

Beobachtungen und Untersuchungen
über die
Eigenschaften und die practische Verwerthung
der
Naudet'schen Aneroidbarometer

von
Carl Max v. Bauernfeind.

Mit 1 Steindrucktafel.

Aus den Abhandlungen der k. bayer. Akademie der W. II. Cl. XI. Bd. III. Abth.

München 1874.
Verlag der k. Akademie,
in Commission bei G. Franz.
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

Beobachtungen und Untersuchungen
über die
Eigenschaften und die practische Verwerthung
der
Naudet'schen Aneroïdbarometer

von
Carl Max v. Bauernfeind.

Die Aneroïde oder Federbarometer haben sich unglaublich rasch unter denjenigen Gelehrten und Ingenieuren, deren Beruf ihnen die Bestimmung der gegenseitigen Lage von Punkten der Erdoberfläche auferlegt, verbreitet, und hiezu trug nicht blos die Bequemlichkeit des Transports und der Handhabung, sondern auch der Glaube an die grosse Leistungsfähigkeit dieser Instrumente bei. Insbesondere haben sich die Bauingenieure derselben bemächtigt, um damit vorläufige Tracirungen von Strassen und Eisenbahnen vorzunehmen, wobei es wesentlich nur darauf ankommt, die Höhenlage von aufeinander folgenden Thälern und Wasserscheiden mit einzelnen Zwischenpunkten annähernd zu kennen. Gerade aber in dieser Kategorie höherer Techniker begegnet man sehr oft übertriebenen Vorstellungen von der Genauigkeit der Höhenbestimmung mit Federbarometern. Die schon ziemlich ausgebreitete Literatur über diesen Gegenstand begünstigt im Allgemeinen jene Vorstellungen und tritt ihnen nur ausnahmsweise entgegen; in beiden Fällen jedoch, wie ich glaube, ohne vollständige Begründung. Denn ein richtiges Urtheil über den Werth eines Instruments kann man nur durch zahlreiche Beobachtungen und Vergleichen erlangen, welche

sich sowohl auf dessen Constanten, als auf die Wiedergabe von vorher schon genau gemessenen Grössen erstrecken. An dergleichen Beobachtungen und Vergleichen leiden wir aber immer noch Mangel, sowie es auch an scharfen Begriffsbestimmungen über die Constanten der Aneroïde und an experimentellen Nachweisen über die Richtigkeit der analytischen Ausdrücke für die an den Messungsergebnissen anzubringenden Verbesserungen fehlt. Um diesen Mängeln abzuhelpen, habe ich seit längerer Zeit an und mit drei Naudet'schen Aneroïden, deren Abbildung und Beschreibung in meinen Elementen der Vermessungskunde (IV. Auflage 1873, Bd. I, S. 410—417, Bd. II, S. 342—348) zu finden ist,¹⁾ zahlreiche Beobachtungen angestellt und die damit verknüpften Untersuchungen nunmehr zum Abschlusse gebracht.

Indem ich deren Ergebnisse nach dem Beschlusse der mathematisch-physicalischen Classe unserer Akademie vom 7. März d. J. an dieser Stelle veröffentliche, gebe ich mich der Hoffnung hin, dass hiedurch nicht blos einige schon von Anderen ausgesprochene Ansichten bestätigt, sondern auch neue Thatsachen und Methoden zur Constantenbestimmung begründet, schwankende Begriffe festgestellt und unklare Vorstellungen von der Grösse der mittleren Messungsfehler der Aneroïde berichtigt werden.

I. Die Beziehungen zwischen den Angaben eines Naudet'schen Feder- und eines Quecksilberbarometers.

Mein oben angeführtes Lehrbuch der technischen Geometrie und die Abhandlung von Höltschl überheben mich einer genauen Abbildung und Beschreibung der Naudet'schen Aneroïde, womit ich meine Beobachtungen und Untersuchungen angestellt habe. Ich bemerke nur, dass alle drei gleiche Construction und Schablonenscalen von 12 Centimeter Durchmesser besitzen, und dass sie nicht direct vom Verfertiger, sondern von J. Feiglstock in Wien bezogen worden sind: zwei die Zahlen 38255 und 38262 tragende bereits im Jahre 1871 und das dritte mit der Zahl 50700 versehene im verflossenen Jahre 1873. In der

¹⁾ Ausserdem vergleiche man: Bulletin de la société d'encouragement etc. Sept. 1866, und J. Höltschl, die Aneroïde von Naudet und Goldschmidt, Wien 1872.

Folge werde ich das mit der Zahl 38255 bezeichnete Instrument Nr I, das mit 38262 überschriebene Nr II und das zuletzt angeschaffte Nr III nennen.

Um mit einem Naudet'schen Federbarometer in der Weise, wie es mit einem Quecksilberbarometer geschieht, Höhen messen zu können, muss man im Stande sein, aus den Angaben des Aneroids, nämlich aus der Ablesung B an der Scala und der Temperatur t des Instrumentes, den auf die Normaltemperatur 0^0 reducirten Stand A_0 des Quecksilberbarometers zu berechnen, welcher jenen Angaben entspricht. Diese Reduction hängt erfahrungsgemäss von drei Correctionen ab, nämlich von der absoluten oder Standcorrection c , der Theilungscorrection c' und der Wärmecorrection c'' .

1. Unter der absoluten oder Standcorrection verstehe ich die Anzahl Millimeter c , um welche die Barometerstände A_0 und B_0 bei der Normaltemperatur 0^0 und dem Normalluftdruck von einander abweichen. Nimmt man diesen Druck A_0 zu 760^{mm} Quecksilber an, so ist allgemein

$$c = 760 - B_0 \quad (1)$$

und es kann hienach die Constante c positiv oder negativ sein. Diese Correction des Barometerstandes B_0 würde wegfallen, wenn es anginge, das Aneroid durch die auf der Rückseite desselben angebrachte Stellschraube so zu berichtigen, dass dessen Zeiger bei dem Normaldrucke und der Normaltemperatur immer über der Zahl 760 stünde; diese Stellung ist jedoch nicht leicht hervorzubringen und, wenn sie einmal stattfindet, nur auf kurze Zeit zu erhalten, weil der Mechanismus der Aneröide ziemlich wandelbar ist. Es ist daher nothwendig, die Standcorrection c (so genannt, weil sie den bei 0^0 Temperatur stattfindenden Unterschied zweier Barometerstände A_0 und B_0 anzeigt) von Zeit zu Zeit nach einer der weiter unten zu beschreibenden Methoden zu bestimmen und bei den Reductionen in Rechnung zu bringen.

Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, dass die Definition der Standcorrection keineswegs unbedingt an den normalen Luftdruck von 760^{mm} Quecksilber, wie er am Meere stattfindet, gebunden ist; es empfiehlt sich aber, diesen Druck in die Begriffsbestimmung der Stand-

correction aufzunehmen, weil er eine allgemein bekannte Grösse ist und, wie sich später ergibt, bei allen wirklichen Höhenmessungen die Theilungscorrection c' positiv macht. Wollte also Jemand den mittleren Barometerstand seines Wohnorts in die Definition der Standcorrection einführen, so unterläge dieses keinem Anstande, es würde dann aber nicht blos die Constante c , sondern auch die Theilungscorrection c' sich ändern und nur die algebraische Summe beider Correctionen dieselbe bleiben.

2. Was die Theilungscorrection c' anbelangt, so rührt dieselbe davon her, dass die Scalen der Aneröide nach Schablonen angefertigt sind und folglich bei gleichem Durchmesser auch gleiche Theile haben, während die Zeiger der Federbarometer sich nicht genau proportional dem Luftdrucke bewegen. Die Ausgleichung, welche nothwendig ist, um bei der Normaltemperatur 0^0 die Angabe eines Aneröids ($B + c$) der des Quecksilberbarometers (A_0) gleich zu machen, heissen wir Theilungscorrection. Eine solche Ausgleichung wäre unnöthig in dem Falle, wo die Scala des Federbarometers genau nach der des Normalbarometers abgeglichen, d. i. etwa von 5 zu 5 oder von 10 zu 10 Theilstrichen durch Versuche mit der Luftpumpe, bei der Temperatur 0^0 angestellt, bestimmt worden wäre; solche Specialscalen kommen aber bei den zu wirklichen Messungen verwendeten Federbarometern selten oder nicht vor und deshalb kann auch die Theilungscorrection c' bei der Reduction der Aneröidablesungen auf den Stand des Quecksilberbarometers in der Regel nicht entbehrt werden.

Diese Correction ist bei der Normaltemperatur 0^0 und dem normalen Luftdrucke von 760^{mm} Quecksilber offenbar null und wird um so grösser, je weiter der Zeiger des Aneröids von dem Theilstriche 760 nach der einen oder anderen Seite absteht, d. h. je grösser der Bogen $760 - A_0$ ist. Es liegt daher nahe, die Theilungscorrection c' diesem Bogen proportional anzunehmen und

$$c' = b (760 - A_0) \quad (2)$$

zu setzen, wobei b ein durch Versuche zu bestimmender Coefficient, der Theilungscoefficient, ist und A_0 den auf 0^0 reducirten Stand des

Quecksilberbarometers bezeichnet, welcher der bei der Temperatur des schmelzenden Eises auf dem Federbarometer gemachten Ablesung B_0 entspricht.

Der Ausdruck (2) für die Theilungscorrection, welcher sich zunächst lediglich durch seine Einfachheit und den Umstand empfiehlt, dass er jedenfalls mit dem Bogen $760 - A_0$ in irgend einer Weise wachsen muss, wird nicht von allen Schriftstellern über das Naudet'sche Aneroid als unbedingt richtig angenommen, indem einige den Ausdruck für c' noch durch ein zweites Glied von der Form $b'(760 - A_0)^2$ verbessern wollen, was andere jedoch nicht für nothwendig halten.¹⁾ Ich muss mich auf Grund von Versuchen, die ich weiter unten mittheilen werde, und die ich angestellt habe, weil es von Anderen noch nicht oder doch nicht in genügender Weise geschehen war, für die letztere Ansicht aussprechen und halte demzufolge den Ausdruck $b(760 - A_0)$ für ausreichend, um daraus die Verbesserungen der Ablesungen auf den Schablonenscalen der Federbarometer zu berechnen, sobald b bestimmt ist.

3. Wenn man bei gleichbleibendem Drucke A_0 der Atmosphäre ein Aneroid bei verschiedenen Temperaturen abliest, so findet man, dass diese Ablesungen bei höheren Temperaturen grösser und bei niedrigeren kleiner werden als bei der Normal-Temperatur von 0^0 ; es ist also in dem ersten Falle von der Ablesung B eine positive Grösse c'' abziehen und in dem zweiten eine solche zur Ablesung hinzuzufügen, um die Ablesung B_0 , welche der Normaltemperatur entspricht, zu erhalten. Diese Grösse c'' heissen wir die Wärmecorrection und verstehen demnach darunter den Unterschied zwischen der um die Stand- und Theilungscorrection verbesserten Aneroidablesung $(B + c + c')$ und dem auf 0^0 reducirten Stande (A_0) des Quecksilberbarometers, welcher zur Ablesung B auf dem Federbarometer gehört. In dem besonderen Falle, wo $c' = 0$ ist, bedeutet die Wärmecorrection den Unterschied zwischen der bei der Temperatur t und dem Normaldrucke erhaltenen

1) Man vergleiche J. Höltschl, die Aneröide von Naudet und Goldschmidt, Wien 1872; ferner H. Schoder, Hülftafeln zur barometrischen Höhenmessung, Stuttgart 1872; weiter W. Jordan, das Federbarometer und seine Anwendung zum Höhenmessen in der Zeitschrift für Vermessungswesen. Jahrgang 1873; endlich den in dieser Zeitschrift geführten Streit zwischen Schoder und Höltschl, Jahrgang 1873.

und um die Standcorrection verbesserten Aneroidablesung ($B + c$) und dem Normaldrucke von 760^{mm} Quecksilber. Da die Wärmecorrectionen, wie ich ebenfalls weiter unten durch Versuche nachweisen werde, den von 0° an gezählten Temperatur-Differenzen t proportional gesetzt werden dürfen, so ist bei den für diese Differenzen gebräuchlichen Vorzeichen und dem vorhin besprochenen Steigen und Fallen der Werthe von B die Wärmecorrection

$$c'' = - at \quad (3)$$

wobei a den durch Versuche zu bestimmenden Wärmecoefficienten bezeichnet. Diese Verbesserung wird also bei allen Beobachtungen null, für welche die Temperatur des Instrumentes $t = 0$ ist, und es ist nothwendig, letzteres in diesen Wärmezustand zu versetzen, wenn man c oder c' unabhängig von c'' bestimmen will.

4. Fasst man sämtliche Verbesserungen der an einem Federbarometer gemachten Ablesung B zusammen, so ergibt sich der auf 0° reducirte Stand A_0 des Quecksilberbarometers, welcher jener Ablesung entspricht, aus der Gleichung

$$A_0 = B + c + c' + c'' = B + c + b(760 - A_0) - at. \quad (4)$$

Wenn man aus Erfahrung weiss, dass die Constante c selten einen Werth von 3^{mm} hat; dass ferner der Theilungscoefficient in der Regel zwischen 0,01 und 0,02 schwankt, somit die Correction c' nur ausnahmsweise die Grösse von 1^{mm} erreicht oder übersteigt; und dass endlich die Temperaturcorrection $c'' = - at$ in vielen Fällen die Summe der beiden anderen Correctionen $c + c'$ aufhebt oder mindestens sehr vermindert: wenn sonach der Stand A_0 nur wenig von B verschieden und der Coefficient b jederzeit sehr klein ist, so ist es in den meisten Fällen, wo A_0 nicht an einem Quecksilberbarometer beobachtet werden konnte, erlaubt, in dem Ausdrücke für c' den Bogen $(760 - A_0)$ durch $(760 - B)$ zu ersetzen. In jedem Falle kann man, um einen genäherten Werth von A_0 zu erhalten, zunächst

$$A_0 = B + c + b(760 - B) - at \quad (5)$$

nehmen und dann die so erhaltene Reductionsgrösse A_0 in die rechte Seite der Gleichung (4) einführen. Man wird auf diesem Wege in den meisten Fällen den Werth von A_0 bis auf $0,1^{\text{mm}}$ oder diejenige Grösse richtig erhalten, welche ungefähr der mittleren Genauigkeit der Einstellung und Ablesung der Nadel entspricht. Diese Genauigkeitsgrenze hindert nicht, bei Beobachtungen noch halbe Decimillimeter abzulesen, d. h. jeden auf der Scala angezeigten Halbmillimeter noch in zehn Theile zu theilen; weiter gehende Ablesungen erscheinen jedoch gesucht und werthlos.

II. Methoden zur unmittelbaren Bestimmung der Constanten eines Naudet'schen Federbarometers.

Bei der Aufstellung von Methoden zur Bestimmung der Correctionen c'' , c' , c oder der Constanten a , b , c eines Naudet'schen Aneroids hat man zu fragen, welche physicalische Hilfsmittel hiefür zu Gebote stehen: ob diese Bestimmung nur für ein Aneroid oder gleichzeitig für zwei oder mehrere zu machen ist; ob man Sommer- und Wintertemperaturen, den Druck der Atmosphäre auf Bergen und in Thälern dazu benützen kann, oder die erforderlichen Temperaturgrade und Drückungen künstlich erzeugen muss; endlich ob bei den Berechnungen der Beobachtungen die Wahrscheinlichkeitsrechnung angewendet werden darf oder nicht. Wir werden nach und nach verschiedene Methoden kennen lernen; zunächst gehen wir darauf aus, mit allen Hilfsmitteln, welche uns Physik und Mathematik darbieten, die Constante c und die Coefficienten a und b so direct als möglich zu bestimmen und die Richtigkeit der im I. Abschnitte aufgestellten Definitionen und Gleichungen zu beweisen.

1. Die Constante c . Wenn es sich lediglich um die Standcorrection c eines Naudet'schen Aneroids handelt, so folgt aus Gleichung (4) sofort, dass diese Grösse direct erhalten werden kann, wenn man das Aneroid einer Temperatur $t = 0$ und einem Drucke $A_0 = 760^{\text{mm}}$ Qu. aussetzt, denn in diesem Falle geht die Gleichung (4) in (1) über, wonach $c = 760 - B_0$ ist. Dieses Verfahren setzt erstens einen Normalbarometer oder wenigstens einen sehr guten Gefässbarometer, dann eine Luftpumpe mit entsprechender Glocke, in der das Aneroid

auf 0° abgekühlt werden kann, und schliesslich ein mit der Luftpumpe in Verbindung zu setzendes Quecksilbermanometer voraus. Mit diesen Hilfsmitteln habe ich die Standcorrection in folgender Weise bestimmt.

