Unendliche wachsendem h der Grenze

$$j \int_0^C d\alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

nähern, also wenn man sich, wie in unserm Belieben steht, C von vorneherein äusserst gross denkt, folgt:

$$\lim h = \infty \quad J' = j \frac{\pi}{2},$$

mit einem Fehler, den wir nach Belieben klein annehmen können.

5. Der Limes des Integrals J' im Falle $\psi(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$.

Den Fall $\psi(\alpha) \propto \frac{1}{\alpha}$ betrachten wir besonders und beschränken uns auf die Annahme $\psi(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$.

Alsdann ist:

$$\int_0^C d\alpha \cos l \left(\frac{\alpha}{h} \right) \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \cos lh \int_0^C d\alpha \cos l\alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \sin lh \int_0^C d\alpha \sin l\alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

Die Integrale rechts sind für $C = \infty$ convergent; und geben wir ihnen resp. die Formeln $R \cos \gamma$, $R \sin \gamma$, wo

$$R = \text{mod} \int_0^\infty d\alpha (\cos l\alpha + i \sin l\alpha) \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \text{mod} \int_0^\infty d\alpha \alpha^i \frac{\sin \alpha}{\alpha},$$

so ist

$$\int_0^C d\alpha \cos l \left(\frac{\alpha}{h} \right) \frac{\sin \alpha}{\alpha} = R \cos(lh - \gamma)$$

und schwankt für $h = \infty$ zwischen den Grenzen $\pm R$.

6. Der Limes des Integrals $J'' = \int_{\alpha'}^a d\alpha \cos \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ für $\psi(\alpha) \propto \frac{1}{\alpha}$.

Wir haben jetzt noch den zweiten Theil von J :

$$J'' = \int_{\alpha'}^a d\alpha \cos \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

im Fall $\psi(\alpha) \gtrsim \frac{1}{\alpha}$ zu untersuchen. Hier dürfen wir unbedenklich die Zerlegung:

$$J'' = \frac{1}{2} \int_{\alpha'}^a d\alpha \frac{\sin \eta}{\alpha} - \frac{1}{2} \int_{\alpha'}^a d\alpha \frac{\sin \chi}{\alpha}, \quad \begin{pmatrix} \eta = \psi(\alpha) + \alpha h \\ \chi = \psi(\alpha) + \alpha h \end{pmatrix}$$

anwenden, da die Integrale die untere Grenze Null nicht mehr haben, also jedenfalls convergent sind (Art. 1).

Führt man in den vorstehenden Integralen statt des veränderlichen α die Variablen η und χ ein, so nehmen die Grössen:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{d\eta} = \frac{1}{\alpha h - \mu(\alpha)}, \quad \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{d\chi} = \frac{1}{\alpha h + \mu(\alpha)}$$

beide von α_1 (der Wurzel von $\psi'(\alpha_1) + h = 0$) an ab, also gewiss von $\alpha' > \alpha_1$ an. Nur im Falle $\psi(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha}$, d. i. $\mu(\alpha) \sim 1$, könnte hier in

Bezug auf $\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{d\chi}$ ein Zweifel entstehen, wenn nämlich $\mu(\alpha)$ selbst bei

wachsendem α abnähme. Dann würde aber $\frac{1}{\alpha h + \mu(\alpha)}$ doch wieder abnehmen, sobald man $h > \mu(\alpha')$ voraussetzte.

Wir wollen nun nacheinander den Limes der Integrale:

$$J_1'' = \int_{\alpha'}^a d\alpha \frac{\sin \eta}{\alpha}, \quad J_2'' = \int_{\alpha'}^a d\alpha \frac{\sin \chi}{\alpha}$$

untersuchen.

7. Der Limes des Integrals $J_1'' = \int_{\alpha'}^a d\alpha \frac{\sin \eta}{\alpha}$ für $\eta = \psi(\alpha) + \alpha h$

und $\psi(\alpha) \gtrsim \frac{1}{\alpha}$.

Wir setzen:

$$J_1'' = \int_{\eta(\alpha')}^{\eta(a)} d\eta \frac{d\alpha}{d\eta} \frac{\sin \eta}{\alpha}.$$

Es sei $\eta(\alpha')$, das mit der Null sich näherndem α' unendlich wird, einen Augenblick ein Vielfaches von π . Alsdann zerfällt das Integral J_1'' in eine Schaar abnehmender alternirender Theile, und es wird erwiesen sein, dass das ganze Integral J_1'' mit $\frac{1}{h}$ verschwindet, wenn sich Gleiches von dem Bestandtheil:

$$\int_{\eta(\alpha')}^{\eta(\alpha') + \pi} d\eta \frac{d\alpha}{d\eta} \frac{\sin \eta}{\alpha}$$

zeigen lässt, oder a fortiori, wenn das Integral:

$$\int_{\eta(\alpha')}^{\eta(\alpha') + \omega} d\eta \frac{d\alpha}{d\eta} \frac{\sin \eta}{\alpha}$$

verschwindet, unter ω irgend eine endliche Grösse verstanden, wobei $\eta(\alpha')$ nicht mehr ein Vielfaches von π zu sein braucht.

Wir setzen also:

$$\psi(\alpha') + h\alpha' = \eta(\alpha')$$

$$\psi(\alpha'') + h\alpha'' = \eta(\alpha'') = \eta(\alpha') + \omega.$$

Statt α'' geschrieben $\alpha' + \delta$ folgt auch Subtraction:

$$\psi(\alpha' + \delta) - \psi(\alpha') + h\delta = \omega,$$

oder wegen $\alpha'h = C$:

$$\psi(\alpha' + \delta) - \psi(\alpha') + \frac{\delta C}{\alpha'} = \omega.$$

Aus dieser Gleichung folgt für $\psi(\alpha) < \frac{1}{\alpha}$ die für $\alpha' < 1$ infinitäre Lösung (s. Hülf. VII):

$$\delta = \frac{u\omega\alpha'}{C}, \quad u \approx 1,$$

und für $\psi(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha}$ eine Lösung derselben Form, in der nur statt $\frac{\omega}{C}$ eine andere endliche Grösse steht.

Somit ist im Falle $\psi(\alpha) < \frac{1}{\alpha}$:

$$\int_{\eta(\alpha')}^{\eta(\alpha'')} d\eta \frac{d\alpha}{d\eta} \frac{\sin \eta}{\alpha} = \int_{\alpha'}^{\alpha''} d\alpha \frac{\sin \eta}{\alpha} = \sin \bar{\eta} \int_{\alpha'}^{\alpha''} \frac{d\alpha}{\alpha} = \sin \bar{\eta} \log \frac{\alpha''}{\alpha'} = \sin \bar{\eta} \log \left(1 + \frac{u\omega}{C} \right)$$

wo $\sin \bar{\eta}$ einen mittleren Werth vorstellt.

Man sieht also, dass vorstehendes Integral mit ins Unbegrenzte wachsendem C unter jede Grenze sinkt, wohin ihm der ganze Theil

$$\int_{\alpha'}^a d\alpha \frac{\sin \eta}{\alpha}$$

von J_1'' nachfolgt. Dabei muss h immer gerade so gross gedacht werden, dass in $\alpha'h = C$ die Grösse α' der Bedingung $\alpha_1 \leq \alpha' \leq a$ genügt. Gleiches gilt für den Fall $\psi(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha}$.

8. Der Limes des Integrals $J_2'' = \int_{\alpha'}^a d\alpha \frac{\sin \chi}{\alpha}$, $\chi(\alpha) = \psi(\alpha) - ch$.

Ganz ähnlich ist das Integral:

$$J_2'' = \int_{\alpha'}^a d\alpha \frac{\sin \chi}{\alpha}$$

zu behandeln. Wir trennen von J_2'' wieder den Theil:

$$\int_{\alpha'}^{\alpha''} d\alpha \frac{\sin \chi}{\alpha} = \int_{\chi(\alpha')}^{\chi(\alpha'') - \omega} d\chi \frac{d\alpha}{d\chi} \frac{\sin \chi}{\alpha},$$

und erhalten aus

$$\psi(\alpha') - h\alpha' = \chi(\alpha')$$

$$\psi(\alpha'') - h\alpha'' = \chi(\alpha'') = \chi(\alpha') - \omega,$$

$\alpha'' = \alpha' + \delta$ gesetzt, diese Gleichung

$$\psi(\alpha' + \delta) - \psi(\alpha') - \delta h = -\omega$$

oder

$$\psi(\alpha' + \delta) - \psi(\alpha') - \frac{\delta C}{\alpha'} = -\omega$$

aus der wieder

$$\delta = \frac{\alpha' u \omega}{C}, \quad u \approx 1,$$

(s. Hülfs. VII) folgt.

9. Zusammenfassung der bisherigen Resultate.

Damit ist dann im Ganzen nachgewiesen, dass das Integral

$$J'' = \frac{1}{2}J_1'' - \frac{1}{2}J_2'' = \int_{\alpha'}^a d\alpha \cos \psi(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\alpha}$$

mit wachsendem C unter jede Grenze sinkt, wenn $\alpha' = \frac{C}{h}$ gesetzt wird, und, während C über alle Grenzen wächst, h stets so angenommen wird, dass $\alpha_1 \leq \alpha' \leq a$. Dies zu dem Resultate des Art. 4 gefügt, dass das Integral

$$J' = \int_0^{\alpha'} d\alpha \cos \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

wenn C äusserst gross ist, bei unbegrenzter Zunahme von h zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ hin und her schwankt, folgt endlich, dass im Falle $\psi(\alpha) < l\frac{1}{\alpha}$:

$$\lim_{h=\infty} J = \lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha \cos \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha},$$

worin C nicht mehr vorkommt, durch

$$J_2^{\frac{\pi}{2}}$$

ausgedrückt werden kann, wo j zwischen den Grenzen ± 1 völlig unbestimmt ist.

Im Falle $\psi(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha}$ haben die Grenzen, zwischen denen J schwankt, einen etwas anderen Ausdruck (Art. 5).

10. Bestimmung des $\lim_{h \rightarrow \infty} \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin \alpha h$ für den Fall $\psi(\alpha) \lesssim \frac{1}{\alpha}$ wenn die Voraussetzung $\sigma(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ fallen gelassen wird, Annahme: $\alpha \sigma(\alpha) \lesssim 1$.

Nachdem wir den $\lim_{h \rightarrow \infty} \int_0^a d\alpha \cos \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ gleich $j \frac{\pi}{2}$ gefunden

haben, ist es, soweit dies noch Interesse hat, leicht, den Limes des allgemeineren Integrals:

$$\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin \alpha h$$

angegeben, falls $\sigma(\alpha)$ im Integrationsintervall frei von Maximis oder Minimis ist. Nehmen wir zunächst $\alpha \sigma(\alpha) = \varrho(\alpha) < 1$ an, und setzen das vorstehende Integral gleich:

$$\int_0^C d\alpha \varrho\left(\frac{\alpha}{h}\right) \cos \psi\left(\frac{\alpha}{h}\right) \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \int_{\alpha'}^a d\alpha \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha},$$

wo also wieder $\alpha' h = C$. Der erste Theil giebt nach dem zweiten Mittelwerthsatz:

$$\varrho\left(\frac{C}{h}\right) \int_{\alpha'}^C d\alpha \cos \psi\left(\frac{\alpha}{h}\right) \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad 0 \leq \alpha' \leq C$$

und verschwindet, wie gross C auch sein mag, für $h = \infty$. Der zweite

Theil giebt (auch nach dem zweiten Mittelwerthsatz) durch Einführung der Integrationsvariablen η und χ ganz wie in den Art. 7 und 8 zwei Theile, die nach den dortigen Ausführungen mit wachsendem C unter jede Grenze sinken, so dass man findet:

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin \alpha h = 0$$

im Falle $\alpha\sigma(\alpha) < 1$.

Ist $\varrho(\alpha) \sim 1$, so setzen wir $\varrho(\alpha) = \varrho(0) + \Delta\varrho(\alpha)$, wo $\Delta\varrho(\alpha) < 1$ und erhalten:

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin \alpha h = \frac{\pi}{2} \lim_{\alpha=0} \alpha\sigma(\alpha)$$

wo j zwischen den Grenzen ± 1 unbestimmt ist.

II. Fortsetzung. Annahme $\alpha\sigma(\alpha) > 1$.

Äusserst mühsam ist der genaue Beweis, des nach dem Allen geradezu selbstverständlichen Schlusses, dass für $\alpha\sigma(\alpha) = \varrho(\alpha) > 1$

$$\lim \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin \alpha h$$

zwischen unendlichen Grenzen unbestimmt ist, wie überhaupt dergleichen Divergenzbeweise am schwersten zu fallen pflegen. Ich verzichte darauf, den Beweis hier folgen zu lassen, der einen im Verhältniss zur Wichtigkeit des zu beweisenden Satzes ungebührlichen Raum einnehmen würde. Der Satz kann übrigens als besonderer Fall eines allgemeineren Theorems über die Unbestimmtheitsgrenzen aufgefasst werden, und soll als solcher gelegentlich doch bewiesen werden. Hier will ich mich begnügen, ihn durch eine unstrenge Betrachtung plausibel zu machen.

Setzen wir $\varrho(\alpha + \varepsilon)$ statt $\varrho(\alpha)$, so wird, da nach dem Obigen $\varrho(\alpha + \varepsilon) \sim 1$

$$\lim \int_0^a d\alpha \varrho(\alpha + \varepsilon) \cos \psi(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\alpha} = j\varrho(\varepsilon) \frac{\pi}{2}.$$

Die Unbestimmtegrenzen dieses Ausdrucks, nämlich $\pm \varrho(\varepsilon)\pi$ wachsen mit ε über jede Grenze. Doch ist damit allerdings nicht bewiesen, dass sie für $\varepsilon = 0$ unendlich sind, weil gezeigt werden müsste, dass man zu diesem Resultat auch kommt, wenn man erst $\varepsilon = 0$ und dann $h = \infty$ setzt.

B.

Untersuchung des $\lim_{h=\infty} J = \lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin \alpha h$
falls $\psi(\alpha) > \frac{1}{\alpha}$ ist.

12. Voraussetzungen, die der Untersuchung zu Grunde gelegt werden.

Falls $\psi(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ dürfen wir also nach Art. 1 getrost setzen:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin h\alpha = \frac{1}{2} \int_{\eta(0)}^{\eta(a)} d\eta \frac{d\alpha}{d\eta} \sigma(\alpha) \sin \eta - \frac{1}{2} \int_{\chi(0)}^{\chi(a)} d\chi \frac{d\alpha}{d\chi} \sigma(\alpha) \sin \chi \\ &= \frac{1}{2} J_1 - \frac{1}{2} J_2 \end{aligned}$$

wo $\eta = \psi(\alpha) + \alpha h$, $\chi = \psi(\alpha) - \alpha h$ und:

$$\frac{d\alpha}{d\eta} = \frac{1}{\psi'(\alpha) + h}, \quad \frac{d\alpha}{d\chi} = \frac{1}{\psi'(\alpha) - h},$$

und diese Zerlegung ist nach dem cit. Art. immer gestattet, wenn,

$\sigma(\alpha) = \gamma(\alpha) \psi'(\alpha)$ gesetzt, $\gamma(\alpha) < 1$ ist.⁶⁾ Dies ist also die eine Voraussetzung. Ausserdem setzen wir noch $\sigma(\alpha) = \gamma(\alpha) \psi'(\alpha) > 1$ voraus, da sonst der $\lim J$ mit Hülfe des ersten Hauptsatzes sich sofort als Null ergeben würde.

13. Ueber den Limes des Integrals $J_2 = \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \sin \chi$, wo $\chi = \psi(\alpha) - h\alpha$.

Beginnen wir mit dem Integral:

$$J_2 = \int_{\chi(0)}^{\chi(a)} d\chi \frac{\gamma(\alpha) \psi'(\alpha)}{\psi'(\alpha) - h} \sin \chi,$$

in welchem bei von 0 bis a zunehmendem α die Function $\chi = \psi(\alpha) - h\alpha$ von $\chi(0) = \infty$ bis $\chi(a)$ abnimmt, so hat $\frac{\gamma(\alpha) \psi'(\alpha)}{\psi'(\alpha) - h}$ unterwegs ein Maximum und zwar für $\alpha = \alpha^*$, wo α^* durch

$$\left\{ \gamma'(\alpha^*) \psi'(\alpha^*) + \gamma(\alpha^*) \psi''(\alpha^*) \right\} (h - \psi'(\alpha^*)) + \gamma(\alpha^*) \psi'(\alpha^*) \psi''(\alpha^*) = 0$$

gegeben ist, woraus man findet:

$$h = \psi'(\alpha^*) \cdot \frac{1}{1 + \frac{\gamma(\alpha^*) \psi''(\alpha^*)}{\gamma'(\alpha^*) \psi'(\alpha^*)}}.$$

Die Grösse im Nenner hat eine für unsere Untersuchung sehr nützliche infinitäre Eigenschaft.

Wir hatten vorausgesetzt:

$$\sigma = \gamma \psi' > 1$$

oder

$$\psi' > \frac{1}{\gamma},$$

woraus folgt:

$$h \psi' > \frac{1}{\gamma}$$

6) Die obige Zerlegung von J in ein Integral nach η und eines nach χ ist nicht correct, sondern nur der Kürze halber so geschrieben, da das Integral nach η aus zwei Theilen besteht, s. Art. 14.

und durch Differentiation:

$$\frac{\psi''}{\psi'} > \frac{\gamma'}{\gamma}$$

oder wenn mit $\frac{\gamma}{\gamma'}$ an beiden Seiten multiplicirt wird, so folgt die gemeinte nützliche Eigenschaft:

$$\frac{\gamma}{\gamma'} \frac{\psi''}{\psi'} > 1,$$

von der übrigens auch schon (Hülfss. VI) Gebrauch gemacht ist.

Setzt man daher:

$$h = \psi'(\alpha^*) \cdot v,$$

so ist $v < 1$.

Um jetzt das Integral J_2 abschätzen zu können, setzen wir weiter:

$$\chi(\alpha^*) = \psi(\alpha^*) - \alpha^* h = M\pi$$

$$\chi(\alpha^* + \delta) = \psi(\alpha^* + \delta) - (\alpha^* + \delta)h = (M - N)\pi,$$

mithin:

$$\psi(\alpha^* + \delta) - \psi(\alpha^*) - \delta h = -N\pi$$

oder:

$$\psi(\alpha^* + \delta) - \psi(\alpha^*) - \delta \psi'(\alpha^*) \cdot v = -N\pi.$$

Die infinitäre Lösung der vorstehenden Gleichung ist (Hülfss. VIII):

$$\delta = -\frac{N\pi u}{\psi'(\alpha^*)}, \quad u \approx 1,$$

in der δ mit N sein Zeichen wechselt.

Jetzt betrachten wir einen α^* einschliessenden Theil von J_2 , also:

$$\int_{\alpha'}^{\alpha''} d\alpha \gamma(\alpha) \psi'(\alpha) \sin(\psi(\alpha) - h\alpha), \quad \alpha' < \alpha^* < \alpha''.$$

Die Differenz $\alpha'' - \alpha'$ genüge der Gleichheit:

$$\alpha'' - \alpha' \approx \frac{1}{\psi'(\alpha^*)},$$

wozu es ausreicht, wenn α' und α'' die Form $\alpha^* \pm \delta$ gegeben wird, die Grösse N in obigen Gleichungen endlich anzunehmen. Mit Hülfe des gewöhnlichen Mittelwerthsatzes kann vorstehender Integralauschnitt in die Form:

$$(\alpha'' - \alpha') \gamma(\bar{\alpha}) \psi'(\bar{\alpha}) \sin(\psi(\bar{\alpha}) - h\bar{\alpha}) \quad , \quad \alpha' \leq \bar{\alpha} \leq \alpha'' ,$$

gebracht werden. Wegen $\bar{\alpha} = \alpha^* + \frac{r}{\psi'(\alpha^*)}$, wo $r \geq 1$, ist dieser Ausdruck:

$$\sim \gamma(\alpha) \left\{ \frac{\psi'(\alpha^* + \frac{r}{\psi'(\alpha^*)})}{\psi'(\alpha^*)} \cdot \sin(\psi(\bar{\alpha}) - h\bar{\alpha}) \right\}$$

Nach Hilfss. IV bleibt die Klammer bei Abnahme von α^* endlich, und da $\gamma(\bar{\alpha}) < 1$, α' und α'' und folglich $\bar{\alpha}$ aber mit α^* Nullwerdend gedacht sind,⁷⁾ so verschwindet die ganze Grösse.

Das Integral

$$\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \sin \chi = \int_0^{\alpha^*} + \int_{\alpha^*}^a$$

zerfällt in zwei Theile, die aus abnehmenden alternirenden Einzelintegralen bestehen. Weil aber, wie eben gezeigt, das Integral $\int_{\alpha'}^{\alpha''}$ und somit auch jedes der Integrale

$$\int_{\alpha'}^{\alpha^*} , \quad \int_{\alpha^*}^{\alpha''}$$

verschwindet, so verschwinden auch die Integrale

$$\int_0^{\alpha^*} , \quad \int_{\alpha^*}^a .$$

14. Ueber den Limes des Integrals $J_1 = \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \sin \eta$, wo $\eta = \psi(\alpha) + h\alpha$.

Was endlich das Integral anlangt:

$$J_1 = \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \sin \eta = \int_{\eta(0)}^{\eta(\alpha_1)} d\eta \frac{d\alpha}{d\eta} \sigma(\alpha) \sin \eta + \int_{\eta(\alpha_1)}^{\eta(a)} d\eta \frac{d\alpha}{d\eta} \sigma(\alpha) \sin \eta ,$$

⁷⁾ Wegen der Endlichkeit von N und der infinitären Lösung $\delta = -\frac{N\pi u}{\psi'(\alpha^*)}$.

wo
$$\frac{d\alpha}{d\eta}\sigma(\alpha) = \frac{\gamma(\alpha)\psi'(\alpha)}{\psi'(\alpha)+h}, \quad \eta(0) = \infty$$

ist, so wird die Function $\frac{d\alpha}{d\eta}\sigma(\alpha)$ unendlich für $\alpha = \alpha_1$, weil $\psi'(\alpha_1) + h = 0$, und nimmt von $\alpha = \alpha_1$ an sowohl in der Richtung nach $\alpha = 0$ als nach $\alpha = a$ hin ab. Im Intervall $0 \leq \alpha \leq \alpha_1$ ist dies wegen $\gamma(\alpha) < 1$ beim Anblick von

$$\gamma(\alpha) \cdot \frac{1}{1 + \frac{h}{\psi'(\alpha)}}$$

einleuchtend, weil $\frac{h}{\psi'(\alpha)}$ von 0 bis -1 abnimmt, während α von 0 bis α_1 geht. Im Intervall $\alpha_1 \leq \alpha \leq a$ setzt man

$$\frac{d\alpha}{d\eta}\sigma(\alpha) = \frac{\sigma(\alpha)}{\psi'(\alpha) + h}.$$

Es ist $\sigma(\alpha) > 1$, und $\psi'(\alpha) + h$ wächst von Null bis $\psi'(a) + h$ während α von α_1 bis a geht.

In beiden Integralen:

$$\int_{\infty}^{\eta(\alpha_1)} d\alpha \frac{d\alpha}{d\eta} \sigma(\alpha) \sin \eta, \quad \int_{\eta(\alpha_1)}^{\eta(a)} d\alpha \frac{d\alpha}{d\eta} \sigma(\alpha) \sin \eta$$

folgen sich von $\eta(\alpha_1)$ nach $\eta(0) = \infty$ resp. $\eta(a)$ hin die Maxima und Minima der darunterstehenden Function in gleicher Reihenfolge und mit derselben Phase beginnend. Wegen der Abnahme von $\frac{d\alpha}{d\eta}\sigma(\alpha)$ nach $\alpha = 0$ und $\alpha = a$ hin (oder nach $\eta = \infty$ und $\eta = \eta(a)$ hin) zerfallen die vorstehenden Integrale jedes in eine Schaar abnehmender alternirender Theilintegrale.

