Ueber ein Verfahren,

die

Gleichungen, auf welche die Methode der kleinsten Quadrate führt, sowie lineäre Gleichungen überhaupt, durch successive Annäherung aufzulösen.

Von

Ludwig Seidel.

Aus den Abhandlungen der k. bayer. Akademie der W. II. Cl. XI. Bd. III. Abth.

München 1874.

Verlag der k. Akademie,

in Commission bei G. Franz.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

Ueber ein Verfahren,

die Gleichungen, auf welche die Methode der kleinsten Quadrate führt, sowie lineäre Gleichungen überhaupt, durch successive Annäherung aufzulösen.

Von

Ludwig Seidel.

Vorgetragen in der Sitzung der mathem.-physik. Classe der K. Akademie der Wissenschaften am 7. Februar 1874.

1.

Im Anschlusse an die Bezeichnung, welche in der Theorie der Ausgleichung von Beobachtungs-Resultaten gebräuchlich ist, sei angenommen, dass die Ergebnisse der Einzelbeobachtungen in folgenden nach den unbekannten Grössen x, y, z, ... lineären Gleichungen ausgesprochen sind:

$$\text{A)} \quad \begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + n_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + n_2 = 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ldots + n_3 = 0 \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}$$

Es wird vorausgesetzt, dass die Anzahl der Beobachtungen, folglich auch der Gleichungen A), grösser ist als die der Unbekannten x, y, z, ... dass aber die einzelnen Gleichungen durch Beobachtungsfehler entstellt sind (oder doch sein können), um derentwillen die Ausdrücke zur Linken auch dann im Allgemeinen nicht genau verschwinden würden, wenn man die wahren Werthe x, y, z ... in ihnen substituiren könnte. Zugleich sei vorausgesetzt, dass dem etwa verschiedenen Gewichte verschiedener Beobachtungen in der Form, in welcher die Gleichungen angeschrieben sind, bereits nach bekannter Vorschrift Rechnung getragen sei, so dass man also a priori durchaus keinen Grund mehr habe, in der Einen der Beobachtungsgleichungen einen grösseren Fehler (d. h. einen grösseren absoluten Werth des Ausdruckes, der nach dieser Gleichung Null sein müsste), zu erwarten, als in der anderen.

Es sei ferner vorausgesetzt, dass gemäss der Anordnung der Beobachtungen diejenigen Voraussetzungen zutreffend sind, oder doch nach unserer Einsicht als zutreffend angesehen werden müssen, unter welchen die Anwendung der „Methode der kleinsten Quadrate" rationell begründet ist. Hienach wird das probabelste[1]) aller Systeme von Werthen x, y, z, ... durch die Bedingung abgeleitet, dass seine Substitution in die Beobachtungsgleichungen A) die Quadratsumme der links sich ergebenden Zahlenwerthe möglichst klein macht. Wendet man, wie in dieser Theorie gewöhnlich, die [ ] Klammer als Summenzeichen an, so dass z. B.

$$[aa] = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots$$

$$[ab] = [ba] = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots$$

(wo jede Summe sich über so viel Glieder ausdehnt, als Beobachtungen vorhanden sind), so ist die Quadratsumme

$$\begin{aligned} Q = {} & [aa]\, x^2 + [bb]\, y^2 + [cc]\, z^2 + \cdots \\ & + 2\,[ab]\, xy + 2\,[ac]\, xz + 2[bc]\, yz + \cdots \\ & + 2\,[an]\, x + 2\,[bn]\, y + 2\,[cn]\, z + \cdots \\ & + [nn] \end{aligned}$$

1) Der Vorzug dieses probabelsten Systemes ist nicht etwa dadurch begründet, dass die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit, es werde genau richtig sein, ein grösseres Unendlich-kleines ist, als für jedes andere System, — sondern dadurch, das die endliche Wahrscheinlichkeit, es werden die wirklichen Werthe der Unbekannten von den vorausgesetzten nur innerhalb beliebig aufgestellter aber enger Schranken differiren, grösser ist bei dem ausgezeichneten System, als die auf gleich enge Schranken bezügliche (ebenfalls endliche) analoge Wahrscheinlichkeit bei jedem anders gewählten System Es scheint dies nicht überall mit der erforderlichen Klarheit aufgefasst worden zu sein.

und sie wird zum Minimum, wenn man die Unbekannten aus folgenden Normalgleichungen berechnet, deren Zahl gerade ausreichend ist, und die man also strenge erfüllt:

$$\text{B)}\qquad \begin{array}{l} [aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + \cdots + [an] = o \\ [ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z + \cdots + [bn] = o \\ [ac]\,x + [bc]\,y + [cc]\,z + \cdots + [cn] = o \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}$$

So einfach nun, ihrer mathematischen Natur nach, die Aufgabe ist, eine beliebige Anzahl unbekannter Grössen aus gleich vielen linearen Gleichungen zu berechnen, so mühsam wird ihre numerische Durchführung, wenn die Zahl der Unbekannten beträchtlich gross wird, und man sieht sich aus diesem Grunde veranlasst, in Fällen der bezeichneten Art, dergleichen z. B. die Ausgleichung eines nur etwas grösseren geodätischen Netzes praktisch darbietet, unter Aufopferung der streng systematischen Durchführung, partielle Systeme von Unbekannten zu bilden und dieselben, nachdem jedes für sich berechnet ist, so gut es gehen will einander anzuschliessen. Ich weiss nicht, ob ein Complex von mehr als einigen siebzig Unbekannten je einheitlich berechnet worden ist. Die Zahl 70 ist erreicht in dem Netze der ostpreussischen Gradmessung[1]) (und zwar in einem Falle, wo zwischen den Unbekannten noch 31 streng zu erfüllende Bedingungsgleichungen bestehen, welcher Umstand aber nach der gewöhnlichen Art der Behandlung die Sache nur erschwert), und mit 72 Unbekannten habe ich zu thun gehabt bei Berechnung der wahrscheinlichsten Werthe für die Logarithmen der Helligkeiten der Sterne, welche in mein photometrisches Netz gezogen waren [2]) — Die gebräuchliche von Gauss gegebene Auflösungsmethode beruht bekanntlich darauf, dass man den Werth irgend einer Unbekannten, ausgedrückt durch die übrigen, aus derjenigen Gleichung entnimmt, in welcher diese Unbekannte mit einer Summe von Quadraten multiplicirt ist, oder nach der

1) Siehe das Werk von Bessel und Baeyer, Abschnitt III.
2) Siehe meine Abhandlung, „Resultate photometrischer Messungen etc." in den Denkschriften der Münchener Akademie. 1862, Paragraph 8.

üblichen und unmittelbar verständlichen Art zu sprechen und zu schreiben, aus der Gleichung, in welcher jene Unbekannte in der Diagonale des Systems auftritt — also z. B. den Werth von x aus der ersten Gleichung in B), — und diesen Werth in die übrigen Gleichungen substituirt, wodurch man das erste transformirte System der Normalgleichungen erhält

$$\text{C)}\quad \begin{aligned} [bb\,.\,1]\, y + [bc\,.\,1]\, z + \cdots + [bn\,.\,1] &= o \\ [bc\,.\,1]\, y + [cc\,.\,1]\, z + \cdots + [cn\,.\,1] &= o \\ \text{etc.} \end{aligned}$$

welches mit dem ursprünglichen Systeme B) die Eigenschaft theilt, dass die Coefficienten der Unbekannten symmetrisch gegen die Diagonale stehen, und in welchem allgemein

$$[bc\,.\,1] = [cb\,.\,1] = [bc] - \frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}$$

Indem man hierauf eine 2te Unbekannte in gleicher Weise fortschafft, u. s. w. ergeben sich successive transformirte Systeme, deren jedes folgende eine Unbekannte weniger hat, als das vorausgehende, bis die letzte Unbekannte für sich allein steht und nach Bestimmung ihres Werthes successive alle übrigen, jede aus der Gleichung, die zu ihrer Elimination benützt worden ist, nach der umgekehrten Reihenfolge sich berechnen.