Das Aneroid wurde in eine hinreichend weite und tiefe cylindrische Schüssel von Weissblech und mit dieser in eine zweite grössere mit Eis gefüllte Schüssel von gleichem Metall gestellt und dann in eine hinreichend grosse und dicke Metallglocke gebracht, die sich durch ein dickes Spiegelglas luftdicht abschliessen liess. Die Glocke stand durch eine metallene Röhre mit einer Luftpumpe in Verbindung und eine zweite Röhre verband diese Pumpe mit dem einen Schenkel des vorhin erwähnten und aus zwei mit Quecksilber gefüllten Barometerröhren bestehenden Manometers, dessen anderer Schenkel gegen die Atmosphäre offen war. Der Druck der Atmosphäre wurde am Normalbarometer des physicalischen Cabinets der hiesigen polytechnischen Schule gemessen. Sobald durch die Luftpumpe auf das Aneroid und den Manometer ein Druck ausgeübt wurde, der den der Atmosphäre übertraf oder nicht erreichte, entstand in den beiden mit Quecksilber gefüllten Röhren des Manometers eine Niveaudifferenz, deren Grösse ein in passender Entfernung stehender Kathetometer genau angab.

Selbstverständlich kann ein einziger Beobachter die eben erwähnten Grössen nicht gleichzeitig übersehen; ich wurde daher bei den in Rede stehenden Versuchen von dem Assistenten am physicalischen Laboratorium und Privatdocenten Herrn Edelmann und vom Assistenten des geodätischen Instituts des hiesigen Polytechnicums Herrn Decher unterstützt: Der erstere handhabte die Luftpumpe, der letztere den Kathetometer, während ich das Aneroid und den Normalbarometer ablas. So erhielten wir am 21. und 22. December 1873 die in den ersten 4 Spalten der Tafeln Nr 1, Nr 2 und Nr 3 stehenden Zahlen, von denen

N_0 den auf 0° reducirten Stand des Normalbarometers,

K_0 die kathetometrisch bestimmte Druckdifferenz,

A_0 den auf 0° reducirten Gesamtdruck $N_0 + K_0$ und

B_0 den auf 0° reducirten Stand des Federbarometers

in Millimetern bezeichnet, und wozu nur zu bemerken ist, dass, da sich die Temperatur des Aneroids nicht genau auf 0° erhielt, kleine Reduc-

tionen der Aneröidablesungen nothwendig waren, welche nach Gleichung (3) mit dem Coefficienten $a = -0,135$ für 1^0 R vorgenommen wurden.

Wenn der absolute Werth dieses Wärmecoefficienten sich später etwas kleiner als $0,135$ (nämlich $= 0,132$) herausstellte, so hat der Unterschied von $0,003$ bei den vorliegenden Reductionen keinen Belang, weil alle Werthe von t innerhalb $\pm 2,5^0 \text{ R}$ lagen und daher ein grösserer Fehler als $\pm 0,01^{\text{mm}}$ nicht begangen werden konnte¹⁾.

Fassen wir in den drei ersten Tafeln nur die Beobachtungen Nr 5 in's Auge, für welche A_0 nahezu 760^{mm} Qu. beträgt und bringen wir an denselben die fast verschwindenden Theilungscorrectionen $c' = 0,015$ ($760 - A_0$) an, so wird nach Gleichung (4) für den Federbarometer

Nr I	die	Correction	$c = 760 - 758,59 = 1,41^{\text{mm}}$
Nr II	„	„	$c = 760 - 757,44 = 2,56$
Nr III	„	„	$c = 760 - 759,76 = 0,24.$

Diese aus je einer einzigen ganzen Beobachtung hervorgegangenen Werthe von c stimmen ziemlich nahe mit den Mittelwerthen überein, welche aus grösseren Beobachtungsreihen erhalten wurden. (Vergl. die Formeln Nr 9 auf Seite 39).

Statt des oben beschriebenen complicirten Apparats zur Bestimmung der Standcorrection c habe ich eine sehr einfache auf dem Princip der communicirenden Röhren beruhende Vorrichtung erfunden, welche gestattet, Drückungen von $0,8$ bis $1,2$ Atmosphären auf den Federbarometer auszuüben und zu messen, ohne dass dazu eine Luftpumpe oder ein Quecksilberbarometer nöthig ist. Ich hoffte, diesen meinen Apparat hier beschreiben zu können, bin jedoch in dieser Hoffnung durch den Mechaniker getäuscht worden, der die Ausführung desselben über Gebühr verzögert hat; ich behalte mir daher die beabsichtigte Beschreibung für später vor, und bemerke vorläufig blos, dass meine Druckvorrichtung nur wenig kosten wird.

1) Temperaturen unter Null kommen nur bei Untersuchung des Aneröids Nr III vor, wo in Folge der bei I und II gemachten Erfahrungen etwas Kochsalz unter das Eis gemischt worden war.

2. Die Summe $c + c'$. Nach Gleichung (4) ergibt sich die Summe der Stand- und Theilungscorrectionen $c + c' = A_0 - B_0$, wenn man die Werthe von A_0 und B_0 bei gleichem auf den Normal- und den Federbarometer ausgeübten Druck beobachtet und die Temperatur des letzteren auf Null bringt.

Bei den in Abschnitt II, Nr 1 beschriebenen Versuchen wurden A_0 und B_0 nicht blos bei 760^{mm} Quecksilber-Druck, sondern bei verschiedenen Drückungen über und unter dem einfachen Atmosphären-Druck und bei der Temperatur des schmelzenden Eises bestimmt. Hatte das Aneroid die Temperatur 0° nicht ganz angenommen, so wurde, wie schon bemerkt, der positive oder negative Werth von t , welcher höchstens 2° R betrug, mit 0,135 multiplicirt, um hiedurch die Ablesung B auf 0° zu reduciren: hieraus erklärt sich, warum die Werthe von B_0 in den nachfolgenden drei Tafeln auf einzelne Hundertel-Millimeter angegeben sind, während die Ablesungen nur bis auf ganze oder halbe Zehntel-Millimeter gemacht wurden.

Tafel Nr I.

Beobachtungen über die Summen der Stand- und Theilungscorrectionen am Federbarometer Nr I, ausgeführt am 21. December 1873.

Nr	N_0	K_0	A_0	B_0	o	v	v^2
1	723,25	0	723,25	721,09	2,16	— 0,235	0,0552
2	10	+ 10,55	733,65	731,98	1,67	+ 0,098	0,0096
3	10	+ 19,57	742,67	741,11	1,56	+ 0,073	0,0053
4	00	+ 29,60	752,60	750,95	1,65	— 0,166	0,0276
5	00	+ 37,88	760,88	759,47	1,41	+ 0,050	0,0025
6	00	+ 47,75	770,75	769,79	0,96	+ 0,252	0,0635
7	00	+ 59,70	782,70	781,28	1,42	— 0,387	0,1498
8	05	0	723,05	721,28	1,77	+ 0,157	0,0246
9	15	— 11,65	711,50	709,76	1,74	+ 0,360	0,1296
10	25	— 21,70	701,55	699,25	2,30	— 0,050	0,0025
11	25	— 31,75	691,50	688,85	2,65	— 0,249	0,0620
12	25	— 41,95	681,30	678,72	2,58	— 0,026	0,0007
13	25	— 51,15	672,10	669,34	2,76	— 0,068	0,0046
14	25	0	723,25	721,34	1,91	+ 0,014	0,0002
			10170,75	10144,51	26,54	$\epsilon = \pm 0,203$	0,5377
			726,48	724,63	1,895	$\epsilon' = \pm 0,054$	

Tafel Nr 2.

Beobachtungen über die Summen der Stand- und Theilungscorrectionen am Federbarometer Nr II, ausgeführt am 21. December 1873.

Nr	N ₀	K ₀	A ₀	B ₀	o	v	v ²
1	723,33	0	723,33	720,23	3,10	+ 0,017	0,0003
2	33	+ 9,20	732,53	729,64	2,89	+ 0,080	0,0064
3	33	+ 19,30	742,63	739,84	2,79	+ 0,018	0,0003
4	33	+ 29,20	752,53	749,75	2,78	— 0,130	0,0169
5	20	+ 39,75	762,95	760,39	2,56	— 0,077	0,0059
6	20	+ 49,45	772,65	770,30	2,35	— 0,022	0,0005
7	25	+ 58,65	781,90	779,70	2,20	— 0,020	0,0004
8	25	0	723,25	720,32	2,93	+ 0,188	0,0353
9	25	— 10,05	713,20	709,72	3,48	— 0,201	0,0404
10	25	— 21,00	702,25	699,05	3,20	+ 0,254	0,0645
11	27	— 29,50	693,77	689,85	3,92	— 0,314	0,0986
12	27	— 39,60	683,67	679,65	4,02	— 0,253	0,0640
13	27	— 50,45	672,82	668,94	3,88	+ 0,045	0,0020
14	27	0	723,27	720,34	2,93	+ 0,188	0,0353
			10180,75	10137,72	43,03	$\epsilon = \pm 0,169$	0,3708
			727,20	724,12	3,07	$\epsilon' = \pm 0,045$	

Nachdem die Bildung und Bedeutung der in den vier ersten Spalten der Tafeln Nr 1, Nr 2, Nr 3 enthaltenen Zahlenwerthe schon früher erklärt wurde, will ich hier nur noch beifügen, dass in der fünften Spalte die beobachteten Summen der Stand- und Wärmecorrectionen $c + c' = A_0 - B_0 = o$, in der sechsten die Fehler $v = c + b (760 - A_0) - o$ und in der siebenten die Fehlerquadrate enthalten sind; letztere lediglich deshalb, um die mittleren Fehler jeder einzelnen beobachteten Summe $c + c' = o$ berechnen zu können.

3. Die Constanten b und c. Für die Summe der Correctionen c und c' gilt nach Gleichung (4) die Beziehung

$$c + b (760 - A_0) = A_0 - B_0 = o$$

oder, wenn man die Differenz $760 - A_0 = m$ setzt,

$$c + bm = o. \quad (6)$$

Tafel Nr 3.

Beobachtungen über die Summen der Stand- und Theilungscorrectionen am Federbarometer Nr III, ausgeführt am 22. December 1873.

Nr	N ₀	K ₀	A ₀	B ₀	o	v	v ²
1	724,40	0	724,40	723,60	0,80	+ 0,059	0,0035
2	40	+ 6,85	731,25	730,50	0,75	— 0,007	0,0000
3	40	+ 16,35	740,75	740,50	0,25	+ 0,331	0,1096
4	42	+ 26,15	750,57	750,03	0,54	— 0,126	0,0159
5	42	+ 35,82	760,24	760,00	0,24	+ 0,010	0,0001
6	45	+ 46,38	770,83	770,83	0,00	+ 0,070	0,0049
7	45	+ 56,55	781,00	780,82	0,18	— 0,283	0,0801
8	50	0	724,50	723,65	0,85	+ 0,008	0,0001
9	50	— 12,50	712,00	710,80	1,20	— 0,130	0,0169
10	45	— 22,55	701,90	700,95	0,95	+ 0,292	0,0853
11	45	— 32,40	692,05	690,40	1,65	— 0,241	0,0581
12	45	— 42,85	681,60	679,95	1,65	— 0,063	0,0040
13	45	— 52,45	672,00	670,40	1,60	+ 0,150	0,0225
14	40	— 62,20	662,20	660,09	2,11	— 0,193	0,0372
15	40	0	724,40	723,68	0,72	+ 0,139	0,0183
			10829,69	10816,20	13,49	$\epsilon = \pm 0,181$	0,4565
			721,98	721,08	0,90	$\epsilon' = \pm 0,048$	

Zur Bestimmung der beiden Unbekannten b und c besitzen wir nach den Tafeln Nr 1, Nr 2, Nr 3 für die beiden Federbarometer Nr. I und II je 14 und für den Federbarometer Nr III sogar 15 beobachtete Werthe von o: wir haben also in allen drei Fällen einen grossen Ueberschuss von Beobachtungen und können daher auf die Berechnung von b und c die Methode der kleinsten Quadrate anwenden.

Nennen wir n die Zahl der mit jedem Aneroid angestellten Beobachtungen, [m], [o], [mm], [mo] die Summe aller m, o, mm, mo, und setzen wir die Fehler zwischen Rechnung und Beobachtung

$$v_1 = c + bm_1 - o_1 ; v_2 = c + bm_2 - o_2 ; v_3 = c + bm_3 - o_3 \text{ u. s. w.}$$

so ergeben sich nach bekannten Regeln aus der Summe der Fehlerquadrate, wenn man sie zuerst nach c und dann nach b ableitet und

jede Ableitung gleich Null setzt, die beiden Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned} [m] b + n c &= [o] \\ [mm] b + [m] c &= [mo] \end{aligned}$$

und aus diesen die Unbekannten

$$b = \frac{n [mo] - [m] [o]}{n [mm] - [m] [m]} \quad (7)$$

$$c = \frac{[o] [mm] - [m] [mo]}{n [mm] - [m] [m]} \quad (8)$$

Führt man diese Gleichungen für alle in den drei ersten Tafeln dargestellten Beobachtungen aus, so ergibt sich für den Federbarometer

Nr I	die	Correction	c	=	1,373	und	der	Coefficient	b	=	0,0151
Nr II	„	„	c	=	2,530	„	„	„	b	=	0,0165 (9)
Nr III	„	„	c	=	0,254	„	„	„	b	=	0,0169.

Mit diesen Werthen von c und b lassen sich nunmehr die Summen $c + c' = c + bm$ berechnen und damit die in den vorletzten Spalten der Tafeln 1, 2, 3 enthaltenen Fehler v herstellen. So ist z. B. für die Beobachtung Nr 1 zum Aneroid I die Summe $c + bm = 1,373 + 0,015 (760 - 723,25) = 1,925$ und daher $v_1 = 1,925 - 2,160 = -0,235$; für die Beobachtung Nr 1 zum Aneroid II ist die Summe $c + bm = 2,53 + 0,0165 (760 - 723,33) = 3,117$ und daher $v_1 = 3,117 - 3,100 = 0,017$; und für die Beobachtung Nr 1 zum Aneroid III ist die Summe $c + bm = 0,25 + 0,017 (760 - 724,4) = 0,859$ und daher $v_1 = 0,859 - 0,800 = 0,059$. Die mittleren Fehler der ganzen Einzelbeobachtungen sind in den Tafeln mit ϵ und jene der arithmetischen Mittel von o mit ϵ' bezeichnet.

4. Die Theilungscorrection c'. Wenn man von den in den vorhergehenden drei Tafeln enthaltenen Summen o der Stand- und Theilungscorrectionen die Standcorrectionen c abzieht, so bleiben die beobachteten Werthe der Theilungscorrectionen c' übrig. Es ist somit (bei Abkürzung der Werthe von c auf zwei Decimalstellen, welche

erlaubt ist) für den Federbarometer

$$\begin{array}{lll} \text{Nr I} & \text{die Theilungscorrection } c' = 0 - 1,37 \\ \text{Nr II} & \text{„ „ „ } c' = 0 - 2,53 \\ \text{Nr III} & \text{„ „ „ } c' = 0 - 0,25. \end{array} \quad (10)$$

Stellt man diese Theilungscorrectionen aus den in den Tafeln Nr 1, Nr 2, Nr 3 enthaltenen Werthen von o her und trägt sie, wie in den Figuren 1, 2, 3 geschehen, als Ordinaten und die Barometerstände A_0 als Abscissen auf, so gibt jede Verbindungslinie der Ordinaten-Kopf-punkte ein Bild von dem Gange der Theilungscorrectionen durch die verschiedenen Stadien des Drucks, und man erkennt zugleich an jedem dieser Bilder, dass der Verlauf der genannten polygonalen Verbindungslinie durch die Gerade $c' = b(760 - A_0)$ im Wesentlichen dargestellt wird. Ich sage: im Wesentlichen, weil es allerdings auch möglich wäre, den polygonalen Zug durch eine sehr flache Curve auszugleichen. Durch eine solche Ausgleichung würde man jedoch nur die Berechnung der Theilungscorrectionen ohne Nutzen erschweren. Bleiben wir daher bei der Ausgleichungslinie $c' = b(760 - A_0)$ stehen und berechnen hieraus die Wärmecorrectionen, so begehen wir nach den vorstehenden Tafeln bei einer ganzen Beobachtung keinen grösseren mittleren Fehler als $\pm 0,16$ bis $0,20^{\text{mm}}$; einen kleineren darf man aber um so weniger erwarten, als eine ganze Beobachtung die Ablesung von zwei Barometern und zwei Thermometern in sich schliesst.