Dieses vorausgeschickt, verfahren wir ähnlich wie in früheren Fällen. Um ein Stück:

$$\int_{\eta(\alpha_1 - \delta)}^{\eta(\alpha_1)} = \int_{\alpha_1 - \delta}^{\alpha_1} \text{ oder } \int_{\eta(\alpha_1)}^{\eta(\alpha_1 + \delta)} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_1 + \delta}$$

abschätzen zu können, setzen wir wieder

$$\begin{aligned}\eta(\alpha_1) &= \psi(\alpha_1) + h\alpha_1 = M\pi, \\ \eta(\alpha_1 + \delta) &= \psi(\alpha_1 + \delta) + h(\alpha_1 + \delta) = (M + N)\pi, \\ h &= -\psi'(\alpha_1).\end{aligned}$$

Mithin:

$$\psi(\alpha_1 + \delta) - \psi(\alpha_1) - \delta\psi'(\alpha_1) = N\pi.$$

Für $\psi(\alpha) > 1\frac{1}{\alpha}$ folgt hieraus (Hülfss. IX)

$$\gamma = \pm \sqrt{\frac{2N\pi}{\psi''(\alpha_1)}} \cdot u, \quad u \infty 1$$

wo das u ein anderes je nach dem Vorzeichen der Wurzel ist, was wir durch die Lösungsformen:

$$-\delta' = -u_1 \sqrt{\frac{2N\pi}{\psi''(\alpha_1)}}, \quad +\delta'' = +u_2 \sqrt{\frac{2N\pi}{\psi''(\alpha_1)}}$$

andeuten wollen, indem wir δ' und δ'' als positive Grössen einführen.

Setzt man in der von α_1 bis $\alpha_1 + \delta$ genommenen Portion von J_1 , der man diese Form geben kann:

$$\delta \gamma(\bar{\alpha}) \psi'(\bar{\alpha}) \sin(\psi(\bar{\alpha}) + h\bar{\alpha}), \quad \alpha_1 \leq \bar{\alpha} \leq \alpha_1 + \delta,$$

ein: $\delta \infty \frac{1}{\psi''(\alpha_1)^{\frac{1}{2}}}$, so wird sie Null oder kann unbestimmt zwischen endlichen oder kann unbestimmt zwischen unendlichen Grenzen werden, je nach dem:

$$\frac{\gamma(\bar{\alpha}) \psi'(\bar{\alpha})}{\psi''(\alpha_1)^{\frac{1}{2}}} \gtrless 1,$$

wie ich gleich nachweisen werde. Dann setzen wir: $\bar{\alpha} = \alpha_1 + \delta_1$, so ist $\delta_1 = \frac{r}{\psi''(\alpha_1)^{\frac{1}{2}}}$, $r \infty 1$. Der vorstehende Ausdruck kann geschrieben werden:

$$\frac{\gamma(\bar{\alpha}) \psi'(\bar{\alpha})}{\psi''(\bar{\alpha})^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\psi''(\bar{\alpha})^{\frac{1}{2}}}{\psi''(\alpha_1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Da nun $\psi''(\alpha) = \frac{\lambda(\alpha)}{\alpha^2}$, $\lambda > 1$ (wie sich durch zweimalige Differen-

tiation von $\psi(\alpha) > l \frac{1}{\alpha}$ ergibt), so kann der zweite Factor geschrieben werden:

$$\frac{\lambda_{\frac{1}{2}} \left(\alpha_1 + \frac{r \alpha_1}{\lambda(\alpha_1)^{\frac{1}{2}}} \right)}{\lambda_{\frac{1}{2}}(\alpha_1)} \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \frac{r \alpha_1}{\lambda_{\frac{1}{2}}(\alpha_1)}}$$

und wird nach dem schon benützten Satz (Hülfss. III) Eins für $\alpha_1 = 0$. Das Integral J_1 wird also jedenfalls Null, wenn:

$$\frac{\gamma(\alpha) \psi'(\alpha)}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}} < 1 \text{ oder } \sigma(\alpha) < \psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}.$$

Viel umständlicher ist der Nachweis, dass das Integral

$$J_1 = \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \sin \eta$$

zwischen unendlichen Grenzen unbestimmt wird, wenn

$$\frac{\gamma(\alpha) \psi'(\alpha)}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}} > 1 \text{ oder } \sigma(\alpha) > \psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}$$

ist, wie ich ja schon oben (Art. 11) bemerkt habe, dass dergleichen Divergenzbeweise am meisten Mühe zu machen pflegen. Dieses Mal aber will ich den Beweis, trotz seiner nicht zu vermeidenden Länge, wirklich durchführen. Aus mehreren Gründen. Einmal um doch ein Beispiel eines solchen Beweises gegeben zu haben. Dann aber, von anderen abgesehen, besonders aus dem Grunde, weil das Unendlichwerden des Integrals J_1 auch von Riemann (Ueber die Darstellb. e. F. d. e. trigon. R. Art. 13) behauptet wird, während seine Begründung mehr ein Nachweis der Möglichkeit des Unendlichwerdens sein zu sollen scheint, als ein Nachweis des Unendlichwerdens selbst. Und ein genauer Beweis einer Behauptung, der Riemann einige Seiten gewidmet hat, kann nicht überflüssig erscheinen.

15. Nachweis der Divergenz des $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \sin \eta$, $\eta = \psi(\alpha) + h\alpha$

im Falle: $\psi(\alpha) > \frac{1}{\alpha}$, $\sigma(\alpha) > \psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}$.

Um diesen Beweis wirklich zu erbringen, benutzen wir wieder den Umstand, dass die Integrale

$$\int_0^{\alpha_1} d\alpha \sigma(\alpha) \sin \eta, \quad \int_{\alpha_1}^{\alpha} d\alpha \sigma(\alpha) \sin \eta,$$

wenn man $\eta(\alpha_1)$ als ganzes Vielfache von π sich denkt, jedes in eine Schaar abnehmender alternirender Theilintegrale zerfallen, und dass beide Schaaren gleichzeitig mit einem positiven oder mit einem negativen grössten Theilintegral beginnen. Es sei also

$$\begin{aligned} \eta(\alpha_1) &= m\pi, \quad \eta(\alpha_1 - \delta') = (m+1)\pi, \quad \eta(\alpha_1 - \delta' - \delta'_1) = (m+2)\pi \\ \eta(\alpha_1 + \delta) &= (m+1)\pi, \quad \eta(\alpha_1 + \delta + \delta_1) = (m+2)\pi \end{aligned}$$

so wird der Werth des Integrals:

$$J_1 = \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \sin \eta$$

enthalten sein zwischen den Integralen:

$$\int_{\alpha_1 - \delta'}^{\alpha_1 + \delta} d\alpha \sigma(\alpha) \sin \eta, \quad \int_{\alpha_1 - \delta' - \delta'_1}^{\alpha_1 + \delta + \delta_1} d\alpha \sigma(\alpha) \sin \eta$$

und wird einen unendlichen Limes haben, wenn Gleiches von einem der Integrale:

$$\int_{\alpha_1 - \delta' - \delta'_1}^{\alpha_1} d\alpha \sigma(\alpha) \sin \eta, \quad \int_{\alpha_1}^{\alpha_1 + \delta + \delta_1} d\alpha \sigma(\alpha) \sin \eta$$

nachgewiesen werden kann. Wir wollen dies vom zweiten Integral nachweisen, welches wir zunächst so zertheilen:

$$II = \int_0^{\delta} d\varepsilon \sigma(\alpha_1 + \varepsilon) \sin \eta(\alpha_1 + \varepsilon) + \int_0^{\delta_1} d\varepsilon_1 \sigma(\alpha_1 + \delta + \varepsilon_1) \sin \eta(\alpha_1 + \delta + \varepsilon_1),$$

um es sodann wieder in Eines zu vereinigen, welches die Grenzen des ersten hat. Zu diesem Zweck setzen wir:

$$\begin{aligned}\eta(\alpha_1 + \varepsilon) &= (m + \nu)\pi \\ \eta(\alpha_1 + \delta) &= (m + 1)\pi \\ \eta(\alpha_1 + \delta + \varepsilon_1) &= (m + 1 + \nu)\pi \\ \eta(\alpha_1 + \delta + \delta_1) &= (m + 2)\pi.\end{aligned}$$

Mit Hülfe der Formeln (Hülfs. IX) findet man hieraus:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= u_\nu \sqrt{\frac{2\pi\nu}{\psi''(\alpha_1)}} \quad , \quad \delta + \varepsilon_1 = u_{\nu+1} \sqrt{\frac{2\pi(\nu+1)}{\psi''(\alpha_1)}} \\ \delta &= u_1 \sqrt{\frac{2\pi}{\psi''(\alpha_1)}} \quad , \quad \delta + \delta_1 = u_2 \sqrt{\frac{4\pi}{\psi''(\alpha_1)}} \quad ,\end{aligned}$$

wenn die infinitäre Lösung von $\psi(\alpha + \delta) - \psi(\alpha) - \delta\psi'(\alpha) = \varrho\pi$ mit $u_\varrho \sqrt{\frac{2\pi\varrho}{\psi''(\alpha)}}$ bezeichnet wird. Verändert man in diesen Gleichungen ε , ε_1 und ν , lässt aber δ , δ_1 , α_1 constant und sieht ν als Function von ε an, so findet man:

$$d\varepsilon_1 = d\varepsilon \frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} \sqrt{\frac{\nu}{\nu+1}} + d\varepsilon \frac{d\nu}{d\varepsilon} \sqrt{\frac{2\pi}{(\nu+1)\psi''(\alpha_1)}} \left\{ \nu u_{\nu+1} \frac{du_\nu}{d\nu} - (\nu+1) u_\nu \frac{du_{\nu+1}}{d\nu} \right\}.$$

Dieser Werth von $d\varepsilon_1$ ist in das zweite Integral II einzuführen, worauf es die Grenzen 0, δ erhält, und sich mit dem ersten vereinigt. Alsdann zerlegen wir II von Neuem und zwar in folgende drei Theile:

$$II = II_1 + II_2 + II_3 \text{ wo:}$$

$$II_1 = \int_0^\delta d\varepsilon \left\{ \sigma(\alpha_1 + \varepsilon) - \sigma(\alpha_1 + \delta + \varepsilon_1) \right\} \sin \eta(\alpha_1 + \varepsilon)$$

$$II_2 = \int_0^\delta d\varepsilon \left\{ 1 - \frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} \sqrt{\frac{\nu}{\nu+1}} \right\} \sigma(\alpha_1 + \delta + \varepsilon_1) \sin \eta(\alpha_1 + \varepsilon)$$

$$II_3 = - \int_0^\delta d\varepsilon \frac{d\nu}{d\varepsilon} \sqrt{\frac{2\pi}{(\nu+1)\psi''(\alpha_1)}} \left\{ \nu u_{\nu+1} \frac{du_\nu}{d\nu} - (\nu+1) u_\nu \frac{du_{\nu+1}}{d\nu} \right\} \sigma(\alpha_1 + \delta + \varepsilon_1) \sin \eta(\alpha_1 + \varepsilon).$$

Diese drei Integrale sind auf ihre relativen Grenzwerte für $\alpha_1 = 0$ zu untersuchen. Für diese Untersuchung brauchen wir den Satz, dass:

$$\frac{\sigma(\alpha_1 + A)}{\sigma(\alpha_1)}$$

für $\alpha_1 = 0$ stets den Limes 1 hat, falls:

$$\eta(\alpha_1 + A) = \eta(\alpha_1) + N\pi$$

ist, wo N eine endliche Zahl vorstellt. Da nämlich alsdann

$$A = u_N \sqrt{\frac{2N\pi}{\psi''(\alpha_1)}}$$

ist, so läuft der Satz darauf hinaus, dass im Falle $\sigma(\alpha) < \psi'(\alpha), \psi''(\alpha) > \frac{1}{\alpha}, r \sim 1$:

$$\frac{\sigma\left(\alpha + \frac{r}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\sigma(\alpha)} \xrightarrow{\infty} 1$$

ist. Dies haben wir aber (Hülfss. VI) schon gezeigt.

Sonach können wir zunächst setzen:

$$\Pi_1 = \delta\sigma(\alpha_1) \left\{ \frac{\sigma(\alpha_1 + \bar{\varepsilon})}{\sigma(\alpha_1)} - \frac{\sigma(\alpha_1 + \delta + \bar{\varepsilon}_1)}{\sigma(\alpha_1)} \right\} \sin \eta(\alpha_1 + \bar{\varepsilon}), \quad 0 \leq \bar{\varepsilon} \leq \delta.$$

Der Factor $\left\{ \right\}$ hat den Limes Null.

Untersuchen wir zweitens:

$$\Pi_3 = - \int_0^\delta d\varepsilon \frac{d\nu}{d\varepsilon} \sqrt{\frac{2\pi}{(\nu+1)\psi''(\alpha_1)}} \left\{ \nu u_{\nu+1} \frac{du_\nu}{d\nu} - (\nu+1) u_\nu \frac{du_{\nu+1}}{d\nu} \right\} \sigma(\alpha_1 + \delta + \varepsilon_1) \sin \eta(\alpha_1 + \varepsilon).$$

Erstens der Factor $\frac{d\nu}{d\varepsilon}$. Aus der Differentiation von $\psi(\alpha + \varepsilon) - \psi(\alpha) - \varepsilon\psi'(\alpha) =$
 $= \nu\pi$ folgt:

$$\psi'(\alpha + \varepsilon) - \psi'(\alpha) = \pi \frac{d\nu}{d\varepsilon}$$

und

$$\pi \frac{d\nu}{d\varepsilon} = \varepsilon \psi''(\alpha) \cdot \frac{\psi''(\alpha + \varepsilon)}{\psi''(\alpha)}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \delta.$$

Wegen $\varepsilon = u_\nu \sqrt{\frac{2\pi\nu}{\psi''(\alpha)}}$ ist (nach Hülfss. V) $\frac{\psi''(\alpha + \varepsilon)}{\psi''(\alpha)} \xrightarrow{\infty} 1$, und

somit $\frac{d\nu}{d\varepsilon} \sim \psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}$

Ferner die Differentialquotienten $\frac{du_\nu}{d\nu}$, $\frac{du_{\nu+1}}{d\nu}$. Aus $\psi(\alpha + \varrho) - \psi(\alpha) - \varrho\psi'(\alpha) = N\pi$ ziehen wir wieder:

$$\varrho^2\psi''(\alpha) = 2\pi Nu_N^2, \quad \frac{d\varrho}{dN} = \frac{\pi}{\varrho\psi''(\alpha + \varrho_1)}, \quad 0 \leq \varrho_1 \leq \varrho.$$

Differenziren wir die erste Relation, indem wir α constant lassen, so folgt wegen der zweiten:

$$\frac{\psi''(\alpha)}{\psi''(\alpha + \varrho_1)} = N \frac{du^2}{dN} + u^2$$

woraus $\frac{du}{dN} \infty$ o folgt. Somit kann man im Ganzen Π_3 auf die Form bringen:

$$\Pi_3 = \delta\sigma(\alpha_1) \cdot w \cdot \frac{\sigma(\alpha_1 + \delta + \bar{\varepsilon})}{\sigma(\alpha_1)} \sin \eta(\alpha_1 + \bar{\varepsilon}), \quad 0 \leq \bar{\varepsilon} \leq \delta,$$

wo w für $\alpha_1 = 0$ verschwindet.

Bleibt noch Π_2 zu untersuchen. Wir schreiben:

$$\Pi_2 = \delta\sigma(\alpha_1) \left\{ 1 - \frac{u_{\nu+1}}{u_{\nu_1}} \sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_1 + 1}} \right\} \frac{\sigma(\alpha_1 + \delta + \bar{\varepsilon}_1)}{\sigma(\alpha_1)} \sin \eta(\alpha_1 + \bar{\varepsilon}),$$

wo $\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}_1, \nu_1$ mittlere Werthe vorstellen. Hier verschwindet der Factor von $\delta\sigma(\alpha_1)$ nicht. Denn man hat $\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} \infty 1$ und $\sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_1 + 1}}$

ist enthalten zwischen Null und $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Man könnte noch einwenden, dass $\bar{\varepsilon}$, welches der Bedingung $0 \leq \bar{\varepsilon} \leq \delta$ genügt, im äussersten Falle Null oder gleich δ sein könnte. Allein da der Sinus zwischen den Grenzen der Integration sein Zeichen nicht wechselt, so würde es dann ja schon ausreichen, von dem Integral:

$$\int_{\frac{1}{4}\delta}^{\frac{3}{4}\delta}$$

zu zeigen, dass es die Form $\delta \cdot \sigma(\alpha) \cdot v_2$ annimmt, wo $v_2 \infty 1$, und der übrig bleibende Theil

$$\int_0^{\frac{1}{4}\delta} + \int_{\frac{3}{4}\delta}^{\delta}$$

hätte dasselbe Zeichen.

Es lassen sich also die drei Integrale Π_1, Π_2, Π_3 resp. auf die Formen $\delta\sigma(\alpha_1) \cdot v_1, \delta\sigma(\alpha_1) \cdot v_2, \delta\sigma(\alpha_1) v_3$ bringen, wo v_1 und v_3 für $\alpha = 0$ verschwinden, v_2 aber nicht. Da aber $\delta\sigma(\alpha_1) \sim \frac{\sigma(\alpha_1)}{\psi''(\alpha_1)^{\frac{1}{2}}}$ nach der Voraussetzung > 1 ist, so ist auch $\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 > 1$. Q. E. D.

16. Schlussbemerkung über den Limes von $J = \int_0^a d\sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin h\alpha$

falls $\sigma(\alpha) = \gamma(\alpha)\psi'(\alpha)$, $\gamma(\alpha) < 1$, $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$ **ist**.

Unsere unter B gewonnenen Ergebnisse sind kurzgefasst diese.

Nimmt man in

$$J = \int_0^a d\sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin h\alpha$$

an $\sigma(\alpha) < \psi'(\alpha)$, $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$, so ist der $\lim J$ Null für

$$\sigma(\alpha) < \sqrt{\psi''(\alpha)}$$

und zwischen unendlichen Grenzen unbestimmt für

$$\sigma(\alpha) > \sqrt{\psi''(\alpha)}.$$

Es fragt sich, ob die allgemeine Bedingung $\sigma(\alpha) < \psi'(\alpha)$, unter welcher unsere Untersuchung angestellt wurde, alle Fälle $\sigma(\alpha)$ und $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$ umfasst, in denen der $\lim J$ convergent ist. Gewiss. Denn

man hat $\psi'(\alpha) = \frac{\mu(\alpha)}{\alpha}$, $\mu(\alpha) > 1$ und die Bedingung der Convergenz

$\sigma(\alpha) < \sqrt{\psi''(\alpha)}$ wird:

$$\sigma(\alpha) < \frac{\sqrt{a\mu'(\alpha) - \mu(\alpha)}}{\alpha}$$

während die allgemeine Bedingung

$$\sigma(\alpha) < \frac{\mu(\alpha)}{\alpha}$$

lautet. Es ist also nur zu zeigen, dass

$$\frac{\sqrt{a\mu'(\alpha) - \mu(\alpha)}}{\alpha} < \frac{\mu(\alpha)}{\alpha},$$

wozu es wieder ausreicht, die Ungleichheit

$$a\mu'(\alpha) < \mu(\alpha)^2$$

nachzuweisen. Sie gibt integriert:

$$\frac{1}{\mu(\alpha)} < \frac{1}{\alpha}$$

oder

$$\mu(\alpha) > \frac{1}{\alpha}$$

was, da ja $\mu(\alpha) > 1$, a fortiori richtig ist.

Es bliebe noch übrig, die Annahme $\sigma(\alpha) \gtrsim \psi'(\alpha)$ zu untersuchen, die natürlich erst recht auf Divergenz des $\lim J$ führt. Ein genauer Beweis lässt sich hier aber ebenso schwer führen wie Art 11 in dem analogen Fall $\varrho(\alpha) > 1$.

17. Zusammenfassung der Resultate der bisherigen Untersuchung.

Nachdem wir somit den $\lim J$ nach allen Richtungen hin sorgfältig untersucht haben, stellen wir die gewonnenen Ergebnisse in einer Tabelle zusammen. Da wir zur Prüfung des ersten Hauptsatzes (s. Art. 19) setzen müssen:

$$J = \int_0^a df(\alpha) \sin \alpha h, \quad f(\alpha) = \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha),$$

zur Prüfung des zweiten Hauptsatzes aber:

$$J = \int_0^a df(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\alpha}, \quad f(\alpha) = \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha), \quad \varrho(\alpha) = a\sigma(\alpha),$$

so wollen wir behufs rascherer Uebersicht beide Functionen, $\sigma(\alpha)$ und $\varrho(\alpha)$, in unsere Tabelle aufnehmen.

$\psi(\alpha)$	I. Hauptsatz $\sigma(\alpha) = \frac{\varrho(\alpha)}{\alpha}$	II. Hauptsatz $\varrho(\alpha) = \alpha\sigma(\alpha)$	$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin h\alpha$ $\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\alpha}$
$\psi(\alpha) < \frac{1}{\alpha}$	$\sigma(\alpha) < \frac{1}{\alpha}$	$\varrho(\alpha) < 1$	Null
	$\sigma(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha}$	$\varrho(\alpha) \sim 1$	Unbestimmt zwischen denselben Grenzen wie $\lim_{x=0} \varrho(x) \cos \psi(x)$
	$\sigma(\alpha) > \frac{1}{\alpha}$	$\varrho(\alpha) > 1$	Unbestimmt zwischen unendlichen Grenzen wie $\lim_{x=0} \varrho(x) \cos \psi(x)$.
$\psi(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha}$	$\sigma(\alpha) < \frac{1}{\alpha}$	$\varrho(\alpha) < 1$	Null
	$\sigma(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha}$	$\varrho(\alpha) \sim 1$	Unbestimmt zwischen Grenzen, die vom $\int_0^\infty d\alpha \alpha^i \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ abhängen.
	$\sigma(\alpha) > \frac{1}{\alpha}$	$\varrho(\alpha) > 1$	Unbestimmt zwischen unendlichen Grenzen.
$\psi(\alpha) > \frac{1}{\alpha}$	$\sigma(\alpha) < \sqrt{\psi''(\alpha)}$	$\varrho(\alpha) < \alpha \sqrt{\psi''(\alpha)}$	Null.
	$\sigma(\alpha) > \sqrt{\psi''(\alpha)}$	$\varrho(\alpha) > \alpha \sqrt{\psi''(\alpha)}$	Unbestimmt zwischen unendlichen Grenzen.

Ueber die Grenzwerte ähnlicher Integrale, namentlich des Integrals

$$\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin h(\alpha + c).$$

Wir haben den Limes von $\int_0^a d\alpha f(\alpha) \sin h\alpha$ unter der Annahme $f(\alpha) = \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)$ untersucht. Der Leser wird sich leicht davon über-

zeugen, dass die Methoden und die Resultate die nämlichen wären, hätten wir $f(\alpha) = \sigma(\alpha) \sin \psi(\alpha)$ angenommen. Nur dass wir hier und da statt Vielfacher von π ungerade Vielfache von $\frac{\pi}{2}$ hätten einführen müssen.

Etwas anderes wäre es gewesen, wenn das Integral

$$\int_0^a d\alpha f(\alpha) \cos h\alpha$$

vorgelegen hätte. Zwar der zweite Theil der Untersuchung des Limes

$J = \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin h\alpha$, den wir mit B überschrieben haben und

der $\psi(\alpha) > \frac{1}{\alpha}$ voraussetzt, ist hier mutatis mutandis vollgültig, und so

gelten für das Integral $\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \cos h\alpha$ im Falle $\psi(\alpha) > \frac{1}{\alpha}$

die oben für das Integral $\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin h\alpha$ gefundene

Resultate auch. Falls jedoch $\psi(\alpha) \lesssim \frac{1}{\alpha}$, sind etwas andere Betrachtungen, wie unter A anzustellen, und werden abweichende Resultate erhalten.