Ein anderes Verfahren hat Jacobi erdacht und auf die 7 Gleichungen angewandt, welche zur Berechnung eines Theiles der Säcularstörungen im Planetensystem nach Laplace von Leverrier aufgestellt waren[1]); ich habe noch als Studirender die Ehre gehabt, für ihn dazu die numerischen Rechnungen auszuführen. Nach demselben werden successive die grössten der ausserhalb der Diagonale stehenden Coefficienten zum Verschwinden gebracht, indem man durch eine passende lineäre Substitution, welche vollkommen der Drehung eines rechtwinkligen Coordinaten-Systems entspricht, statt derjenigen zwei Unbekannten, welche mit solchem Coeffi-

---

1) Siehe Crelle's Journal, Band 30, p. 51 „Ueber ein leichtes Verfahren etc.“

cienten multiplicirt sind, zwei neue Unbekannte einführt, und die Symmetrie des Ganzen erhält; an die Stelle des so annullirten Coefficienten tritt zwar im Fortgange des Rechnungsverfahrens durch die späteren Substitutionen wieder ein nicht verschwindender, aber die Summe der Quadrate der Coefficienten ausserhalb der Diagonale wird stetig zu Gunsten derjenigen in der Diagonale vermindert, und auf einem Wege, dessen Convergenz streng bewiesen ist, nähert man sich so sehr man will dem Endziel, wo (ausser den rein constanten Gliedern) nur die diagonalen mehr übrig sind, und die letzten Unbekannten sich sofort ergeben. So sinnreich übrigens diese Methode den speciellen Schwierigkeiten des Falles angepasst ist, für welchem Jacobi ihre Anwendung veranlasste und in welchem die diagonalen Coefficienten selbst noch lineäre Funktionen einer supernumerären Unbekannten sind, so scheint sie mir für den gewöhnlich vorkommenden einfacheren Fall doch keineswegs vortheilhafter zu sein, als die allgemein angewandte; auch bezweifle ich, ob sie in irgend einem weiteren Falle bisher in Anwendung gebracht worden ist.

Einen dritten Weg habe ich in meiner oben citirten photometrischen Abhandlung eingeschlagen; seine Wahl war für die dort behandelte Aufgabe bei der einfachen Gestalt der einzelnen Beobachtungsgleichungen eine besonders naheliegende. In meinem vorliegenden Aufsatze beabsichtige ich, diese Auflösungs-Methode in derjenigen Gestaltung darzulegen und zu begründen, in welcher sie ganz allgemein anwendbar ist, und zugleich einige Einzelheiten näher zu erörtern, die mit ihr in Verbindung stehen.

2.

Man denke sich für die Unbekannten x , y , z ... zuerst irgend ein System von Zahlenwerthen angenommen, welches die „Normalgleichungen" B) des wahrscheinlichsten Systems noch nicht erfüllt, sondern macht

$$[aa]\,x + [ab]\,y + \ldots + [an] = N_1$$
$$[ab]\,x + [bb]\,y + \ldots + [bn] = N_2$$
u. s. w.

Die Summe der Fehlerquadrate Q (s. ob.) kann nach einer identischen Transformation so geschrieben werden.

$$Q = \frac{1}{[aa]} \left\{ [aa]\, x + [ab]\, y + [ac]\, z + \cdots + [an] \right\}^2$$
$$+ [bb\,.\,1]\, y^2 + [cc\,.\,1]\, z^2 + \cdots$$
$$+ 2\,[bc\,.\,1]\, y\, z + \cdots + 2\,[bn\,.\,1]\, y + 2\,[cn\,.\,1]\, z + \cdots$$
$$+ [nn\,.\,1]$$
$$= \frac{1}{[aa]} N_1^2 + [bb\,.\,1]\, y^2 + \cdots + [nn\,.\,1]$$

Bei dieser Form des Ausdruckes kommt die Unbekannte x nur im ersten Gliede (nemlich in N_1) vor; hieraus ist sofort klar, dass man die Summe Q der Fehlerquadrate vermindert, und zwar um die Grösse

$$\frac{1}{[aa]} N_1^2$$

wenn man, während y, z . . . ihre zuerst angenommenen Werthe behalten, denjenigen von x so verändert, dass der Ausdruck, welcher zuvor N_1 war, zu Null gemacht wird. Dies wird bewirkt durch eine solche an x anzubringende Aenderung Δx, welche ist

$$\Delta x = -\frac{N_1}{[aa]}$$

und der hiedurch verbesserte Werth $x + \Delta x$ ist jetzt offenbar derjenige der ersten Unbekannten, welcher zu den vorerst angenommenen Werthen der übrigen Unbekannten *am bessten passt,* und der für jene dann der plausibelste wäre, wenn die vorläufigen Werthe der übrigen als deren wahre Werthe schon bekannt wären.

Die Aenderung von x, welche an die Stelle von N_1 den Werth $N_1' = o$ treten lässt, wird gleichzeitig die Werthe von N_2, N_3, . . . umändern in

$$N'_2 = N_2 + [ab]\, \Delta x$$
$$N'_3 = N_3 + [ac]\, \Delta x$$
etc.

Hätte man, anstatt y, z . . . festzuhalten und x zu corrigiren um $-\frac{N_1}{[aa]}$, vielmehr x, z . . . bei ihren ersten Werthen belassen, und y corrigirt um $-\frac{N_2}{[bb]}$, so würde man offenbar die Summe Q ebenfalls von ihrem Anfangswerthe aus vermindert haben, und zwar um die Grösse $\frac{N_2^2}{[bb]}$; ebenso hätte man dieselbe Summe vermindert um $\frac{N_3^2}{[cc]}$ wenn man z allein und zwar um $-\frac{N_3}{[cc]}$ vom Anfangswerthe aus corrigirt hätte.

Denkt man sich also, dass nachdem x um $\Delta x = -\frac{N_1}{[aa]}$ corrigirt worden, und nachdem hiedurch die Grössen

$$\begin{array}{l} N_1' = o \\ N_2' \\ N_3' \\ \text{etc.} \end{array}$$

an die Stelle von N_1, N_2, N_3 ... getreten sind, jetzt in zweiter Instanz etwa der Variablen y eine solche Correction

$$\Delta y = -\frac{N_2'}{[bb]}$$

beigelegt werde, vermöge deren $y + \Delta y$ den Zahlenwerth erhält, welcher zu dem Werthsystem

$$x + \Delta x\,,\ z\,,\ \ldots$$

der übrigen Unbekannten am bessten passt, — so wird nun auch diese zweite Aenderung die Summe der Fehlerquadrate Q weiter vermindern um

$$\frac{N_2'^2}{[bb]}$$

nachdem sie schon zuvor von ihrem ersten Werthe ab um $\frac{N_1^2}{[aa]}$ verringert worden war.