Dass in der That die mittleren Fehler ε , welche aus den Tafeln Nr 1, Nr 2, Nr 3 für die Summen der Stand- und Theilungscorrectionen $c + c'$ folgen, auch für die Theilungscorrectionen c' allein gelten, geht einfach daraus hervor, dass in beiden Fällen die Fehler v gleich gross werden; denn in dem ersten ist $v = c + b(760 - A_0) - o$ und in dem zweiten $v = b(760 - A_0) - (o - c) = c + b(760 - A_0)$. Fasst man die Summe der Fehlerquadrate aus den drei Tafeln zusammen, so beträgt diese für 43 ganze Beobachtungen 1,365 und hieraus berechnet sich ein mittlerer Fehler für jede solche Beobachtung von $\pm 0,18$ Millimeter: man kann also den linearen Ausdruck (2) für die Theilungscorrection c' als hinreichend genau ansehen und bei allen Beobachtungen verwenden.

5. Die Wärmecorrectionen c'' . Um die Grösse dieser Correctionen bei verschiedenen Temperaturen zu erfahren und zugleich den experimentellen Nachweis zu liefern, dass dieselben durch den in Gl. (3) gegebenen Ausdruck $c'' = -at$ berechnet werden können, habe ich die auf den Tafeln Nr 4, Nr 5, Nr 6 in ihren Ergebnissen dargestellten Beobachtungen gemacht. Dieselben waren so angeordnet, dass der Gefäss- und die Federbarometer des geodätischen Instituts des hiesigen Polytechnicums theils in theils vor meinem Arbeitszimmer in gleicher Höhenlage aufgestellt waren und folglich bei gleichem atmosphärischen Druck aber verschiedener Temperatur beobachtet werden konnten. Bei jeder dieser Beobachtungen, wie bei allen vorausgegangenen und nachfolgenden, wurden der Quecksilber- und die Federbarometer durch Klopfen mit der Hand erschüttert und jede Ablesung doppelt gemacht, das zweite Mal in der umgekehrten Reihenfolge: die Aufschreibungen sind das Mittel aus beiden, wenn eine kleine Differenz zwischen der ersten und zweiten Ablesung sich ergab. Da nach der allgemeinen Reductionsformel Gl. (4) die Wärmecorrection

$$c'' = -at = A_0 - (B + c + b(760 - A_0)) \quad (11)$$

ist, so enthalten die Tafeln Nr 4, Nr 5, Nr 6, welche hier eingeschaltet sind, folgende Werthe:

- A_0 den auf 0° reducirten Stand des Gefässbarometers,
- B die Ablesung auf dem Federbarometer bei der Temperatur t ,
- B' den Aneroidstand, welcher dem Druck 760^{mm} Qu. entspricht,
- t die Temperatur des Instruments in Reaumur'schen Graden,
- c'' die aus $760 - (B' + c)$ berechnete Wärmecorrection,
- v die Abweichung zwischen der beobachteten und aus der Temperatur berechneten Wärmecorrection, d. i. die Differenz $c'' - at$, worin a stets negativ ist und t sowohl positiv als negativ sein kann.

Die Werthe B , t , welche unmittelbare Beobachtungen sind, und die A_0 , welche sich aus den Ablesungen des Stands und der Temperaturen des Gefässbarometers sofort ergeben, bedürfen keiner weiteren Erläuterung; die übrigen können jedoch nicht als selbstverständlich vorausgesetzt und müssen deshalb erläutert werden.

Tafel Nr 4.

Nach den Temperaturen geordnete Beobachtungen über die Wärmecorrectionen am
Federbarometer Nr I.

Nr	1873	A _n	B	B'	t	c''	v	v ²
1	Dec 9	728,56	725,90	757,81	— 5,0	+ 0,82	+ 0,160	0,0256
2	„ 10	27,23	24,60	57,86	— 4,0	+ 0,77	+ 0,242	0,0586
3	„ 8	32,10	30,00	58,32	— 3,5	+ 0,31	— 0,152	0,0231
4	„ 8	32,75	30,80	58,46	— 2,0	+ 0,17	— 0,094	0,0088
5	„ 8	31,70	29,80	58,52	— 1,6	+ 0,11	— 0,101	0,0102
6	„ 11	28,10	26,50	58,88	— 1,0	— 0,25	— 0,382	0,1459
7	„ 8	32,70	31,10	58,81	0,0	— 0,18	— 0,180	0,0324
8	„ 21	23,25	21,20	58,50	+ 0,9	+ 0,13	+ 0,249	0,0620
9	„ 21	23,05	21,50	59,00	+ 1,8	— 0,37	— 0,132	0,0174
10	„ 21	23,25	21,60	58,90	+ 2,1	— 0,27	+ 0,007	0,0000
11	„ 6	22,30	20,65	58,72	+ 3,0	— 0,29	+ 0,106	0,0112
12	„ 6	23,00	21,80	59,26	+ 3,7	— 0,73	— 0,242	0,0586
13	„ 9	31,40	30,45	59,48	+ 4,7	— 0,85	— 0,230	0,0529
14	„ 15	25,30	24,00	59,22	+ 6,1	— 0,59	+ 0,215	0,0462
15	„ 31	20,20	19,00	59,40	+ 6,4	— 0,77	+ 0,075	0,0056
16	„ 31	20,15	19,05	59,50	+ 7,1	— 0,87	+ 0,067	0,0045
17	„ 31	20,05	19,05	59,60	+ 8,2	— 0,97	+ 0,112	0,0125
18	„ 31	20,00	19,15	59,75	+ 9,6	— 1,12	+ 0,147	0,0216
19	„ 31	20,10	19,20	59,70	+ 10,6	— 1,07	+ 0,329	0,1082
20	„ 31	19,95	19,30	59,95	+ 11,6	— 1,32	+ 0,211	0,0445
21	„ 9	29,45	29,20	60,21	+ 12,0	— 1,58	+ 0,004	0,0000
22	„ 7	31,70	31,45	60,17	+ 12,5	— 1,54	+ 0,110	0,0121
23	„ 7	30,20	30,00	60,25	+ 13,7	— 1,62	+ 0,188	0,0353
24	„ 7	31,50	31,65	60,58	+ 14,0	— 1,95	— 0,102	0,0104
25	„ 7	30,40	30,50	60,55	+ 14,5	— 1,92	— 0,006	0,0000
26	„ 28	15,80	15,80	60,66	+ 15,0	— 2,03	— 0,050	0,0025
27	„ 10	28,00	28,30	60,78	+ 15,3	— 2,15	— 0,130	0,0169
28	„ 10	27,00	27,60	61,10	+ 16,0	— 2,47	— 0,358	0,1282
29	„ 31	19,30	19,65	60,96	+ 17,5	— 2,33	— 0,020	0,0004
30	„ 31	19,30	19,60	60,91	+ 18,4	— 2,28	+ 0,149	0,0222
31	„ 31	19,30	20,00	61,31	+ 19,3	— 2,68	— 0,132	0,0174
32	„ 31	719,30	720,10	761,41	+ 20,1	— 2,78	— 0,127	0,0161
		725,20	724,33	759,64	247,0	— 32,67	$\epsilon = \pm 0,181$	1,0113

Tafel Nr 5.

Nach den Temperaturen geordnete Beobachtungen über die Wärmecorrectionen am
Federbarometer Nr II.

Nr	1873	A ₀	B	B'	t	c''	v	v ²
1	Dec. 11	729,80	725,40	756,08	— 7,1	+ 1,39	+ 0,432	0,1866
2	„ 11	29,90	25,55	56,13	— 6,7	+ 1,34	+ 0,435	0,1892
3	„ 11	29,40	25,50	56,59	— 5,0	+ 0,88	+ 0,205	0,0420
4	„ 10	28,05	24,60	57,06	— 4,0	+ 0,41	— 0,130	0,0169
5	„ 8	32,10	29,00	57,35	— 3,6	+ 0,12	— 0,366	0,1340
6	„ 8	32,75	29,60	57,29	— 2,1	+ 0,18	— 0,104	0,0108
7	„ 8	31,70	28,80	57,55	— 1,7	— 0,08	— 0,309	0,0955
8	„ 8	32,70	29,90	57,64	— 0,4	— 0,17	— 0,224	0,0502
9	„ 8	31,77	28,90	57,57	0,0	— 0,10	— 0,100	0,0100
10	„ 10	26,93	23,80	57,40	+ 0,7	+ 0,07	+ 0,165	0,0272
11	„ 21	23,27	20,60	57,92	+ 2,1	— 0,45	— 0,166	0,0276
12	„ 21	23,33	20,60	57,86	+ 3,0	— 0,39	+ 0,015	0,0002
13	„ 10	27,23	24,80	58,09	+ 4,3	— 0,62	— 0,039	0,0015
14	„ 9	28,56	26,40	58,34	+ 5,0	— 0,87	— 0,195	0,0380
15	„ 14	27,63	25,50	58,39	+ 6,0	— 0,92	— 0,110	0,0121
16	„ 31	20,20	18,05	58,49	+ 6,7	— 1,02	— 0,115	0,0132
17	„ 31	20,15	17,60	58,09	+ 7,3	— 0,62	+ 0,366	0,1340
18	„ 31	20,00	17,75	58,39	+ 8,0	— 0,92	+ 0,160	0,0256
19	„ 31	20,00	17,95	58,59	+ 8,7	— 1,12	+ 0,055	0,0030
20	„ 31	20,10	18,20	58,74	+ 9,4	— 1,27	— 0,001	0,0000
21	„ 31	19,95	17,95	58,64	+ 10,1	— 1,17	+ 0,194	0,0376
22	„ 31	19,70	18,00	58,94	+ 11,1	— 1,47	+ 0,029	0,0008
23	„ 7	31,70	30,45	59,20	+ 12,5	— 1,73	— 0,042	0,0018
24	„ 7	30,20	28,95	59,23	+ 13,7	— 1,76	+ 0,090	0,0081
25	„ 7	31,15	29,85	59,16	+ 14,8	— 1,69	+ 0,309	0,0955
26	„ 31	19,30	18,40	59,15	+ 15,8	— 2,28	— 0,147	0,0216
27	„ 31	19,30	18,45	59,80	+ 16,2	— 2,33	— 0,162	0,0262
28	„ 31	19,30	18,55	59,90	+ 17,0	— 2,43	— 0,135	0,0182
29	„ 31	19,30	18,70	60,05	+ 18,5	— 2,58	— 0,082	0,0067
30	„ 31	719,30	718,80	760,15	+ 20,2	— 2,68	+ 0,047	0,0022
		728,83	723,22	758,26	180,5	— 24,28	$\epsilon = +0,206$	1,2363

Tafel Nr 6.

Nach den Temperaturen geordnete Beobachtungen über die Wärmecorrectionen am
Federbarometer Nr III.

Nr	1873	A ₀	B	B'	t	c''	v	v ²
1	Dec. 10	727,23	725,69	759,01	— 7,5	+ 0,74	— 0,220	0,0484
2	„ 11	29,80	28,05	58,75	— 6,5	+ 1,00	+ 0,168	0,0282
3	„ 10	27,55	26,05	59,04	— 5,4	+ 0,71	+ 0,019	0,0004
4	„ 9	28,56	27,30	59,27	— 4,8	+ 0,48	— 0,134	0,0180
5	„ 9	29,45	28,10	59,16	— 3,6	+ 0,59	+ 0,129	0,0166
6	„ 9	29,37	28,50	59,64	— 2,4	+ 0,11	— 0,197	0,0388
7	„ 15	25,43	24,60	59,75	— 1,8	0,00	— 0,230	0,0529
8	„ 8	32,70	32,00	59,76	— 0,2	— 0,01	— 0,036	0,0013
9	„ 22	24,40	23,60	59,79	0,0	— 0,04	— 0,040	0,0016
10	„ 22	24,40	23,80	59,99	+ 1,0	— 0,24	— 0,112	0,0125
11	„ 13	29,45	28,75	59,81	+ 2,0	— 0,06	+ 0,196	0,0384
12	„ 15	25,10	24,40	59,88	+ 2,9	— 0,13	+ 0,241	0,0581
13	„ 12	29,63	29,20	60,10	+ 3,8	— 0,35	+ 0,136	0,0185
14	„ 31	20,20	19,85	60,31	+ 4,6	— 0,56	+ 0,029	0,0008
15	„ 13	29,57	29,60	60,54	+ 5,6	— 0,79	— 0,073	0,0053
16	„ 15	25,43	25,45	60,60	+ 6,0	— 0,85	— 0,082	0,0067
17	„ 13	29,85	30,05	60,70	+ 7,2	— 0,95	— 0,028	0,0008
18	„ 31	20,00	19,90	60,57	+ 8,8	— 0,82	+ 0,306	0,0936
19	„ 31	19,90	19,95	60,72	+ 9,6	— 0,97	+ 0,259	0,0671
20	„ 31	19,90	20,15	60,92	+ 10,2	— 1,17	+ 0,136	0,0185
21	„ 31	19,70	20,30	61,27	+ 11,9	— 1,52	+ 0,003	0,0000
22	„ 7	31,70	32,75	61,52	+ 12,8	— 1,77	— 0,132	0,0174
23	„ 7	31,50	32,90	61,88	+ 14,2	— 2,13	— 0,312	0,0973
24	„ 7	31,80	33,10	61,77	+ 15,3	— 2,02	— 0,062	0,0038
25	„ 31	19,30	20,50	61,88	+ 17,0	— 2,13	+ 0,046	0,0021
26	„ 31	19,30	20,60	61,98	+ 17,5	— 2,23	+ 0,010	0,0001
27	„ 31	19,40	20,85	62,13	+ 19,0	— 2,38	+ 0,052	0,0027
28	„ 31	19,40	21,05	62,33	+ 20,1	— 2,58	— 0,007	0,0000
		725,72	725,61	760,47	157,3	—20,07	$\epsilon = \pm 0,155$	0,6499

Zunächst kann man fragen, warum c'' nicht aus der vorstehenden Formel Nr 11 berechnet oder statt B' nicht der Werth von $B + c + b(760 - A_0) = B''$ in den Tafeln angegeben wurde, durch dessen Subtraction von A_0 sofort c'' erhalten worden wäre. Darauf ist zu antworten, dass der Werth von B' deshalb berechnet wurde, weil erstens, wenn man am Meere oder bei 760^{mm} Druck beobachten könnte, der Werth B' die Ablesung am Federbarometer und c'' ohneweiters die Differenz $760 - (B' + c)$ wäre, und dann, weil zweitens die Berechnung von B' nicht umständlicher als die von B'' ist, indem B' die Summe $B + (1 + b)(760 - A_0)$ und B'' die Summe $B + b(760 - A_0)$ vorstellt, wie sofort aus Gl. (11) folgt, wenn man auf deren rechter Seite die Zahl 760 einmal addirt und einmal subtrahirt.

Der Fehler v ist der Unterschied zwischen dem beobachteten Werthe der Wärmecorrection c'' und dem berechneten, also $v = c'' - at$. In der vierten Tafel ist bei Nr 1 der beobachtete Werth $c'' = + 0,82^{\text{mm}}$, der berechnete $at = - 0,132 \cdot - 5,0 = 0,66^{\text{mm}}$ und folglich der Fehler $v_1 = 0,82 - 0,66 = + 0,16$. In der fünften Tafel ist bei Nr 11 der beobachtete Werth von $c'' = - 0,45^{\text{mm}}$, der berechnete $at = - 0,135 \cdot + 2,1 = - 0,284^{\text{mm}}$ und folglich der Fehler $v_{11} = - 0,450 + 0,284 = - 0,166^{\text{mm}}$. In der sechsten Tafel endlich ist bei Nr 7 der beobachtete Werth $c'' = 0$ und der berechnete $at = - 0,128 \cdot - 1,8 = 0,230^{\text{mm}}$ und folglich $v_7 = 0 - 0,230 = - 0,230^{\text{mm}}$.

Trägt man die in den Tafeln Nr 4, Nr 5, Nr 6 enthaltenen beobachteten Wärmecorrectionen c'' , wie es in den Figuren 4, 5, 6 geschehen, als Ordinaten und die entsprechenden Instrumententemperaturen als Abscissen auf, so gibt die Verbindungslinie der Kopfpunkte der Ordinaten ein Bild von dem Fortschreiten der genannten Correctionen mit den Temperaturen der Federbarometer, und man erkennt sofort aufs Bestimmteste, dass sich diese Verbindungslinie längs der Geraden erstreckt, welche durch die Gleichung $c'' + at = 0$ vorgestellt wird. Die Abweichungen der beobachteten Zickzacklinie von dieser Geraden sind durch die Werthe von v in den vorletzten Spalten der drei Tafeln Nr 4, Nr 5, Nr 6 gegeben, aus denen sich die mittleren Fehler einer ganzen Beobachtung beziehungsweise zu $\pm 0,181$, $\pm 0,206$ und $\pm 0,155^{\text{mm}}$ berechnen. Fasst man alle auf diesen drei Tafeln verzeichneten 90 Be-

obachtungen zusammen, so beträgt deren Fehlerquadratsumme 2,8975 und der hieraus berechnete mittlere Fehler einer einzigen ganzen Beobachtung $\pm 0,18$ Millimeter, ein Werth, welcher mit dem mittleren Fehler der Theilungscorrectionen (Seite 40) ganz übereinstimmt und so klein ist, dass man anerkennen muss: es gibt keine bessere Ausgleichung der Wärmecorrectionen als durch die Gerade $c'' + at = 0$ und es ist folglich der hieraus entspringende Werth dieser Verbesserungen $c'' = -at$ für alle Fälle hinreichend genau.