Als Ausgangspunkt dient, dass das Integral $\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \cos h\alpha$ convergirt, sobald $\sigma(\alpha) < \psi'(\alpha)$ ist (Art. 1). Jedenfalls ist also $\sigma(\alpha) = \frac{\varrho(\alpha)}{\alpha}$ zu setzen, wo $\varrho(\alpha) < 1$. Das zu untersuchende Integral

$$\int_0^a \frac{d\alpha}{\alpha} \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha) \cos \alpha h$$

theilt man wieder in eines von 0 bis α' und eines von α' bis a . Von dem Letzteren ist ganz wie unter A zu zeigen, dass es verschwindet. Das erstere anlangend, setzen wir $\alpha'h = C$ und

$$\int_0^{\epsilon'} \frac{d\alpha}{\alpha} \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha) \cos \alpha h = \int_0^c \frac{d\alpha}{\alpha} \varrho\left(\frac{\alpha}{h}\right) \cos \psi\left(\frac{\alpha}{h}\right) \cos \alpha = \int_0^{\epsilon} + \int_0^c$$

Der Theil von 0 bis ϵ , vor den man durch den zweiten Mittelwerthsatz den $\cos \alpha$ zu nehmen hat, giebt offenbar einen verschwindenden Limes $_{h=\infty}$. Der andere Theil ist zu behandeln, wie der analoge

unter A, nur dass noch statt $\varrho\left(\frac{\alpha}{h}\right)$ zu schreiben ist $\varrho(\alpha) \cdot \frac{\varrho\left(\frac{\alpha}{h}\right)}{\varrho(\alpha)}$, wovon der zweite Factor vor das Integral zu nehmen ist. Sodann sieht man leicht, dass auch dieser andere Theil für $h = \infty$ verschwindet.

Hier erhält man also das Resultat, dass für $\psi(\alpha) \lesssim \frac{1}{\alpha}$ der Limes von

$$\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \cos \alpha h$$

immer verschwindet, falls dies Integral convergent ist, womit auch dieser Limes vollständig erledigt ist.

Im Ganzen ergibt sich also: Der Limes $_{h=\infty}$ von

$$\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \cos \alpha h$$

ist convergent und Null für $\psi(\alpha) \lesssim \frac{1}{\alpha}$ falls $\sigma(\alpha) < \psi'(\alpha)$, und für

$\psi(\alpha) > \frac{1}{\alpha}$ falls $\sigma(\alpha) < \sqrt{\psi''(\alpha)}$. Ausserhalb dieser Grenzen divergirt entweder das Integral selbst, oder der Limes.

Betrachten wir endlich den Limes des Integrals:

$$(J) = \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin h(\alpha + c),$$

wo c irgend eine Constante, so ist er durch das Vorstehende gleichfalls bestimmt. Denn nehmen wir $\cos hc$ und $\sin hc$ vor das Integralzeichen, so handelt es sich wesentlich um die Grenzwerte der Integrale:

$$\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin ah, \quad \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \cos ah.$$

Die Grenzwerte des zweiten haben wir so eben gefunden, die des ersten divergiren nach Art. 17 erst für grössere Unendlich von $\sigma(\alpha)$, wie die des zweiten. Wir haben also für vorstehendes Integral die Grenzwerte:

$\psi(\alpha)$	$\sigma(\alpha) = \frac{\phi(\alpha)}{\alpha}$	lim (J)
$\psi(\alpha) \geq \frac{1}{\alpha}$	$\sigma(\alpha) \geq \psi'(\alpha)$	$\begin{matrix} 0 \\ \text{divergent} \end{matrix}$
$\psi(\alpha) > \frac{1}{\alpha}$	$\sigma(\alpha) \geq \sqrt{\psi''(\alpha)}$	$\begin{matrix} 0 \\ \text{divergent} \end{matrix}$

19. Uebersicht über die Verwendung der obigen Resultate in den beiden folgenden Capiteln.

Der erste Hauptsatz der Theorie der darstellenden Integrale, wie ich ihn Borch. Journ. Bd. 79, pag. 41 bewiesen habe, lautet: Wenn für alle durch die Bedingung $A \leq \alpha_1 < B_1 \leq B$ gestatteten Werthe von A_1 und B_1 die Function $\varphi(\alpha, h)$ die Gleichung:

$$\lim_{A_1} \int_{A_1}^{B_1} d\alpha \varphi(\alpha, h) = 0$$

erfüllt, so ist, unter $f(x)$ eine im Intervall $A \leq x \leq B$ integrierbare Function verstanden, auch

$$\lim \int_A^B d\alpha f(\alpha) \varphi(\alpha, h) = 0.$$

Wir dürfen also $\varphi(\alpha, h) = \sin \alpha h$ annehmen. Man kann diesen Satz erweitern, indem man untersucht, unter welchen Umständen die Function $f(\alpha)$ die Bedingung der Integrirbarkeit unerfüllt lassen darf, indem sie z. B. in einzelnen Puncten unendlich wird. Es würde sich also fragen: Wenn $f(\alpha)$ für einen zwischen A und B gelegenen Punct C unendlich wird, welche Bedingungen muss $f(\alpha)$ erfüllen, damit dennoch:

$$\lim \int_A^B d\alpha f(\alpha) \sin \alpha h = 0$$

sei. Wir können bei dieser Untersuchung $C = A$ annehmen, und, der leichteren Vergleichung mit unseren obigen Resultaten wegen, die Aufgabe so stellen:

I. Wenn in

$$\int_0^a d\alpha f(\alpha) \sin h(\alpha + c)$$

c irgend eine Constante bedeutet, und $f(\alpha)$ für $\alpha = 0$ unendlich wird, so sind die Bedingungen für $f(\alpha)$ anzugeben, unter denen vorstehendes Integral für $h = \infty$ verschwindet.

Es leuchtet ein, dass der besondere Fall $c = 0$ auch einer besonderen Betrachtung bedarf, weil durch das Verschwinden des Sinus für $\alpha = 0$ die Convergenzverhältnisse des Integrals geändert werden. So kann man den Fall $c = 0$ obigen Integrals als zur Theorie des ersten Hauptsatzes gehörig ansehen, und von diesem Gesichtspunct aus soll er zunächst auch behandelt werden. Die andere Auffassung dieses besonderen Falles ist aber die, dass hier der zweite Hauptsatz in Kraft tritt. Der zweite Hauptsatz (Borch. Journ. Bd. 79, pag. 46):

$$\lim \int_0^a d\alpha f(\alpha) \Phi(\alpha, h) = f(0) \lim \int_0^a d\alpha \Phi(\alpha, h)$$

setzt in erster Linie voraus, dass der Limes rechter Hand von α unabhängig, endlich und bestimmt, aber nicht Null sei, da man sonst den ersten Hauptsatz hätte. Bezüglich der Function $f(\alpha)$ sind seine Voraussetzungen nicht so allgemein, wie die des ersten Hauptsatzes, und werden weiter unten genauer erörtert werden. Die $\Phi(\alpha, h)$ betreffenden Voraussetzungen erfüllt $\Phi(\alpha, h) = \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$, und führt man diese Function in den vorstehenden zweiten Hauptsatz ein, so ist allerdings klar, dass der Limes des rechts auftretenden Integrales

$$\int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

zugleich auch das obige den Limes von

$$\int_0^a d\alpha f(\alpha) \sin h(\alpha + c)$$

betreffende Problem des ersten Hauptsatzes löst, wenn man hierin $c = 0$ voraussetzt und $\frac{f(\alpha)}{\alpha}$ statt $f(\alpha)$ schreibt.

Hinsichtlich des zweiten Hauptsatzes stellen wir die Frage so:

II. Unter welchen Bedingungen für die Function $f(\alpha)$ gilt die Relation:

$$\lim \int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = \frac{\pi}{2} f(0).$$

Wir werden auf Grund der in den Art. 17 und 18 zusammengestellten Ergebnisse in den folgenden zwei Capiteln die Fragen I und II vollständig erledigen unter der Voraussetzung

$$f(\alpha) = \varphi(\alpha) \cos \psi(\alpha)$$

wo weder $\varphi(\alpha)$ noch $\psi(\alpha)$ in der Nähe von $\alpha = 0$ unendlich viele Maxima haben, namentlich aber werden wir es uns angelegen sein lassen, die allgemeinen Regeln für die Gültigkeit der beiden Hauptsätze, die zum Theil von uns selbst veröffentlicht wurden, mit jenen Ergebnissen zu vergleichen.

II. Capitel.

Prüfung der Regeln für die Gültigkeit des ersten Hauptsatzes, falls die willkürliche Function unendlich wird.

20. Die Regeln für die Gültigkeit des ersten Hauptsatzes.

Wir wollen zuerst die verschiedenen Regeln über den Gültigkeitsbereich des ersten Hauptsatzes auf ihre Uebereinstimmung mit den in den Tabellen Art. 17 und 18 angegebenen Grenzwerten prüfen.

Es handelt sich also um Folgendes: Angenommen die Function $f(\alpha)$ in:

$$J = \int_0^a d\alpha f(\alpha) \sin h(\alpha + c)$$

sei im Intervall $0 < \alpha \leq a$ integrirbar, $\lim_{\alpha=0} f(\alpha)$ sei aber nicht endlich oder doch, wie für $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \sin \frac{1}{\alpha}$, unendlicher Werthe fähig, so existiren ein Paar Regeln um festzustellen, ob dennoch $\lim_{h=\infty} J = 0$ ist, wie dies ausnahmslos stattfindet, wenn $f(\alpha)$ im Intervall $0 \leq \alpha \leq a$ die Bedingung der Integrirbarkeit erfüllt, welche aber unendliche Werthe der Function ausschliesst.⁸⁾

I. Es besteht eine ältere (unrichtige) Angabe, nach welcher der Limes $\lim_{h=\infty} J$ stets Null ist, falls nur das Integral

$$\int_0^a d\alpha f(\alpha)$$

convergiert.⁹⁾

8) Borch. Journ. Bd. 79, pag. 21 und 41.

9) Crelle's Journ. Bd. 17, pag. 54.

II. Der Verfasser hat für die Gültigkeit des ersten Hauptsatzes bei allen darstellenden Integralen die ausreichende Regel gegeben, dass das Integral:

$$\int_0^a d\alpha f(\alpha)$$

absolut convergiren müsse.¹⁰⁾

III. In dem Falle $f(\alpha) = \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)$, und c von Null verschieden vorausgesetzt, hat die nothwendige und ausreichende Bedingung für das Verschwinden von $\lim J$ folgende doppelte Form: Für $\psi(\alpha) \lesssim \frac{1}{\alpha}$ muss $\sigma(\alpha) < \psi'(\alpha)$ sein, für $\psi(\alpha) > \frac{1}{\alpha}$ muss $\sigma(\alpha) < \sqrt{\psi''(\alpha)}$ sein.

IV. Ist dagegen $c = 0$, so gilt für $\psi(\alpha) \lesssim \frac{1}{\alpha}$ die Bedingung $\sigma(\alpha) < \frac{1}{\alpha}$ und für $\psi(\alpha) > \frac{1}{\alpha}$ dieselbe wie oben: $\sigma(\alpha) < \sqrt{\psi''(\alpha)}$.

21. Allgemeine Regeln über die Convergenz eines Integrals der Form

$$\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha).$$

Um nun die beiden apriorischen Regeln I und II mit den a posteriori gefundenen Gesetzen III und IV vergleichen zu können, wollen wir für $f(\alpha) = \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)$ (wo σ und ψ für $\alpha = 0$ ohne Maxima unendlich werden) feststellen, unter welchen Annahmen über σ und ψ das Integral

$$\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)$$

überhaupt convergirt, und wann es absolut convergirt. Wegen:

10) Borch. Journ. Bd. 79, pag. 43.

$$\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) = - \int_{\psi(a)}^{\infty} d\psi \sigma(\alpha) \frac{d\alpha}{d\psi} \cos \psi ,$$

ist das Integral convergent oder divergent, jenachdem $\sigma(\alpha) \frac{d\alpha}{d\psi} < 1$ oder ≥ 1 , d. i. jenachdem

$$\sigma(\alpha) < \psi'(\alpha) , \text{ oder } \sigma(\alpha) \geq \psi'(\alpha) .$$

Ferner ist das Integral $\int_{\psi(a)}^{\infty} d\psi \sigma(\alpha) \frac{d\alpha}{d\psi} \bmod \cos \psi$ convergent oder divergent, jenachdem das Integral

$$- \int_{\psi(a)}^{\infty} d\psi \sigma(\alpha) \frac{d\alpha}{d\psi} = \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha)$$

convergent oder divergent ist. Setzen wir $\sigma(\alpha) = \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$, wo $\varphi(\alpha)$ ohne Maxima Null wird, so ist das Integral

$$\int_0^a d\alpha \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$$

convergent für Functionen $\varphi(\alpha)$, deren Null unter einer gewissen Grenze bleibt. Man kann diese Grenze nicht durch eine Function darstellen. Wenn man indessen die Grenze zwischen Convergenz und Divergenz auch nicht wirklich darstellen kann, so hindert dies nicht, in den Calcul eine ideale Function $\tau(\alpha)$ einzuführen, von solcher Beschaffenheit, dass das

$$\int_0^a d\alpha \frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$$

convergirt, dass aber jedes Integral

$$\int_0^a d\alpha \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$$

divergirt, in welchem $\varphi(\alpha) > \tau(\alpha)$ gedacht wird.

Bekanntlich ist von den Integralen:

$$\int_0^a \frac{d\alpha}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha l_{\alpha}^1 l_{2\alpha}^1 \dots l_{r\alpha}^1}, \quad \int_0^a \frac{d\alpha}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha l_{\alpha}^1 l_{2\alpha}^1 \dots l_{r\alpha}^1} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1+\mu},$$

$l_{\alpha}^1 = l_{2\alpha}^1$, etc. gesetzt, und μ beliebig klein gedacht, das erste unendlich, das zweite endlich. Dies erlaubt die Function $\tau(\alpha)$ in nach unseren heutigen Begriffen ziemlich enge Grenzen einzuschliessen:

$$\frac{1}{l_{\alpha}^1 l_{2\alpha}^1 \dots l_{r\alpha}^1} > \tau(\alpha) > \frac{1}{l_{\alpha}^1 l_{2\alpha}^1 \dots \left(l_{r\alpha}^1\right)^{1+\mu}}, \quad r=1, 2, \dots, r_1=1, 2, \dots$$

Jedenfalls also hat man:

$$l_{\alpha}^1 > \tau(\alpha) > \left(l_{\alpha}^1\right)^{-1-\mu}$$

und daraus folgt mit Rücksicht auf die Theorie der Infinitärtypen,¹¹⁾ dass αl_{α}^1 der Typus von $\tau(\alpha)$ ist. Weiter schreiben wir noch:

$$\tau(\alpha) = \left(l_{\alpha}^1 l_{2\alpha}^1 \dots l_{r\alpha}^1\right)^{-1} \tau_r(\alpha)$$

wo

$$\left(l_{r+1\alpha}^1\right)^{-1} > \tau_r(\alpha) > \left(l_{r+1\alpha}^1\right)^{-1-\mu}, \quad \mu \text{ beliebig klein.}$$

Im Ganzen haben wir die Convergenzregel: Das Integral:

$$\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)$$

convergirt, falls

$$\sigma(\alpha) < \psi'(\alpha);$$

11) Borch. Journ. Bd. 74, pag. 294.

es convergirt absolut, falls

$$\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha)$$

convergirt, d. i. falls $\alpha \sigma(\alpha) \asymp \tau(\alpha)$, $\tau(\alpha)$ im obigen Sinne verstanden.

22. Vergleichung der allgemeinen Regeln I und II mit den besonderen Regeln III und IV (Art. 20).

Nach Regel I des Art. 20 würde dem vorigen Art. zu Folge für $f(\alpha) = \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)$ der Limes von

$$J = \int_0^a d\alpha f(\alpha) \sin h(\alpha + c)$$

gleich Null sein, falls $\sigma(\alpha) < \psi'(\alpha)$. Dies ist im Intervall $1 < \psi(\alpha) \asymp \frac{1}{\alpha}$ genau richtig und dies ist auch, $c \geq 0$ angenommen, in diesem Intervall die nothwendige Bedingung. Für $c = 0$ ist die nothwendige Bedingung weiter und lautet: $\sigma(\alpha) < \frac{1}{\alpha}$. Im Intervall $\psi(\alpha) > \frac{1}{\alpha}$ ist dagegen Regel I falsch. Denn, wie im Art. 16 des Genaueren gezeigt, hat man in diesem Intervall $\sqrt{\psi''(\alpha)} < \psi'(\alpha)$, und die Grenze der Convergenz des Lim J ist $\sigma(\alpha) < \sqrt{\psi''(\alpha)}$. Falsch ist also Regel I unter folgenden genaueren Bedingungen:

$$\psi(\alpha) > \frac{1}{\alpha}, \quad \sqrt{\psi''(\alpha)} \asymp \sigma(\alpha) < \psi'(\alpha).$$

Setzen wir z. B. $\psi(\alpha) = \alpha^{-\mu}$, so wird dies zweite Intervall:

$$\alpha^{-\frac{\mu}{2}-1} \asymp \sigma(\alpha) < \alpha^{-\mu-1}.$$

Gehört $\sigma(\alpha)$ diesem Intervall an, so ist $\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)$ convergent,

es ist aber

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin \alpha h$$

zwischen unendlichen Grenzen unbestimmt. Somit wird auch z. B. das Glied der Sinusreihe:

$$\sin nx \int_0^\pi d\alpha f(\alpha) \sin n\alpha$$

unendlich. (S. Riemann, Ueber die Darstellbarkeit d. e. trigon. R. pag. 45).

Weiter ist nach des Verfassers Angabe (II) $\lim J = 0$ falls $\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)$ unbedingt convergirt, d. i. falls

$$\sigma(\alpha) \asymp \tau(\alpha),$$

eine Regel, die ausreicht, aber von der nothwendigen um so mehr abweicht, je grösser das Unendlich von $\psi(\alpha)$ ist.

Um einen Ueberblick zu gewinnen über den Grad der Annäherung dieser Bedingungen an die wirklich nothwendigen der Tabellen, schreiben eine Folge von Functionen $\psi(\alpha)$ hin, darunter die Functionen $\sigma(\alpha)$, welche die Convergenzgrenze des Integrals

$$\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)$$

bilden, und zwar für absolute und für bedingte Convergenz. Endlich darunter die Convergenzgrenzen des Limes von

$$\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin h(\alpha + c)$$

nach den Regeln und nach den Tabellen.

$\psi(\alpha) =$	$\frac{1}{l_3 \alpha}$	$\frac{1}{l_2 \alpha}$	$\frac{1}{l_1 \alpha}$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^2}$		$e^{\frac{1}{\alpha}}$	..
$\sigma(\alpha) =$ Grenze der bed. Con- vergenz excl.	$\frac{1}{\alpha l_1 \frac{1}{\alpha} l_2 \frac{1}{\alpha}}$	$\frac{1}{\alpha l_1 \frac{1}{\alpha}}$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^2}$	$\frac{1}{\alpha^3}$		$e^{\frac{1}{\alpha}}$ $\frac{1}{\alpha^2}$	..
$\sigma(\alpha) =$ Grenze der absol. Con- vergenz	$\frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$	$\frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$	$\frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$	$\frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$	$\frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$		$\frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$	..
$\sigma(\alpha) =$ I Regel	$\frac{1}{\alpha l_1 \frac{1}{\alpha} l_2 \frac{1}{\alpha}}$	$\frac{1}{\alpha l_1 \frac{1}{\alpha}}$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^2}$	$\frac{1}{\alpha^3}$		$e^{\frac{1}{\alpha}}$ $\frac{1}{\alpha^2}$	..
$\sigma(\alpha) =$ II Regel	$\frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$	$\frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$	$\frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$	$\frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$	$\frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$		$\frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$	..
$\sigma(\alpha) =$ III Regel, $c \geq 0$	$\frac{1}{\alpha l_1 \frac{1}{\alpha} l_2 \frac{1}{\alpha}}$	$\frac{1}{\alpha l_1 \frac{1}{\alpha}}$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{\alpha^2}$		$e^{\frac{1}{2\alpha}}$ $\frac{1}{\alpha^2}$	..
$\sigma(\alpha) =$ IV Regel, $c = 0$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{\alpha^2}$		$e^{\frac{1}{2\alpha}}$ $\frac{1}{\alpha^2}$	..

Noch anschaulicher werden diese Verhältnisse, wenn man die Unendlich von ψ und σ durch Coordinaten darstellt, wobei es uns nicht beirren darf, dass die Grösse des Unendlich durch keine Einheit gemessen wird.¹²⁾ Für unsere Zwecke reicht es hin, dass wir eine beliebige Anzahl von Unendlich in einer Reihenfolge nach ihrer analytisch wohl vergleichbaren Grösse anordnen können.

So entspreche jedem Punkte der Coordinatenebene in der graphischen Darstellung Tafel I¹³⁾ ein Functionensystem

$$(\sigma(\alpha), \psi(\alpha))$$

und wenn der Punct unter der die Ergebnisse der Tabelle (Art. 17) darstellenden Linie und oberhalb der ψ -Axe gelegen ist, so entspricht

12) Ann. v. Cl. und N. Bd. VIII pag. 363, Einleitung.

13) Bedauerlicherweise ist durch nachträgliche nicht hinreichend überwachte Correctur ein entstellender Fehler in diese Figur gekommen. Selbstverständlich muss die Curve I, III zwischen den Geraden II und IV verlaufen.

Abh. d. II. Cl. d. k. Ak. d. Wiss. XII. Bd. II. Abth.

dem ihm zugehörigen Functionensystem eine dem ersten Hauptsatz für $c = 0$ genügende Function $f(\alpha) = \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)$. Analog, wenn er unter der die Ergebnisse der Tabelle Art. 18 und oberhalb der ψ -Axe liegt, wird durch das ihm zugehörige System σ, ψ der Satz für $c \geq 0$ erfüllt. Liegt der Punct oberhalb einer dieser Linien, so findet der Satz für $c = 0$ resp. $c \geq 0$ nicht statt.

23. Kurze Uebersicht über die Ergebnisse dieses Capitels, nebst einigen Bemerkungen, welche ihre graphische Darstellung veranlasst.

Es zeigt sich also, dass im Intervall $\psi(\alpha) > \frac{1}{\alpha}$ der

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha [\sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)] \sin \alpha h = \lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha f(\alpha) \sin \alpha h$$

divergiren kann, wenn auch:

$$\int_0^a d\alpha [\sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)] = \int_0^a d\alpha f(\alpha)$$

ein convergentes Integral ist. Die Bedingung für die gleichzeitige Divergenz jenes Limes und Convergenz dieses Integrals lautete:

$$\sqrt{\psi''(\alpha)} < \sigma(\alpha) < \psi'(\alpha).$$

Dagegen kann, Dank dem Sinus, im Intervall $1 < \psi(\alpha) < \frac{1}{\alpha}$ der Limes von

$$\int_0^a d\alpha [\sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)] \sin \alpha h$$

convergiren und verschwinden, wenngleich das Integral

$$\int_0^a d\alpha [\sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)]$$

divergent ist. Die Bedingung dafür ist

$$\psi'(\alpha) < \sigma(\alpha) < \frac{1}{\alpha}.$$

Betrachten wir dagegen das Integral:

$$\int_0^a d\alpha [\sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)] \cos h\alpha \text{ oder } \int_0^a d\alpha [\sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)] \sin h(\alpha + c).$$

Dies Integral und sein Limes sind gleichzeitig convergent (in welchem Falle der Limes Null ist) und divergent, aber nur im Intervall $1 < \psi(\alpha) \lesssim \frac{1}{\alpha}$.