Diese Aenderung des Werthes von y setzt an die Stelle der Grössen

$N'_1 = o$, N'_2 , N'_3 , .. abermals neue Grössen N''_1 , $N''_2 = o$, N''_3 etc., wobei man hat

$$N''_1 = N'_1 + [ab]\, \varDelta y = [ab]\, \varDelta y$$
$$N''_2 = N'_2 + [bb]\, \varDelta y = o$$
$$N''_3 = N'_3 + [bc]\, \varDelta y$$
etc.

Würde man jetzt an dritter Stelle etwa die Variable z so corrigiren, dass der neue Werth $z + \varDelta z$ möglichst gut zu dem System passen würde, welches aus $x + \varDelta x$, $y + \varDelta y$ und den Anfangswerthen der späteren Unbekannten gebildet wäre, so würde man die Summe der Fehlerquadrate aufs Neue, und zwar um die Grösse

$$\frac{N''^2_3}{[cc]}$$

verringern; dagegen würde man sie um

$$\frac{N''^2_1}{[aa]}$$

verringern, wenn man jetzt schon auf die Variable x zurückkommen, und (da $x + \varDelta x$ nicht mehr der Werth ist, welcher zum Systeme $y + \varDelta y$, z , . . . am bessten passt) an x eine zweite Correktion $- \frac{N''_1}{[aa]}$ anbringen wollte.

Wenn man also, von irgend welchem Systeme von Anfangswerthen ausgehend, und in irgend welcher Aufeinanderfolge der Unbekannten (wobei es nicht gerade nöthig ist, den ganzen Cyklus derselben durchzugehen, ehe man wieder auf eine schon verbesserte zurückkommt), successive Correctionen an den Unbekannten anbringt, indem man Sorge trägt, die jedesmalige Verbesserung einer jeden immer so zu bestimmen, dass durch dieselbe diejenige Normalgleichung erfüllt wird, in der die betreffende Unbekannte die ausgezeichnete Stellung in der Diogonale einnimmt, — so verringert man Schritt für Schritt die Summe der Fehlerquadrate (und zwar jedesmal um eine sofort angebbare Grösse der Form $\frac{N^2}{[aa]}$ oder $[aa]\, \varDelta x^2$), solange an ihr noch etwas zu verringern ist. Denn di zu erzielenden Verminderungen von Q und die an den Unbekannten anzubringenden Correctionen (letztere von der Form

— $\frac{N}{[aa]}$) werden erst dann unmerklich, wenn gleichzeitig alle N auf verschwindend kleine Werthe herabgebracht worden sind. Ist aber dieses Endziel erreicht, so sind auch durch die wiederholt verbesserten Werthe der Unbekannten alle Normalgleichungen (B) zugleich erfüllt, und die Unbekannten haben sonach ihre wahrscheinlichsten Werthe.

Es verdient bemerkt zu werden, dass der Beweis der beständigen Verkleinerung von Q und also der Convergenz dieses Approximationsverfahrens durchaus auf der Voraussetzung beruht, dass man für eine jede Variable jede ihrer successiven Verbesserungen gemäss derjenigen Gleichung bildet, in welcher diese Variable in der Diagonale vorkommt; denn wenn man etwa in irgend einem Systeme lineärer Gleichungen mit gleich vielen Unbekannten von einem beliebigen Werthsysteme derselben ausgehen und successive Verbesserungen so anbringen wollte, dass man die Correction von x stets gemäss einer bestimmten, beliebig ausgewählten, unter den Gleichungen bestimmen würde, ebenso die Correction von y gemäss einer andern willkührlich ausgewählten Gleichung etc., — so würde sich durchaus nicht allgemein beweisen lassen, dass man sich dem wahren Systeme der Werthe der Unbekannten ohne Ende nähert, — es könnte vielmehr (wie man sich leicht überzeugt) sehr wohl geschehen, dass die successiven Werthe der nehmlichen Unbekannten schliesslich ins Unendliche wachsen, oder beständig zwischen endlich auseinander liegenden Grenzen oscilliren.

Wohl aber kann man auch jedes beliebige System lineärer Gleichungen mit gleich vielen Unbekannten in die Normalform (B) bringen, genau nach der auf die Gleichungen (A) angewendeten Vorschrift, und aus dieser Form ist es nach unserer Methode ganz ebenso auflösbar, wie die aus Beobachtungen abgeleiteten Normalgleichungen. Das endlose Umherschwanken oder unendliche Wachsen der aufeinander folgenden Werthe der Veränderlichen ist bei einem Gleichungssysteme dieser besondern Art, und bei unserer Art dasselbe zu behandeln, von vornherein abgeschnitten, weil bewiesen ist, dass man hier dem Ziele, die Quadratsumme Q zu verkleinern, sich mit jedem Schritte nähert, und dass man erst dann dieselbe um nichts Merkliches mehr verkleinert, wenn alle Gleichungen (B) bis auf verschwindend kleine

Grössen erfüllt sind, sonach alle Unbekannten bei ihren definitiven Werthen angelangt sind. Die Summe Q existirt natürlich ebensogut bei einem streng zu erfüllenden Systeme Gleichungen mit der zulässigen Zahl von Unbekannten, wie bei Beobachtungsgleichungen; der einzige Unterschied besteht darin, dass im ersten Falle der Minimalwerth, den sie zuletzt erhält, gleich Null ist.

Der Vorzug gewisser Convergenz, welchen die Normalform (B) der Gleichungen für unsere Art der Auflösung vor beliebigen anderen Formen darbietet, ist natürlich in den auszeichnenden Eigenschaften ihres Coefficientensystemes begründet, welche keineswegs in der Symmetrie um die Diagonale erschöpft sind, und deren wichtigste darin besteht, dass jede aus dem Systeme ausgehobene Unterdeterminante positiv ist, wenn sie zur Diagonale ein Stück der Diagonale des ganzen Systems hat.

Es versteht sich, dass unsere Methode um so schneller zum Ziele führen wird, je mehr die angenommenen Initial-Werthe von x, y, z... der Wahrheit bereits nahe kommen. Für die Gewissheit endlicher Convergenz der Rechnung ist aber der Besitz auch nur annähernd richtiger Anfangswerthe in keiner Weise erforderlich.

In jedem Stadium der Rechnung wäre es strenge genommen das rationellste, zunächst diejenige Variable zu verbessern, durch deren Correctur die Summe der Fehlerquadrate am meisten verringert wird. So einfach indessen der Betrag zu erkennen ist, um welchen diese Summe im Einen oder im andern Falle sich verkleinert, so wird es doch in der Anwendung wohl gewöhnlich schneller zum Ziele führen, wenn man hierin nach dem blosen Ueberblick rasch vorgeht, als wenn man jedesmal nach dem Prinzip systematisch wählt.

Es ist schon hervorgehoben worden, dass es keineswegs nothwendig ist, der Reihe nach alle Unbekannten, eine um die andere zu verbessern, sondern dass man sehr wohl auf eine Variable zurückkommen kann, ehe alle andern gleich oft mit jener corrigirt sind. Dass man aber zu dem definitiven Werthsysteme im Allgemeinen nicht gelangen kann, ohne alle Unbekannten verbessert zu haben, ist an sich evident, und würde sich bei unserm Verfahren auch dadurch manifestiren, dass für die Herabdrückung des Werthes der der vernachlässigten Unbekannten entsprechenden Grösse N, oder was dasselbe heisst, für Erfüllung derjenigen Normalgleichung, in welcher diese Unbekannte die ausgezeichnete Stelle einnimmt, nichts geschehen wäre.[1])

3.