6. Der Wärmecoefficient a , welcher einem Federbarometer angehört, ergibt sich aus den mit dem letzteren angestellten Beobachtungen dadurch, dass man die diesen Beobachtungen entsprechenden Gleichungen

$$c_1'' = -at_1 \quad c_2'' = -at_2 \quad c_3'' = -at_3 \text{ u. s. w.}$$

addirt und aus der Summengleichung $[c''] = -a[t]$ den mittleren Werth von

$$a = - \frac{[c'']}{[t]} \quad (12)$$

berechnet.

Will man den mittleren Fehler ϵ der Werthe von a finden, so braucht man nur die Fehler v in den vorletzten Spalten der Tafeln Nr 4 bis Nr 6 mit der Temperatur t und folglich jene von v^2 mit t^2 zu dividiren und die Summe der Fehlerquadrate $\left[\frac{vv}{tt} \right]$ herzustellen, aus der sich sofort ϵ ergibt. Bezeichnet man nämlich die Fehler in der Bestimmung des Wärmecoefficienten a mit v' , d. h. setzt man v' gleich dem beobachteten Werthe von a weniger dem berechneten, also

$$v' = \frac{c''}{t} - \frac{[c'']}{[t]} \quad (13)$$

so sieht man sofort ein, dass $v't = v$ wird, da nach der in II, 5 (S. 41) gegebenen Definition der Fehler

$$v = c'' - \frac{[c'']}{[t]} \quad (14)$$

ist. Bei der Herstellung der Fehlerquadrate v'^2 durch Division der Quadrate v^2 mit t^2 ergibt sich nur bei $t = 0^\circ$ eine Schwierigkeit, indem hier v' und somit auch v'^2 unendlich gross würde, wenn man ohne weitere Ueberlegung mechanisch dividiren wollte. Die Temperatur 0°R oder 0°C ist bekanntlich keine Null im mathematischen Sinne, da man sie ja auch durch $+ 32^\circ \text{F}$ etc. bezeichnen kann, es muss sich also die erwähnte Schwierigkeit umgehen lassen. Dieses könnte nun durch Anwendung eines anderen Temperaturmasses geschehen; es genügt aber auch, sich daran zu erinnern, dass der Wärmecoefficient a nichts weiter ist als die Aenderung des Barometerstandes B für 1° Temperaturänderung, wenn alle übrigen Umstände sich gleich bleiben; mit anderen Worten, dass der Temperaturcoefficient a die Wärmecorrection für $+ 1^\circ \text{R}^1)$ ist.

Hieraus folgt von selbst, dass für Temperaturen $\pm 1^\circ \text{R}$ die Fehler v und v' in den Wärmecorrectionen und den Temperaturcoefficienten einander gleich sind, und dass man folglich auch bei der Temperatur des schmelzenden Eises den Fehler v' im Temperaturcoefficienten a gleich dem in der Wärmecorrection c'' setzen darf. Die oben angegebene Regel, dass v' erhalten wird, wenn man v durch t dividirt, erleidet also nur in dem Falle eine Ausnahme, wo t null ist und der Coefficient a unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheint.

Berechnet man mit Rücksicht auf diese Bemerkungen aus den Tafeln Nr 4 bis Nr 6 die Quadratsummen $[v'v']$, so betragen diese nacheinander 0,27061 ; 0,15651 ; 0,06307 und man findet demnach für den Federbarometer

$$\begin{array}{lll} \text{Nr I} & \text{den Coefficienten } a = - 0,132 \pm 0,016 \\ \text{Nr II} & \text{„ „ } a = - 0,135 \pm 0,013 \\ \text{Nr III} & \text{„ „ } a = - 0,128 \pm 0,009. \end{array} \quad (15)$$

Hieraus ist zu entnehmen, dass die Werthe von a vermöge ihrer mittleren Fehler in einander übergreifen und daher den Schluss nahe legen,

1) Die Reaumur'sche Scala ist hier beibehalten, weil sie an den meisten zum Beobachten verwendeten Instrumenten angebracht und es selbstverständlich ist, dass aus ihr der Coefficient a für jede andere Scala leicht berechnet werden kann, indem er sich mit der Grösse der Grade ändert.

dass sich bei gleich grossen und sonst gleich beschaffenen Aneroiden mit Schablonenscalen die Temperaturcoefficienten nicht oder nur unbedeutend von einander unterscheiden. Dieses und das in den Formeln (9) enthaltene Ergebniss veranlassten mich zu der weiteren Untersuchung:

III. Ob für Naudet'sche Federbarometer von gleicher Beschaffenheit auch die Wärme- und Theilungs-Coefficienten unter sich gleich sind.

Theoretisch genommen, d. i. unter Voraussetzung völliger Gleichheit der Materialien und der Form und Grösse aller gleichnamigen Constructionstheile mehrerer Aneroide, kann die vorliegende Frage nur bejaht werden; vom practischen Standpunkte aus wird aber jeder Beobachter dagegen einwenden, wie ich es mir gegenüber selber gethan habe, dass die gleichzeitige Erfüllung aller dieser Bedingungen unwahrscheinlich ist und von einem Instrumente nicht verlangt werden kann das höchstens hundert Reichsmark kostet.

Fordern kann man diese Eigenschaft gewiss nicht, wenn sie aber in Folge tausendfältiger Anfertigung eines und desselben Gegenstands in demselben bis zu einem hinreichenden Grade wirklich vorhanden ist, so darf sie auch eines practischen Bedenkens wegen nicht übersehen werden. Die Werthe, welche in den Formeln (9) für b und in (15) für a erhalten wurden, zeigen unter sich eine solche Uebereinstimmung, dass ich mich, wie schon bemerkt, veranlasst fand, diese Uebereinstimmung an den hier in Rede stehenden drei Naudet'schen Aneroiden in folgender Weise noch weiter zu untersuchen.

1. Der Wärmecoefficient a . Hat man eine grössere Reihe von gleichzeitigen Beobachtungen bei gleichem Luftdruck aber verschiedener Temperatur an zwei gleich hoch gelegenen Aneroiden gemacht, so gilt für jedes solche Paar von Beobachtungen jene Gleichung, welche die auf 0° reducirten Barometerstände A_0 (die aber hier nicht beobachtet zu sein brauchen) einander gleich setzt. Bezeichnen

$B_1, B_2, B_3 \dots$	die am Aneroid Nr I abgelesenen Barometerstände,
$t_1, t_2, t_3 \dots$	die zugehörigen Temperaturen des Instruments,
$B'_1, B'_2, B'_3 \dots$	die am Aneroid Nr II abgelesenen Barometerstände u.
$t'_1, t'_2, t'_3 \dots$	die zugehörigen Angaben des Instrumentthermometers,

so finden zunächst nach Gl (5), in der a schon sein negatives Vorzeichen hat, die folgenden Beziehungen statt, wobei auf beiden Seiten jeder Gleichung das die Theilungscorrection vorstellende Glied $b (760 - A_0)$ weggelassen ist¹⁾:

$$\begin{array}{rclclcl}
 B_1 + c_1 - at_1 & = & B'_1 + c_2 - at'_1 \\
 B_2 + c_1 - at_2 & = & B'_2 + c_2 - at'_2 \\
 B_3 + c_1 - at_3 & = & B'_3 + c_2 - at'_3 \\
 B_4 + c_1 - at_4 & = & B'_4 + c_2 - at'_4 \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array} \quad (16)$$

Zieht man nach einander die zweite, dritte, vierte, nte Gleichung von der ersten ab, so erhält man folgende Zusammenstellung von Gleichungen:

$$\begin{array}{rclclcl}
 B_1 - B_2 + B'_2 - B'_1 & = & a(t_1 - t_2 + t'_2 - t'_1) \\
 B_1 - B_3 + B'_3 - B'_1 & = & a(t_1 - t_3 + t'_3 - t'_1) \\
 B_1 - B_4 + B'_4 - B'_1 & = & a(t_1 - t_4 + t'_4 - t'_1) \\
 B_1 - B_5 + B'_5 - B'_1 & = & a(t_1 - t_5 + t'_5 - t'_1) \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array} \quad (17)$$

Die Summe dieser $n - 1$ Gleichungen findet sich leicht, wenn man zu ihnen, und zwar als erste die identische Gleichung $B_1 - B_1 + B'_1 - B'_1 = a(t_1 - t_1 + t'_1 - t'_1)$ addirt; es wird dann

$$n(B_1 - B'_1) + [B'] - [B] = a \{n(t_1 - t'_1) + [t'] - [t]\} \quad (18)$$

1) Setzt man voraus, dass für das zweite Aneroid derselbe Werth von b gilt wie für das erste, so sind die Theilungscorrectionen auf beiden Seiten jeder der Gleichungen (16) einander vollständig gleich; wäre aber das b des zweiten Aneroids von dem des ersten etwas verschieden, so würde doch die Differenz beider Correctionen im ungünstigen Falle nur einige Hundertel eines Millimeters betragen.

wobei die eckigen Klammern wie, in den Ausgleichungsrechnungen Summenzeichen vorstellen. Setzt man

$$\begin{aligned} [B] - [B'] &= n R \\ [t] - [t'] &= n T \end{aligned} \quad (19)$$

so ergibt sich aus der Gleichung (18) der absolute Werth des Wärmecoefficienten

$$a = \frac{B_1 - B'_1 - R}{t_1 - t'_1 - T} \quad (20)$$

und es sind dabei alle Beobachtungen einmal und nur die erste (Nr 1) ist zweimal benützt. In gleicher Weise kann man die zweite, dritte, vierte, nte zweimal und alle übrigen einmal benutzen, indem man den Buchstaben B und t nach und nach die Marken 2, 3, 4 . . . n ertheilt, R und T aber unverändert lässt. Man kann demnach aus n ganzen Beobachtungen auch n Werthe von a berechnen, welche alle um etwas wenig von einander und von ihrem arithmetischen Mittel abweichen werden.

In der nachfolgenden Tafel Nr 7 habe ich die von mir gemachten Beobachtungen zur Bestimmung des den Federbarometern Nr I und Nr II gemeinsamen Wärmecoefficienten a zusammengestellt und diesen Coefficienten nach der vorstehenden Formel (20) berechnet. In derselben bedeuten B , B' die Stände und t , t' die Temperaturen, welche an den Aneroiden I und II abgelesen wurden; a ist der absolute Werth des Wärmecoefficienten, um den es sich hier allein handelt; wo der qualitative Werth dieses Coefficienten in Betracht kommt, ist er mit dem Vorzeichen minus zu versehen. Die Grösse v ist der Unterschied zwischen dem Mittel aller a, das 0,134 beträgt und dem beobachteten a, also bei der ersten Beobachtung $v = 0,134 - 0,141 = - 0,007$. Nach der Summe der Fehlerquadrate berechnet sich der mittlere Fehler eines jeden der in der siebenten Spalte enthaltenen a auf $\epsilon = \pm 0,039$ und der Fehler des arithmetischen Mittels 0,134 auf $\epsilon' = \pm 0,0088$.

Tafel Nr 7.

Beobachtungen zur Bestimmung des den Federbarometern Nr I und Nr II
gemeinsamen Temperatur-Coefficienten a.

Nr	1873	B	B'	t	t'	a	v	v ²
1	Dec. 2	731,45	728,40	+ 12,0	— 2,0	0,141	— 0,007	0,000049
2	„ 2	31,75	28,45	+ 13,8	— 1,9	0,148	— 0,014	0,000196
3	„ 3	31,80	28,45	+ 13,6	— 2,4	0,152	— 0,018	0,000324
4	„ 3	31,75	28,40	+ 14,6	— 2,0	0,112	+ 0,022	0,000484
5	„ 3	31,75	28,40	+ 14,4	— 1,6	0,152	— 0,018	0,000324
6	„ 3	30,55	27,65	+ 13,0	0,0	0,148	— 0,014	0,000196
7	„ 3	30,40	27,40	+ 12,8	0,0	0,062	+ 0,072	0,005184
8	„ 3	30,15	27,25	+ 12,5	— 0,5	0,148	— 0,014	0,000196
9	„ 3	30,45	27,00	+ 14,9	— 1,7	0,156	— 0,022	0,000484
10	„ 3	30,40	27,00	+ 15,1	— 1,5	0,134	0,000	0,000000
11	„ 5	29,90	26,55	+ 14,6	— 1,4	0,152	— 0,018	0,000324
12	„ 5	29,60	26,50	+ 14,0	— 1,0	0,010	+ 0,124	0,015376
13	„ 5	27,90	25,05	+ 12,9	0,0	0,173	— 0,039	0,001521
14	„ 9	29,10	26,60	+ 14,6	+ 4,7	0,135	— 0,001	0,000001
15	„ 9	28,80	26,40	+ 15,1	+ 5,0	0,165	— 0,031	0,000961
16	„ 10	27,35	24,80	+ 14,9	+ 4,3	0,147	— 0,013	0,000169
17	„ 10	27,65	23,55	+ 16,0	— 3,6	0,152	— 0,018	0,000324
18	„ 10	28,30	24,60	+ 15,3	— 4,0	0,137	— 0,003	0,000009
19	„ 11	28,25	25,40	+ 4,3	— 7,1	0,084	+ 0,050	0,002500
20	„ 11	728,30	725,75	+ 4,3	— 6,7	0,164	— 0,030	0,000900
		724,775	721,682	13,135	— 1,170	0,134	$\epsilon = \pm 0,039$	0,029522
		R = + 3,093		T = + 14,305			$\epsilon' = \pm 0,009$	

Die Tafel Nr 8 stellt die Beobachtungen zur Bestimmung des den Federbarometern Nr II und III gemeinsamen Temperaturcoefficienten a dar. Die Spalten B und t gehören zu Nr II, B' und t' zu Nr III; a, v, v² sind wie vorhin aus den beobachteten Ständen und Temperaturen berechnet. Der absolute Werth des arithmetischen Mittels aller a beträgt hier 0,128 mit einem mittleren Fehler $\epsilon' = \pm 0,0071$.

Tafel Nr 8.

Beobachtungen zur Bestimmung des den Federbarometern Nr II und Nr III
gemeinsamen Temperatur-Coefficienten a.

Nr	1873	B	B'	t	t'	a	v	v ²
1	Dec. 9	726,60	728,50	+ 4,7	— 2,4	0,113	+ 0,015	0,000225
2	„ 9	26,40	28,30	+ 5,0	— 4,8	0,096	+ 0,032	0,001024
3	„ 10	25,10	25,95	+ 4,3	— 7,5	0,139	— 0,011	0,000121
4	„ 10	24,85	26,05	+ 4,4	— 5,4	0,132	— 0,004	0,000016
5	„ 11	25,80	29,60	+ 3,4	+ 12,6	0,173	— 0,045	0,002025
6	„ 12	27,20	31,10	+ 3,5	+ 14,4	0,099	+ 0,029	0,000841
7	„ 12	26,30	30,00	+ 3,8	+ 12,5	0,141	— 0,013	0,000169
8	„ 12	27,20	31,05	+ 3,8	+ 14,2	0,099	+ 0,029	0,000841
9	„ 10	23,80	27,30	— 3,6	+ 3,8	0,160	— 0,032	0,001024
10	„ 10	24,60	28,05	— 4,0	+ 3,1	0,162	— 0,034	0,001156
11	„ 11	25,70	30,65	— 6,4	+ 15,0	0,100	+ 0,028	0,000784
12	„ 11	25,50	30,50	— 5,0	+ 14,4	0,122	+ 0,006	0,000036
13	„ 31	18,20	23,10	— 5,1	+ 16,5	0,095	+ 0,033	0,001089
14	„ 31	18,20	23,70	— 3,3	+ 19,0	0,133	— 0,005	0,000025
15	„ 31	718,00	724,20	— 4,1	+ 20,1	0,161	— 0,033	0,001089
		724,23	727,87	0,093	8,366	0,128	$\epsilon = \pm 0,027$	0,010475
		R = — 3,64	T = — 8,273				$\epsilon' = \pm 0,007$	

Die so gefundenen Werthe von a für die Federbarometer I und II und für die II und III greifen in einander über, indem der erstere $0,134 \pm 0,009$ und der letztere $0,128 \pm 0,007$ beträgt, in dem einen Falle also der Werth 0,123 eben so wahrscheinlich ist als in dem anderen der Werth 0,135. Hienach dürfte kaum mehr zu bezweifeln sein, dass die drei Aneroïde der geodätischen Sammlung des Polytechnicums in München einerlei Temperaturcoefficienten haben, und dass dafür ein aus den bisherigen Bestimmungen (Gl. 15, Taf. Nr 7, Taf. Nr 8) mit Rücksicht auf deren Gewichte berechneter Mittelwerth, nämlich für 1° R

$$a = - 0,1315 \pm 0,0058 \quad (21)$$

gesetzt werden darf. Für 1°C würde selbstverständlich $a = - 0,105^{\text{mm}}$ werden.