Falls $\psi(\alpha) > \frac{1}{\alpha}$, ist das Integral convergent für $\sigma(\alpha) < \psi'(\alpha)$, und der Limes für $\sigma(\alpha) < \sqrt{\psi''(\alpha)}$ (Art. 18), wie das obige:

$$\int_0^a d\alpha [\sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)] \sin h\alpha.$$

Eben dies Obige ist convergent für $\sigma(\alpha) < \frac{\psi'(\alpha)}{\alpha}$, und sein Limes für $\sigma(\alpha) < \frac{1}{\alpha}$ im Intervall $\psi(\alpha) \lesssim \frac{1}{\alpha}$ und für $\sigma(\alpha) < \sqrt{\psi''(\alpha)}$ im Intervall $\psi(\alpha) > \frac{1}{\alpha}$. Also, und dies scheint mir beachtenswerth, ist der Limes des Integrals mit dem $\sin \alpha h$ in einem viel kleineren Bereiche des Unendlich von $\sigma(\alpha)$ convergent, wie das Integral selbst, während bei dem Integral mit dem $\cos \alpha h$ die Uebereinstimmung des Convergencebereiches beider, des Integrals und des Limes, theils vollständig, theils doch grösser als im Falle des $\sin \alpha h$ ist.

Die Figur zeigt deutlich, dass die beste allgemeine Regel für den Gültigkeitsbereich des ersten Hauptsatzes, nämlich Regel II, von $\psi(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha}$ an für zunehmende Unendlich von $\psi(\alpha)$ eine äusserst mangelhafte Ueber-

einstimmung mit der nothwendigen Bedingung III, IV zeigt. Wenn uns dies deshalb nicht überraschen kann, weil die Regel III eben nicht für das Integral:

$$\int_0^a d\alpha f(\alpha) \sin h(\alpha + c)$$

allein aufgestellt ist, sondern für sämtliche darstellende Integrale gilt, so entsteht doch die Frage, ob für vorstehendes besondere, aber auch besonders interessante Integral nicht Regeln ermittelt werden können, die besser an die nothwendige sich anschliessen, oder ob nicht gar die nothwendige Bedingung für alle Functionen $f(\alpha)$, für welche der $\lim \int_0^a d\alpha f(\alpha) \sin \alpha h$ verschwindet, gefunden werden könne. Besser als II an die nothwendige Bedingung III sich anschliessende allgemeine Regeln wird es schon geben. Aber ich möchte dem Analysten, der Oehl und Mühe an die Auffindung der nothwendigen für alle Functionen $f(\alpha)$ gültigen Regel wenden will, zu bedenken geben, dass schon im Falle der einfachen Function $f(\alpha) = \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)$ eine solche Regel zwei formell verschiedene Gesetze liefern müsste, jenachdem nämlich $\psi(\alpha) < \frac{1}{\alpha}$ oder $\psi(\alpha) > \frac{1}{\alpha}$ ist. Nun betrachte man z. B. eine Function wie diese:

$$\sigma(\alpha) \cos \left[u + v \cos \left(u_1 + v_1 \cos \{ \dots \} \right) \right]$$

wo die Grössen $\sigma, u, v, \dots$ sämmtlich > 1 gedacht sind, wie viel formell verschiedene Gesetze für die $\sigma, u, v, \dots$ mag es hier wohl geben, und wie will man sich die Bedingung zusammengesetzt denken, die alle diese Fälle umfasst?

Es erscheint mir wahrscheinlich, dass ein dereinstiges tieferes Verständniss dieses und ähnlicher Probleme von allgemeineren Gesichtspuncten aus — wer vermöchte jetzt schon zu ahnen welchen! — erfolgen wird. Weil eben die formell verschiedenen Gesetze darauf hinweisen, dass wir es hier mit Grenzfällen einer höheren Continuität zu thun haben.

III. Capitel.

Prüfung der Regeln für die Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes, welcher dem Convergenzbeweis für die Fourierschen Reihen zu Grunde liegt.

24. Angabe der Regeln für die Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes.

Wir wenden uns zur Prüfung der für die Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = \frac{\pi}{2} f(0)$$

aufgestellten Bedingungen, welches auch die Bedingungen für die Darstellbarkeit von $f(0)$ durch eine Fouriersche Reihe oder ein Fouriersches Integral sind, falls $f(\alpha)$ diese Bedingung nicht allein für $\alpha \geq 0$, sondern auch für $\alpha \leq 0$, also innerhalb eines (beliebig kleinen) den Punkt $\alpha = 0$ enthaltenden Intervalls, erfüllt. Es sind hier folgende Bedingungen zu verzeichnen:

I. Es genügt $f(\alpha)$ der Dirichletschen Bedingung, d. h. es hat im Intervall $0 \leq \alpha \leq a$ nur eine endliche Anzahl Maxima.¹⁴⁾

II. Die Lipschitzsche Bedingung: $f(\alpha) - f(0)$ wird nicht langsamer als eine Potenz von α Null.¹⁵⁾ Noch etwas weiter geht die aus der Regel IV unmittelbar fließende Bestimmung (Borch. Journ. Bd. 79, pag. 61, Art. 11 und diese Abh. Art. 26) dass

$$\frac{f(\alpha) - f(0)}{\tau(\alpha)}$$

nicht unendlich werden darf, $\tau(\alpha)$ im Sinne des Art. 21 verstanden. In dieser Form will ich sie die Bedingung II nennen.

III. Vorausgesetzt, dass $f(\alpha)$ differenzierbar ist, gilt der zweite Hauptsatz für alle darstellenden Integrale, wenn dieses Integral:

14) Crelle's Journ. Bd. 4, pag. 157.

15) Borch. Journ. Bd. 63, pag. 286.

$$\int_0^a f'(\alpha) d\alpha$$

absolut convergent ist.¹⁶⁾

IV. Falls das Integral

$$K = \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha d\beta f(\beta)$$

absolut convergent ist, wobei $f(\beta)$ nicht differenzierbar zu sein braucht, gilt der zweite Hauptsatz für alle darstellenden Integrale $\int_0^a d\alpha \varphi(\alpha, h)$, bei denen $\varphi(\alpha, h)$ die Bedingungen erfüllt, dass $\alpha \varphi(\alpha, h)$ mit α verschwindet, und mit h nicht unendlich wird, wie bei $\varphi(\alpha, h) = \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$.¹⁷⁾

V. Setzt man $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)$, so sind nach der Tabelle Art. 17 die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen dafür, dass

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha [\varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)] \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = 0$$

sei, formell verschieden, jenachdem $\psi(\alpha) \lesssim \frac{1}{\alpha}$ oder $\psi(\alpha) > \frac{1}{\alpha}$. Im ersteren Falle wird verlangt, dass $\varrho(\alpha)$ verschwinde für $\alpha = 0$. Im zweiten muss $\varrho(\alpha) < \alpha \sqrt{\psi''(\alpha)}$ sein. Für $\psi(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ gehen die beiden Forderungen in einander über, da dann aus der zweiten $\varrho(\alpha) < 1$ folgt.

Es wird sich jetzt wieder darum handeln, die vier ersteren apriorischen Gesetze mit den aposteriori gefundenen unter V verzeichneten Regeln zu vergleichen.

Um diese Vergleichung anstellen zu können, müssen wir zuvor untersuchen, was, $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)$ gesetzt, aus den Gesetzen III und IV für die Functionen ϱ und ψ für engere Bedingungen sich ergeben.

16) Borch. Journ. Bd. 79, pag. 55.

17) Borch. Journ. Bd. 79 pag. 55.

25. Unter welchen Umständen ist für $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)$ das Integral

$$\int_0^a d\alpha f'(\alpha) \text{ absolut convergent?}$$

Wir beginnen damit das Integral

$$\int_0^a d\alpha f'(\alpha)$$

auf seine absolute Convergenz zu untersuchen.

Es soll also absolut convergent sein das Integral:

$$\int_0^a d\alpha \{ \varrho'(\alpha) \cos \psi(\alpha) - \varrho(\alpha) \psi'(\alpha) \sin \psi(\alpha) \}$$

oder, wenn man setzt:

$$\varrho'(\alpha) = h(\alpha) \cos \gamma$$

$$\varrho(\alpha) \psi'(\alpha) = h(\alpha) \sin \gamma$$

das Integral:

$$\int_0^a d\alpha h(\alpha) \cos (\psi(\alpha) + \gamma)$$

wo $h(\alpha) = [\varrho'(\alpha)^2 + \varrho(\alpha)^2 \psi'(\alpha)^2]^{\frac{1}{2}}$, $\gamma = \arctg \varrho(\alpha) \cdot \frac{\varrho'(\alpha)}{\psi'(\alpha)}$. Für $\alpha = 0$

nähert sich γ ohne Maxima einer zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ eingeschlossenen Grenze.

Mithin ist $\psi(\alpha) + \gamma > 1$, daher ist nach den Ausführungen des Art. 21

$$\int_0^a d\alpha h(\alpha) \cos (\psi + \gamma)$$

nur dann convergent, wenn das Integral

$$\int_0^a d\alpha h(\alpha) = \int_0^a d\alpha \left\{ \varrho'(\alpha)^2 + \varrho(\alpha)^2 \psi'(\alpha)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

convergent ist. Dies convergirt aber seinerseits nur, wenn die beiden Integrale

$$\int_0^a d\alpha \varrho'(\alpha) \quad , \quad \int_0^a d\alpha \varrho(\alpha) \psi'(\alpha)$$

convergiren. Denn wäre z. B. das erste nicht convergent, so könnte geschrieben werden

$$\int_0^a d\alpha \left\{ \varrho'(\alpha)^2 + \varrho(\alpha)^2 \psi'(\alpha)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ 1 + \left(\frac{\varrho(\alpha) \psi'(\alpha)}{\varrho'(\alpha)} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \int_0^a d\alpha \varrho'(\alpha) \quad ,$$

wo der Factor vor dem Integral rechts nicht verschwinden kann. Wenn $\varrho(\alpha) < 1$, ist das Integral $\int_0^a d\alpha \varrho'(\alpha)$ convergent. Die Convergenz des anderen Integrals

$$\int_0^a d\alpha \varrho(\alpha) \psi'(\alpha)$$

führt auf die Bedingung:

$$\varrho(\alpha) \psi'(\alpha) \lesssim \frac{\tau(\alpha)}{\alpha} \quad ,$$

$\tau(\alpha)$ im Sinne des Art. 21 genommen.

Es ist also das Integral

$$\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} (\varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha))$$

absolut convergent, wenn $\varrho(\alpha) < 1$, und die Bedingung

$$\alpha \varrho(\alpha) \psi'(\alpha) \lesssim \tau(\alpha)$$

erfüllt ist.

26. Untersuchung der Bedingungen für ϱ und ψ in $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)$, welche das Integral $\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha d\beta f(\beta)$ absolut convergent machen. Es wird die Bedingung $\varrho(\alpha) \gtrsim \tau(\alpha)$ aufgestellt, und, um sie auf ihre Nothwendigkeit zu prüfen, wird zuerst eine Substitution für $f(\alpha)$ eingeführt, welche für $\psi(\alpha) > \tau(\alpha)^{-1}$ gilt.

Führen wir jetzt die analoge Untersuchung bezüglich des Integrals

$$K = \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha d\beta f(\beta)$$

durch, indem wir, $f(x) = \varrho(x) \cos \psi(x)$ gedacht, zu ermitteln suchen, unter welchen Bedingungen für ϱ und ψ das Integral K absolut convergirt.

Es sei $\varphi(\alpha)$ eine für $\alpha = 0$ endlich bleibende Function und $\varrho(\alpha) \gtrsim \tau(\alpha)$ ($\tau(\alpha)$ im Sinne des Art. 21 genommen), so hat man für $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \varphi(\alpha)$:

$$\int_0^a d\alpha \left\{ \frac{f(\alpha)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\alpha d\beta f(\beta) \right\} = \int_0^a d\alpha \frac{\varrho(\alpha)}{\alpha} \left\{ \varphi(\alpha) - \frac{\varrho(\bar{\alpha})}{\varrho(\alpha)} \varphi(\bar{\alpha}) \right\}, \quad 0 \leq \bar{\alpha} \leq \alpha, \varrho(\bar{\alpha}) \leq \varrho(\alpha).$$

Die Klammer unter dem Integral rechts bleibt also endlich, und für $\varrho(\alpha) \gtrsim \tau(\alpha)$ wird daher K absolut convergent sein. Unsere Untersuchung legt sich jetzt die Frage vor, ob und wie weit die eben bei Functionen der Form $\varrho(\alpha) \cdot \varphi(\alpha)$, wo $\varphi(\alpha)$ nur endlich zu sein braucht, gefundene ausreichende Bedingung für die absolute Convergenz von K (dass $\varrho(\alpha) \gtrsim \tau(\alpha)$ sei), bei Functionen der speciellen Form $\varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)$ nothwendig ist.

Um das Integral K behandeln zu können, ist es nöthig, des darin vorkommenden inneren Integrals (nach β) dadurch ledig zu werden, dass man für $f(\alpha)$ eine Function einführt, die schon von vornherein ein Differentialquotient ist. Wir setzen also statt $f(\alpha)$:

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha} \lambda(\alpha) \sin \psi(\alpha) \\ &= \lambda(\alpha) \psi'(\alpha) \cos \psi(\alpha) + \lambda'(\alpha) \sin \psi(\alpha) \end{aligned}$$

ein, worin wir $\lambda(\alpha) \psi'(\alpha)$ mit $\varrho(\alpha)$ identificiren und $\lambda'(\alpha)$ — wenn diese

Voraussetzungen sich gegenseitig vertragen, da nämlich $\varrho(\alpha) = \lambda(\alpha) \psi'(\alpha)$ doch < 1 angenommen werden muss — so bestimmen, dass der $\lambda'(\alpha) \sin \psi(\alpha)$ enthaltende Theil von:

$$K_1 = \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha d\beta F(\beta)$$

für sich absolut convergirt, d. i. wir setzen:

$$\lambda'(\alpha) \simeq \tau(\alpha).$$

Hieraus ergibt sich

$$\lambda(\alpha) \simeq \alpha \tau(\alpha),$$

wie folgt: Aus $\lambda'(\alpha) \simeq \tau(\alpha)$ folgt zunächst:

$$\lambda(\alpha) \simeq \int_0^\alpha d\beta \tau(\beta).$$

Setzt man nun

$$\int_0^\alpha d\beta \tau(\beta) \sim \alpha \tau(\alpha),$$

oder durch Differentiation:

$$\tau(\alpha) \sim \tau(\alpha) \left\{ 1 + \alpha \frac{\tau'(\alpha)}{\tau(\alpha)} \right\}$$

so muss die Richtigkeit dieser Relation nachgewiesen werden. Dies ist aber sehr leicht, denn aus:

$$\tau(\alpha) > \frac{1}{1\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1+\mu}} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\tau(\alpha)} < 1\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1+\mu}$$

folgt:

$$1 \frac{1}{\tau(\alpha)} \lesssim 1 \frac{1}{\alpha}$$

und durch Differentiation:

$$\frac{\tau'(\alpha)}{\tau(\alpha)} \lesssim \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\alpha} \quad \text{oder} \quad \alpha \frac{\tau'(\alpha)}{\tau(\alpha)} \lesssim \frac{1}{\alpha},$$

und jene Relation ist ja schon bewiesen, wenn nur überhaupt gezeigt ist, dass: $\alpha \frac{\tau'(\alpha)}{\tau(\alpha)} < 1$.

Wir haben also die beiden Voraussetzungen:

$$\lambda(\alpha) \gtrsim \alpha\tau(\alpha), \quad \varrho(\alpha) = \lambda(\alpha)\psi'(\alpha) < 1.$$

Es soll untersucht werden, ob die Bedingung $\varrho(\alpha) \gtrsim \tau(\alpha)$, unter welcher K absolut convergent ist, nothwendig sei. Also müssen die vorstehenden beiden Bedingungen für λ , ϱ , ψ so beschaffen sein, dass wenigstens für einige Stärken des Unendlichwerdens von ψ die Grösse der Null, die dem ϱ gestattet ist, ein Intervall umfasst, welches die Grösse der Null von τ enthält, damit man eben feststellen könne, ob τ die nothwendige Grenze für die Functionen ϱ bildet, die K absolut convergent machen. Wie wir gleich zeigen wollen, gestatten die beiden Bedingungen $\lambda(\alpha) \gtrsim \alpha\tau(\alpha)$, $\varrho(\alpha) = \lambda(\alpha)\psi'(\alpha) < 1$ dem $\varrho(\alpha)$ ein hinlängliches Intervall unter der sehr allgemeinen Voraussetzung $\psi(\alpha) \gtrsim \tau(\alpha)$.

27. Nachweis, dass die Substitution des vorigen Art. für $f(\alpha)$ die Prüfung der Nothwendigkeit der Bedingung $\varrho(\alpha) \gtrsim \tau(\alpha)$ gestattet.

Wir setzen also:

$$\psi(\alpha) = \frac{\pi(\alpha)}{\tau(\alpha)}, \quad \pi(\alpha) > 1.$$

und

$$\lambda(\alpha) = \pi_1(\alpha) \cdot \alpha\tau(\alpha), \quad \pi_1(\alpha) \gtrsim 1.$$

Man hat:

$$\varrho(\alpha) = \lambda(\alpha)\psi'(\alpha) = \alpha\pi\pi_1\left(\frac{\pi'}{\pi} - \frac{\tau'}{\tau}\right),$$

und wenn mit t_τ und t_π die Infinitärtypen von τ und π bezeichnet werden, so wird:

$$\varrho(\alpha) = \alpha\pi\pi_1\left(\frac{1}{t_\pi} - \frac{1}{t_\tau}\right)$$

Beide Glieder in der Klammer haben das nämliche Zeichen falls $\pi(\alpha) > 1$. In diesem Falle wird also $\varrho(\alpha)$ jedenfalls einer so grossen Null wie

$$\frac{\alpha\pi}{\pi_1 t_\tau}$$

fähig sein. Da aber π_1 beliebig langsam Null werden darf, so handelt es sich darum, ob stets

$$\pi_1 \frac{\alpha\pi}{t_\tau} > \tau(\alpha)$$

sein kann. Nun hat man $t_\tau \sim \alpha \frac{1}{\alpha}$ (Art. 21), wodurch die vorstehende Relation wird:

$$\pi_1 \frac{\pi(\alpha)}{\frac{1}{\alpha}} > \tau(\alpha).$$

Da aber jedenfalls $\frac{\pi(\alpha)}{\frac{1}{\alpha}} > \tau(\alpha)$ ist, so kann die Null von π_1 auch stets so klein gewählt werden, dass vorstehende Ungleichheit erfüllt ist.

Also gestatten die Bedingungen $\lambda(\alpha) \gtrsim \alpha\tau(\alpha)$, $\varrho(\alpha) = \lambda(\alpha)\psi'(\alpha) < 1$ für $\psi(\alpha) > \frac{1}{\tau(\alpha)}$ dem $\varrho(\alpha)$ ein $\tau(\alpha)$ einschliessendes Intervall.

28. Nachweis der Nothwendigkeit der Bedingung $\varrho(\alpha) \gtrsim \tau(\alpha)$ für $\psi(\alpha) > \tau(\alpha)$.

Es lässt sich jetzt leicht zeigen, dass in dem Gebiete

$$\frac{1}{\tau(\alpha)} < \psi(\alpha)$$

$\varrho(\alpha) \gtrsim \tau(\alpha)$ die nothwendige Bedingung für die absolute Convergenz von

$$K_1 = \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha d\beta F(\beta)$$

ist, oder, wie sich daraus unmittelbar ergibt, dass

$$K = \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha d\beta \varrho(\beta) \cos \psi(\alpha)$$

nur für $\varrho(\alpha) \gtrsim \tau(\alpha)$ absolut convergirt, falls $\psi(\alpha) > \frac{1}{\tau(\alpha)}$ ist.

Denn es ist:

$$K_1 = \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\lambda(\alpha) \sin \psi(\alpha)}{\alpha} \right).$$

Dies Integral ist aber nach Art. 25 nur dann absolut convergent, wenn:

$$\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\lambda(\alpha)}{\alpha} \right), \quad \int_0^a d\alpha \frac{\lambda(\alpha) \psi'(\alpha)}{\alpha}$$

convergent sind, d. i. wenn:

$$\lambda(\alpha) \gtrsim \alpha, \quad \lambda(\alpha) \psi'(\alpha) \gtrsim \tau(\alpha),$$

Die zweite Bedingung ist die zu beweisende, und die erste ist wegen $\lambda(\alpha) \gtrsim \alpha \tau(\alpha)$ von selbst erfüllt.

29. Die nothwendige Bedingung für die absolute Convergenz von K wird für das Intervall $1 < \psi(\alpha) < \frac{1}{\alpha}$ mit Hülfe einer anderen Substitution für $f(\beta)$ aufgestellt.

Da wir nun für $\psi(\alpha) > \frac{1}{\tau(\alpha)}$ die nothwendige, $\varphi(x)$ betreffende Bedingung kennen, unter der

$$K = \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha d\beta \varphi(\beta) \cos \psi(\beta)$$

absolut convergirt, so hätten wir noch die nämliche Bestimmung für das Intervall

$$1 < \psi(\alpha) < \frac{1}{\tau(\alpha)}$$

zu versuchen. Wir werden uns aber auf das leichter zu erledigende, von jenem wenig abweichende Intervall

$$1 < \psi(\alpha) < \frac{1}{\alpha}$$

beschränken.

Wir setzen ähnlich wie oben:

$$\begin{aligned} F_1(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha} \lambda(\alpha) \cos \psi(\alpha) \\ &= \lambda'(\alpha) \cos \psi(\alpha) - \lambda(\alpha) \psi'(\alpha) \sin \psi(\alpha). \end{aligned}$$

Nehmen wir also an $\psi(\alpha) < \frac{1}{\alpha}$, und setzen z. B., um einen Versuch zu machen:

$$\psi(\alpha) = 1 \left(\frac{1}{\alpha} \right)^\nu, \quad \nu < 1,$$

so ist:

$$F_1(\alpha) = \lambda'(\alpha) \cos \psi(\alpha) + \nu \lambda(\alpha) \cdot \frac{1}{\alpha 1^{1-\nu}} \cdot \sin \psi(\alpha)$$

Macht man alsdann weiter die Annahme

$$\lambda'(\alpha) \lesssim \frac{1}{1 \left(\frac{1}{\alpha} \right)^\mu}, \quad \mu > \nu,$$

also

$$\lambda(\alpha) \lesssim \frac{\alpha}{1 \left(\frac{1}{\alpha} \right)^\mu},$$

(wie durch Differentiation leicht zu verificiren), so giebt der zweite Theil von $F_1(\alpha)$:

$$\frac{\nu \lambda(\alpha)}{\alpha 1^{1-\nu}} \cdot \sin \psi(\alpha)$$

in dem Integral $K_1^{(1)} = \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^a d\beta F_1(\beta)$ für sich einen absolut con-

vergenten Theil, gleichwie vorher, als es sich um das Intervall $\frac{1}{\tau(\alpha)} < \psi(\alpha)$ handelte, es der erste Theil von $F(\alpha)$ war, über den wir in ähnlicher Weise verfügten. Weiter findet man wie oben, dass das ganze Integral

$$K_1^{(1)} = \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha d\beta F_1(\beta)$$

absolut convergent ist, wenn die Integrale:

$$\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{\lambda(\alpha)}{\alpha}, \quad \int_0^a d\alpha \frac{\lambda(\alpha) \psi'(\alpha)}{\alpha}$$

convergiren. Das erste convergirt wegen $\frac{\lambda(\alpha)}{\alpha} \lesssim \frac{1}{1\left(\frac{1}{\alpha}\right)^\mu}$, das zweite wegen:

$$\frac{\lambda(\alpha) \psi'(\alpha)}{\alpha} \lesssim \frac{1}{\alpha \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1+(\mu-\nu)}}.$$

Hierdurch ist dann auch, wenn $\lambda'(\alpha) = \varrho(\alpha)$ gesetzt wird, die Bedingung für $\varrho(\alpha)$ in $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)$, vermöge deren das Integral K absolut convergirt, gefunden.