Die Vorschrift, jederzeit den verbesserten Werth einer Unbekannten so zu bestimmen, wie er aus derjenigen Gleichung, in welcher diese Unbekannte die Diagonale einnimmt, durch Substitution der für die andern Unbekannten bis dahin abgeleiteten Werthe sich ergibt, kann auch anders in Worte gefasst werden, und zwar so, dass man die Normalgleichung für x

$$[aa]\ x + [ab]\ y + \cdots + [an] = o$$

gar nicht als gebildet voraussetzt, sondern nur mit den einzelnen Beobachtungsgleichungen agirt, in welchem die Unbekannte x vorkommt, und welche die Form haben

$$a_1\ x + b_1\ y + c_1\ z + \cdots + n_1 = o$$
$$a_2\ x + b_2\ y + c_2\ z + \cdots + n_2 = o$$
etc.

Der Werth von x, welcher zu angenommenen Werthen der andern Unbekannten y, z, ... „am bessten passt“, oder aus der obigen Normalgleichung sich ergibt, ist nämlich kein anderer, als das arithmetrische Mittel, mit Rücksicht auf Gewichte, aus all den Einzelbestimmungen, die sich, unter Voraussetzung der angenommenen Werthe der übrigen Unbekannten y, z, ... als ihrer wahren Werthe, für x aus den verschiedenen Beobachtungs-Gleichungen ergeben, in welchen diese Grösse vorkommt. Denn ist, wie schon im Anfange, vorausgesetzt, dass die einzelnen Beobachtungsgleich-

---

1) Das in § 1 erwähnte von Jacobi angegebene Auflösungsverfahren läuft ebenfalls nach allen seinen linearen Substitutionen so aus, dass die Werthe der letzten Unbekannten durch solche successive Correctionen, wie sie hier proponirt sind, sich bestimmen. Aber die ganze vorbereitende Rechnung, durch welche die Coefficienten ausserhalb der Diagonale bei Jacobi herabgebracht werden, so dass sie zu kleinen Grössen erster Ordnung werden, — worin der Schwerpunkt seiner Methode liegt, und die in der Anwendung sehr mühsam ist, fällt in unserem Rechnungsgange weg, weil der Beweis geführt ist, dass man einer solchen Vorbereitung der Normalgleichungen nicht bedarf, um sich mit Sicherheit dem Ziele zu nähern. Uebrigens war die Umgestaltung der Normalgleichungen in dem speziellen Falle, welcher Jacobi zur Aufstellung seines Verfahrens Anlass gab, nach den besondern Bedingungen desselben, viel mehr indicirt, als sie im gewöhnlichen Falle sein würde.

ungen bereits mit solchen Factoren versehen worden sind, vermöge deren sie alle gleichen „wahrscheinlichen Fehler“ v oder Ein und dasselbe Gewicht 1 haben, und denkt man sich, die Werthe der y , z , . . . seien als richtig bekannt, so wird man für x aus den einzelnen Beobachtungen der Reihe nach die Bestimmungen erhalten

$$x = -\frac{b_1}{a_1}y - \frac{c_1}{a_1}z - \ldots - \frac{n_1}{a_1}$$

$$x = -\frac{b_2}{a_2}y - \frac{c_2}{a_2}z - \ldots - \frac{n_2}{a_2}$$

welche der Reihe nach die wahrscheinlichen Fehler haben $\frac{v}{a_1}, \frac{v}{a_2}, \ldots$ oder die Gewichte a_1^2 , a_2^2 , . . . Denkt man sich daher jeden der Werthe von x , die zum arithmetischen Mittel zusammen genommen werden sollen, so oft angesetzt, als seinem Gewichte entspricht, oder mit anderen Worten, vor der Addition der letzten Gleichungen jede mit ihrem Gewichte multiplicirt, so erhält man für das arithmetische Mittel unter Anwendung der Klammern als Summenzeichen

$$[aa]\,x = -[ab]\,y - [ac]\,z - \ldots - [an]$$

d. h. der nach unserer Vorschrift gebildete Mittelwerth ist derselbe, welchen man für x aus seiner Normalgleichung findet.

In der hiedurch begründeten Weise habe ich, ohne die Normalgleichungen für die Lichtmengen der unter sich verglichenen Sterne zu bilden, das in Rede stehende Verfahren zur Ableitung ihrer wahrscheinlichsten Werthe in meiner oben citirten photometrischen Abhandlung angewandt. In den gewöhnlichen Fällen jedoch, wo die Coefficienten a , b , etc. nicht so einfache Zahlen sind, wie sie in jenem Beispiele waren, und wo desshalb die Ableitung des arithmetrischen Mittels der einzelnen Bestimmungen der Unbekannten sich nicht so einfach gestaltet wie dort, wird die wirkliche Bildung der Normalgleichungen vorzuziehen sein.

4.

Um unter Voraussetzung, dass die Normalgleichungen (B) gebildet worden sind, den Gang der Rechnung noch etwas näher zu erläutern, sei angenommen, dass in einem gewissen Stadium ihres Fortganges zufolge der bis dahin vorgenommenen successiven Correktionen für die Variablen x , y , z ... die Werthe vorliegen X , Y , Z ... Der Ausdruck

$$X + \frac{[ab]}{[aa]} Y + \frac{[ac]}{[aa]} Z + \cdots + \frac{[an]}{[aa]}$$

(welcher nach der ersten Normalgleichung o sein würde, wenn X , Y ... die wahrscheinlichsten Werthe wären) möge in diesem Momente der Rechnung den Zahlenwerth haben ξ:

$$\text{D)} \qquad \xi = X + \frac{[ab]}{[aa]} Y + \cdots + \frac{[an]}{[aa]}$$

so dass also, wenn das gewählte Stadium mit dem Anfange der ganzen Rechnung coincidirt, $[aa]\,\xi$ gleich ist der vorher mit N_1 bezeichneten Grösse, während unmittelbar nach einer an x angebrachten Berichtigung $\xi = 0$ sein würde, weil die letzte Verbesserung von x, durch welche diese Unbekannte den Werth X erhielt, aus der ersten Normalgleichung selbst bestimmt worden ist. Seit diesem Stadium I der Rechnung mögen nun, ehe man zu einer Verbesserung von X schreitet, die übrigen Variablen von ihren Werthen Y , Z , ... aus noch Correctionen Δy , Δz , ... etc. erhalten haben. In Folge dessen ist an die Stelle des Zahlenwerthes ξ getreten

$$\xi + \frac{[ab]}{[aa]} \Delta y + \frac{[ac]}{[aa]} \Delta z + \cdots$$

wobei möglicherweise in der Summe auch mehrere successive Correctionen Ein und derselben Variablen, z. B. ein $\Delta_1 y$, $\Delta_2 y$, beide mit demselben Coefficienten multiplizirt, auftreten können, wenn nämlich seit dem Stadium I der Rechnung dieselbe Variable y mehrmals corrigirt worden ist. Dagegen kommen in dem Ausdrucke Correctionen solcher Unbekannten nicht vor, welche seit der Berechnung von ξ keine weitere Berichtigung erhalten haben.