2. Der Theilungscoefficient b lässt sich aus ähnlichen Formeln, wie wir sie eben für a entwickelt und benützt haben, finden. Sowie die Bestimmung von a unabhängig von b zu machen war, so muss auch die von b unabhängig von a sein: daraus folgt, dass die zur Berechnung von b dienenden Beobachtungen bei der Temperatur 0° oder nahe an dieser Grenze angestellt werden müssen. Wir können daher die am 21. und 22. December 1873 ausgeführten und schon in den drei ersten Tafeln benützten Versuche hier wiederholt verwenden, zumal sie eine grosse Abwechslung in den Barometerständen gewähren. Bezeichnen

$A_1, A_2, A_3 \dots$ die auf 0° reducirten Stände des Normalbarometers,
 $B_1, B_2, B_3 \dots$ die zu diesen Ständen und 0° Temperatur gehörigen
 Ablesungen am Aneroid Nr I,

$A'_1, A'_2, A'_3 \dots$ die auf 0° reducirten Normalbarometerstände, denen
 die bei 0° gemachten Ablesungen

$B'_1, B'_2, B'_3 \dots$ am Aneroid Nr II entsprechen,

so bestehen nach Gl (5) zwischen diesen Grössen folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} B_1 + c_1 + b(760 - A_1) - A_1 &= B'_1 + c_2 + b(760 - A'_1) - A'_1 \\ B_2 + c_1 + b(760 - A_2) - A_2 &= B'_2 + c_2 + b(760 - A'_2) - A'_2 \\ B_3 + c_1 + b(760 - A_3) - A_3 &= B'_3 + c_2 + b(760 - A'_3) - A'_3 \\ B_4 + c_1 + b(760 - A_4) - A_4 &= B'_4 + c_2 + b(760 - A'_4) - A'_4 \\ \vdots &\quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \end{aligned} \quad (22)$$

Zieht man von der ersten dieser Gleichungen nacheinander die zweite, dritte, vierte, nte ab, so ergibt sich folgendes System von Gleichungen:

$$\begin{aligned} B_1 - B_2 - B'_1 + B'_2 &= (1 + b)(A_1 - A_2 - A'_1 + A'_2) \\ B_1 - B_3 - B'_1 + B'_3 &= (1 + b)(A_1 - A_3 - A'_1 + A'_3) \\ B_1 - B_4 - B'_1 + B'_4 &= (1 + b)(A_1 - A_4 - A'_1 + A'_4) \\ B_1 - B_5 - B'_1 + B'_5 &= (1 + b)(A_1 - A_5 - A'_1 + A'_5) \\ \vdots &\quad \quad \quad \vdots \end{aligned} \quad (23)$$

Denkt man sich zu diesen $n-1$ Gleichungen noch die identische Gleichung

$$B_1 - B_1 - B'_1 + B'_1 = (1 + b)(A_1 - A_1 - A'_1 + A'_1)$$

als nte und zwar an erster Stelle hinzugefügt, so ist die Summe aller dieser Gleichungen und folglich auch der $n-1$ Gleichungen Nr 23:

$$n(B_1 - B'_1) + [B'] - [B] = (1 + b)\{n(A_1 - A'_1) + [A'] - [A]\} \quad (24)$$

wobei wieder die eckigen Klammern Summenzeichen vorstellen.

Setzt man ähnlich wie in (19) die Differenz

$$\begin{aligned} [B] - [B'] &= n R \\ [A] - [A'] &= n S \end{aligned} \quad (25)$$

so folgt aus Gl (24) der Werth von

$$b = \frac{B_1 - B'_1 - R}{A_1 - A'_1 - S} - 1. \quad (26)$$

Tafel Nr 9.

Beobachtungen zur Bestimmung des den Federbarometern Nr I und Nr II
gemeinsamen Theilungs-Coefficienten b .

Nr	1873	A	A'	B	B'	b	v	v ²
1	Dec 21	723,25	762,95	721,09	760,39	0,0205	— 0,003	0,000009
2	„ „	733,65	772,65	731,98	770,30	0,0135	+ 0,004	0,000016
3	„ „	742,67	781,90	741,11	779,70	0,0145	+ 0,003	0,000009
4	„ „	752,60	723,25	750,95	720,32	0,0027	+ 0,015	0,000225
5	„ „	711,50	683,67	709,76	679,65	0,0378	— 0,020	0,000400
6	„ „	701,55	672,82	699,25	668,94	0,0129	+ 0,005	0,000025
7	„ „	691,50	723,27	688,85	720,34	0,0295	— 0,012	0,000144
8	„ „	760,88	723,33	759,77	720,23	0,0207	— 0,003	0,000009
9	„ „	770,75	732,53	769,79	729,64	0,0188	— 0,001	0,000001
10	„ „	782,70	742,63	781,28	739,84	0,0042	+ 0,013	0,000169
11	„ „	723,05	752,53	721,28	749,75	0,0066	+ 0,011	0,000121
12	„ „	681,30	713,20	678,72	709,72	0,0096	+ 0,008	0,000064
13	„ „	672,10	702,25	669,34	699,05	0,0258	— 0,008	0,000064
14	„ „	723,25	693,77	721,34	689,85	0,0269	— 0,009	0,000081
		726,482	727,197	724,608	724,123	0,0174	$\epsilon = \pm 0,008$	0,000937
		S = — 0,715		R = + 0,485			$\epsilon' = \pm 0,002$	

Tafel Nr 10.

Beobachtungen zur Bestimmung des den Federbarometern Nr II und III
gemeinsamen Theilungs-Coefficienten b.

Nr	1873	A	A'	B	B'	b	v	v ²
1	Dec 21 u 22	762,95	724,40	760,39	723,60	0,0121	+ 0,004	0,000016
2	„ „	772,65	731,25	770,30	730,50	0,0156	+ 0,000	0,000000
3	„ „	781,90	740,75	779,70	740,50	0,0059	+ 0,010	0,000100
4	„ „	723,25	750,57	720,32	750,03	0,0070	+ 0,009	0,000081
5	„ „	683,67	712,00	679,65	710,80	0,0196	— 0,004	0,000016
6	„ „	672,82	701,90	668,94	700,95	0,0224	— 0,007	0,000049
7	„ „	723,27	692,05	720,34	690,40	0,0341	— 0,019	0,000361
8	„ „	723,33	760,24	720,23	760,00	0,0166	— 0,001	0,000001
9	„ „	732,53	770,83	729,64	770,83	0,0168	— 0,001	0,000001
10	„ „	742,63	781,00	739,84	780,82	0,0103	+ 0,005	0,000025
11	„ „	752,53	724,50	749,75	723,65	0,0102	+ 0,006	0,000036
12	„ „	713,20	681,60	709,72	679,95	0,0126	+ 0,003	0,000009
13	„ „	702,25	672,00	699,05	670,40	0,0226	— 0,007	0,000049
14	„ „	693,77	662,20	689,85	660,09	0,0134	+ 0,002	0,000004
		727,20	721,81	724,11	720,89	0,0157	$\epsilon = \pm 0,0075$	0,000748
		S = + 5,39		R = + 3,22			$\epsilon' = \pm 0,002$	

In dem Ausdrucke für b sind, wie in jenem für a (Nr 20), alle Beobachtungen nur einmal, die erste aber ist zweimal benützt. Verfährt man mit allen folgenden Beobachtungen wie hier mit der ersten, indem man nach und nach deren Marken 1 in 2, 3, 4 ... n übergehen lässt, so erhält man aus n ganzen Beobachtungen auch n Werthe von b.

Zu den vorstehenden beiden Tafeln ist nur wenig zu bemerken. In Nr 9 bezeichnet A den auf 0° reducirten Stand des Normalbarometers, bei welchem das Aneroid Nr I die Ablesung B gab, und A' den wie vorhin reducirten Normalbarometerstand, welcher zur Ablesung B' auf dem Aneroid Nr II gehörte; in Tafel Nr 10 sind dagegen die Stände, welche hier mit A' und B' bezeichnet sind, unter A und B vorgetragen, während dort die zum Aneroid Nr III gehörigen accentuirt sind. Aus

den Bemerkungen zu den Tafeln Nr 1 bis Nr 3 ist schon bekannt, dass die Stände B und B' nicht vollständig direct abgelesen sind, sondern die Temperaturcorrection mit einschliessen, welche deshalb nöthig waren, weil die Aneröide die Temperatur 0° nicht während der ganzen Dauer der Beobachtungen beibehielten. Der Fehler v ist in beiden Tafeln gleich der Differenz zwischen dem Mittelwerthe und jedem Einzelwerthe des Theilungscoefficienten b.

Während diesen aus je 14 ganzen Beobachtungen hervorgegangenen Einzelwerthen ein mittlerer Fehler von $\pm 0,0085$ und $\pm 0,0076$ zukommt, haben die arithmetischen Mittel von b in Tafel Nr 9 und Nr 10 mittlere Fehler von nur $\pm 0,0023$ und $\pm 0,0020$; gleichwohl greifen die gefundenen Werthe von b in Folge ihrer mittleren Fehler in einander über, und es kann daher auch gestattet werden, für unsere drei Aneröide aus den bisherigen fünf Bestimmungen des Theilungscoefficienten b [vergl. Gl (9) und die Tafeln Nr 9 und Nr 10] einen Mittelwerth

$$b = + 0,016 \pm 0,002 \quad (27)$$

zu berechnen und bei späteren Reductionen anzuwenden.

IV. Mittelbare Bestimmung der Standcorrection eines Federbarometers durch Vergleichung mit einem Aneröid von gleicher Beschaffenheit.

Die unmittelbare Bestimmung der Standcorrection c eines Naudet'schen Federbarometers erfordert immer besondere Hilfsapparate und ist daher in jedem Falle umständlich, in vielen nicht ausführbar. Wenn man dagegen ein Normalaneröid, d. i. einen sehr guten und vollständig berichtigten Federbarometer besitzt, so kann man durch Vergleichung desselben mit einem gleichbeschaffenen Aneröid sehr leicht dessen Constante c bestimmen. Denn nach der im vorigen Abschnitt geführten Untersuchung dürfen unter dieser Voraussetzung die Wärme-coefficienten a und die Theilungscoefficienten b beider Instrumente als unter sich gleich betrachtet werden; beobachtet man nun beide Aneröide unter gleichem Luftdrucke bei gleicher Temperatur, so werden auch die Theilungscorrectionen c' und die Wärmecorrectionen c'' unter sich

gleich und es liefert daher jede ganze Beobachtung eine Gleichung von der Form

$$B_1 + c_1 = B_2 + c_2 \quad (28)$$

worin B_1 die Ablesung und c_1 die Standcorrection des einen und B_2 die Ablesung und c_2 die Standcorrection des anderen Federbarometers ist. Hieraus ergibt sich somit die Constante des letzteren

$$c_2 = c_1 + B_1 - B_2 \quad (29)$$

auf die einfachste Weise. Ob auch mit hinreichender Genauigkeit, sollen die nachfolgenden Beobachtungen beweisen.

Tafel Nr II.

Nach den Temperaturen geordnete Beobachtungen über die Differenzen der Standcorrectionen der drei Federbarometer Nr I, II, III.

Nr	1873	t	B ₁	B ₂	B ₃	A ₁	A ₂	v ₁ ² + v ₂ ²
1	Dec 31	+ 18,5	719,90	718,70	720,90	1,20	— 1,00	0,027909
2	„ 6	+ 15,2	24,80	23,80	26,10	1,00	— 1,30	0,047809
3	„ 5	+ 14,8	27,50	26,30	28,50	1,20	— 1,00	0,027909
4	„ 6	+ 14,6	22,10	21,10	23,50	1,00	— 1,40	0,084809
5	„ 7	+ 14,5	30,50	29,40	31,70	1,10	— 1,20	0,006409
6	„ 7	+ 13,7	30,00	28,90	31,30	1,10	— 1,30	0,023409
7	„ 7	+ 12,5	31,45	30,45	32,75	1,00	— 1,30	0,047809
8	„ 14	+ 6,0	26,70	25,50	27,80	1,20	— 1,10	0,005009
9	„ 14	+ 5,9	28,60	27,40	29,60	1,20	— 1,00	0,027909
10	„ 14	+ 5,8	27,30	26,00	28,40	1,30	— 1,10	0,020609
11	„ 9	+ 4,8	29,75	28,45	30,70	1,30	— 0,95	0,062609
12	„ 9	+ 4,5	30,20	29,40	30,85	0,80	— 0,65	0,403609
13	„ 9	+ 4,5	30,75	29,50	31,80	1,25	— 1,05	0,019309
14	„ 13	+ 4,5	28,80	27,50	30,00	1,30	— 1,20	0,018609
15	„ 13	+ 4,5	28,50	27,20	29,90	1,30	— 1,40	0,071609
16	„ 21	0,0	21,10	20,20	22,40	0,90	— 1,30	0,092209
17	„ 15	— 1,7	23,60	22,30	24,60	1,30	— 1,00	0,043609
18	„ 10	— 3,3	26,00	24,50	27,35	1,50	— 1,35	0,141809
19	„ 10	— 4,1	25,80	24,50	27,20	1,30	— 1,40	0,071609
20	„ 10	— 5,1	725,70	724,50	726,00	1,20	— 1,30	0,019009
		+ 6,505	726,955	725,780	728,075	+ 1,172	— 1,165	1,263580
								$\epsilon = \pm 0,18$
								$\epsilon' = \pm 0,04$

Im Dezember 1873 habe ich die vielfach hier genannten Federbarometer Nr I , Nr II , Nr III bei gleicher Temperatur und gleichem Luftdruck verglichen. Die Temperaturen wechselten zwischen $+ 18,5^0$ und $- 5,1^0$ R, die Barometerstände von $719,5^{\text{mm}}$ bis $731,7^{\text{mm}}$ Quecksilber. In der vorstehenden Tafel Nr 11 sind die Ablesungen mit B_1 , B_2 , B_3 und die Differenzen der Standcorrectionen mit $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ bezeichnet, und zwar ist

$$\mathcal{A}_1 = c_2 - c_1 \text{ und } \mathcal{A}_2 = c_3 - c_1 . \quad (30)$$

Die letzte Spalte enthält sofort die Summe der Fehlerquadrate von $v_1 = 1,172 - \mathcal{A}_1$ und $v_2 = - 1,165 - \mathcal{A}_2$. Der mittlere Fehler einer einzigen Beobachtung $\epsilon = \pm 0,18^{\text{mm}}$ ist somit aus 40 Beobachtungen bestimmt, während der Fehler des arithmetischen Mittels $\epsilon' = \pm 0,04^{\text{mm}}$ nur aus der Hälfte dieser Beobachtungen berechnet wurde.

Vergleicht man die hier gefundenen mittleren Differenzen

$$\mathcal{A}_1 = 1,172 \text{ und } \mathcal{A}_2 = - 1,165$$

mit jenen, welche sich aus den früher bestimmten Werthen der Constanten c_1 , c_2 , c_3 ergeben (Gl. 9), nämlich mit

$$\mathcal{A}'_1 = 1,157 \text{ und } \mathcal{A}'_2 = - 1,119$$

und bedenkt, dass die in Gleichung 9 dargestellten Constanten aus nur je 14 oder 15 ganzen Beobachtungen hervorgingen, so entsprechen die Unterschiede $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}'_1$ und $\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}'_2$ nahezu dem eben bestimmten mittleren Fehler des arithmetischen Mittels, und man kann folglich die Constanten c_2 und c_3 aus c_1 und je 20 Beobachtungen bis auf $\pm 0,04^{\text{mm}}$ genau finden, während der Coefficient $a_3 = a_2 = a_1$ und $b_3 = b_2 = b_1$ ist.