Um nun die Frage allgemein zu erledigen, setzen wir in

$$F_1(\alpha) = \lambda'(\alpha) \cos \psi(\alpha) - \lambda(\alpha) \psi'(\alpha) \sin \psi(\alpha)$$

wieder $\lambda'(\alpha) = \varrho(\alpha)$, und hieraus folgt $\lambda(\alpha) \sim \alpha \varrho(\alpha)$, unter der Annahme, dass der Typus von $\varrho(\alpha)$ die Bedingung $> \alpha$ erfüllt, d. h. dass ϱ nicht so rasch, wie eine Potenz von α Null wird. Wir bestimmen sodann $\lambda(\alpha)$ so, dass der den zweiten Theil von $F_1(\alpha)$, nämlich $\lambda(\alpha) \psi'(\alpha) \sin \psi(\alpha)$, enthaltende Theil von

$$K_1^{(1)} = \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha d\beta F_1(\beta)$$

für sich absolut convergirt, was der Fall sein wird, wenn $\lambda(\alpha) \psi'(\alpha) \lesssim \tau(\alpha)$, oder wenn das Integral

$$\int_0^a d\alpha \varrho(\alpha) \psi'(\alpha)$$

convergiert. Alsdann folgt aus der absoluten Convergenz von $K_1^{(1)}$ sofort diejenige von

$$\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha d\beta f(\beta)$$

wenn $f(\beta) = \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha) = \lambda'(\alpha) \cos \psi(\alpha)$ gesetzt wird. Nach den schon öfter benutzten Sätzen ist

$$\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha d\beta F_1(\beta) = \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{\lambda(\alpha) \cos \psi(\alpha)}{\alpha}$$

absolut convergent, wenn die Integrale

$$\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{\lambda(\alpha)}{\alpha}, \quad \int_0^a d\alpha \frac{\lambda(\alpha) \psi'(\alpha)}{\alpha}$$

convergiren. Was das zweite Integral betrifft, so wurde dessen Convergenz schon so eben verlangt. Das erste, welches geschrieben werden kann:

$$\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \varrho(\alpha) \varphi(\alpha)$$

wo $\varphi(\alpha)$ für $\alpha = 0$ nicht unendlich wird, ist auch convergent, wenn $\varrho(\alpha)$ nicht unendlich wird, welches eine Forderung ist, die wir für die Darstellbarkeit der Function $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)$ ja ohnedies stellen müssen. Wir haben also im Ganzen die Bedingungen:

$$\varrho(\alpha) \gtrsim 1, \quad \int_0^a d\alpha \varrho(\alpha) \psi'(\alpha) \text{ ist convergent,}$$

deren zweite auch $\alpha \varrho(\alpha) \psi'(\alpha) \gtrsim \tau(\alpha)$ geschrieben werden kann.

Setzen wir z. B. $\psi(\alpha) = \ln \frac{1}{\alpha}$, so muss sein $\frac{\varrho(\alpha)}{1/\alpha} \gtrsim \tau(\alpha)$. Hier kann also

z. B. $\varrho(\alpha) = \tau(\alpha) \frac{1}{\alpha}$ gesetzt werden, d. i. langsamer Null werden, als die kleinsten negativen Potenzen von $\frac{1}{\alpha}$.

30. Bemerkungen über diese Bedingung für die absolute Convergenz von K im Falle $1 < \psi(\alpha) < \frac{1}{\alpha}$.

Man erkennt in den vorstehenden Bedingungen jene wieder, die durch die absolute Convergenz des Integrals

$$\int_0^a d\alpha f'(\alpha)$$

den Functionen ϱ und ψ auferlegt wurden. Da diese Bedingungen in dem Intervall $1 < \psi < \frac{1}{\alpha}$, wie gleich zu zeigen, mehr Functionen ϱ

zulassen, als die vorher für das Intervall $\frac{1}{\tau(\alpha)} < \psi(\alpha)$ gefundene noth-

wendige Bedingung $\varrho(\alpha) \lesssim \tau(\alpha)$ für das erstere Intervall zulassen würde, so mussten wir mindestens auf die nämlichen Bedingungen, wie sie aus

der absoluten Convergenz von $\int_0^a d\alpha f'(\alpha)$ folgen, fallen, da ich an einem früheren Orte gezeigt habe¹⁸⁾, dass die Functionen $f(\alpha)$, die das Integral $\int_0^a d\alpha f'(\alpha)$ zu einem absolut convergenten machen, auch die absolute Convergenz von

$$K = \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha d\beta f(\beta)$$

bewirken.

Die obige Bedingung $\alpha\varrho(\alpha)\psi'(\alpha) \lesssim \tau(\alpha)$ oder

18) Borch. Journ. Bd. 79, pag. 58, Art. 10.
Abh. d. II. Cl. d. k. Ak. d. Wiss. XII. Bd. II. Abth.

$$\psi'(\alpha) = \frac{\mu(\alpha)}{\alpha}$$

gesetzt, $\varrho(\alpha)\mu(\alpha) \lesssim \tau(\alpha)$ giebt für jedes vorgelegte $\psi(\alpha)$ ein zugehöriges Intervall, aus welchem solche Functionen $\varrho(\alpha)$ bezogen werden können, für welche das Integral K absolut convergirt. Die Grenze in der Richtung des langsamsten Nullwerdens von $\varrho(\alpha)$ ist gegeben durch

$$\varrho(\alpha)\mu(\alpha) \sim \tau(\alpha).$$

Es wird $\mu(\alpha)$ für $1 < \psi(\alpha) < \frac{1}{\alpha}$ zwar < 1 (denn aus $\psi(\alpha) < \frac{1}{\alpha}$ folgt $\psi'(\alpha) < \frac{1}{\alpha}$) aber stets $> \tau(\alpha)$ sein, da das Integral $\int_0^a d\alpha \frac{\mu(\alpha)}{\alpha} = \int_0^a d\alpha \psi'(\alpha)$ nicht convergent ist, so dass vorstehende Bedingung stets $\varrho(\alpha) < 1$ ergiebt. Für $\psi(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha}$ folgt $\mu(\alpha) \sim 1$ und $\varrho(\alpha) \sim \tau(\alpha)$. Wird $\psi(\alpha)$ noch stärker unendlich als $\frac{1}{\alpha}$, so liefert die Bedingung $\varrho(\alpha)\mu(\alpha) \sim \tau(\alpha)$ das Resultat $\varrho(\alpha) < \tau(\alpha)$, welches kein Interesse mehr bietet, da das Integral $\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^a d\beta \varrho(\beta) \cos \psi(\beta)$ für $\varrho(\alpha) \lesssim \tau(\alpha)$ und jedes Unendlich von ψ absolut convergent ist.

31. Graphische Darstellung der Bedingungen für den zweiten Hauptsatz.

Um diese verschiedenen Bedingungen vergleichen zu können, stellen wir sie wieder graphisch dar, wobei die ursprüngliche Dirichletsche, welche unendlich viele Maxima der Function überhaupt ausschliesst, dem Falle $\varrho(\alpha) = 0$ entsprechen würde, und nicht in die Figur aufgenommen werden kann; die übrigen werden für $\varrho(\alpha)^{-1}$ dargestellt. Der graphischen Darstellung legen wir folgende tabellarische Uebersicht zu Grunde:

$\psi(\alpha) =$	$l_3 \frac{1}{\alpha}$	$l_2 \frac{1}{\alpha}$	$l_1 \frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^2}$	$e^{\frac{1}{\alpha}}$	
	$\frac{1}{\tau(\alpha)}$	$\frac{1}{\tau(\alpha)}$	$\frac{1}{\tau(\alpha)}$	$\frac{1}{\tau(\alpha)}$	$\frac{1}{\tau(\alpha)}$	$\frac{1}{\tau(\alpha)}$	nach Bedingung II ($f(\alpha) - f(0) \sim \tau(\alpha)$) d. i. $\varrho(\alpha) \sim \tau(\alpha)$
In den Horizontal- reihenrechter Hand steht das schwäch- ste Unendlich oder die grösste Null von $\frac{1}{\varrho(\alpha)}$, für welche der zweite Haupt- satz noch gilt.	$\frac{1}{\tau_2(\alpha)}$	$\frac{1}{\tau_1(\alpha)}$	$\frac{1}{\tau(\alpha)}$	$\frac{1}{\alpha\tau(\alpha)}$	$\frac{1}{\alpha^2\tau(\alpha)}$	$\frac{1}{\alpha\tau(\alpha)}$	nach Bedingung III: abs. Conv. von $\int_0^a f(\alpha) d\alpha$ d. i. $\alpha\varrho(\alpha)\psi'(\alpha) \lesssim \tau(\alpha)$
	$\frac{1}{\tau_2(\alpha)}$	$\frac{1}{\tau_1(\alpha)}$	$\frac{1}{\tau(\alpha)}$	$\frac{1}{\tau(\alpha)}$	$\frac{1}{\tau(\alpha)}$	$\frac{1}{\tau(\alpha)}$	nach Bedingung IV: abs. Conv. von $\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha d\beta f(\beta)$. Für $1 < \psi(\alpha) < \frac{1}{\alpha}$: $\alpha\varrho(\alpha)\psi'(\alpha) \lesssim \tau(\alpha)$ d. i. für $\psi(\alpha) > \frac{1}{\tau(\alpha)}$: $\varrho(\alpha) \lesssim \tau(\alpha)$
	1	1	1	$\frac{1}{\alpha^2}$	α	$\alpha e^{-\frac{1}{2\alpha}}$	nach Bedingung V: für $\psi(\alpha) \lesssim \frac{1}{\alpha}$: $\varrho(\alpha) < 1$ für $\psi(\alpha) > \frac{1}{\alpha}$: $\varrho(\alpha) < \alpha\sqrt{\psi''(\alpha)}$.

Zur Bestimmung von $\tau_r(\alpha)$ hat man (Art. 20) erstens den Ausdruck:

$$\tau(\alpha) = \left(l_1 \frac{1}{\alpha} l_2 \frac{1}{\alpha} \dots l_r \frac{1}{\alpha} \right)^{-1} \tau_r(\alpha),$$

zweitens die Ungleichheit:

$$\frac{1}{l_{r+1} \frac{1}{\alpha}} > \tau_r(\alpha) > \frac{1}{\left(l_{r+1} \frac{1}{\alpha} \right)^{1+\mu}}, \mu \text{ beliebig klein.}$$

Bei der graphischen Darstellung, Tafel II, des Functionensystems

$$\left(\frac{1}{\varrho(\alpha)}, \psi(\alpha) \right)$$

als Punctsystem in einer $\left(\frac{1}{\varrho}, \psi \right)$ Coordinatenebene, werden die Puncte, für

die $\frac{1}{\varrho} > 1$ ist, oberhalb der ψ Axe, die Puncte, für die $\frac{1}{\varrho} < 1$ ist, unter-

halb der ψ Axe gedacht, so dass zwei Punkte $\left(\frac{1}{\varrho}, \psi\right)$ und $\left(\frac{1}{\varrho_1}, \psi\right)$ von der ψ Axe oben und unten gleich entfernt liegen, wenn $\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{1}{\varrho_1} \approx 1$ ist.

32. Bemerkungen über die Ergebnisse der obigen Vergleichung der Bedingungen für den zweiten Hauptsatz.

Um die eigentliche Bedeutung der in Rede stehenden Bedingungen wohl zu verstehen, fassen wir die nothwendige (V, Art. 24 oder in der graphischen Darstellung die unterste) in's Auge. Wir müssen wohl unterscheiden zwischen Bedingungen lediglich für die Darstellbarkeit einer Function und solchen allgemeinen Bedingungen, unter denen der

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = L$$

endlich und bestimmt, also convergent ist. Bedingung für die Darstellbarkeit einer Function ist eine solche, welche anzeigt, wann die Formel:

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = \frac{\pi}{2} \lim_{\alpha=0} f(\alpha)$$

stattfindet, und wir dürfen sie als erfüllbar und erfüllt ansehen, auch im Falle $\lim_{\alpha=0} f(\alpha)$ unendlich oder unbestimmt ist, wenn alsdann nur

der Limes $\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ ebenfalls unendlich oder zwischen denselben

Grenzen wie $\lim_{\alpha=0} f(\alpha)$ unbestimmt ist. Hiernach ist die in Rede stehende Bedingung V eine Bedingung im weiteren Sinne für die Convergenz und nicht eine solche für die Darstellbarkeit allein. Allerdings, falls gleichzeitig $\lim_{\alpha=0} f(\alpha)$ und L endlich und bestimmt sind, so habe

ich (Borch. Journ. Bd. 79, pag. 6) nachgewiesen, dass L nur $= \frac{\pi}{2} \lim_{\alpha=0} f(\alpha)$ sein kann. Neu war es mir aber, wie dies aus der Be-

dingung V folgt, dass $\lim_{\alpha=0} f(\alpha)$ zwischen unendlichen Grenzen unbestimmt sein kann, während der zugehörige

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = L$$

convergent ist.

Diese Unterscheidungen macht die graphische Darstellung übersichtlich. Das gesammte schraffierte Gebiet über der Linie, welche die Grenzfunktion $\frac{1}{\varphi(\alpha)}$ nach der Bedingung V darstellt, gehört den Functionssystemen

$$(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$$

zu, für welche

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = L$$

endlich und bestimmt und zwar $= 0$ ist. Dies zerfällt in die beiden durch die ψ -Axe getrennten Theile. Den Puncten des oberen Gebietstheiles gehören die Functionssysteme $(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ zu, bei denen $\varphi(\alpha) < 1$ ist, denen des unteren Gebietstheils die Systeme mit unendlich werdendem $\varphi(\alpha)$. Die Puncte des oberen Gebietstheils werden demnach bestimmt durch die Bedingung:

$$\frac{1}{\varphi(\alpha)} > 1, \quad \psi(\alpha) > 1,$$

die des unteren durch die Bedingungen:

$$1 < \varphi(\alpha) < \alpha \sqrt{\psi''(\alpha)}, \quad \psi(\alpha) > \frac{1}{\alpha}.$$

Und alle Systeme dieses letzteren Gebiets entsprechen der neuen und merkwürdigen Form der Nichtdarstellbarkeit einer Function, wo $\lim_{\alpha=0} f(\alpha)$ zwischen unendlichen Grenzen unbestimmt ist, während

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = 0$$

ist. Hier ein Beispiel. Es sei $\psi(\alpha) = \alpha^{-\mu}$, so wird aus $1 < \varrho(\alpha) < \alpha \sqrt{\psi''(\alpha)}$:

$$1 < \varrho(\alpha) < \alpha^{-\frac{\mu}{2}}.$$

Ist also $\mu > 0$, so erhält man für $\varrho(\alpha)$ stets einen Spielraum des Unendlichwerdens, für den $L = 0$ ist. Setzen wir z. B. $\mu = 4$, so folgt:

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha \left[\frac{\cos \frac{1}{\alpha^4}}{\alpha} \right] \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = 0,$$

während $\lim_{\alpha=0} f(\alpha) = \lim_{\alpha=0} \frac{\cos \frac{1}{\alpha^4}}{\alpha}$

zwischen unendlichen Grenzen schwankt.

Nach der Tabelle findet die Formel

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha [\varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)] \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = \frac{\pi}{2} \lim_{\alpha=0} [\varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)]$$

wirklich statt: erstens für $\varrho(\alpha) < 1$, $\psi(\alpha) > 1$, dann für $\varrho(\alpha) \sim 1$, $\psi(\alpha) < 1$, endlich für $\psi(\alpha) > 1$, $\varrho(\alpha) > \alpha \sqrt{\psi''(\alpha)}$.

Im oben erörterten Sinne sind die Bedingungen I bis IV Art. 24 nicht Bedingungen für die Convergenz von L , sondern für die Darstellbarkeit von $f(0)$. Von jenen Bedingungen schliesst am wenigsten darstellbare Functionen aus Bedingung IV. Von den übrigen Bedingungen ist III besser als II im Intervall $\psi(\alpha) < 1$, umgekehrt II besser als III im Intervall $\psi(\alpha) > 1$.

33. Allgemeine Bemerkungen über das Convergenzproblem der Fourierschen Reihen.

Da uns nun Bedingung V lehrt, dass, falls nur $\varrho(\alpha)$ verschwindet, alle Functionen $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)$ für $\alpha = 0$ darstellbar sind, so haben wir hier eine erhebliche Ausdehnung des Convergenzbereiches der

Fourierschen Reihen gewonnen. Die Fouriersche Reihe stellt danach eine integrirbare Function $f(x)$ für einen besonderen Werth $x = x_1$ dar, wenn die Unterschiede:

$$f(x_1 + \alpha) - f(x_1), f(x_1 - \alpha) - f(x_1)$$

in einem beliebig kleinen Intervall $0 \leq \alpha \leq \varepsilon$ auf die Form:

$$\varphi_0(\alpha) + \varphi_1(\alpha) \cos \psi_1(\alpha) + \varphi_2(\alpha) \cos \psi_2(\alpha) + \dots$$

gebracht werden können, wo $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ mit α verschwinden, und $\psi_1, \psi_2, \dots$ mit $\frac{1}{\alpha}$ unendlich werden, und beide Functionenreihen bei $\alpha = 0$ nicht unendlich viele Maxima haben. Ueber die Annahme unendlich vieler Glieder obiger Reihe ist in den „Schlussbetrachtungen I“ die Rede.

Aber so erfreulich solche Resultate sein mögen, unseren tieferen theoretischen Wissenstrieb lassen sie unbefriedigt. Sie lehren nur die ausreichenden Bedingungen für die Entwickelbarkeit nach Fourierschen Reihen in dieser oder jener Richtung hinausschieben, aber das Grundproblem, ob die Entwickelbarkeit unter Umständen schon bei den stetigen Functionen oder erst bei den integrirbaren, oder gar bei diesen auch noch nicht aufhöre, bleibt unberührt.

Und doch ist der von uns eingeschlagene Weg, besondere Functionenformen auf ihre Darstellbarkeit zu untersuchen, der einzige, auf dem man hoffen kann, jene Frage zu erledigen.

Zum Glück zeigt es sich denn auch, dass nur noch ein Schritt in der eingeschlagenen Richtung erforderlich ist, um die Grenze der Darstellbarkeit zu erreichen.

IV. Capitel.

Darstellung der Bedingungen, unter denen die Fourierschen Reihen divergiren.

34. Auseinandersetzung des Grundgedankens dieser Untersuchung.

Betrachten wir das Integral:

$$\int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha},$$

setzen $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \sin \psi(\alpha)$, $\psi(\alpha) > 1$, und nehmen h schon sehr gross an, so kann man es in drei Theile zerfallend sich denken:

$$\int_0^{\alpha_0} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \int_{\alpha_1}^a$$

die folgende Beschaffenheit haben: Im ersten ist $\frac{\psi(\alpha)}{\alpha}$ sehr gross gegen h , im dritten ist h sehr gross gegen $\frac{\psi(\alpha)}{\alpha}$, das mittlere enthält den Punct $\psi(\alpha) = \alpha h$, somit auch die grösste Strecke, in der beim Wachstum von h , periodisch wiederkehrend, keine Zeichenwechsel der Function $f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ stattfinden, oder doch abwechselnd die positiven und die negativen Werthe dieser Function weitaus überwiegen. Nehmen wir an, dass $\varrho(\alpha) > \tau(\alpha)$, oder dass

$$\int_0^a d\alpha \frac{\varrho(\alpha)}{\alpha}$$

nicht convergent ist, welches die einzige Annahme ist, unter der man Divergenz des Limes $\lim_{h=\infty}$ von

$$\int_0^a d\alpha \varrho(\alpha) \sin \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

überhaupt erwarten kann, so wird solche Divergenz auch nur von der Strecke ohne Zeichenwechsel im mittleren Integral $\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}$ herrühren können.

Unsere Untersuchung des Limes

$$\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \sin \psi(\alpha) \sin \alpha h$$

hat nun ergeben, dass für $\varrho(\alpha) < 1$

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha \varrho(\alpha) \sin \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

immer verschwindet. Greift man also aus dem mittleren Integral $\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}$ die Strecke ohne Zeichenwechsel heraus:

$$\int_{\alpha'_0}^{\alpha'_1} d\alpha \varrho(\alpha) \sin \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = [\sin \psi(\alpha) \sin \alpha h] \int_{\alpha'_0}^{\alpha'_1} d\alpha \frac{\varrho(\alpha)}{\alpha}$$

so ist offenbar $\alpha'_1 - \alpha'_0$ so klein, dass

$$\lim (\alpha'_1 - \alpha'_0) \frac{\varrho(\bar{\alpha})}{\bar{\alpha}}, \quad \alpha'_0 \leq \bar{\alpha} \leq \alpha'_1$$

verschwindet, wenn h unendlich wird. Die Strecke ohne Zeichenwechsel, d. i. die Strecke, in der $\psi(\alpha)$ und αh nahebei gleich sind, ist also offenbar zu klein, um Divergenz erzeugen zu können, und da die Curven $y = \psi(x)$, $y = xh$ die eine wachsend, die andere abnehmend sich kreuzen, so kann sie nicht anders als sehr klein sein. Um diese Strecke zu vergrössern, wird man an Stelle der gegen $\alpha = 0$ hin nur

wachsenden Function $\psi(\alpha)$ eine Function $\Psi(\alpha)$ einzuführen haben, die bei gegen Null abnehmendem α unendlich wird, aber in der Weise, dass sie, nachdem sie gewachsen ist, stets wieder eine Strecke abnimmt, um dann wieder zu wachsen, jedoch um ein grösseres Stück, als das, um welches sie eben abgenommen hatte; kurzum eine Function, die mit unendlich vielen Maximis unendlich wird. Wenn der Punct, für den $\Psi(\alpha) = h\alpha$ ist, einer Strecke angehört, in der $\Psi(\alpha)$ mit α abnimmt, so wird es möglich sein, dass längs dieser Strecke die Differenz $\Psi(\alpha) - h\alpha$ durchweg sehr klein bleibt, und der Projection dieser Strecke auf die α -Axe wird ein möglichst grosses Stück $\alpha'_0 \dots \alpha'_1$ ohne Zeichenwechsel von $\sin \Psi(\alpha)$ $\sin h\alpha$ entsprechen (Taf. III, die Fig. rechts).

Es liegt also nahe, nachdem man den Limes $_{h=\infty}$ von

$$J = \int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\alpha}$$

für eine Function $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \sin \psi(\alpha)$ untersucht hat, in der $\psi(\alpha)$ nur wachsend unendlich wird, zu setzen:

$$f(\alpha) = \varrho(\alpha) \sin(u + v \sin \psi(\alpha))$$

und obigen Limes für diese Function zu discutiren, in der man u, v und ψ für $\alpha = 0$ unendlich werdend abnimmt. Wer jedoch die vorstehende

Untersuchung des $\lim_{h \rightarrow \infty} \int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\alpha}$ für $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)$ gelesen hat,

wird mir gern glauben, dass die entsprechende Untersuchung für $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \sin(u + v \sin \psi(\alpha))$, so hoch unstreitig ihr Interesse sein würde, dennoch zu einem unmöglichen Umfang anwachsen müsste.