Um nun durch eine an X anzubringende Verbesserung Δx zu bewirken, dass die Normalgleichung für x wieder genau erfüllt wird, muss man offenbar machen

$$\text{E)} \ldots \qquad \Delta x = -\xi - \frac{[ab]}{[aa]} \Delta y - \frac{[ac]}{[aa]} \Delta z - \ldots$$

Bei der Berechnung dieser Grösse wird man nur wenig Decimalen anzuwenden haben; denn so lange man den wahren Werthen der Unbekannten noch nicht sehr nahe ist, wäre es illusorisch, ihre Verbesserungen sogleich mit bedeutender Genauigkeit suchen zu wollen, — sind aber die noch übrigen Correctionen einmal sehr klein geworden, so haben sie auch nur mehr wenige in Betracht kommende Ziffern. Die Anzahl der Stellen, mit welchen man zu operiren hat, vermindert sich aus letzterem Grunde schliesslich von Stufe zu Stufe. Nur bei Bildung der Grösse ξ, welche aber in den späteren Stadien der Rechnung annullirt ist, wird man unter Umständen etwas mehr Stellen gebrauchen, weil sie vielleicht ihren relativ kleinen Werth durch gegenseitiges Sich-Aufheben grösserer Glieder erhält.

Wenn man den Moment unmittelbar nach Berechnung unseres Δx Stadium II nennt, so ist nunmehr die Grösse ξ', welche an die Stelle von ξ tritt, $=$ o (sowie nach dem oben Gesagten auch ξ schon selbst Null war, wenn Stadium I unmittelbar nach einer Berichtigung von x fiel). Bei der später folgenden weiteren Berichtigung von x hat man es also nur mit Gliedern der Form

$$-\frac{[ab]}{[aa]} \Delta y - \ldots$$

zu thun.

Durch die berechnete Verbesserung von x (Uebergang von X zu X $+ \Delta x$) wird die Summe der Fehlerquadrate vermindert um die Grösse

$$[aa]\, \Delta x^2$$

Sobald Δx gebildet ist, multiplicirt man es mit all den Grössen

$$-\frac{[ab]}{[bb]}, -\frac{[ac]}{[cc]}, \ldots$$

welche in den Normalgleichungen derjenigen Unbekannten vorkommen, mit welchen x durch Beobachtungs-Gleichungen in Verbindung gesetzt ist, — und schreibt sich also in den der Gl. E analogen Gleichungen

$$\text{E}') \quad \begin{aligned} \Delta y &= -\eta - \frac{[ab]}{[bb]}\,\Delta x - \frac{[bc]}{[bb]}\,\Delta z - \ldots \\ \Delta z &= -\zeta - \frac{[ac]}{[cc]}\,\Delta x - \frac{[bc]}{[cc]}\,\Delta y - \ldots \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

sofort das betreffende Glied numerisch an, wobei es sich auch empfehlen mag, dasselbe sogleich mit der vorher hier schon zur Rechten stehenden Zahl zu vereinigen. Der Act einer einzelnen Correction z. B. an der Variablen x besteht hiernach nur darin, dass man die in Gl. E seit der letzten Correction von x rechts aufgelaufenen in Zahlen fertig vorliegenden Glieder zusammen addirt, dass man ihre Summe Δx als neue Correction dem bis dahin erhaltenen Werthe von x beifügt, und sofort in den Ausdrücken von Δy, ... die neuen Summanden $-\frac{[ab]}{[bb]}\Delta x$, etc. ansetzt. Es kommt dabei ganz allein auf Pünktlichkeit in der Ausführung dieser höchst einfachen Operationen an, — so zu sagen auf genaue Buchführung. Es wird namentlich nöthig sein, sich genau die Reihenfolge zu notiren in welcher die verschiedenen Variablen verbessert worden sind, damit man sich von der Entstehung der einzelnen Summanden stets Rechenschaft geben kann. In Fällen, wo man genöthigt ist, eine etwas grössere Anzahl successiver Correctionen anzubringen, wird man wohl thun, dazwischen an irgend einer Stelle mit den bis dahin erlangten Näherungswerthen X, Y, Z, ... der Unbekannten sich die Grössen

$$\begin{aligned} \xi &= X + \frac{[ab]}{[aa]}\,Y + \frac{[ac]}{[aa]}\,Z + \cdots + \frac{[an]}{[aa]} \\ \eta &= Y + \frac{[ab]}{[bb]}\,X + \frac{[bc]}{[bb]}\,Z + \cdots + \frac{[bn]}{[bb]} \\ \zeta &= Z + \frac{[ac]}{[cc]}\,X + \frac{[bc]}{[cc]}\,Y + \cdots + \frac{[cn]}{[cc]} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

direct zu rechnen, und sich nicht darauf zu verlassen, dass z. B. unmittelbar nach einer Correction von x ξ den Werth o haben musste; man wird dadurch die Fortpflanzung eines etwa begangenen Fehlers durch einen grösseren Theil der Rechnung abschneiden, übrigens, wenn etwa ein solcher entdeckt würde, im allgemeinen nicht veranlasst sein, den fehlerhaften Theil der Rechnung zu berichtigen, sondern nur nach Richtigstellung der jetzt vorliegenden Werthe von ξ, η, ... von da ab weiter rechnen, um die Grössen X, Y, ... zu corrigiren, — weil in der Regel diese Werthe doch bereits der Wahrheit näher liegen werden, als die, von welchen man ausging.

Soll die definitive Bestimmung einer Unbekannten x etwa bis auf $\frac{1}{100}$ derjenigen Grösse genau werden, um welche die einzelnen Bestimmungen dieser Unbekannten von einander abweichen, oder um welche man vom Anfange an unsicher über ihren wahrscheinlichsten Werth sein kann, — so muss das Gewicht der probabelsten Bestimmung von x sich 10000 mal höher stellen, als das der Bestimmung aus einer einzelnen Beobachtung. Da dieser Fall äusserst selten realisirt sein wird, so ist es evident, dass es fast immer verlorene Mühe wäre, mehr als drei giltige Ziffern in der Verbesserung des Werthes einer Unbekannten erreichen zu wollen.

Dem schon mehrfach citirten älteren Beispiele entnehme ich noch die Anführung (p. 93 meiner älteren Abhandlung), dass dort eine zweimalige Durchrechnung durch das ganze System der Unbekannten nebst einigen partiellen Correctionen genügt hat, um die vierte Decimale rechnerisch festzulegen, während die Differenzen der einzelnen Beobachtungen die zweite betreffen.

5.

Die erlangte Uebung in der Anwendung irgend eines Rechnungs-Verfahren pflegt für die vortheilhafteste Handhabung desselben stets noch gewisse Directiven zu geben, welche sich durch theoretische Erörterung überhaupt nicht, und am wenigsten bei einer noch neuen Methode ersetzen lassen. Doch will ich Eines speciellen Umstandes Erwähnung thun, auf welchen ich bei der Ausgleichung meines photometrischen Netzes aufmerksam geworden bin. Man denke sich, dass in einem besondern Falle etwa die zwei Coefficienten