V. Ueber die Bestimmung kleiner Höhenunterschiede mit Hilfe von Federbarometern.

In neuester Zeit werden, wie ich schon im Eingange bemerkt habe, die Naudet'schen Aneroidbarometer vorzugsweise zu technischen Nivellirungen, durch die man ausgedehnte Terrainstrecken in Bezug

auf ihre Tauglichkeit für die Anlagen von Strassen und Eisenbahnen untersucht, angewendet. Es ist daher wichtig auf Grund zuverlässiger Vergleichen zu wissen, wie genau man mässige Höhenunterschiede auf diesem Wege ermitteln kann. Ich habe deshalb den bereits im Jahre 1872 angestellten Beobachtungen, worüber die vierte Auflage meiner „Elemente der Vermessungskunde“ (Bd. I, S. 410 bis 417 und Bd. II, S. 342 bis 348) berichtet, im Herbst 1873 neue hinzugefügt, welche über die Genauigkeit technischer Nivellemente weiteren und wohl auch ausreichenden Aufschluss gewähren.

1. Zunächst benützte ich meinen Landaufenthalt im Bade Adelholzen bei Traunstein in Oberbayern dazu, die vorher direct gemessene Höhe meines Wohnzimmers im zweiten Stock über dem Erdgeschoße zu messen. Der Höhenunterschied zwischen der Oberfläche eines an der Hausthüre des Hauptgebäudes befindlichen Tisches und der Oberfläche einer im Zimmer stehenden Commode, worauf der Federbarometer Nr I bei den Beobachtungen abwechselnd lag, wurde mittelst einer lothrecht aufgestellten Feuerleiter und eines metallenen Bandmasses = 6,91^m gefunden; die Lufttemperatur gab ein im Schatten frei hängender Thermometer an; das Aneroid blieb fortwährend in seinem Gehäuse und wurde an dessen Riemen von einer Station zur anderen getragen; bei jeder Beobachtung habe ich die Trägheit der Nadel durch Klopfen auf den Glasdeckel überwunden.

In der Tafel Nr 12 sind zunächst die Ablesungen an der unteren und oberen Station (B, t), mit ihren Reductionen auf die Temperatur des schmelzenden Eises (A_0), dann die Luftwärme T, welche für beide Stationen gleich war, und die hieraus berechneten Höhenunterschiede (h) mit ihren Abweichungen (v) vom arithmetischen Mittel (7,024) und deren Quadrate (v^2) enthalten. Die Berechnung der Höhen h erfolgte nach den bekannten Formeln

$$u = \log A_0 - \log A'_0 \text{ und } \log h = A + \log u$$

in welchen A der aus meiner ersten hypsometrischen Tafel (Vierte Auflage der Elemente der Vermessungskunde, S. 498) mit dem Eingange $T + t = 2 T^0 R$ zu entnehmende Logarithme des Products 18405 mal $(1 + 0,0029 (T + t))$ Meter ist. Der von der Breite ψ her-

rührende Factor der Barometerformel hat hier auf das Ergebniss der Rechnung ebensowenig Einfluss als jener, welcher der mit der Höhe sich ändernden Schwerkraft Rechnung trägt; daher sind beide weggelassen.

Tafel Nr 12.

Beobachtungen über die Bestimmung kleiner Höhenunterschiede mit Hilfe von Federbarometern, ausgeführt zu Adelholzen im September 1873.

Nr	1873	Tageszeit	Untere Station			Obere Station			Luft-Temp. T	h	v	v ²
			B	t	A ₀	B'	t'	A ₀				
	Sept.											
1	19	8	709,00	12,8	709,47	708,20	12,8	708,69	9,0	9,178	— 2,154	4,6397
2	"	10	10,00	15,0	10,17	09,40	15,0	09,58	10,3	6,974	+ 0,050	0,0025
3	"	12	10,50	13,0	10,92	09,70	13,0	10,13	12,2	9,407	— 2,383	5,6787
4	"	1	10,75	13,3	11,13	10,00	13,2	10,40	12,5	8,701	— 1,677	2,8123
5	"	3	11,10	12,5	11,57	10,50	12,5	10,98	11,3	6,991	+ 0,033	0,0011
6	"	5	11,90	14,8	12,08	11,40	14,5	11,61	10,2	5,539	+ 1,485	2,2052
7	20	8	14,50	12,2	14,96	13,70	12,0	14,20	11,1	8,956	— 1,932	3,7326
8	"	10	14,50	12,5	14,92	13,90	12,3	14,36	12,2	6,630	+ 0,394	0,1552
9	"	2	14,50	16,6	14,39	13,90	15,5	13,94	16,1	5,423	+ 1,601	2,5632
10	21	8	12,90	12,5	13,35	12,20	12,3	12,69	10,8	7,785	— 0,761	0,5791
11	"	10	13,00	14,0	13,26	12,40	13,8	12,69	15,2	6,853	+ 0,171	0,0292
12	"	12	13,00	14,8	13,16	12,50	14,7	12,67	16,0	5,912	+ 1,112	1,2365
13	"	2	12,90	16,9	12,78	12,15	16,9	12,05	16,2	8,821	— 1,797	3,2292
14	22	7	11,90	14,4	12,12	11,20	14,2	11,45	11,5	7,941	— 0,917	0,8409
15	24	7	11,00	10,3	11,77	10,45	10,3	11,22	6,5	6,379	+ 0,645	0,4160
16	"	9	11,25	12,0	11,79	10,75	12,0	11,30	7,0	5,696	+ 1,328	1,7636
17	"	11	11,70	10,2	12,46	11,10	10,1	11,89	7,6	6,639	+ 0,385	0,1482
18	"	4	13,00	13,7	13,30	12,35	13,6	12,66	8,5	7,473	— 0,449	0,2016
19	25	7	13,35	9,0	14,25	12,55	9,0	13,46	4,0	9,030	— 2,006	4,0240
20	"	9	13,75	10,4	14,46	13,30	10,4	14,02	7,0	5,094	+ 1,930	3,7249
21	"	10	13,75	10,4	14,46	13,30	10,4	14,02	7,5	5,105	+ 1,919	3,6826
22	26	7	13,00	8,5	13,98	12,50	8,6	13,46	6,0	5,999	+ 1,025	1,0506
23	"	9	13,45	10,7	14,06	13,00	11,8	13,55	7,5	5,922	+ 1,102	1,2144
24	"	5	12,00	11,8	12,56	11,50	12,0	12,04	8,0	6,064	+ 0,960	0,9216
25	27	9	10,65	10,3	11,42	10,00	10,1	10,81	8,9	7,157	— 0,123	0,0151
26	"	10	10,65	10,3	11,42	10,00	10,4	10,77	9,0	7,627	— 0,603	0,3636
27	"	2	09,35	11,0	10,05	08,90	11,0	09,61	12,0	5,241	+ 1,783	3,1791
28	"	6	709,40	12,7	709,88	708,70	12,7	709,19	9,2	8,121	— 1,097	1,2034
			712,026	12,38	712,505	711,412	12,32	711,909	10,12	70,24	$\epsilon = \pm 1,35^m$	49,6141
											$\epsilon' = \pm 0,26^m$	

Aus der vorstehenden Tafel ergibt sich nun ein Mittelwerth von $h = 7,02^m$, während die directe Messung $h = 6,91^m$ lieferte. Die Summe der Fehlerquadrate liefert den mittleren Fehler einer ganzen Beobachtung $\epsilon = \pm 1,35^m$ und den Fehler des arithmetischen Mittels $\epsilon' = \pm 0,26^m$.

2. In dem vorliegenden Falle hätte die Reduction der Aneröidablesungen B , B' auf die Temperatur 0° erspart werden können, da erstens alle Beobachtungen mit einem und demselben Instrumente und in so kurzer Aufeinanderfolge gemacht wurden, dass die Temperaturen t , t' , welche unten und oben stattfanden, fast ohne Ausnahme gleich blieben oder nur um Ablesungsfehler verschieden waren. Denn schreibt man die Reductionsformeln nach Gl. (5) an, wie sie sich für das Instrument Nr I an zwei ungleich hohen Stationen ergeben, nämlich

$$\begin{aligned} A_0 &= B + c_1 + b(760 - A_0) - at \\ A'_0 &= B' + c_1 + b(760 - A'_0) - at' \end{aligned}$$

so hat man, da nicht blos die Temperatur-, sondern auch die Theilungs-Correctionen einander gleich sind (letztere deshalb, weil $A_0 - A'_0$ nur etwa $0,6^m$ beträgt), $A_0 - A'_0 = B - B'$ und somit auch den Bruch

$$\frac{A_0 - A'_0}{A'_0} = \frac{B - B'}{A'_0} = \frac{B - B'}{B' + 0,5} = \frac{(B - B')(B' - 0,5)}{B'B'}$$

Hieraus ergibt sich mit Rücksicht darauf, dass $B' = 711,4^m$ ist und folglich für $B' - 0,5^m$ gesetzt werden kann,

$$\frac{A_0}{A'_0} = \frac{B}{B'} \text{ und } u = \log \frac{A_0}{A'_0} = \log \frac{B}{B'}. \quad (32)$$

In der That wird, wenn man mit den in der Tafel Nr 12 stehenden Mittelwerthen $B = 712,03$; $B' = 711,41$; $2T = 20,24^\circ R$ rechnet, der Höhenunterschied $h = 7,14^m$, während er sich aus den Einzelwerthen von A_0 und A'_0 im Mittel zu $7,02^m$ ergab.

3. Die beste Gelegenheit zu Vergleichen barometrischer Höhenmessungen mit genau bestimmten Höhenpunkten bieten die Präcisionsnivelemente der europäischen Gradmessung dar. Ich habe dieselben daher auf den Linien München-Rosenheim-Salzburg und München-Landshut-Regensburg für meinen gegenwärtigen Zweck benützt, und zwar in der Weise, dass ich nur an einzelnen Stationen, namentlich den Endstationen, an den mit gusseisernen Platten versehenen und in meinen drei Mittheilungen über „das bayerische Präcisionsnivelement“ mit $\odot$ bezeichneten Fixpunkten, ausserdem aber im Eisenbahnwagen, in bestimmter Höhe über der Schienenoberfläche, folglich auch in genau bekannter Meereshöhe beobachtete. Der Federbarometer lag während der Fahrt auf gepolstertem Sitze neben mir; die Ablesungen am Zeiger und Thermometer (B und t) erfolgten auf jeder Station, sobald der Zug ganz stille stand und das Instrument durch Anklopfen etwas erschüttert war; die Lufttemperatur (T) wurde ausserhalb der Station dadurch gemessen, dass ich einen besonderen grösseren Thermometer längere Zeit im Schatten zum Fenster hinaushielt und beim Hereinziehen ablas. In München und Regensburg hatte ich Control-Beobachtungen angeordnet, welche bei den Berechnungen der Barometerstände in Betracht gezogen wurden, insoferne meine eigenen Beobachtungen am Aneroide Nr I nicht selbst sichere Aufschlüsse gaben über die Luftdrucks-Änderungen, welche während der Fahrt stattfanden.

4. Von Adelholzen aus nahm ich am 26. September 1873 ein Nivellement der Eisenbahnstationen zwischen Bergen und Salzburg mit dem Federbarometer Nr I vor. Auf der Station Bergen beobachtete ich zunächst am Fixpunkt $\odot$ Nr 838 des bayerischen Präcisionsnivelements, dann im Eisenbahnwagen (W), in Traunstein am Fixpunkt $\odot$ Nr 844 und in Salzburg am Fixpunkt $\odot$ Nr 877 und im Eisenbahnwagen, an allen übrigen Stationen nur im Eisenbahnwagen. Dasselbe geschah auf der Rückfahrt, welche nach dritthalbstündigem Aufenthalte in Salzburg erfolgte. Jeder Punkt wurde also zweimal beobachtet und die hiebei erhaltenen Ablesungen sind in der nachstehenden Tafel Nr 13 enthalten.

In dieser Tafel stellen die „Coten“ die Abstände des Federbarometers vom Generalhorizont des bayerischen Präcisionsnivelements vor, der

Tafel Nr 13.

Nivellement der Eisenbahnstationen zwischen Bergen und Salzburg, mit dem Federbarometer Nr I am 26. September 1873 ausgeführt.

Nr	Station	Cote	Zeit	T	B	t	A ₀	A' ₀	A'' ₀	v	v ²
1	Bergen . .	⊙ 272,40 ^m	10,30 ^h	10,0	719,30	15,8	719,23		719,23	0,00	0,0000
2	„ . .	W 274,67	10,45	10,3	19,45	15,6	19,40		19,44	— 0,04	0,0016
3	Traunstein .	⊙ 262,14	11,00	11,0	18,45	15,0	18,49		18,36	+ 0,13	0,0169
4	Lauter . .	W 253,08	11,30	11,5	17,40	14,5	17,52		17,58	— 0,06	0,0036
5	Teisendorf .	W 354,24	12,00	12,0	26,30	15,0	26,23		26,23	0,00	0,0000
6	Freilassing .	W 438,76	12,15	12,2	33,45	15,3	33,23	733,30	33,53	— 0,23	0,0529
7	Salzburg .	W 436,52	12,30	12,5	33,25	15,7	32,98	33,13	33,34	— 0,21	0,0441
8	„ . .	⊙ 435,84	12,50	12,5	33,20	15,7	32,93	33,16	33,30	— 0,14	0,0196
9	„ . .	⊙ 435,84	2,30	12,5	32,70	15,7	32,44	33,18	33,30	— 0,12	0,0144
10	„ . .	W 436,52	3,00	12,5	32,70	15,7	32,44	33,33	33,34	— 0,01	0,0001
11	Freilassing .	W 438,76	3,15	12,5	32,90	16,0	32,60	33,56	33,53	+ 0,03	0,0009
12	Teisendorf .	W 354,24	3,45	12,0	25,50	16,8	25,21	26,33	26,25	+ 0,08	0,0064
13	Lauter . .	W 253,08	4,15	11,2	16,70	17,0	16,51	17,77	16,60	+ 0,17	0,0289
14	Traunstein .	⊙ 262,15	4,30	11,0	17,15	16,8	16,98	18,31	18,38	— 0,07	0,0049
15	Bergen . .	W 274,67	4,45	10,5	18,00	16,5	17,86	19,26	19,46	— 0,20	0,0400
16	„ . .	⊙ 272,40	5,00	10,3	717,90	16,5	717,75	719,23	719,25	— 0,02	0,0004
				11,53	724,65	15,85	724,49		725,07	$\epsilon = +0,126^{\text{mm}}$	0,2447
										$\epsilon' = +1,554^{\text{m}}$	

nahezu 862^m über dem mittleren Spiegel der Ostsee liegt. Will man also die Meereshöhe der Station haben, so darf man nur die Cote von 862 abziehen: der Rest ist jene Höhe in Metern. In der dritten Spalte sind die Zeitpunkte enthalten, in denen beobachtet wurde, und in den folgenden vier Spalten die Lufttemperatur T, der Stand B des Aneroids, die Instrumenten-Temperatur t, und die auf 0° reducirten Aneroid-Ablesungen A₀. Mit A'₀ habe ich diejenigen Werthe bezeichnet, in welche A₀ zu Folge der während der Fahrt eingetretenen allgemeinen Luftdrucksänderung übergang, und unter A''₀ sind diejenigen auf 0° reducirten Barometerstände verstanden, welche den wirklichen Höhenunterschieden der nivellirten Stationen dann entsprechen, wenn man für den Ausgangspunkt (hier Bergen ⊙) A''₀ = A₀ annimmt. Ueber die Herleitung der Werthe A'₀ und A''₀ sei noch Folgendes bemerkt.

In Salzburg wurde während des Zeitraums von 12^h 50' bis 2^h 30', also in 100 Minuten, am Fixpunkte ☉ Nr 877 ein Fallen des Barometers von 732,93 auf 732,44, d. i. von 0,49^{mm} beobachtet; in Bergen zeigte sich bei der Ankunft am Fixpunkte ☉ Nr 838, dass der Barometer im Ganzen um $719,23 - 717,75 = 1,48^{\text{mm}}$ gefallen war. Wann das Fallen begonnen hat, lässt sich unter der Voraussetzung, dass es zwischen dem unbekannten Anfang bis um 5^h Abends gleichmässig stattgefunden habe, dadurch finden, dass man sagt: wenn 100 Minuten nothwendig waren, um ein Sinken des Barometerstandes von 0,49 Millimeter zu bewirken, so werden x Minuten nothwendig gewesen sein, um ein Sinken von 1,48 Millimeter eintreten zu lassen. Aus dieser Proportion ergibt sich $x = 302$ Minuten = 5 Stunden und 2 Minuten: man kann also annehmen, dass das allgemeine Fallen des Barometerstands um 12 Uhr begonnen habe, und dass demnach die Differenz von 1,48^{mm} auf die 5 Stunden von 12^h bis 5 Uhr gleichmässig zu vertheilen sei. Diess gibt auf jede Stunde eine Verbesserung von 0,296^{mm}, auf jede Viertelstunde von 0,074^{mm}, auf je 5 Minuten von 0,025^{mm} u. s. w. Wäre das allgemeine Sinken des Barometerstands nicht eingetreten, so würden alle Angaben des Aneroids von Teisendorf (d. i. von 12 Uhr an) um so viel grösser ausgefallen sein, als die Correction beträgt, diese ist daher in dem vorliegenden Falle zu addiren, wie es auch bei den Beobachtungen Nr 6 bis Nr 16 geschehen ist.