Ich habe daher vorgezogen, das Problem in einer Weise zu schematisiren, die uns bezüglich etwaiger Divergenz der Fourierschen Darstellungsformeln verhältnissmässig leicht ebenso viel lehrt, als wir aus der Untersuchung von $\lim J$ für $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \sin(u + v \sin \psi(\alpha))$ erfahren könnten, wenngleich ich gern zugeben will, dass die Ergebnisse dieser letzteren Untersuchung insofern allgemeiner als die der unten angestellten werden müssten, als sie, abgesehen von der Erledigung der Divergenzfrage, die nothwendigen Bedingungen für die Darstellbarkeit

einer Function durch Fouriersche Reihen noch erheblich weiter hinaus, als durch unsere bisherigen Untersuchungen geschehen, und gerade mitten in ein höchst interessantes Functionengebiet hineinrücken würden.

35. Beschreibung der einzuführenden schematisirten Function.

Unsere Schematisirung des Divergenzproblems besteht in folgender Definition der in $f(\alpha) = \varphi(\alpha) \sin \Psi(\alpha)$ auftretenden Function $\Psi(\alpha)$. Ein Intervall $0 \leq x \leq x_0$, wo wir $x_0 \geq a$ annehmen wollen, zerlegen wir in die Theile

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= x_0 - x_1 \\ \Delta_2 &= x_1 - x_2 \\ &\dots \dots \dots \\ \Delta_{p+1} &= x_p - x_{p+1} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

mit der Bestimmung, dass:

$$\begin{aligned} x_0 &> x_1 > x_2 \dots, \\ \Delta_1 &> \Delta_2 > \dots, \end{aligned}$$

und dass $x_\infty = 0$, also $\Delta_\infty = 0$, mithin

$$x_0 = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots \text{ in infin.}$$

sei.

Nun sei die Function $\Psi(\alpha)$

gleich $h_1\alpha$ im Intervall $x_1 \dots a$

„ $h_2\alpha$ „ „ $x_2 \dots x_1$

„ $\dots \dots \dots$

wo $h_1 < h_2 < \dots$ und $h_\infty = \infty$. Bestimmt man endlich die Intervalle $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ und die Grössen $h_1, h_2, \dots$ so, dass die Producte $h_p x_p, h_p x_{p-1}$ mit p unendlich werden, so ist $\Psi(\alpha)$ eine mit unendlich vielen Maximis — die hier in Spitzen ausarten — unendlich werdende Function, wie sie in der Fig. links Taf. III dargestellt ist. $\Psi(\alpha)$ springt für $\alpha = x_1, x_2, \dots$ und zwar resp. um $(h_2 - h_1)x_1, (h_3 - h_2)x_2, \dots$. Um von dem Gang der Function $\varphi(\alpha) \sin \Psi(\alpha)$ oder einfacher vom Gang von $\sin \Psi(\alpha)$ eine Vorstellung zu gewinnen, nennen wir Dichtigkeit der Maxima einer Function $f(x)$ an der Stelle $x = x'$ die Längeneinheit dividirt durch die Summe der Entfernungen des x' von den beiden nächsten Maximis von $f(x)$, bei welcher Definition die Dichtigkeit der Maxima eine stetige Function von x' ist. Hiernach ist die Dichtigkeit der Maxima von

$\sin \alpha h$ bei der Veränderung von α constant. Die Dichtigkeit der Maxima von $\sin \Psi(\alpha)$ ist in jedem Intervall $\mathcal{A}$ oder $(x_{p+1} < \alpha < x_p)$ constant.

Nun springt $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \sin \Psi(\alpha)$ im Allgemeinen ebenfalls, wenn α einen Werth x_p passirt. Ich werde unten zeigen, dass es möglich ist, nicht allein $f(\alpha)$ sammt einer beliebigen endlichen Anzahl Differentialquotienten stetig zu erhalten, sondern in Gebiet $0 < \alpha \leq a$ sammt allen ihren Differentialquotienten. Ich will indessen gleich anführen, worauf mich Herr Weierstrass aufmerksam gemacht hat, dass, wenn man nur wünscht, $f(\alpha)$ selbst stetig zu erhalten, dies am einfachsten erreicht wird, indem man die an den Sprungstellen aneinanderstossenden Werthe $h_{p+1}x_p$ und h_px_p von $\Psi(\alpha)$ als Vielfache von π bestimmt. Z. B. nach der sofort einzuführenden Festsetzung über die $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots$ und $h_1, h_2, \dots$ ist

$$x_p h_{p+1} = x_{p+1}^{-1}, \quad x_p h_p = x_{p-1}^{-1}, \quad x_p = \frac{x_0}{\prod_{p=1}^{p-1} (2q+1)}.$$

Hier braucht man also nur $x_0 \pi = 1$ anzunehmen.

Um das erstrebte Resultat, nämlich die Divergenz des

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^a d\alpha \varrho(\alpha) \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

besonders augenfällig zu machen, verfügen wir über die Grössen $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, h_1, h_2, \dots$ in folgender Weise.

Wir setzen:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{A}_1 = x_0 - x_1 & = x_1 & h_1 = \frac{1}{x_0 x_1} \\ \mathcal{A}_2 = x_1 - x_2 & = 2x_2 & h_2 = \frac{1}{x_1 x_2} \\ \mathcal{A}_3 = x_2 - x_3 & = 4x_3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathcal{A}_{p+1} = x_p - x_{p+1} & = 2^p x_{p+1} & h_{p+1} = \frac{1}{x_p x_{p+1}}. \end{array}$$

Aus dem System links folgt:

$$x_p = \frac{x_0}{\prod_{p=1}^{p-1} (2q+1)}.$$

36. Es wird zuerst die Divergenz des $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^a d\alpha \sin \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ nachgewiesen.

Wir betrachten zuerst das Integral

$$\int_0^a d\alpha \sin \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha},$$

zerlegen es in die Theile:

$$\int_0^{x_p} + \int_{x_p}^{x_{p-1}} + \int_{x_{p-1}}^a,$$

und setzen $h = h_p$. Das dritte Integral kann geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \int_{x_{p-1}}^a d\alpha \sin \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h_p}{\alpha} &= \sum_{q=1}^{p-1} \int_{x_q}^{x_{q-1}} d\alpha \sin \alpha h_q \sin \alpha h_p \\ &= \sum_{q=1}^{p-1} \left\{ \frac{1}{x_q} \left[\frac{\sin \alpha (h_p - h_q)}{h_p - h_q} - \frac{\sin \alpha (h_p + h_q)}{h_p + h_q} \right] + \frac{1}{x_{q-1}} \left[\frac{\sin \alpha (h_p - h_q)}{h_p - h_q} - \frac{\sin \alpha (h_p + h_q)}{h_p + h_q} \right] \right\} \end{aligned}$$

falls a der Kürze halber gleich x_0 angenommen wird, und unter Anwendung des zweiten Mittelwerthsatzes. Es ist ferner:

$$\frac{1}{h_p \pm h_q} = \frac{1}{h_p} \cdot \frac{1}{1 \pm \frac{h_q}{h_p}}$$

und der grösste Werth von $\frac{h_q}{h_p}$ ist $\frac{h_{p-1}}{h_p} = \frac{x_p}{x_{p-2}} = \frac{1}{(2^{p-1} + 1)(2^{p-2} + 1)}$.

Die Coefficienten der Sinus unter dem Summenzeichen haben die Form

$$\frac{1}{x_q h_p} \cdot \frac{1}{1 \pm \frac{h_q}{h_p}}, \quad \frac{1}{x_{q-1} h_p} \cdot \frac{1}{1 \pm \frac{h_q}{h_p}}.$$

Da die Summe über $p-1$ Summanden sich erstreckt, $x_q < x_{q-1}$, $\frac{h_q}{h_p} < 1$ ist, so wird jedenfalls die ganze Summe verschwinden, wenn

$\frac{p}{x_q h_p}$, $q = p - 1$ gesetzt, für $p = \infty$ verschwindet. Wegen $h_p = \frac{1}{x_p x_{p-1}}$ ist aber

$$\frac{p}{x_{p-1} h_p} = p x_p = \frac{a p}{\prod_{o}^{p-1} (2^q + 1)}$$

und verschwindet allerdings für $p = \infty$. Untersuchen wir zweitens das erste Integral:

$$\begin{aligned} \int_0^{x_p} d\alpha \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h_p}{\alpha} &= \sum_{q=p}^{q=\infty} \int_{x_{q+1}}^{x_q} \frac{d\alpha}{\alpha} \sin \alpha h_{q+1} \sin \alpha h_p \\ &= \sum_{q=p}^{q=\infty} \left\{ \frac{1}{x_{q+1}} \int_{x_{q+1}}^{\xi} \frac{\sin \alpha (h_{q+1} - h_p)}{h_{q+1} - h_p} - \frac{\sin \alpha (h_{q+1} + h_p)}{h_{q+1} + h_p} + \frac{1}{x_q} \int_{\xi}^{x_q} \frac{\sin \alpha (h_{q+1} - h_p)}{h_{q+1} - h_p} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin \alpha (h_{q+1} + h_p)}{h_{q+1} + h_p} \right\}, \end{aligned}$$

so kommt es wieder auf die Abschätzung der Grösse:

$$\frac{1}{x_{q+1} h_{q+1}} \cdot \frac{1}{1 \pm \frac{h_p}{h_{q+1}}}$$

an, wenn $p, p+1, \dots$ statt q gesetzt wird. Der grösste Werth von

$$\frac{h_p}{h_{q+1}} \text{ ist wieder } \frac{h_p}{h_{p+1}} = \frac{x_{p+1}}{x_{p-1}} = \frac{1}{(2^p + 1)(2^{p-1} + 1)}. \text{ Ferner ist}$$

$$\frac{1}{x_{q+1} h_{q+1}} = x_q = \frac{a}{\prod_{o}^{q-1} (2^r + 1)}.$$

Eine Reihe der Form:

$$x_p u_0 + x_{p+1} u_1 + x_{p+2} u_2 + \dots$$

werden wir schreiben können:

$$\frac{a}{\prod_{o}^{p-1} (2^q + 1)} \left\{ u_0 + \frac{u_1}{2^p + 1} + \frac{u_2}{(2^p + 1)(2^{p+1} + 1)} + \dots \right\},$$

und, falls die u endlich bleiben, verschwindet die Reihe, wenn p unendlich wird, somit auch die obige Summe, in die wir das Integral

$$\int_0^{x_p} d\alpha \sin \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h_p}{\alpha}$$

transformirt hatten.

Betrachten wir endlich das mittlere Integral:

$$\int_{x_p}^{x_{p-1}} d\alpha \sin \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h_p}{\alpha} = \int_{x_p}^{x_{p-1}} d\alpha \frac{(\sin \alpha h_p)^2}{\alpha} = \frac{1}{2} \int_{x_p}^{x_{p-1}} \log \alpha - \frac{1}{2} \int_{x_p}^{x_{p-1}} \frac{\cos 2h_p \alpha}{\alpha} d\alpha.$$

Es ist

$$\int_{x_p}^{x_{p-1}} d\alpha \frac{\cos 2h_p \alpha}{\alpha} = \frac{1}{x_p h_p} \int_{x_p h_p}^{\xi} d\alpha \cos 2\alpha + \frac{1}{x_{p-1} h_p} \int_{\xi}^{x_{p-1} h_p} d\alpha \cos 2\alpha$$

Wegen $\frac{1}{x_p h_p} = x_{p-1}$, $\frac{1}{x_{p-1} h_p} = x_p$ verschwindet für $p = \infty$ das Integral links. Der letzte Bestandtheil des ursprünglichen Integrals $\int_0^a d\alpha \sin \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$, der noch zu betrachten ist:

$$\frac{1}{2} \int_{x_p}^{x_{p-1}} \log \alpha = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{x_{p-1} - x_p}{x_p} \right) = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{2^{p-1} x_p}{x_p} \right) = \frac{1}{2} \log (1 + 2^{p-1})$$

wird mit p unendlich.

37. Alsdann wird eine hinreichend langsam Null werdende Function

eingeführt, damit auch $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a d\alpha \varphi(\alpha) \sin \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ divergirt.

Wir haben also im vorigen Art. gesehen, dass das Integral:

$$\int_0^a d\alpha \sin \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = \int_0^{x_p} + \int_{x_p}^{x_{p-1}} + \int_{x_{p-1}}^a,$$

wenn h ins Unbegrenzte wächst, ebenfalls ohne Ende wiederkehrend Werthe annimmt, die ins Unbegrenzte wachsen. Der erste und der dritte Theil rechts nähern sich der Null und auch ein Theil des mittleren Integrals, während der andere Theil des mittleren Integrals gleich $\frac{1}{2} \log(1 + 2^{p-1})$ wird, so oft h bei seinem Wachsen einen der Werthe h_p passirt. Führen wir jetzt wieder $\varphi(\alpha)$ unter dem Integral ein, betrachten also:

$$\int_0^a d\alpha \varphi(\alpha) \sin \mathcal{P}(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = \int_0^{x_p} + \int_{x_p}^{x_{p-1}} + \int_{x_{p-1}}^a$$

so ist es klar, dass, falls $\varphi(\alpha) < 1$, das erste und dritte Integral und der Theil:

$$- \frac{1}{2} \int_{x_p}^{x_{p-1}} d\alpha \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha} \cos 2h_p \alpha$$

des mittleren Integrals wieder und zwar a fortiori verschwinden, wenn p unendlich wird, weil bei Anwendung des zweiten Mittelwerthsatzes wir jetzt $\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$, statt wie oben $\frac{1}{\alpha}$ vor die Integrale nehmen dürfen. Der Theil des mittleren Integrals, welcher unendlich werden soll, lautet:

$$\frac{1}{2} \int_{x_p}^{x_{p-1}} d\alpha \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha} = \frac{1}{2} \varphi(\xi) \log(1 + 2^{p-1}), \quad x_p \leq \xi \leq x_{p-1}.$$

Dieser Ausdruck ist grösser als $\varphi(x_p) \log(1 + 2^{p-1})$.

Wir haben also $\varphi(x)$ so anzunehmen, dass

$$\varphi \left[\frac{a}{\prod_{o}^{p-1} (2^q + 1)} \right] \log(1 + 2^{p-1}) > 1,$$

wenn eben $\int_{x_p}^{x_{p-1}} d\alpha \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$ mit p unendlich werden soll.

Setzen wir:

$$\frac{a}{\prod_{o}^{p-1} (2^q + 1)} = \frac{a}{\prod_{o}^{p-1} 2^q \prod (1 + 2^{-q})} = \alpha$$

so folgt:

$$\frac{1}{\prod_{o}^{p-1} 2^q} = 2^{-p(p-1)} \sim \alpha$$

oder

$$p \sim \sqrt{\log \frac{1}{\alpha}}$$

Da nun $\log(1 + 2^{p-1}) \sim p$, so ist ϱ so zu bestimmen, dass

$$1 > \varrho(\alpha) > \frac{1}{\sqrt{\log \frac{1}{\alpha}}}.$$

Falls $\varrho(\alpha)$ dieser Bedingung genügt, ist

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha \varrho(\alpha) \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

divergent.

38. Untersuchung der Frage, wie stark das Integral $\int_0^a d\alpha \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ bei seiner Divergenz mit h unendlich wird.

Es ist noch von Interesse, das Unendlich des vorstehenden Limes zu bestimmen, mit andern Worten die am langsamsten Null werdende Function $\varphi(h)$ zu ermitteln, mit der multiplicirt, vorstehendes Integral endlich bleibt, wenn h unendlich wird, wobei wir der Einfachheit halber $\varrho(\alpha) = 1$ annehmen wollen. Es bleibt ohne Zweifel endlich das Product:

$$\frac{1}{\log(1 + 2^{p-1})} \int_0^a d\alpha \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha},$$

wenn p und h verbunden sind durch die Relation:

$$h = \frac{1}{x_p x_{p-1}} = \frac{1}{a^2} \prod_0^{p-1} (2^q + 1) \prod_0^{p-2} (2^q + 1) \sim 2^{p(p-1) + (p-1)(p-2)}$$

woraus folgt:

$$p \sim \sqrt{\log h},$$

so dass das Product:

$$\frac{1}{\sqrt{\log h}} \int_0^a d\alpha \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

endlich bleibt, wenn h unendlich wird.

39. Verallgemeinerung des Functionen-Schema $\Psi(x)$.

Wir wollen noch die schematisirte Function $\Psi(x)$ nach allgemeineren Principien zusammensetzen, indem wir uns die Frage vorlegen, wie die $x_1, x_2, \dots$ und $h_1, h_2, \dots$ überhaupt zu bestimmen sind, damit das Integral

$$\int_0^a d\alpha \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

zwischen unendlichen Grenzen schwanke, wenn h unendlich wird.

Setzen wir zunächst:

$$A_1 = x_0 - x_1 = u_0 x_1$$

$$A_2 = x_1 - x_2 = u_1 x_2$$

$$A_{p+1} = x_p - x_{p+1} = u_p x_{p+1}$$

so folgt aus diesem System:

$$x_p = \frac{x_0}{(1 + u_0)(1 + u_1) \dots (1 + u_{p-1})}.$$

Falls also $\prod_0^\infty (1 + u_p) = \infty$ ist, hat man:

$$x_0 = A_1 + A_2 + \dots \text{ in infin.}$$

Beiläufig bemerkt, erhält man durch Addition des obigen Systems:

$$x_0 - x_{p+1} = u_0 x_1 + u_1 x_2 + \dots + u_p x_{p+1}$$

$$= x_0 \left\{ \frac{u_0}{1+u_0} + \frac{u_1}{(1+u_0)(1+u_1)} + \dots + \frac{u_p}{(1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_p)} \right\}$$

woraus für $p = \infty$ folgt:

$$1 = \frac{u_0}{1+u_0} + \frac{u_1}{(1+u_0)(1+u_1)} + \dots + \frac{u_p}{(1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_p)}$$

ein (lediglich an die Bedingung $\prod_{n=0}^{\infty} (1+u_n) = \infty$ gebundener) Satz, den ich mich nicht erinnere, erwähnt gefunden zu haben, und der gelegentlich nützlich sein kann. Für $1+u_0 = 1+u_1 = \dots = x$ folgt daraus die gemeine geometrische Reihe.

Für unsere Zwecke muss der $\log \left(1 + \frac{x_{p-1} - x_p}{x_p} \right)$ oder die Grösse $\frac{x_{p-1} - x_p}{x_p}$, d. i. die Grösse u_p mit p unendlich werden. Man hat also zuerst:

$$u_p > 1.$$

Weiter muss sein $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{h_{p-1}}{h_p} < 1$. Drittens muss sein

$$\frac{p}{x_p h_p} < 1.$$

Endlich muss die Reihe

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{x_p h_p}$$

für $p = \infty$ verschwinden, d. i. die Reihe

$$\frac{1}{x_1 h_1} + \frac{1}{x_2 h_2} + \dots$$

convergent sein. Unter diesen vier Bedingungen wird der $\lim_{h \rightarrow \infty}$

$$\int_0^a d\alpha \varphi(\alpha) \sin \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}, \text{ wenn } \varphi(\alpha) \text{ hinreichend langsam Null wird,}$$

divergiren. Nach dem Olivier-Abelschen Satz muss $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p}{x_p h_p}$

Null sein, wenn die Reihe mit dem Gliede $\frac{1}{x_p h_p}$ convergiren soll. Setzt man also

$$h_p = \frac{1}{v_p x_p}$$

und wie oben

$$x_{p-1} - x_p = u_{p-1} x_p$$

so reduciren sich die Bedingungen für die u und v auf diese:

1. $\lim u_p = \infty$.
2. v_p ist das Glied einer absolut convergenten Reihe.

Denn die Bedingung $\lim \frac{h_{p-1}}{h_p} < 1$, welche lautet:

$$\lim \frac{v_p}{v_{p-1}} \frac{1}{1 + u_{p-1}} < 1$$

ist schon durch 1. erfüllt.

40. Ueber die allgemeinere Frage: Wie rasch kann überhaupt das Integral

$$\int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} \text{ mit } h \text{ unendlich werden.}$$

Um nun schliesslich die hieraus entspringende Frage zu erledigen, wie rasch überhaupt das Integral

$$\int_0^a d\alpha \sin \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

mit h unendlich werden kann, so hat man zu benützen, dass

$$\frac{\int_0^a d\alpha \sin \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}}{1(1 + u_{p-1})}$$

endlich bleibt. Wir haben:

$$h_p = \frac{1}{v_p x_p} = \frac{1}{x_0 v_p} (1 + u_0)(1 + u_1) \dots (1 + u_{p-1}),$$

und dürfen $x_0 = 1$ annehmen. Die Aufgabe ist aus der Beziehung

$$\frac{\prod_{q=1}^{p-1} (1 + u_q)}{v_p} = h$$

das grösstmögliche Unendlich von $l(1 + u_{p-1}) = \lambda(h)$ darzustellen, welches entsteht, wenn den u_q und v_p alle ihnen durch die oben gefundenen Bedingungen (dass u_p mit p zugleich beliebig rasch unendlich werde, und dass v_p das Glied einer unbedingt convergenten Reihe sei) gestatteten Formen ertheilt werden.

Nimmt man die Logarithmen an beiden Seiten und bringt die Gleichung in diese Form:

$$l(1 + u_{p-1}) = lh - \left\{ \sum_{q=1}^{p-2} l(1 + u_q) + l \frac{1}{v_p} \right\}$$

so sieht man zunächst, dass $l(1 + u_{p-1})$ jedenfalls nicht $> lh$ sein kann. Sehen wir zu, ob es ∞lh gedacht werden darf.

Man schreibe der Kürze halber:

$$l(1 + u_{q-1}) = w_q, \quad v_p = \gamma_p \frac{\tau(p)}{p}, \quad \text{wo } \gamma_p < 1,$$

und bringe obige Gleichung in die Form:

$$w_p \left\{ 1 + \frac{\sum_{q=1}^{p-1} w_q}{w_q} + \frac{1}{w_p} l \frac{p}{\tau(p) \gamma_p} \right\} = lh.$$

Um das Resultat $w_p \infty lh$ zu erhalten, ist es am günstigsten, das Unendlich der Glieder in der Klammer links zu verkleinern. Wir nehmen das Unendlich von γ_p^{-1} so klein an, dass $l \frac{p}{\tau(p) \gamma_p} \infty lp$. Wird jetzt noch angenommen $w_p \infty e^{Mp}$, so ist der Limes des zweiten Gliedes in der Klammer (dem im Falle $w_p = e^{Mp}$ die Form $\frac{e^{Mp} - e^M}{e^M - 1}$ ertheilt werden kann) ein endlicher. Der des dritten Gliedes ist es natürlich auch, es ist also für $w_p \infty e^{Mp}$ auch $w_p \infty lh$.

Daher ist wirklich das grösstmögliche Unendlich jenes Integrals:

$$\int_0^a d\alpha \sin \varphi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

vorstellt.

Somit wird das Integral

$$J = \int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha},$$

falls $f(\alpha) = \varphi(\alpha) \sin \varphi(\alpha)$ gesetzt wird, und $\varphi(\alpha) < 1$, durch h dividirt, stets den Limes Null haben, wird aber durch $\lambda(h) < h$ dividirt, einen unbestimmten Limes haben können.

Dies Resultat wird auf eine beliebige integrirbare Function $f(\alpha)$ auszudehnen sein, weil keine Function möglich ist, die ein rascheres (periodisch wiederkehrendes) Wachsen des Integrals ergeben könnte, als die in diesem Artikel abgeleitete $\sin \varphi(\alpha)$.