$$\frac{[ab]}{[aa]} \quad \text{und} \quad \frac{[ab]}{[bb]}$$

beide relativ beträchtliche Werthe haben (ihr Product ist übrigens nothwendig immer kleiner als Eins). Es wird dies dann der Fall sein, wenn durch die Beobachtungen zwischen den Variablen x und y ein solcher Connex hergestellt ist, dass der Werth einer jeden von diesen beiden vorzugsweise stark von dem Werthe der andern beeinflusst wird, wie dies aus den Normalgleichungen, z. B. in ihrer Form E , E ' ersichtlich ist. Jede Aenderung Δx wird alsdann ein nicht unbeträchtliches Δy erzeugen, — da aber dieses letztere auch wieder relativ stark auf Δx zurückwirkt, u. s. w. (in abnehmender geometrischer Progression), so wird man hier gut thun, den Einfluss von Δx auf weitere Variable z . . . erst dann zu berechnen, wenn Δx schon gemäss seiner Verbindung mit Δy corrigirt ist, also so zu sagen erst die zwei Variablen x und y unter sich abzugleichen, ehe man auf die andern übergeht. Uebrigens kann man leicht alle die sekundären, tertiären etc. Aenderungen summiren, welche an x selbst dadurch erzeugt werden, dass ein primär berechnetes $\Delta x = \alpha$ eine Aenderung $\Delta y = -\frac{[ab]}{[bb]}\alpha$ erzeugt, die dann auf x mit dem Betrage $+\frac{[ab]}{[aa]}\frac{[ab]}{[bb]}\alpha$ zurückwirkt etc.: die ganze Veränderung von x wird hier die Summe der geometrischen Reihe

$$\alpha\left(1+\frac{[ab]\,[ab]}{[aa]\,[bb]}+\ldots\right)$$

$$=\frac{1}{1-\dfrac{[ab]\,[ab]}{[aa]\,[bb]}}$$

oder nach der gewöhnlichen und oben bei C) erwähnten Schreibweise, $= \alpha \frac{[bb]}{[bb.1]}$; so dass also die zuerst indicirte Aenderung α an x wegen der Verbindung zwischen dieser Grösse und y (nach welcher y bis zu einem gewissen Grade sich dem x accomodiren muss) noch einen sie jederzeit vergrössernden Factor erhält $\frac{[bb]}{[bb.1]}$. In gleicher Weise summirt sich hier die durch jenes α veranlasste Aenderung an y im Ganzen auf $-\alpha \frac{[ab]}{[bb.1]}$, indem ihr zuerst entstehender Bestandtheil $-\alpha \frac{[ab]}{[bb]}$ durch die secundären etc. Glieder denselben vergrössernden Factor $\frac{[bb]}{[bb.1]}$ erhält, der bei Δx sich ergibt.

Gerade so, wie hier x und y zu einer Gruppe zusammengenommen werden, die man für sich zusammenstimmt, ehe man von ihnen aus zu anderen Variablen übergeht, — kann auch der Fall vorkommen, wo es nützlich erfunden wird, jedesmal die Veränderlichen eines etwas ausgedehnteren partiellen Systems unter sich abzugleichen, ehe man von ihnen aus in der Rechnung auf sozusagen ferner liegende Unbekannte übergeht. Auch für solche Verbindungen von mehr als zwei Veränderlichen beweist man leicht, dass jede zuerst an x nach Vorschrift der Gleichung E) angebrachte Correction noch eine nachträgliche Verstärkung erhält durch die Rückwirkung auf x aller durch sie selbst an y, z, ... hervorgerufenen Aenderungen, also so zu sagen durch ihren eigenen Reflex; nur wird, je mehr Veränderliche man mit einander behandelt, desto leichter dieser Effect unkenntlich gemacht werden durch die Vermischung mit Correctionsgliedern von anderer Abstammung.

6.

Die Zulassung - engerer Grössen - Complexe innerhalb des weiteren führt uns über auf die Bemerkung, dass überhaupt vielleicht der wichtigste Vorzug, der bei ausgedehnten Systemen von Unbekannten der vorgeschlagenen Rechnungsart zukommen möchte, gerade darin besteht, dass sie es leicht macht, aus abgetheilten Beobachtungssystemen, von welchen etwa jedes für sich schon ausgeglichen ist, ein Ganzes zu bilden und dasselbe strenge einheitlich abzugleichen. Man stelle sich einen Fall vor, ähnlich demjenigen, der vorliegt, wenn die Triangulationen von zwei aneinanderstossenden Ländern oder auch nur zwei sich anliegende Polygone eines Dreiecknetzes in Verbindung gebracht werden sollen; d. h. man nehme an, dass das Beobachtungsmaterial (niedergelegt in Gleichungen der Form A), welches sehr viele Unbekannte enthalten mag, sich unter zwei Rechner so vertheilen lässt, dass die Gleichungen, welche gewisse Unbekannte enthalten, ausschliesslich dem ersten, diejenigen mit anderen Unbekannten ausschliesslich dem zweiten zugewiesen werden, und dass nur verhältnissmässig wenig Unbekannte einer dritten oder intermediären Gruppe durch Beobachtungsgleichungen einerseits mit Variablen des ersten und andererseits mit solchen des zweiten Systemes in Verbindung gebracht sind, und so den Zusammenhang beider Systeme vermitteln. Die Normalgleichungen (in der Form E, E^1) für die Unbekannten dieser verbindenden Art müssen von beiden Rechnern (natürlich übereinstimmend) angesetzt werden: ihre Glieder zur Rechten (auch die Complexe $\xi . \eta \ldots$) werden von selbst in drei Theile zerfallen, die Unbekannten des ersten, des zweiten und des intermediären Systems, resp. deren Correctionen, enthaltend. Ausserdem hat jeder Rechner vor sich die Normalgleichungen für die ihm allein zugetheilten Unbekannten. Indem nun ausgeglichen wird, muss von Zeit zu Zeit an gewissen Abschnitten der Arbeit jeder Rechner dem andern für die Normalgleichungen der gemeinsamen Unbekannten die Zahlenwerthe derjenigen Glieder mittheilen, welche aus den Correctionen der Unbekannten erwachsen sind, die dem Empfänger der Mittheilung fremd sind: die beiderseitigen Beiträge an solchen Gliedern sind mit einander und mit den Gliedern der gemeinsamen Art numerisch zusammenzulegen zur Bildung derjenigen Correctionen der intermediären Unbekannten, mit welchen jetzt jeder der beiden Rechner auf die Unbekannten seines Systemes zurückkommt. Gesetzt, man hätte zuerst mit Ignorirung der Verbindungsgleichungen jedes der zwei Hauptsysteme selbstständig ausgeglichen, so würde diese Arbeit, wenn man jetzt die Verbindung herstellen und das Ganze einheitlich bearbeiten will, durchaus nicht als eine verlorene anzusehen sein; denn weil hiernach jedenfalls für die grosse Mehrzahl der Unbekannten die Werthe schon sehr nahe den definitiv wahrscheinlichsten gebracht wären, so würde eine desto schnellere Convergenz für die noch übrigen Schritte zu erwarten sein. Uebrigens müsste man beachten, dass für diejenigen Unbekannten, welche beide Systeme in Verbindung bringen, natürlich die Coefficienten in den Normalgleichungen sich ändern, wenn Beobachtungen jetzt mit in Betracht kommen, von welchen vorher keine Notiz genommen war.

7.