Mit den Beobachtungen Nr 8 und Nr 9 in Salzburg, welche das allgemeine Sinken des Barometerstands nachweisen, stimmen auch die Controlbeobachtungen in München insoferne überein, als dort auch erst von 12 Uhr an ein merkliches Fallen des Normalbarometers im geodätischen Cabinet des Polytechnicums eintrat. Lägen diese beiden Beobachtungen nicht vor, so bliebe nichts anderes übrig, als die in Bergen beobachtete Differenz der Barometerstände von 1,48^{mm} auf die ganze Beobachtungsreihe, d. i. auf die Zeit von 10^h 30' bis 5^h statt von 12^h bis 5^h gleichmässig zu vertheilen, was allerdings die Fehler $v = A'_0 - A''_0$ nicht unwesentlich geändert und den mittleren Fehler der einzelnen ganzen Beobachtung jedenfalls vergrössert hätte.

Auf den ersten Blick kann es auffallend erscheinen, dass ich aus den unter A_0 und bezw. A'_0 dargestellten Barometerständen und den

Lufttemperaturen T nicht die Coten der einzelnen Stationen berechnet und deren Abweichungen von den in der zweiten Spalte durch das Präcisionsnivellement gegebenen Coten bestimmt habe, bei näherer Ueberlegung findet man jedoch, dass sich der mittlere Beobachtungsfehler, um den es sich bei Genauigkeitsbestimmungen allein handelt, eben so gut aus der Differenz der einander entsprechenden Barometerstände als aus dem Unterschiede der zusammengehörigen Coten finden lässt; und da man weiter findet, dass der erstere Weg etwas schneller zum Ziele führt, so wird man auch dessen Wahl billigen.

Die unter A''_0 zusammengestellten Barometerstände wurden in folgender Weise aus einander berechnet. Angenommen, der Meereshöhe der unteren Station entspreche ein Barometerstand A''_0 und jener der oberen Station der Stand A^0_0 , die Cotendifferenz beider Stationen sei $= h$ und die Summe der Lufttemperaturen $T_u + T_0$, so ist zunächst

$$\log u = \log h - A$$

zu berechnen, da h aus der Spalte 2 und $T_u + T_0$, womit man den Logarithmus A aus der ersten hypsometrischen Tafel findet, aus Spalte 4 bekannt ist. Sucht man die zu $\log u$ gehörige Zahl u , so ist weiter

$$u = \log A''_0 - \log A^0_0$$

und es kommt nun darauf an, ob A''_0 oder A^0_0 gegeben und deshalb A^0_0 oder A''_0 zu suchen ist: in dem ersten Falle hat man $\log A^0_0 = \log A''_0 - u$ und in dem zweiten $\log A''_0 = \log A^0_0 + u$ zu berechnen. Soll beispielsweise Bergen W aus Bergen $\odot$ berechnet werden, so ist hier $h = 2,27^m$, $T_u + T_0 = 20,3^{\circ}R$, $A = 4,28578$, $A^0_0 = 719,23$ gegeben, folglich $\log u = 6,07024 - 10$, $u = 0,000118$, $\log A''_0 = 2,85699$ und $A''_0 = 719,44$.

Will man aus dem mittleren Fehler der Barometerstände ($\epsilon = \pm 0,126^{mm}$) jenen der Höhenunterschiede berechnen, so handelt es sich hier lediglich noch darum, zu finden, welche Höhendifferenz einem Unterschied der Barometerstände von $0,126^{mm}$ entspricht, und zwar bei dem Mittel der Stände $724,49^{mm}$ und der Lufttemperaturen $11,5^{\circ}$, welche zur Zeit der

Beobachtungen geherrscht haben. Nun ist hier $A_0^0 = 724,49$, $A_0^u = 724,62$, $T_u + T_0 = 23^0 \text{ R}$, folglich $A = 4,28835$, $\log u = 5,90309 - 10$ und somit die Höhendifferenz $h = 1,554^m$, daher der zu ϵ gehörige mittlere Fehler $\epsilon' = \pm 1,55^m$; das von mir am 26. September 1873 ausgeführte Nivellement der Eisenbahnstationen zwischen Bergen und Salzburg gibt also die einzelnen Stationshöhen bis auf $\pm 1,55^m$ genau an. Dieser mittlere Fehler ist folglich nur um $0,2^m$ grösser als der, welcher unter günstigeren Umständen bei den auf Tafel Nr 12 dargestellten Messungen sich ergab.

5. Auf meiner Rückreise von Adelholzen nach München am 30. September 1873 nivellirte ich mit dem Federbarometer Nr I von Bergen aus sämtliche Eisenbahnstationen genau in derselben Weise wie vier Tage vorher auf der Fahrt nach Salzburg. Die Ergebnisse dieser Beobachtungen und der dazu gehörigen Rechnungen sind in Tafel Nr 14 zusammengestellt, und ich habe hierüber weiter nichts zu bemerken als dass in dem vorliegenden Falle Verbesserungen der auf 0^0 reducirten Barometerstände A_0 nicht nothwendig waren, da nach den in München geführten Controlbeobachtungen an jenem Tage der atmosphärische Druck sich nicht merklich änderte. Es ist desshalb auch in Tafel Nr 14 die Spalte A_0' , welche in der vorhergehenden Tafel nothwendig war, als überflüssig weggelassen worden. Die mittleren Fehler in Druck- und Höhendifferenz, nämlich $\epsilon = \pm 0,128^{mm}$ und $\epsilon' = \pm 1,551^m$, stimmen nahezu mit denen der vorigen Beobachtungen überein: dass aber hier zu einem etwas grösseren ϵ ein etwas kleineres ϵ' sich ergibt, rührt davon her, dass die mittlere Lufttemperatur bei den Beobachtungen am 30. September 16^0 R , am 26. September dagegen nur $11,5^0 \text{ R}$ betrug.

6. Bei Gelegenheit einer Dienstesreise in Sachen der Europäischen Gradmessung führte ich am 7. und 10. October 1873 ein barometrisches Nivellement der Eisenbahnstationen zwischen München und Landshut und am 8. und 10. October zwischen Landshut und Regensburg aus. Die Ergebnisse dieser Beobachtungen sind in den nachfolgenden Tafeln Nr 15 und Nr 16 enthalten, zu denen nur wenig zu bemerken ist, da das Beobachtungs- und Rechnungs-Verfahren mit dem am 26. und 30. Sept.

Tafel Nr 14.

Nivellement der Eisenbahnstationen von Bergen bis München, ausgeführt mit dem Federbarometer Nr I am 30. September 1873.

Nr	Station	Cote	Zeit	T	B	t	A ₀	A ₀ '	v	v ²
		^m	^h	⁰	^p		^{mm}	^{mm}		
1	Bergen	⊙ 272,40	11,15	14,5	715,85	15,0	715,93	715,93	0,00	0,0000
2	„	W 274,80	11,30	14,5	16,00	15,1	16,07	16,13	— 0,06	0,0036
3	Uebersee	W 332,93	11,45	15,0	21,05	16,2	20,89	20,95	— 0,06	0,0036
4	Bernau	W 334,90	12,15	16,2	21,55	18,0	21,16	21,06	+ 0,10	0,0100
5	Prien	W 328,95	12,30	16,5	20,95	18,2	20,54	20,56	— 0,02	0,0004
6	Endorf	W 334,72	12,45	16,2	21,45	18,6	20,98	21,12	— 0,14	0,0196
7	Stephanskirchen	W 379,55	1,00	16,8	25,40	19,0	24,82	24,74	+ 0,08	0,0064
8	Rosenheim	W 413,06	1,15	17,0	28,20	19,2	27,67	27,64	+ 0,03	0,0009
9	„	⊙ 413,06	1,20	17,0	28,10	19,2	27,45	27,68	— 0,23	0,0529
10	„	W 413,06	1,30	17,0	28,05	19,3	27,39	27,46	— 0,07	0,0049
11	Carolinenfeld	W 390,42	2,00	16,3	25,95	19,2	25,34	25,48	— 0,14	0,0196
12	Ostermünchen	W 357,03	2,15	16,2	22,90	19,6	22,28	22,53	— 0,25	0,0625
13	Assling	W 350,80	2,20	16,0	22,40	19,6	21,79	21,76	+ 0,03	0,0009
14	Grafring	W 317,27	2,30	16,0	19,65	19,6	19,08	18,98	+ 0,10	0,0100
15	Kirchseeon	W 298,99	2,45	15,9	18,20	20,0	17,60	17,55	+ 0,05	0,0025
16	Zorneding	W 302,07	3,00	16,2	18,35	19,6	17,80	17,86	— 0,06	0,0036
17	Haar	W 318,20	3,15	16,5	19,65	20,0	19,03	19,14	— 0,11	0,0121
18	Trudering	W 332,25	3,20	16,0	20,75	20,0	20,11	20,20	— 0,09	0,0081
19	Haidhausen	W 328,58	3,30	16,0	20,40	19,6	19,19	19,80	+ 0,02	0,0004
20	Thalkirchen	W 335,64	3,45	16,1	20,75	19,8	20,14	20,41	— 0,27	0,0729
21	München	⊙ 338,64	4,00	16,0	721,45	19,8	720,82	720,15	+ 0,17	0,0289
				16,09	721,76	18,79	721,24	721,31	$\varepsilon = +0,128^{\text{mm}}$	0,3238
									$\varepsilon' = +1,551^{\text{m}}$	

auf den Strecken Bergen-Salzburg und Bergen-München befolgten völlig übereinstimmte. Die Coten der Eisenbahnstationen, aus denen sich die Höhenlage des Aneroids Nr I im Eisenbahnwagen ergab, sind noch nicht veröffentlicht, liegen aber berechnet vor und werden nächstens in den Abhandlungen der hiesigen K. Akademie der Wissenschaften erscheinen unter dem Titel: „Das bayerische Präcisionsnivellement. Dritte Mittheilung von C. M. Bauernfeind.“

Tafel Nr 15.

Nivellement der Eisenbahnstationen von München bis Landshut und zurück, ausgeführt mit dem Federbarometer Nr I am 7. und 10. October 1873.

Nr	Station	Cote	Zeit	T	B	t	A ₀	A ₀ '	A ₀ ''	v	v ²
			7. Oct h	0							
1	München .	⊙ 338,64	3,55	18,0	717,55	18,0	717,22	717,22	717,22	0,00	0,0000
2	Feldmoching	W 364,36	4, 5	17,5	20,05	19,2	19,53	19,58	19,35	+ 0,23	0,0529
3	Schleissheim	W 376,00	4,15	17,2	20,15	19,5	19,58	19,78	19,73	+ 0,05	0,0025
4	Lohhof . .	W 388,72	4,25	16,9	21,20	20,0	20,57	20,87	20,94	— 0,07	0,0049
5	Neufahrn .	W 397,92	4,40	16,5	22,00	19,8	21,37	21,82	21,73	+ 0,09	0,0081
6	Freising . .	⊙ 413,72	5,00	15,7	23,40	19,6	22,77	23,09	23,12	— 0,03	0,0009
7	Langenbach	W 431,02	5,15	14,2	24,65	19,0	24,08	24,48	24,74	— 0,26	0,0676
8	Moosburg .	W 445,38	5,30	13,1	25,70	18,6	25,16	25,63	25,93	— 0,30	0,0900
9	Bruckberg .	W 453,15	5,45	12,8	26,40	18,5	25,87	26,42	26,55	— 0,13	0,0169
10	Landshut .	⊙ 469,17	6, 5	12,2	28,00	17,6	27,56	728,21	27,98	+ 0,23	0,0529
			10 Oct								
11	Landshut .	⊙ 469,17	3,00	9,5	31,30	12,5	31,47		31,47	0,00	0,0000
12	Bruckberg .	W 453,15	3,15	9,4	30,00	12,6	30,18		30,16	+ 0,02	0,0004
13	Moosburg .	W 445,38	3,30	9,2	29,45	12,5	29,66		29,52	+ 0,14	0,0196
14	Langenbach	W 431,02	3,45	9,0	28,05	12,3	28,30		28,43	— 0,13	0,0169
15	Freising . .	⊙ 413,72	4,00	9,0	26,40	12,2	26,68		26,82	— 0,14	0,0196
16	Neufahrn .	W 397,92	4,15	9,0	25,10	12,0	25,44		25,33	+ 0,11	0,0121
17	Lohhof . .	W 388,72	4,30	9,0	24,20	12,0	24,55		24,62	— 0,07	0,0049
18	Schleissheim	W 376,00	4,40	8,8	23,20	12,0	23,55		23,42	+ 0,13	0,0169
19	Feldmoching	W 364,36	4,45	8,8	22,00	11,8	22,40		22,56	— 0,16	0,0256
20	München .	⊙ 338,64	5,00	8,8	719,75	12,0	720,16		720,17	— 0,01	0,0001
				12,23	724,43	15,59	724,31		724,49	$\varepsilon = +0,147^{\text{mm}}$ $\varepsilon' = +1,76^{\text{m}}$	0,4128

Aus der Tafel Nr 15 ersieht man, dass für die Beobachtungen am 7. October eine Verbesserung der Barometerstände A₀ nothwendig war, da an diesem Tage nach den Controlbeobachtungen in München der allgemeine Luftdruck von 4 bis 6 Uhr Nachmittags um 0,6^{mm} fiel, was auf eine Stunde 0,3^{mm} und auf 10 Minuten 0,05^{mm}, daher von 3^h 55' bis 6^h 5' oder in 2^h 10' im Ganzen 0,65^{mm} ausmacht. Hienach ist die Spalte A₀'' für die Beobachtungen Nr 1 bis 10 berechnet.

Tafel Nr 16

Nivellement der Eisenbahnstationen von Landshut bis Regensburg und zurück,
ausgeführt mit dem Federbarometer Nr I am 8. und 10. October 1873.

Nr	Station	Cote	Zeit	T	B	t	A ₀	A ₀ '	v	v ²
		^m	8. Oct ^h	⁰		⁰				
1	Landshut . . .	⊙ 469,17	7,00	11,0	725,90	13,5	726,02	726,02	0,00	0,0000
2	Mirskofen . . .	W 442,64	7,20	12,2	23,70	13,6	23,85	23,75	+ 0,10	0,0100
3	Ergoldsbach . . .	W 439,13	7,40	12,0	23,50	14,0	23,60	23,46	+ 0,14	0,0196
4	Neufahrn b/E. . .	W 454,80	7,50	12,3	24,75	14,0	24,83	24,80	+ 0,03	0,0009
5	Niederlindhard . . .	W 468,81	8,00	13,0	26,20	14,2	26,23	26,44	— 0,21	0,0441
6	Laberweinting . . .	W 490,78	8,12	13,2	28,30	14,8	28,22	28,11	+ 0,11	0,0121
7	Geisselhörling . . .	⊙ 500,55	8,20	14,0	29,00	15,2	28,86	29,06	— 0,20	0,0400
8	Sünching . . .	W 516,65	8,40	14,6	30,40	15,8	30,16	30,23	— 0,07	0,0049
9	Taimering . . .	W 517,00	8,50	15,0	30,55	15,8	30,31	30,22	+ 0,09	0,0081
10	Moosham . . .	W 517,25	9,00	15,2	30,40	16,0	30,13	30,21	— 0,08	0,0064
11	Mangolding . . .	W 519,80	9, 5	15,0	30,65	16,0	30,38	30,35	+ 0,03	0,0009
12	Obertraubling . . .	W 517,14	9,15	14,2	30,50	16,2	30,21	30,15	+ 0,06	0,0036
13	Regensburg . . .	⊙ 520,15	9,30	13,6	30,60	16,5	30,27	30,46	— 0,19	0,0361
			10. Oct							
14	Regensburg . . .	⊙ 520,15	12,00	10,8	35,50	13,0	35,54	35,54	0,00	0,0000
15	Obertraubling . . .	W 517,14	12,30	10,5	35,35	12,8	35,43	35,29	+ 0,14	0,0196
16	Mangolding . . .	W 519,80	12,40	10,8	35,55	12,8	35,63	35,66	— 0,03	0,0009
17	Moosham . . .	W 517,25	12,50	10,4	35,30	12,8	35,38	35,40	— 0,02	0,0004
18	Taimering . . .	W 517,00	12,55	10,6	35,30	12,8	35,38	35,36	+ 0,02	0,0004
19	Sünching . . .	W 516,65	1, 5	11,0	35,00	12,8	35,08	35,32	— 0,24	0,0576
20	Geisselhörling . . .	⊙ 500,55	1,20	10,0	34,05	13,0	34,11	33,91	+ 0,20	0,0400
21	Laberweinting . . .	W 490,78	1,40	9,8	33,05	13,0	33,13	33,39	— 0,26	0,0676
22	Niederlindhard . . .	W 468,81	1,55	9,8	31,20	13,0	31,31	31,46	— 0,15	0,0225
23	Neufahrn b/E. . .	W 454,80	2,10	9,8	30,00	12,9	30,14	30,09	+ 0,05	0,0025
24	Ergoldsbach . . .	W 439,13	2,20	9,6	28,70	12,8	28,88	28,87	+ 0,01	0,0001
25	Mirskofen . . .	W 442,64	2,35	9,6	28,85	12,6	29,05	29,27	— 0,22	0,0484
26	Landshut . . .	⊙ 469,17	3,00	9,5	731,30	12,5	731,47	731,37	+ 0,10	0,0100
				11,83	730,52	13,94	730,52	730,55	^{mm} $\varepsilon = +0,135$	0,4567
									^m $\varepsilon' = +1,68$	

Am 8. und 10. October betrugen nach den Aufzeichnungen des Ingenieurpracticanten Herrn Carl von Leistner in Regensburg und des Mechanikers Bürker in München die Schwankungen der Barometerstände nur 0,1 bis 0,2^{mm}, so dass kein bestimmter Anhaltspunkt, aber auch keine zwingende Veranlassung zu Correctionen der Beobachtungen

Nr 11 bis Nr 20 in Tafel Nr 15 und der Nr 1 bis 26 in Tafel Nr 16 gegeben war. In der letzteren Tafel blieb desshalb die Spalte A_0' ganz weg.