Jetzt lässt sich auch feststellen, bei einer wie kleinen Null von $\varphi(x)$ in $f(x) = \varphi(x) \sin \varphi(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x)$ von Null und unendlich verschieden angenommen, zuerst divergente Fouriersche Reihen auftreten. Aehnlich wie Art. 37 hat man für $\varphi(x)$ die Bedingung zu erfüllen: $\varphi(x_p) l(1 + 2^{p-1}) > 1$, wo $x_p \cdot \prod_{q=0}^{p-1} (1 + u_{p-q}) = x_0$ ist. Setzen

wir ferner $\varphi(x) = r(lx)$, so haben wir: $r\left(\sum_{q=0}^{p-1} w_q\right) l(1 + 2^{p-1}) > 1$, oder, wenn das Integral mit $\sin \varphi(\alpha)$ wie h unendlich werden soll, muss sein: $r(w_p) l(1 + 2^{p-1}) > 1$. Nun ist festzustellen, für welche am langsamsten

unendlich werdenden Functionen w_p man $w_p \sim \sum_{q=0}^p w_q$ hat. Führt man statt der Reihe ein Integral ein, so findet man leicht $w_p = e^{\mu p}$, woraus

$\varphi(e^{\mu p}) \cdot p > 1$, und endlich: $\varphi(\alpha) > \frac{1}{l \frac{1}{\alpha}}$ sich ergibt.

Während also in den Art. 37, 38 für das endlich bleibende Verhältniss $\frac{1}{\sqrt{lh}} \int_0^a d\alpha \sin \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ gefunden wurde $\varphi(\alpha) > \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\alpha}}}$, so hier

für den endlichen Limes $\frac{1}{lh} \int_0^a d\alpha \sin \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ die Bedingung $\varphi(\alpha) > \frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}}$.

Und für irgend eine Function $f(x) = \varphi(x) \varphi(x)$ (wo $\varphi(x) \sim 1$), wird man Divergenz des Integrals J erst für $\varphi(x) \frac{1}{x} > 1$ erwarten können.

41. Stetigmachung der schematisirten Function ψ . Sie wird zunächst mit beliebig vielen Differentialquotienten stetig gemacht.

Nun sei $\psi_1(\alpha)$ eine Function, die sonst überall gleich $\psi(\alpha)$ ist, und die nur in den Intervallen $(x_p - \varepsilon_p \dots x_p + \varepsilon'_p)$ anders bestimmt werden soll. So hat man:

$$\int_0^a d\alpha \varphi(\alpha) \sin \psi_1(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = \int_0^a d\alpha \varphi(\alpha) \sin \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} + \sum_{p=1}^{p=\infty} \int_{x_p - \varepsilon_p}^{x_p + \varepsilon'_p} d\alpha \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha} \sin \alpha h \left\{ \sin \psi_1(\alpha) - \sin \psi(\alpha) \right\},$$

wenn man der Bequemlichkeit halber annimmt $x_1 + \varepsilon'_1 < a < x_\infty - \varepsilon_\infty$.

Die Summe rechts können wir schreiben:

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{W_p(\varepsilon_p + \varepsilon'_p)}{x_p - \varepsilon_p} = \sum_{p=1}^{p=\infty} (\varepsilon_p + \varepsilon'_p) \frac{\varphi(\bar{\alpha})}{\bar{\alpha}} \sin \bar{\alpha} h \left\{ \sin \psi_1(\bar{\alpha}) - \sin \psi(\bar{\alpha}) \right\}, \quad x_p - \varepsilon_p \leq \bar{\alpha} \leq x_p + \varepsilon'_p$$

wo W_p endlich bleibt auch für $p = \infty$. Nun kann man aber ε_p und ε'_p stets so wählen, dass die vorstehende Summe endlich bleibt. Natürlich muss $\varepsilon_p < x_p$ angenommen werden, und setzen wir noch $\varepsilon_p = \varepsilon'_p$, so braucht nur $\sum \frac{\varepsilon_p}{x_p}$ endlich zu sein, was vollauf erreicht wird, wenn man z. B. $\varepsilon_p = x_p^2$ setzt. Dann also geht aus der Gleichheit Eingangs dieses Art. hervor, dass die Integrale

$$\int_0^a d\alpha \varrho(\alpha) \sin \Psi_1(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}, \quad \int_0^a d\alpha \varrho(\alpha) \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

beide mit h unendlich werden, während die Function $\Psi_1(\alpha)$ in den Intervallen $(x_p - \varepsilon_p \dots x_p + \varepsilon_p)$ noch ganz beliebig ist. In diese Intervalle fallen die Sprünge der Function $\Psi(\alpha)$ und wir können nun ohne Weiteres die Function $\Psi_1(\alpha)$ so annehmen, dass nicht allein sie sondern auch beliebig viele ihre Differentialquotienten im ganzen Intervall $x_p - \varepsilon_p \leq \alpha \leq x_p + \varepsilon_p$ stetig sind, wie dies aus der Interpolationstheorie bekannt ist. Es sei z. B. die Stetigkeit von $\Psi_1(\alpha)$ und von m Differentialquotienten dieser Function im Intervall $x_p - \varepsilon_p \leq \alpha \leq x_p + \varepsilon_p$ verlangt, so setzen wir in diesem Intervall:

$$\Psi_1(\alpha) = S_p(\alpha) = a_0^{(p)} + \alpha a_1^{(p)} + \alpha^2 a_2^{(p)} + \dots + \alpha^n a_n^{(p)}$$

Für $\alpha > x_p + \varepsilon_p$ ist zunächst $\Psi_1(\alpha) = h_p \alpha$, für $\alpha < x_p - \varepsilon_p$ ist zunächst $\Psi_1(\alpha) = h_{p+1} \alpha$. Man hat also die Coefficienten $a_q^{(p)}$ in $S_p(\alpha)$ so zu bestimmen, dass die Gleichungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} S_p(x_p - \varepsilon_p) &= h_{p+1}(x_p - \varepsilon_p) \\ S_p(x_p + \varepsilon_p) &= h_p(x_p + \varepsilon_p) \\ S'_p(x_p - \varepsilon_p) &= h_{p+1} \\ S'_p(x_p + \varepsilon_p) &= h_p \\ S_p^{(r)}(x_p \pm \varepsilon_p) &= 0; \quad r = 2, 3, \dots, m. \end{aligned}$$

Da dies $2m + 2$ Gleichungen sind, so darf n nicht kleiner als $2m + 1$ sein. (Siehe die Figur links, Taf. III.)

42. Stetigmachung der Function Ψ . Sie wird durch eine mit allen ihren Differentialquotienten stetige ersetzt. Vorbereitung.

Schliesslich wollen wir noch zeigen, wie man eine Function $\Psi_2(\alpha)$ an die Stelle von $\Psi(\alpha)$ setzen kann, die im Intervall $0 < \alpha \leq a$ mit allen ihren Differentialquotienten stetig ist.

Während wir im vorigen Art. die bei Annäherung an $\alpha = 0$ unbegrenzt oft springende Function $\Psi(\alpha)$ durch eine stetige Function $\Psi_1(\alpha)$ in der Weise ersetzt haben, dass wir in die Function $\Psi(\alpha)$ in der Umgebung der Sprungstellen stetig sich ändernde Strecken einfügten, so wollen

wir jetzt anders verfahren. Man kann die unstetige Function nach der von Fourier herrührenden Methode durch darstellende Formeln ausdrücken, wobei die unstetige Function als Grenze einer stetigen sich darbietet, in deren analytischem Ausdruck ein Parameter einen Grenzwert erhält. Setzt man z. B.

$$f(x, k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^b d\alpha \varphi(\alpha) k e^{-k^2(\alpha-x)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{k(a-x)}^{k(b-x)} d\alpha \varphi\left(x + \frac{\alpha}{k}\right) e^{-\alpha^2},$$

so erhält $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x, k)$ für $a < x < b$ den Werth $\varphi(x)$, und, wenn x ausserhalb dieses Intervalls liegt, den Werth Null.

Betrachten wir ferner dies Integral:

$$\psi_p(x, k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x_p}^{x_{p-1}} d\alpha \alpha h_p \cdot k z_p e^{-k^2 z_p^2 (\alpha-x)^2},$$

welches in das erstere durch Vertauschung von $\alpha h_p, k z_p, x_{p-1}, x_p$ mit $\varphi(\alpha), k, a, b$ übergeht, so wird es im Intervall $x_p < \alpha < x_{p-1}$ gleich $x h_p$, ausserhalb Null werden, wenn k (und damit zugleich $k x_p$) unendlich wird. Bildet man dann weiter die Summe:

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \psi_p(x, k)$$

so kann man darin erstens, wie ich sofort zeigen werde, die z_p stets so bestimmen, dass die Reihe convergirt und unbegrenzt oft nach x differenzirbar ist. Eine Reihe mit dem Gliede $U_p = u_p e^{-v_p}$ convergirt u. A. wenn:

$$\lim [v_{p+1} - v_p - (lu_{p+1} - lu_p)] > 0$$

ist. (Um dies zu beweisen, bilde man $\frac{U_{p+1}}{U_p}$ mit $U_p = e^{-(v_p - \log u_p)}$.)

Nun geben wir, indem wir die Bestimmungen des Art. 35 hinsichtlich der Grössen x_p, h_p festhalten, $\psi_p(x, k)$ die Form:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 2^{p-1} x_p \bar{\alpha} h_p \cdot k z_p e^{-k^2 z_p^2 (\bar{\alpha}-x)^2}, \quad x_p \leq \bar{\alpha} \leq x_{p-1}.$$

Es ist $x_p x_{p-1} h_p = 1$, und da $\bar{\alpha} \leq x_{p-1}$ ist, so ist vorstehender Ausdruck höchstens:

$$\sim 2^p z_p e^{-k^2 z_p^2 (\bar{\alpha} - x)^2}$$

Die Grösse $(\bar{\alpha} - x)^2$ nähert sich mit unendlich werdendem p wachsend der Grenze x^2 , also reducirt sich die Behufs der Convergenz der Reihe $\sum \psi_p(x, k)$ zu erfüllende Bedingung:

$$\lim \left\{ k^2 z_{p+1}^2 (\bar{\alpha} - x)_{p+1}^2 - k^2 z_p^2 (\bar{\alpha} - x)_p^2 - \left(\log 2 + \log \frac{z_{p+1}}{z_p} \right) \right\} > 0$$

auf:

$$k^2 x^2 \lim (z_{p+1}^2 - z_p^2) + k^2 \lim z_{p+1}^2 \left[(\bar{\alpha} - x)_{p+1}^2 - (\bar{\alpha} - x)_p^2 \right] \lim \left(\log 2 + \log \frac{z_{p+1}}{z_p} \right) > 0$$

welche z. B. für $z_p = p$ erfüllt ist. Dies würde sie auch sein, wenn wir irgend einen n ten Differentialquotienten von $\psi_p(x, k)$ genommen hätten statt dieser Grösse selbst. In der letzten Klammer hätte der $\log \frac{z_{p+1}}{z_p}$ den Factor $2n + 1$ erhalten. So dass allerdings $\sum \psi_p(x, k)$ beliebig oft differenzirbar ist.

Im Ganzen hat also $\sum_{p=q}^{p=\infty} \psi_p(x, k)$ die Eigenschaften: erstens zu convergiren, zweitens sammt unbegrenzt vielen Differentialquotienten eine stetige Function von x zu sein, drittens für $k = \infty$, falls x zwischen x_r und x_{r-1} liegt, wo $r - 1 \geq q$, den Grenzwert x_h anzunehmen.

43. Stetigmachung etc. Einführung der mit ihren sämtlichen Differentialquotienten stetigen Function.

Dies festgestellt, wollen wir die Function $\Psi_2(x)$ auf folgende Weise bestimmen. Sie unterscheidet sich von der eben discutirten Summe nur dadurch, dass auch k in jedem Gliede verschieden ist. Indem jedoch $k_1 < k_2 < \dots$ angenommen wird, hat die Summe

$$\Psi_2(x) = \sum \psi_p(x, k_p)$$

die eben hervorgehobenen drei Eigenschaften ebenfalls. Die k_p bestimmen wir so. Wir unterscheiden die Intervalle

$$\dots (x_3 + \varepsilon_3 \dots x_2 - \varepsilon_2), (x_2 + \varepsilon_2 \dots x_1 - \varepsilon_1), (x_1 + \varepsilon_1 \dots x_0 - \varepsilon_0),$$

die wir mit $\dots i_3, i_2, i_1$ bezeichnen und diese:

$\dots (x_3 - \varepsilon_3 \dots x_3 + \varepsilon_3), (x_2 - \varepsilon_2 \dots x_2 + \varepsilon_2), (x_1 - \varepsilon_1 \dots x_1 + \varepsilon_1), (x_0 - \varepsilon_0 \dots x_0)$
 die wir mit $\dots j_3, j_2, j_1, j_0$ bezeichnen.

Irgend eine der Grössen $\psi_p(x, k)$ ist in Bezug auf ihre Veränderung mit x beschaffen wie folgt. Bilden wir den Differentialquotienten:

$$\frac{d\psi_p(x, k)}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x_p}^{x_{p-1}} d\alpha a h_p \cdot k^3 z_p^3 (\alpha - x) e^{-k^2 z_p^2 (\alpha - x)^2}$$

so ist er positiv in sämtlichen Intervallen $i_{p+1}, i_{p+2}, \dots$ negativ in den Intervallen $i_{p-1}, i_{p-2}, \dots$.

Jetzt bestimmen wir eine Grösse k_p so, dass $\psi_p(x, k_p) - x h_p$ im Intervall i_p numerisch kleiner als δ_p sei, und dass in allen übrigen Intervallen $\psi_p(x, k_p)$ selbst δ_p nicht erreiche, was immer möglich ist, da für $k = \infty$ beide Grössen: $\psi_p(x, k) - x h_p, \psi(x, k)$, wenn x in den bezeichneten Intervallen befindlich ist, verschwinden. Um die zweite Forderung zu erfüllen, wird es genügen, wenn δ_p durch $\psi(x_p - \varepsilon_p, k_p)$ und $\psi(x_{p-1} + \varepsilon_{p-1}, k_p)$ nicht mehr erreicht wird. Wenn nun diesen Bestimmungen gemäss $k_1, k_2, \dots$ in allen Grössen $\psi_1(x, k_1), \psi_2(x, k_2), \dots$ gewählt sind, so setzen wir:

$$\Psi_2(x) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \psi(x, k_p)$$

und haben in irgend einem Intervall i_r :

$$\Psi_2(x) - \Psi(x) < \delta_1 + \delta_2 + \dots \text{ in infin.}$$

Die Grössen $\delta_1, \delta_2, \dots$ stehen in unserem Belieben. Setzen wir $\delta_1 = \frac{1}{2}\delta, \delta_2 = \frac{1}{4}\delta, \delta_3 = \frac{1}{8}\delta, \dots$ wo δ ein vorgeschriebenes beliebig Kleines vorstellt, so gelangen wir zu der Einsicht, dass es eine Function von x

$$\Psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{p=1}^{p=\infty} \int_{x_p}^{x_{p-1}} d\alpha \Psi(\alpha) \gamma_p e^{-\gamma_p^2 (\alpha - x)^2}$$

giebt, die unbegrenzt oft nach x differenzierbar ist, und in den Intervallen $i_1, i_2, \dots$, welche sich beliebig nahe an die Intervalle $(x_1 \dots x_0), (x_2 \dots x_1), \dots$ anschliessen, die Function Ψ bis auf einen Fehler unter vorgeschriebener Grenze δ darstellt.

44. Stetigmachung etc. Nachweis, dass, Ψ_2 an die Stelle von Ψ gesetzt, das Fouriersche Integral gleichfalls einen divergenten Limes hat.

Die Differenz $\Psi_2(x) - \Psi(x)$ hat im Intervall i_r noch folgende Eigenschaft. Sie besteht aus den Theilen:

$$\sum_{p=1}^{p=r-1} \psi_p(x, k_p), \quad \psi_r(x, k_r) - \Psi(x), \quad \sum_{p=r+1}^{p=\infty} \psi_p(x, k_p).$$

Der erste Theil hat wegen $x > a$ einen negativen Differentialquotienten, der dritte einen positiven und der mittlere Theil:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x_r}^{x_{r-1}} d\alpha \cdot a h_r \cdot \gamma_r e^{-\gamma_r^2(\alpha-x)^2} - x h_r$$

hat im Intervall $x_r < x < x_{r-1}$ nur ein Maximum.

Dann die Grösse:

$$\int_a^b d\alpha \alpha e^{-\gamma^2(\alpha-x)^2} = \frac{1}{e^{\gamma^2 x}} \int_a^b d\alpha \alpha \frac{e^{2x\alpha\gamma^2}}{e^{\alpha\gamma^2}}$$

besteht aus zwei Factoren, von denen der erste von $e^{-a^2\gamma^2}$ bis $e^{-b^2\gamma^2}$

abnimmt, der zweite von $\int_a^b d\alpha \alpha \frac{e^{2a\alpha\gamma^2}}{e^{\alpha\gamma^2}}$ bis $\int_a^b d\alpha \alpha \frac{e^{2b\alpha\gamma^2}}{e^{\alpha\gamma^2}}$ zunimmt, beides

in einer Weise, dass zwischen den Grenzen a, b höchstens ein Maximum oder Minimum sein kann. Dann ist aber ein Maximum vorhanden, denn der Differentialquotient:

$$2\gamma^2 \int_a^b d\alpha \alpha (\alpha - x) e^{-\gamma^2(\alpha-x)^2}$$

ist positiv für $x = a$, negativ für $x = b$.

Wir können also setzen:

$$\Psi_2(x) = \Psi(x) + A_1 + A_2 + A_3$$

wo, während x ein Intervall i_p durchläuft, eines der Δ nur zunimmt, eines nur abnimmt, und eines höchstens ein Maximum durchläuft.

Nun ersuche ich den Leser, einen Blick auf die Analyse des Art. 36 zu werfen. Wenn wir das Integral

$$\int_0^a d\alpha \sin \varphi_2(\alpha) \frac{\sin \alpha h_p}{\alpha}$$

wie dort das Integral $\int_0^a d\alpha \sin \varphi(\alpha) \frac{\sin \alpha h_p}{\alpha}$ zerlegen in die Theile:

$$\int_0^{x_p} + \int_{x_p}^{x_{p-1}} + \int_{x_{p-1}}^a$$

so lässt sich von den beiden äusseren zunächst ganz ähnlich wie dort zeigen, dass sie für $p = \infty$ verschwinden.

Denn z. B. das Integral

$$\int_{x_q}^{x_{q-1}} \frac{d\alpha}{\alpha} \sin (\alpha h_q + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3) \sin \alpha h_p$$

kann mit Hülfe des zweiten Mittelwerthsatzes, und indem man bedenkt, dass die Grössen $\sin \Delta_p$, $\cos \Delta_p$ zwischen den Grenzen der Integration nicht unendlich oft vom Wachsen zum Abnehmen oder umgekehrt übergehen können, in eine endliche Anzahl Theile der Form

$$\pm \frac{\lambda}{z} \int_z^{z_1} \frac{\sin \alpha(h_p - h_q)}{h_p - h_q} - \frac{\sin \alpha(h_p + h_q)}{h_p + h_q}$$

zerlegt werden, wo λ endlich ist und z und z_1 dem Intervall angehören, welches die Grenzen des Integrals einschliessen.

Was das mittlere Integral betrifft, so hat man:

$$2 \int_{x_p}^{x_{p-1}} d\alpha \sin(\alpha h_p + \Sigma \Delta) \sin \alpha h_p = \int_{x_p}^{x_{p-1}} \frac{d\alpha}{\alpha} (1 - \cos 2h_p \alpha) \cos \Sigma \Delta + \int_{x_p}^{x_{p-1}} \frac{d\alpha}{\alpha} \sin 2h_p \alpha \cdot \sin \Sigma \Delta$$

Der Theil

$$\int_{x_p}^{x_p-1} \frac{d\alpha}{\alpha} \cos \Sigma A$$

wird, da $\cos \Sigma A$ von 1 beliebig wenig verschieden gemacht werden kann, mit p unendlich. Der Rest wird, wie abermals mit Hülfe des zweiten Mittelwerthsatzes leicht zu zeigen, Null für $p = \infty$.

Es ist also im Ganzen nachgewiesen, dass der Limes _{$h = \infty$} des Integrals:

$$\int_0^a d\alpha \left[\varrho(\alpha) \sin \sum_{p=1}^{p=\infty} \int_{x_p}^{x_p-1} d\beta \psi(\beta) \gamma_p e^{-\gamma_p^2 (\beta - \alpha)^2} \right] \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

divergent ist, falls $\varrho(\alpha)$ eine ähnlich wie im Art. 37 zu bestimmende mit α verschwindende Function vorstellt. Es ist dann die Function

$$f(\alpha) = \varrho(\alpha) \sin \sum_{p=1}^{p=\infty} \int_{x_p}^{x_p-1} d\beta \psi(\beta) \gamma_p e^{-\gamma_p^2 (\beta - \alpha)^2}$$

im Gebiete $0 < \alpha \leq a$ sammt ihren sämmtlichen Differentialquotienten stetig.

Schlussbetrachtungen.

Die vorstehende Abhandlung zerfällt wesentlich in drei Abtheilungen, von denen die erste u. A. in einer bestimmten Richtung den durch die bisherigen Untersuchungen gestatteten Spielraum für die Darstellbarkeit der Functionen durch Fouriersche Reihen und Integrale erweitert, die dritte Abtheilung dagegen die bisher gewöhnlich vermuthete Ausdehnung jenes Spielraums beschränkt, indem die Bedingungen entwickelt werden, unter denen eine Function in einem Puncte nicht darstellbar ist. Beide Untersuchungen, die der ersten und die der letzten Abtheilung, geben Veranlassung zu gewissen ergänzenden Betrachtungen, mit denen wir die Abhandlung schliessen wollen.

I.

Soweit der erste Theil der Untersuchung sich mit der Erweiterung der Bedingung für die Darstellbarkeit beschäftigt, kann sein Ergebniss so ausgedrückt werden:

Wenn eine Function $f(x)$ in den in Betracht kommenden Intervallen integrirbar ist und ausserdem in einer beliebig kleinen einen Punct $x = x_1$ umgebenden Strecke sich auf die Form

$$f(x_1) = f(x_1) + \varphi(x - x_1) \cdot \cos \psi(x - x_1)$$

bringen lässt, in der $\varphi(x)$ und $\psi(x)^{-1}$ mit x , ohne unendlich viele Maxima zu durchlaufen, verschwinden, so ist $f(x_1)$ durch eine Fouriersche Reihe oder ein Fouriersches Integral darstellbar.

Dieser Satz ist offenbar nur ein erster Schritt in einem für die Darstellbarkeit neu zu erwerbenden Gebiete. Ich werde dies sogleich näher ausführen. Bilden wir die Reihe

$$\varrho_1(x) \cos \psi_1(x) + \varrho_2(x) \cos \psi_2(x) + \dots,$$

nehmen an, dass die ϱ_p sich in die Form $\mu_p \varrho'_p(x)$ bringen lassen, wo $\sum \mu_p$ eine unbedingt convergente Zahlenreihe vorstellt, dass die Grössen ψ_p ohne Maxima für $x = 0$ unendlich werden, und in der Strecke $0 \leq x \leq a$ zwischen zwei ebenso unendlich werdenden Functionen $\psi_n(x), \psi_o(x)$ eingeschlossen sind: so wird es, wie aus dem erwähnten ersten Theile dieser Abhandlung ohne Weiteres folgt, stets so grosse Werthe von h geben, dass das Integral

$$\int_0^a d\alpha \varrho'_p(\alpha) \cos \psi_p(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha},$$

für jeden Werth von p unter eine beliebig kleine endliche Grenze sinkt, und dann muss auch

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha \left(\sum_{p=1}^{p=\infty} \varrho_p(\alpha) \cos \psi_p(\alpha) \right) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = 0$$

sein. Dies ist die naheliegendste Verallgemeinerung der im obigen Satze gestellten Bedingung. Es schliesst sich daran eine doppelte Aufgabe.

Einmal kann gefragt werden: Giebt es nicht allgemeinere Bedingungen für die Function $\psi_p(\alpha)$, wie die eben angeführte? Mit anderen Worten: unter welchen Umständen wird

$$\lim \int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = 0$$

sein, wenn $f(\alpha)$ die Form $\sum_{p=1}^{p=\infty} \varrho_p(\alpha) \cos \psi(p, \alpha)$ hat, und jedes Paar $\varrho_p(\alpha), \psi(p, \alpha)$ den bisher bei $\varrho(\alpha), \psi(\alpha)$ vorausgesetzten Gang hat? Die

andere Frage ist: Durch welche Functionen kann der Cosinus ersetzt werden?