Noch einfacher als der soeben besprochene Fall ist der andere, wo für eine Anzahl Unbekannter, deren wahrscheinlichste Werthe man aus einem abgeschlossenen Beobachtungs-Systeme ermittelt hat, neue Beobachtungen, vielleicht wieder ein ganzes System von solchen, aufgestellt worden sind. Da durch den Hinzutritt derselben die Coefficienten [aa], [ab] etc. der Normalgleichungen sich durchaus verändern, so muss man nach der gewöhnlichen Auflösungsart Alles neu rechnen, und wird höchstens unter Umständen den Vortheil benützen können, mit weniger Decimalen zu rechnen, soferne die noch zu erwartenden Verbesserungen der Unbekannten beträchtlich kleiner ausfallen werden, als die früher bestimmten. Sich etwa so zu helfen, dass man aus dem neuen Systeme die Unbekannten unabhängig berechnet, und dann aus dem nach dem ersten System und aus dem nach dem zweiten erhaltenen Werthe von x das Mittel mit Rücksicht auf Gewichte nimmt, — wäre, wenn man mit mehr als Einer Unbekannten zu thun hat, keineswegs ein strenges Verfahren: es würde nicht den nach allen Beobachtungen nunmehr wahrscheinlichsten Werth von x liefern, und kann ihn schon desshalb nicht liefern, weil bei dieser Art vorzugehen auf die Verbindung der Unbekannten nicht Rücksicht genommen wird, vermöge deren immer ein anderer Werth für x der probabelste wird, je nachdem y, z ... sich verändern. Nach unserer Methode der Annäherung bildet man durch Summation der Werthe von [aa] etc. aus den beiden Systemen die Normalgleichungen für das vereinigte Material in ihrer Form B); bringt sie, indem man von den bereits vorliegenden genäherten Werthen der

Unbekannten ausgeht, in die Form E), und wird nun mit um so kleineren Werthen der Correctionen $\varDelta x$ etc. zu thun bekommen, also um so schneller zum Ziele der systematischen Ausgleichung gelangen, je näher schon aus den alten Beobachtungen die richtigen Werthe der Unbekannten hervorgegangen waren.

8.

Wenn man bei Anwendung des hier vorgeschlagenen Rechnungsganges das Gewicht der Bestimmung irgend einer Unbekannten ermitteln will, so kann man dazu ausgehen von folgendem Satze, der als die Definition des Ausdruckes „Gewicht" angesehen werden kann [1]):

„Die Bestimmung einer Zahl g als wahrscheinlichster Werth von x aus einem gewissen Beobachtungssysteme hat dann das Gewicht p, wenn durch den Hinzutritt einer neuen Beobachtung vom Gewichte 1, welche ergeben hätte

$$x = g + u$$

der wahrscheinlichste Werth von x sich vergrössern würde um $\frac{u}{p+1}$ (so dass er jetzt, und zwar mit dem Gewichte $p + 1$, bestimmt wäre $= g + \frac{u}{p+1}$).“

Um also das Gewicht der erlangten Bestimmung von x zu finden, fingire man, dass zu den Beobachtungsgleichungen, aus welchen x berechnet war, noch eine neue vom Gewichte 1 hinzutrete, welche für x ergeben hätte den vorher gefundenen Werth, verändert um eine willkührlich angenommene Grösse u (die man numerisch wählen kann). Durch diese Fiction wird nur die Normalgleichung für x verändert (indem an die Stelle von [aa] tritt [aa] + 1 und an die Stelle von [an] · · · [an] — der fingirte neu beobachtete Werth von x. Aus der hiernach abgeänderten Normalgleichung E berechnet man nun, gemäss unserer Vorschrift, eine primäre Correction von x, die an den übrigen Variablen entsprechende Correctionen erzeugt, welche auf x wieder

1) Mit den Determinanten-Ausdrücken für die Werthe der Unbekannten und der Gewichte beweist man ganz leicht, dass obige Definition des Gewichtes mit der Gauss'schen Rechnungsvorschrift in Einklang steht.

zurückwirken etc., — bis das Verfahren der successiven Annäherung wieder zu stehenden Werthen führt. Ergibt sich dann der neue schliessliche Werth von x verschieden von dem alten um v, so ist $v = \frac{u}{p+1}$, also $p = \frac{u-v}{v}$.

Die Rechnungsvorschrift kann noch etwas einfacher, nur mit nicht ganz so einleuchtender Begründung, so gestellt werden: „*Um das Gewicht p des gefundenen Werthes von x zu bestimmen, denke man sich lediglich die (in ξ steckende) Grösse [an] um einen willkürlichen Betrag — ϱ gegen vorher verändert. Die Veränderung, welche hiedurch nach allen Abgleichungen am definitiven Werthe von x sich ergibt, ist alsdann $\varrho : p$.*" Die Determinanten-Ausdrücke für die Gewichte beweisen nämlich, dass diese Vorschrift mit der vorigen, sowie mit der Gaussischen, in Einklang steht.

Da fast immer eine genaue Bestimmung des Gewichtes zwecklos sein würde (indem man aus bekannten Gründen den damit berechneten Werth des wahrscheinlichen Fehlers von x doch für zu klein halten muss), so wird auch in derjenigen Rechnung, durch welche es ermittelt wird, kein sehr hoher Grad von Annäherung zu erstreben sein.

Es sei gestattet, hier in Betreff der Gewichte eine Anmerkung beizufügen, ungeachtet der Möglichkeit, dass deren Inhalt nicht ganz neu wäre. Bekanntlich hängt das Gewicht z. B. der Bestimmung von x gar nicht ab von der Uebereinstimmung der verschiedenen Beobachtungen, welche zu ihr beitragen, unter sich, sondern allein von ihrer Anordnung; denn in seinem Ausdrucke kommen die Grössen n gar nicht vor, durch deren Abänderung man doch die Harmonie der Beobachtungen unter sich beliebig erhöhen oder vermindern könnte [1]). Da nun eine Beobachtung mehr unsere Kenntniss nur vergrössern, nie vermindern kann, so kann ihr Hinzutreten zu dem schon vorhandenen Materiale auch die Gewichte der Unbekannten unmöglich vermindern. Wenn

---

1) Dagegen hängt der Werth für den „wahrscheinlichen Fehler" einer einzelnen Beobachtung und in Folge dessen auch der Bestimmung einer Unbekannten sehr stark ab von der Harmonie der Beobachtungen unter sich.

man sonach aus irgend einem System von Beobachtungen ein kleineres System aushebt (z. B. ein Polygon aus einem Dreiecksnetze) und in diesem für sich die Unbekannten und ihre Gewichte bestimmt, so kann man wohl kleinere, aber nie grössere Gewichte finden, als man bei einheitlicher Ausgleichung des grossen Systemes erhalten würde. Man kann sich also auf diese Weise, und zwar unter Umständen relativ leicht, eine untere Limite für das Gewicht einer Variablen verschaffen, und da es wichtiger ist, dass man dasselbe nicht zu hoch, als dass man es nicht zu niedrig schätzt, so wird deren Aufstellung im Allgemeinen mehr Interesse darbieten, als die der oberen Limite, die vom Gewichte der Variablen nicht erreicht werden kann. Diese letztere hat man jederzeit sofort zur Hand; das Gewicht der Bestimmung von x ist nothwendig immer kleiner als [aa], weil es auf dem von Gauss angegebenen Wege gleich gefunden wird einer Grösse [aa . r], die aus der positiven Grösse [aa] durch wiederholtes Subtrahiren kleinerer positiver Grössen abgeleitet wird. Auch alle Grössen [aa . 1] , [aa . 2] etc., welche an die Stelle von [aa] treten, indem man andere Unbekannte als x eliminirt, sind grösser als das Gewicht für x.

9.

Schliesslich sei noch, der Vollständigkeit wegen, des Umstandes Erwähnung gethan, dass unsere Auflösungsmethode auch dann angewendet werden kann, wenn für die Unbekannten x , y , . . . neben den (möglicherweise durch Fehler entstellten) Beobachtungsgleichungen A) auch noch strenge zu erfüllende Bedingungsgleichungen

$$\text{F)} \qquad \begin{array}{c} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \cdots + \nu_1 = o \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \cdots + \nu_2 = o \\ \text{etc.} \end{array}$$

existiren; obwohl sie nicht für diesen Fall aufgestellt ist, und ich nicht die Absicht habe, ihre Anwendung auf denselben zu empfehlen; denn bekanntlich kann man dem Auftreten dieses Falles und der mit ihm stets verbundenen, oft sehr bedeutenden Anhäufung überzähliger Unbekannten durch eine geeignete Wahl der Variablen stets vorbeugen. Auf welche Art dies z. B. in dem wichtigen Falle der Berechnung eines auf dem Rotations-Ellipsoid gelegenen Dreiecknetzes sich ausführen lässt, gedenke ich in einer zweiten Abbandlung, zu welcher die gegenwärtige eigentlich nur eine Vorarbeit darstellt, des Näheren zu erörtern.

Die übliche Behandlung des in Rede stehenden Falles besteht bekanntlich darin, dass man vorerst statt der Grösse Q die Grösse

$$\begin{aligned} Q' = Q &+ \lambda_1 (\alpha_1 x + \beta_1 y + \cdots + \nu_1) \\ &+ \lambda_2 (\alpha_2 x + \beta_2 y + \cdots + \nu_2) \\ &+ \cdots \end{aligned}$$

zum Minimum macht: dabei bezeichnen λ_1, $\lambda_2 \cdots$ für den Augenblick noch unbestimmte Coefficienten, so viele an der Zahl, als Bedingungsgleichungen vorhanden sind. Man erhält dadurch statt der Normalgleichungen B) die folgenden:

$$\text{G)} \quad \begin{aligned} [aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + \cdots + [an] + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \cdots &= 0 \\ [ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z + \cdots + [bn] + \beta_1\lambda_1 + \beta_2\lambda_2 + \cdots &= 0 \\ [ac]\,x + [bc]\,y + [cc]\,z + \cdots + [cn] + \gamma_1\lambda_1 + \gamma_2\lambda_2 + \cdots &= 0 \\ \text{etc.} \end{aligned}$$

Sind sie nach x, y, z, ... aufgelöst, so hat man diese Grössen durch die neuen Unbekannten λ_1, λ_2 etc. ausgedrückt; man substituirt diese Ausdrücke in die Bedingungsgleichungen F, und hat hiernach zur Bestimmung der λ soviel Gleichungen, als solche Unbekannte vorhanden sind, — und zwar wieder lineäre Gleichungen, deren Coefficienten, wie im Systeme B), gegen die Diagonale symmetrisch sich stellen [1]), — die also auf dieselbe Art zu lösen sind, wie die Gleichungen B).

Der Unterschied, welchen dagegen die Gleichungen G) gegenüber den B) aufweisen, besteht darin, dass an die Stelle der Grössen [an], [bn] etc. Polynome getreten sind von der Form $[an] + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \cdots$ Aus der lineären Natur der Gleichungen G) folgt aber sofort, dass ihre Auflösungen bei dieser polynomischen Gestalt der von den x, y, ... unabhängigen Glieder nichts anderes sind, als die Summen der Einzelauf-

1) Ob ein Beweis, dass diese Form nothwendig immer zum Vorschein kommt, schon irgendwo publicirt ist, kann ich im Augenblicke nicht angeben; jedoch ist dieser Beweis mittelst der Determinanten-Ausdrücke für die x, y, ... leicht zu führen.

lösungen, welche man für x , y ... erhielte, wenn an der Stelle des letzten Gliedes entweder 1) nur die [an] , [bn] , [cn] etc. allein, — oder 2) nur die $\alpha_1\lambda_1$, $\beta_1\lambda_1$, $\gamma_1\lambda_1$ etc. allein, — oder 3) nur die $\alpha_2\lambda_2$, $\beta_2\lambda_2$, $\gamma_2\lambda_2 \cdots$ allein stünden; das heisst: löst man sich nach und nach folgende Gleichungssysteme auf:

$$
1)\qquad \begin{array}{l}
[aa]\, x + [ab]\, y + [ac]\, z + \cdots + [an] = 0 \\
[ab]\, x + [bb]\, y + [bc]\, z + \cdots + [bn] = 0 \\
[ac]\, x + [bc]\, y + [cc]\, z + \cdots + [cn] = 0 \\
\text{etc.}
\end{array}
$$

$$
2)\qquad \begin{array}{l}
[aa]\, x + [ab]\, y + [ac]\, z + \cdots + \alpha_1 = 0 \\
[ab]\, x + [bb]\, y + [bc]\, z + \cdots + \beta_1 = 0 \\
[ac]\, x + [bc]\, y + [cc]\, z + \cdots + \gamma_1 = 0 \\
\text{etc.}
\end{array}
$$

$$
3)\qquad \begin{array}{l}
[aa]\, x + [ab]\, y + [ac]\, z + \cdots + \alpha_2 = 0 \\
[ab]\, x + [bb]\, y + [bc]\, z + \cdots + \beta_2 = 0 \\
[ac]\, x + [bc]\, y + [cc]\, z + \cdots + \gamma_2 = 0 \\
\text{etc}
\end{array}
$$

und so fort (wobei in den Systemen 2) , 3) etc. die Glieder [an] , [bn] etc. nicht vorhanden sind) — und bezeichnet man momentan die aus 1) hervorgehenden Werthe von **x** , y , z ... mit x_0 , y_0 , z_0 etc., die aus 2) hervorgehenden mit x_1 , y_1 , z_1 etc., die aus 3) hervorgehenden mit x_2 , y_2 , z_2 etc. u. s. f., so werden die dem Systeme G) genügenden und in F) zu substituirenden Werthe der x , y , z ... offenbar sein:

$$
\begin{array}{l}
x = x_0 + x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 + \cdots \\
y = y_0 + y_1\lambda_1 + y_2\lambda_2 + \cdots \\
z = z_0 + z_1\lambda_1 + z_2\lambda_2 + \cdots \\
\text{etc.}
\end{array}
$$

Da nun die Systeme 1) , 2) etc. aufgelöst werden können, wie früher das System B), und da dann Gleiches von dem Systeme F gilt, nachdem in ihm die Werthe der x , y ... durch die λ_1 , λ_2 , ... substituirt sind, — so ist der Fall auf den vorher besprochenen zurückgeführt. Indessen scheint für diesen Fall die Auflösung der Gleichungen durch successive Annäherung keineswegs den Vorzug zu verdienen vor derjenigen auf dem gewöhnlichen Weg (bei welcher letzteren ein grosser Theil der zur Auflösung der Systeme 1), 2) etc. nöthigen Arbeit nur einmal auszuführen ist); diesen Umstand halte ich aber desshalb für irrelevant, weil, wie schon erwähnt, Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten jederzeit vermieden werden können, und zwar mit dem grossen Vortheil, dass man die Anzahl der Unbekannten vermindert. Angenommen z. B. man hätte 70 Unbekannte und zwischen ihnen 30 Bedingungsgleichungen, so lässt sich die Aufgabe offenbar von vorn herein so behandeln, dass man nur mit $40 = 70 - 30$ von einander unabhängigen Unbekannten zu thun hat, — während die in unserem letzten Abschnitt erwähnte übliche Behandlungsweise zu den 70 Grössen x, y ... noch 30 neue Unbekannte λ_1, λ_2 ... hinzufügt, im Ganzen also 100 Unbekannte, statt 40, in's Feld führt.