Mit der zweiten Frage, die übrigens schliesslich auf die erste zurückführt, habe ich mich beschäftigt, und will darüber Einiges mittheilen.

Wir nehmen statt des Cosinus eine Function:

$$\varphi(x) = \sum_1^{\infty} \mu_p \cos px$$

an, unter μ_p das Glied einer unbedingt convergenten Zahlenreihe verstanden. Bilden wir jetzt die Reihe:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \mu_p \varphi(\alpha) \cos(p\psi(\alpha)) \frac{\sin \alpha h}{\alpha},$$

so ist sie, weil $\varphi(\alpha) \cos p\psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ für $\alpha = 0$ endlich bleibt, von 0 an integrirbar und man hat:

$$\int_0^a d\alpha \varphi(\alpha) \varphi[\psi(\alpha)] \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = \sum_1^{\infty} \mu_p \int_0^a d\alpha \varphi(\alpha) \cos(p\psi(\alpha)) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}.$$

Schreiben wir die rechte Seite

$$\sum_1^{\infty} \mu_p \lambda_p(h),$$

so fragt es sich, ob:

$$\lim_{h=\infty} \sum_1^{\infty} \mu_p \lambda_p(h) = \sum_1^{\infty} \mu_p \lim_{h=\infty} \lambda(h) = 0$$

ist. Dies wird der Fall sein, wenn die Reihe $\sum \mu_p \lambda_p(h)$ nicht nur für $h < \infty$, sondern auch für $h = \infty$ vollständig convergent ist (was Andere gleichmässig convergent nennen). Und dies wird wiederum stattfinden, wenn $\lambda_p(h)$, wie auch p und h gleichzeitig oder nacheinander unendlich werden, endliche Grenzen nicht übersteigt.

Das successive Unendlichwerden von p und h ist rasch erledigt. Denkt man sich in:

$$\lambda_p(h) = \int_0^a d\alpha \varphi(\alpha) \cos p\psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

h endlich und p unendlich werdend, so verschwindet dies Integral nach dem ersten Hauptsatz, da man einen beliebig kleinen Null enthaltenden Theil des Integrals abschneiden kann, und im Reste für $\psi(\alpha)$ eine neue Veränderliche eingeführt werden darf, ohne dass die Grenzen unendlich werden. Bleibt p endlich und wird h unendlich, so verschwindet das Integral, ebenfalls wegen des ersten Theils der Abhandlung.

Complicirter ist die Untersuchung des Falles, wo gleichzeitig p und h unendlich wird, die in die Theile

$$p \gtrsim h$$

zerfällt. Am Leichtesten wird man mit dem Fall $p \gtrsim h$ fertig, weil alsdann die Gleichung $\psi'(\alpha_1) + \frac{h}{p} = 0$ (Art. 1) für hinreichend grosse Werthe von p keine Wurzel zwischen 0 und a hat. Im Falle $p < h$, liegt dort eine Wurzel, und man muss alsdann, ähnlich wie bei der Untersuchung des

$$\lim \int_0^a d\alpha \varphi(\alpha) \cos \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha},$$

mehrere Zerlegungen anwenden und die infinitäre Auflösung gewisser Gleichungen benützen. Im Ganzen nimmt die Untersuchung des Integrals mit $\cos p\psi(\alpha)$ nicht weniger Raum ein, als die mit $\cos \psi(\alpha)$ allein.

Man kann aber noch weiter gehen, indem man für die Function $\varphi(x)$ nicht die Form $\sum \mu_p \cos px$ voraussetzt, wonach $\varphi(x)$ stetig ist, sondern annimmt, dass $\varphi(x)$ eine durch eine Sinuscosinus-Reihe dargestellte Function ist, welche beliebig viele Unstetigkeiten besitzt, die nur nicht in jedem kleinsten Intervall vorkommen dürfen. Wenigstens finde ich diese Angabe, allerdings ohne nähere Begründung, in meinen Notizen aus einer Zeit, wo ich eine Uebung und Sicherheit in dergleichen

Untersuchungen besass, welche man leider nur durch steten Gebrauch dieser Eigenschaften sich erhalten kann. Das zu untersuchende Integral ist in diesem allgemeinen Falle ein Anderes, und man erhält es durch Summation der Sinus-cosinus-Reihe.

Mit der so als darstellbar nachgewiesenen oder nachzuweisenden Funktion $\varphi(\alpha) \varphi(\psi(\alpha))$ kann man alsdann wieder andere Functionen

$$\sum \varphi_p(\alpha) \varphi_p(\psi_p)$$

zusammensetzen, und ich glaube, dass wir hiermit, wenigstens in allgemeinen Zügen, die Ergebnisse hinsichtlich der Darstellbarkeit der Functionen durch Fouriersche Darstellungsformeln, welche auf dem eingeschlagenen Wege zu erreichen sind oder sein mögen, erschöpft haben.

II.

Das Hauptergebniss des dritten Theils dieser Abhandlung ist die Bemerkung, dass das Integral

$$\int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

für $h = \infty$ einen divergenten Limes haben kann, auch wenn $f(x)$ für $x \geq 0$ stetig ist. Geben wir diesem Ergebniss die Form, dass

$$\lim_{h=\infty} \int_{-a}^{+b} d\alpha f(\alpha) \frac{\sin h(\alpha - x)}{\alpha - x}$$

auch im Falle $f(x)$ im Intervall $-a \dots +b$ stetig ist, für $x = 0$, statt $\pi f(0)$ zu geben, ein zwischen unendlichen Grenzen unbestimmtes Resultat liefern kann, so können wir diesen Satz unmittelbar auf die Fourierschen Darstellungsformeln beziehen.

Es könnte hier ein Einwand versucht werden, der allerdings aus einer etwas zurückgebliebenen Auffassung des Functionsbegriffs entspränge, dem ich aber doch sogleich zu begegnen für rathsam halte. Man könnte

nämlich einwerfen, dass die Nichtdarstellbarkeit von $f(x) = \varphi(\alpha) \sin \Psi(\alpha)$ für $\alpha = 0$ ganz und gar nichts Neues an sich habe, da ja die Function $\Psi(\alpha)$ im Puncte $\alpha = 0$ unendlich sei, und somit der Sinus seinen Sinn verliere. Läge z. B. die Function $x \sin \frac{1}{x}$ vor, so sei für $x = 0$ der $\sin \frac{1}{x}$ ein Zeichen ohne Bedeutung, wie ja mit dem Zeichen $\frac{1}{0}$, wenn unter Null die Abwesenheit jeglicher Grösse verstanden wird, auch kein Sinn verbunden werden könne.

Indessen, wie angedeutet, ist auf Grund des richtigen Functionsbegriffs dies Bedenken leicht zu beseitigen.

Ich will darauf kein Gewicht legen, dass man analytisch den Sinus, der doch durch Umkehrung eines algebraischen Integrals erhalten wird, auch so definiren kann, dass $x \sin \frac{1}{x}$ für $x = 0$ Null ist; denn in unserer Function $\varphi(\alpha) \sin \Psi(\alpha)$ ist $\Psi(\alpha)$ eben keine hinreichend einfache Function, um daran ähnliche Operationen durchführen zu können.

Nun, wenn ich überhaupt von einer Function spreche, bin ich alsdann an einen analytischen Ausdruck gebunden, oder ist sie nicht vielmehr gegeben, wenn ich festgesetzt habe, welchen Werth sie für jeden numerischen Werth ihres Arguments vorstellen soll? Jetzt bestimme ich eine Function $f(x)$ durch die Bedingungen:

1. $f(0) = 0$
2. Für $x \geq 0$ sei $f(x) = \varphi(x) \sin \Psi(x)$ im Sinne des Art. 35. Diese Function ist für ein den Punct $x = 0$ enthaltendes Intervall stetig, für ein ähnliches Intervall unter Ausschluss des Punctes $x = 0$ sogar mit ihren sämtlichen Differentialquotienten stetig, und gleichwohl für $x = 0$ nicht darstellbar.

Man kann übrigens aus der Function $\varphi(x) \sin \Psi(x)$ noch andere nicht darstellbare Functionen erhalten, deren Entwicklung nach Fourierschen Reihen oder deren Ausdruck durch ein Fouriersches Integral in jedem kleinsten Intervall unendlich wird. Denn bilden wir die Function

$$f(\sin px) = \varphi(\sin px) \cos \Psi(\sin px)$$

mit der Bestimmung $f(0) = 0$, so ist diese Function für jedes x stetig. Gleiches gilt von dieser:

$$F(x) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \mu_p \varphi(\sin px) \cos \Psi(\sin px) .$$

Setzt man endlich:

$$H(x) = \lim_{h=\infty} \int_{-A}^{+B} d\alpha F(\alpha) \frac{\sin h(\alpha - x)}{\alpha - x} ,$$

so hat diese Function in jedem kleinsten Intervall einen Punct, in dem sie unendlich ist, oder genauer, die μ_p können stets so bestimmt werden, dass dies der Fall ist. Es bedarf das aber des Beweises, da wir zwar die Reihe $F(\alpha)$ gliedweise integriren können, aber den Grenzübergang $h = \infty$ nicht ohne Weiteres gliedweise ausführen dürfen. Nehmen wir eine bestimmte Reihe $\sum \mu_p$ an, und setzen der Kürze halber:

$$\lambda_p(h) = \int_{-A}^{+B} d\alpha \varphi(\sin p\alpha) \cos \Psi(\sin p\alpha) \frac{\sin h(\alpha - x)}{\alpha - x} ,$$

ferner

$$H(x) = \sum_1^{\infty} \mu_p \lambda_p(h) = H_m + R_m$$

wo

$$H_m = \sum_1^m , \quad R_m = \sum_{m+1}^{\infty} ,$$

so wird die Function H_m in einer Reihe von Puncten mit h unendlich. Sollte nun zufällig die Function R_m in denselben Puncten gerade so unendlich werden, dass das Unendlichwerden von H_m dadurch aufgehoben würde, so könnte dies nicht mehr der Fall sein, wenn anstatt R_m gesetzt wurde

$$R'_m = a \sum_{m+1}^{\infty} \mu_p \lambda_p(h) ,$$

weil die unendlich werdenden Werthe mit der beliebigen Zahl a multiplicirt sind.

Setzt man jetzt:

$$F(x) = \sum_1^{m_1} + \sum_{m_1+1}^{m_2} + \sum_{m_2+1}^{m_3} + \dots \text{ in infin. ,}$$

so wird $a_1 \left\{ \sum_{m_1+1}^{m_2} + \text{etc} \right\}$ das Unendlichwerden von $\sum_1^{m_1}$ nicht aufheben.

Weiter wird $a_2 a_1 \left\{ \sum_{m_2+1}^{m_3} + \dots \right\}$ das von $\sum_1^{m_1} + a_1 \sum_{m_1+1}^{m_2}$ nicht aufheben, u. s. f.

Es wird also

$$F(x) = \sum_1^{m_1} + a_1 \sum_{m_1+1}^{m_2} + a_1 a_2 \sum_{m_2+1}^{m_3} + \dots$$

in jedem kleinsten Intervall unendlich werden. Q. E. D.

Einige Druckfehler.

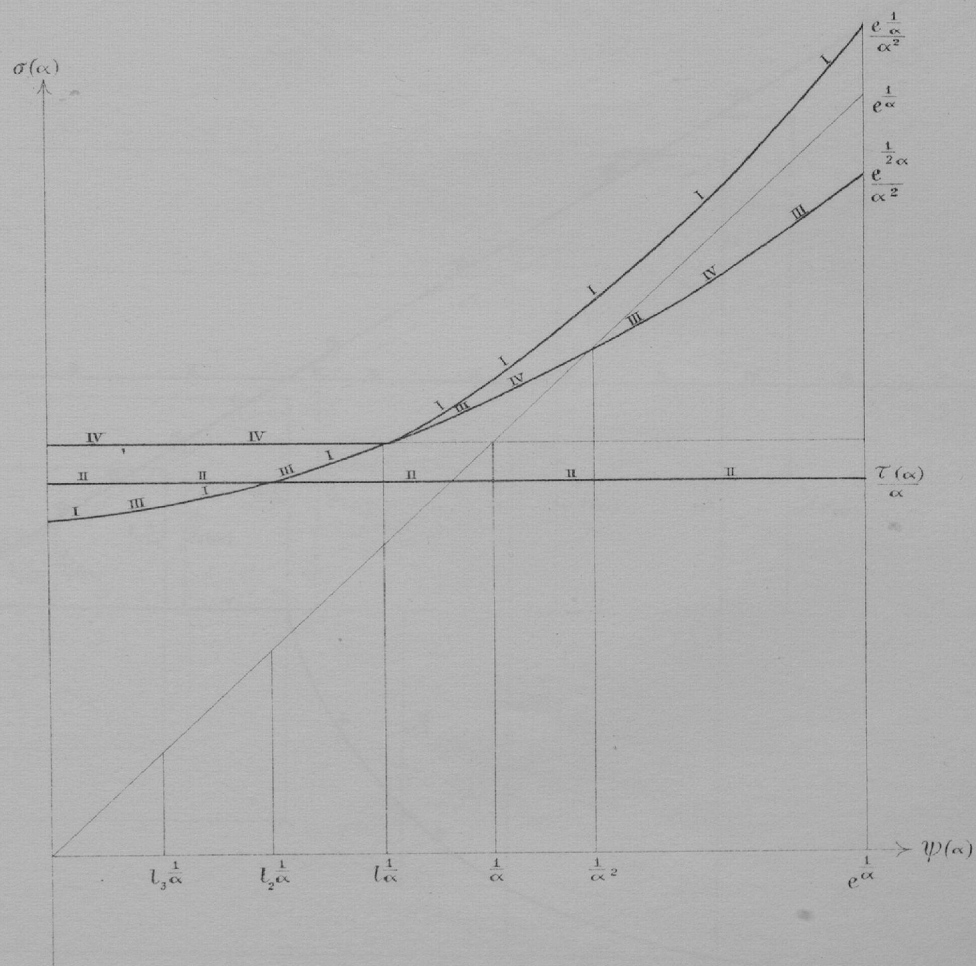
Seite

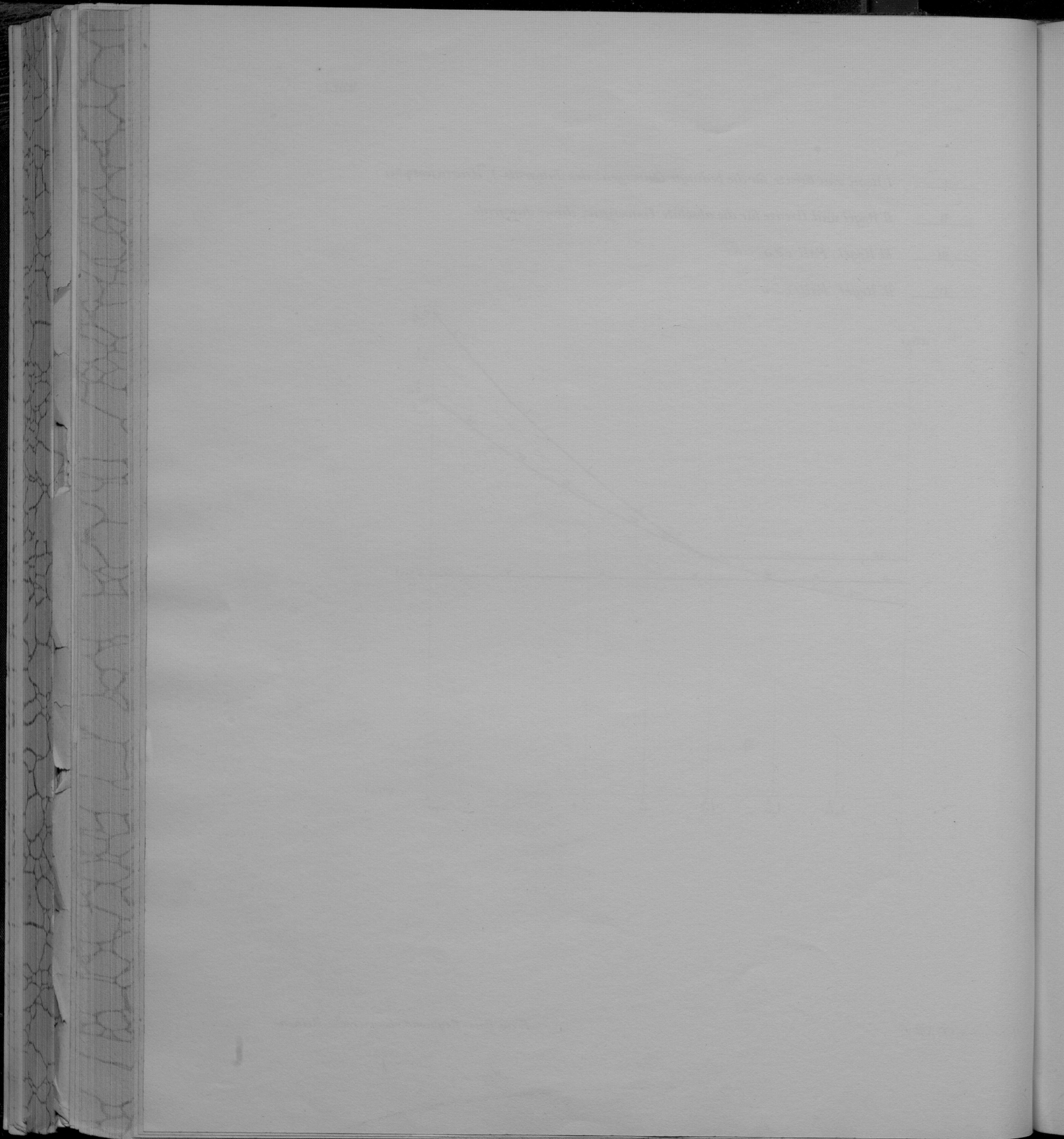
2. In der Ueberschrift von III muss es heissen: $\frac{f(\alpha + \varphi(\alpha))}{f(\alpha)}$.
 16. Zweite Zeile muss es heissen: nur wachsen oder nur abnehmen.
 19. Vierzehnte Zeile muss es heissen: durch Subtraction.
 21. Erste Zeile Art. 9 muss es heissen: Damit ist denn
 29. In der ersten Hälfte der Seite muss es heissen: $\delta = \pm \sqrt{\frac{2N\pi}{\psi''(\alpha_1)}} \cdot u$.
 42. Erste Zeile muss a statt α stehen.
 48. Dreizehnte Zeile muss es heissen: schreiben wir.
 52. Sechszehnte und siebenzehnte Zeile: $\psi(\alpha) \lesseqgtr l\frac{1}{\alpha}$ oder $> l\frac{1}{\alpha}$ ist.
 83. Dritte und fünfte Zeile fehlt am Schluss: $\}$ und $+ \dots \}$
-

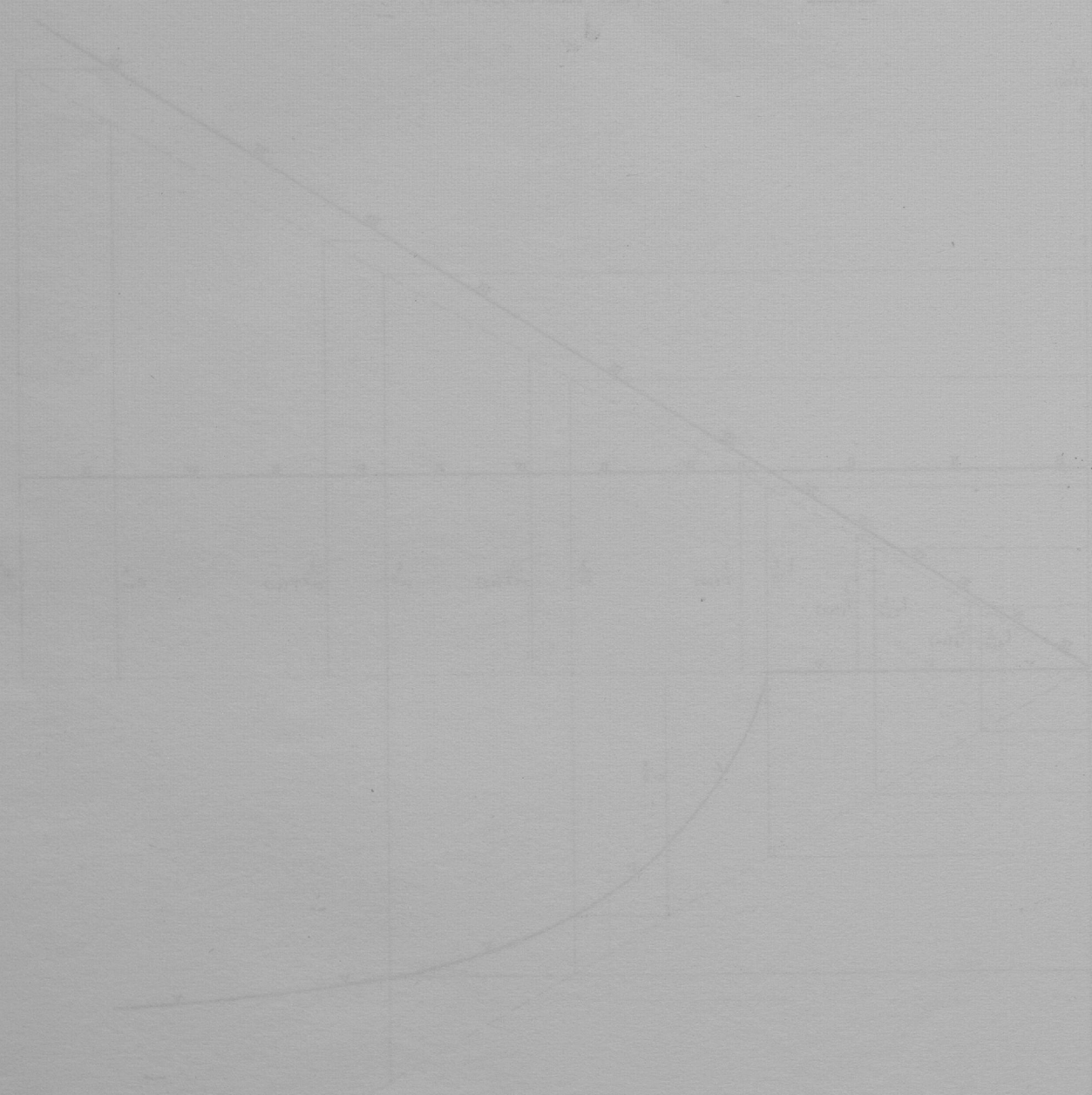
Einige Druckfehler.

1. In der Überschrift von III muss es heißen: $\frac{(x+y)}{2}$
2. Zweite Zeile muss es heißen: nur wachsen über nur abnehmen
3. Vierte Zeile muss es heißen: durch Substitution
4. Erste Zeile v. 9 muss es heißen: damit ist dann
5. In der ersten Hälfte der Zeile muss es heißen: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
6. Erste Zeile muss es statt "sich"
7. Fünfte Zeile muss es heißen: schreiben wir
8. Sechste und siebente Zeile: $\sqrt{2}$ oder $\frac{1}{\sqrt{2}}$
9. Letzte und fünfte Zeile: fehlt am Schluss: $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$

- I Regel und Grenze für die bedingte Convergenz des Integrals $\int_0^\alpha d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)$
 II Regel und Grenze für die absolute Convergenz dieses Integrals.
 III Regel, Fall $c \geq 0$,
 IV Regel, Fall $c = 0$







Graph of the function $y = \frac{1}{x}$

Graph of the function $y = x^2$