Auch bei den hier mitgetheilten Nivellementen sind die mittleren Fehler einer ganzen Beobachtung in Uebereinstimmung mit jenen der beiden vorausgegangenen Nivellirungen, indem sich für München-Landshut $\epsilon = \pm 0,147^m$, $\epsilon' = \pm 1,76^m$ und für Landshut-Regensburg $\epsilon = \pm 0,135^m$, $\epsilon' = \pm 1,68^m$ ergibt.

Berechnet man den mittleren Fehler einer ganzen Beobachtung aus sämmtlichen am 26. und 30. Sept., dann zwischen dem 7. und 10. Oct. 1873 angestellten Messungen, so wird derselbe $= \pm 0,132^m$ Druck- und $= \pm 1,525^m$ Höhendifferenz: es lässt sich also auf Grund meiner 83 Beobachtungen behaupten, dass man mit einem guten Naudet'schen Federbarometer, dessen Constanten richtig bestimmt sind und das mit Vorsicht, namentlich mit Anwendung von Controlbeobachtungen, gebraucht wird, die Fixpuncte eines Strassen- oder Eisenbahnzugs derart nivelliren kann, dass der mittlere zu befürchtende Fehler jeder Höhenbestimmung nicht mehr als $\pm 0,132$ Millimeter Quecksilberdruck oder $\pm 1,525$ Meter Lothabstand beträgt, d. h. die für die eben genannten Fixpuncte gefundenen Höhendifferenzen h weichen durchschnittlich anderthalb Meter von dem richtigen Werthe ab; es kommen also auch grössere und kleinere Abweichungen als $\pm 1,5^m$ vor, wie denn in der That auch von den in den Tafeln Nr 13, 14, 15, 16 zusammengestellten 83 ganzen Beobachtungen nur 4 genau den mittleren Fehler, 28 Beobachtungen grössere und 51 kleinere Fehler als $\pm 1,5^m$ haben.

VI. Ueber die Bestimmung grosser Höhenunterschiede mit Hilfe von Naudet'schen Federbarometern.

Mit den Federbarometern Nr I und II wurden nur zwei grosse Höhenunterschiede gemessen, nämlich am 3. October 1872 die Höhe des Wendelstein über dem Wirthshause zu Zell und am 12. und 13. Sept. 1873 die Höhe des Hochgern über der Eisenbahnstation Uebersee im Bayerischen Hochland, und beide Messungen haben übereinstimmend die That-sache bewiesen, dass sehr starke Bewegungen des Zeigers, welche durch grosse Höhenunterschiede veranlasst sind, stets Vergrösserungen der

Standcorrectionen c zur Folge haben, welche sich erst nach einigen Monaten bis auf einen bleibenden Rest wieder verlieren.

Als ich die Messung der Höhe des Wendelstein vornahm, hatte ich vorher folgende Reductionsformeln festgestellt, nämlich für das Aneroid

$$\text{Nr I: } A_0 = B - 0,14t + 0,02(760 - B) + 1,49$$

$$\text{Nr II: } A'_0 = B' - 0,14t' + 0,02(760 - B') + 2,24.$$

Die Constantendifferenz $A_1 = c_2 - c_1 = 2,24 - 1,49 = 0,75$ wurde am 2. October in Sauerlach und Holzkirchen wiederholt bestätigt gefunden durch gleichzeitige Beobachtungen mit beiden Barometern an den Fixpuncten $\odot$ Nr 758 und Nr 762, also bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur: das Mittel aus 5 Unterschieden $B' - B$ war nahezu 0,75 wie oben.

Am 3. October Nachmittags beobachtete ich den Federbarometer Nr I auf der Fenstersohle des Zimmers Nr 2 im ersten Stock des Wirthshauses zu Bayerischzell, und mein gehörig instruirter Messgehilfe Franz Roth bestieg den Wendelstein und las in dessen kleiner Kapelle einige Male das Aneroid Nr II und ausserhalb derselben an einem besonderen Thermometer die Temperatur der Luft ab. Die Mittelwerthe seiner Ablesungen waren:

$$B' = 605,8^p \quad t' = 13,5^0 \text{ R} \quad T' = 12,4^0 \text{ R}$$

während ich an der genannten Stelle, die nach meinen am 2., 3. und 4. October 1872 vorgenommenen und auf die Höhenmarken in Holzkirchen (Nr 762) und Aibling (Nr 777) gestützten barometrischen Messungen 796^m oder 2450' par.¹⁾ über dem Meere liegt, beobachtet habe:

$$B = 689,3^p \quad t = 15,4^0 \text{ R} \quad T = 15,4^0 \text{ R.}$$

Aus diesen Angaben berechnen sich zunächst folgende Werthe, welche in die Barometerformel einzusetzen sind:

1) C. W. Gumbel fand für dieselbe Stelle eine Meereshöhe von 2448 par. Fuss (vergl. S. 46 seiner Beschreibung des Bayerischen Alpengebirgs, 1861).

für die untere Station $A_0 = 690,05^{\text{mm}}$
 für die obere Station $A'_0 = 609,25^{\text{mm}}$
 Summe der Lufttemperaturen $= 27,8^{\circ} \text{R.}$

Nimmt man hiezu noch die mittlere geographische Breite beider Stationen zu 48° an, so ergibt die von mir verbesserte Barometerformel¹⁾ den Höhenunterschied zwischen dem Wirthshause in Bayerischzell und dem Gipfel des Wendelsteins

$$h = 1062,2^{\text{m}} \text{ oder } 3270' \text{ par.}$$

und folglich die Meereshöhe der auf diesem Gipfel stehenden kleinen Kapelle:

$$H = 1858,2^{\text{m}} \text{ oder } 5720 \text{ par. Fuss.}$$

Dieses Ergebniss weicht von der barometrischen Messung des Herrn Oberberggraths Gumbel²⁾ gar nicht und von dem Resultate der trigonometrischen Bestimmung des K. topographischen Bureaus in München, das Herr Director v. Lamont zu 5692 par. Fuss angibt, nur wenig ab, sowie es auch mit meinem geometrischen Nivellement des Grossen Miesing, welcher eine Meereshöhe von $1883,5^{\text{m}}$ hat und etwa 30^{m} höher ist als der Wendelstein, ziemlich gut übereinstimmt.

Bei der Vergleichung beider Federbarometer am Morgen des 4. October 1872 zeigte sich sofort der Eingangs erwähnte Zuwachs der Constanten des zweiten Aneroids, welches am Abend vorher auf den Wendelstein getragen und dort beobachtet worden war. Ich habe deshalb die Vergleichen auch noch in Aibling und Rosenheim fortgesetzt und hiebei nach der Formel $c_2 = c_1 + B_1 - B_2$ folgende Resultate erhalten:

1) Vergl. C. M. Bauernfeind, Beobachtungen und Untersuchungen über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen etc., München 1862, S. 9 und S. 32.

2) Vergl. das bereits angeführte Werk von C. W. Gumbel S. 46 und 103.

1872, October 4, Bayrisch Zell:	$c_2 = 1,49 + 690,70 - 689,30 = 2,89$
„ 4, Aibling:	$c_2 = 1,49 + 715,31 - 714,00 = 2,80$
„ 4, Ebendasselbst:	$c_2 = 1,49 + 715,15 - 713,90 = 2,74$
„ 5, Rosenheim	$c_2 = 1,49 + 722,18 - 720,75 = 2,92$
„ 5, Ebendasselbst:	$c_2 = 1,49 + 722,13 - 720,65 = 2,97$
Im Durchschnitte	$c_2 = 1,49 + 713,09 - 711,72 = 2,86.$

Da die Standcorrection des Federbarometers Nr II vor Besteigung des Wendelsteins noch 2,24 betrug, so trat folglich durch diese Besteigung eine Vermehrung der Correction c_2 von 0,62^p ein. Auf die Beobachtung vom 3. October scheint sie jedoch noch wenig eingewirkt zu haben, da die daraus abgeleitete Höhe des Wendelsteins der aus dem geometrischen Nivellement des Miesing gefundenen entspricht.

Von welchen Theilen des Instruments diese Mehrung kam, ist schwer zu sagen, wahrscheinlich war der ganze Mechanismus in Mitleidenschaft gezogen, da nach einigen Monaten die Constante c_2 , welche früher 2,24 betragen hatte, von 2,86 wieder auf 2,34 zurückging.

Diese letztere Constante hatte das Instrument Nr II auch noch am 12. September 1873, als es Herr Professor Frauenholz auf den Hochgern bei Marquartstein mitnahm, wie aus den Vergleichen hervorgeht, die ich zwischen dem 21. August und 10. September in Rosenheim allein und am 12. September 1873 in Unterwessen mit Herrn Professor Frauenholz vornahm. Dagegen hatte ich durch in München angestellte Versuche einige Aenderungen in den übrigen Constanten aufgefunden, so dass die für die in Rede stehenden Messungen gültigen Reductionsformeln folgende waren, nämlich für das Aneroid

$$\text{Nr I: } A_0 = B - 0,135 t + 0,017 (760 - B) + 1,47$$

$$\text{Nr II: } A'_0 = B' - 0,135 t' + 0,017 (760 - B') + 2,34.$$

Die Höhenmessung des Hochgern knüpfte sich an die Cote der Höhenmarke Nr 832 zu Uebersee, welche in Bezug auf den Spiegel der Ostsee 529,1^m beträgt. Die nächsthöhere Station war die Wohnung des Herrn Prof. Frauenholz bei dem Wagner in Marquartstein, und zwar die Fenstersohle derselben im ersten Stock. Wir wollen diese

beiden Stationen mit 1 und 2 bezeichnen. Die dritte Station (3) war die Thürsole der obersten Hütte in Agersgwend, die vierte (4) die Fenstersohle im ersten Stock der auf dem Wege zum Gipfel des Hochgern gelegenen Diensthütte des k. Forstamts Marquartstein, und endlich die fünfte Station (5) das trigonometrische Signal auf dem Hochgern.

Am 12. und 13. September besorgte ich die Controlbeobachtungen in Unterwessen mit dem Federbarometer Nr I und am 14. und 17. desselben Monats verglich ich mit Herrn Prof. Frauenholz die beiden Instrumente Nr I und Nr II in Bezug auf die Grösse ihrer Standcorrectionen; am 22. September, als Herr Prof. Frauenholz den Höhenunterschied zwischen der 1. und 2. Station mass, konnte ich keine Controlbeobachtungen anstellen, da ich an jenem Tage einen Ausflug unternommen hatte. Nach den im Polytechnicum zu München angestellten Controlbeobachtungen fiel jedoch der Barometer am 22. September 1873 zwischen 8 und 11 Uhr um $0,5^{\text{mm}}$; um eben soviel wird daher Herr Prof. Frauenholz, der um 8 Uhr in Marquartstein und um $10^{\text{h}} 30'$ in Uebersee beobachtete, die Angabe an dieser Station zu gross gefunden haben. Berücksichtigt man dieses, so ist der Höhenunterschied $h_{1,2}$ zwischen der ersten und zweiten Station aus folgenden Daten zu berechnen:

$$\begin{aligned} \text{Station 1: } B_1 &= 721,7^{\text{p}} ; t_1 = T_1 = 16,6^{\circ} \text{ R} \\ \text{„ 2: } B_2 &= 719,7 \quad t_2 = T_2 = 14,2 \quad . \end{aligned}$$

Am 12. September hat sich nach den Controlbeobachtungen in Unterwessen der Barometerstand nicht merklich geändert; daher sind die Höhenunterschiede $h_{2,3}$ und $h_{3,4}$ aus folgenden Daten zu berechnen:

$$\begin{aligned} \text{Station 2: } B_2 &= 716,8^{\text{p}} ; t_2 = 18,5^{\circ} \text{ R} ; T_2 = 16,3^{\circ} \text{ R} \\ \text{„ 3: } B_3 &= 669,2 \quad t_3 = 19,3 \quad T_3 = 13,8^{\circ} \\ \text{„ 4: } B_4 &= 665,1 \quad t_4 = 17,6 \quad T_4 = 13,5^{\circ} \quad . \end{aligned}$$

Endlich ergibt sich der Höhenunterschied $h_{4,5}$, obwohl sich in der Nacht der Luftdruck vermindert hatte, aus den nachstehenden Beobachtungen, zwischen denen keine allgemeine Aenderung mehr eintrat:

$$\begin{aligned} \text{Station 4: } B_4 &= 662,8^{\text{p}} ; t_4 = 12,7^{\circ} \text{ R} ; T_4 = 11,4^{\circ} \text{ R} \\ \text{„ 5: } B_5 &= 617,0 \quad t_5 = 14,0 \quad T_5 = 9,0 \quad . \end{aligned}$$

Mit diesen Daten und der Annahme, dass die mittlere Breite aller fünf Stationen abgerundet 48^0 beträgt, findet man aus der angeführten allgemeinen Barometerformel für die

Station 2	den Unterschied	$h_{1,2} = 20,1^m$	und die Meereshöhe =	$549,2^m$
„ 3	„	$h_{2,3} = 591,2$	„	$= 1100,4$
„ 4	„	$h_{3,4} = 50,4$	„	$= 1150,8$
„ 5	„	$h_{4,5} = 605,1$	„	$= 1755,9.$

Die von uns gefundene Meereshöhe des Hochgerngipfels von 1756^m oder 5405 par. Fuss entspricht abermals den vorliegenden Höhenbestimmungen sehr gut, indem das K. topographische Bureau diese Höhe auf trigonometrischem Wege $= 5379$ und Herr Oberbergrath Gumbel mit Greiner'schen Barometern $= 5436$ par. Fuss fand, das Mittel aus diesen beiden Messungen also 5407 par. Fuss beträgt¹⁾.

Nach der Rückkehr des Herrn Prof. Frauenholz von seinem Ausfluge nach dem Gipfel des Hochgern fanden sofort am 14. September 1873 zwei Vergleichen der Federbarometer Nr I und Nr II in meiner Wohnung zu Unterwessen statt, denen noch eine dritte am 17. September in Marquartstein folgte. Die in gleicher Höhenlage, folglich bei gleichem atmosphärischen Druck beobachteten Aneroïde lieferten folgende Ablesungen:

Beob.Nr:	Beob. Zeit:	Barometer Nr I:	Barometer Nr II:
1.	14. Sept, 9 $\frac{1}{2}$ Uhr Vm:	712,0 ^p bei + 16,5 ^o R	710,6 ^p bei + 18,0 ^o R
2.	14. „ 6 $\frac{1}{4}$ „ Nm:	708,0 „ + 16,8	706,5 „ + 16,8
3.	17. „ 9 $\frac{3}{4}$ „ Vm:	715,2 „ + 13,5	713,7 „ + 12,3.

Es finden demnach, da die Theilungscorrectionen auf beiden Seiten wegfallen, folgende Gleichungen zur Bestimmung der Standcorrection c_2 des Federbarometers Nr II statt:

$$c_2 = 712,0 + 1,47 - 0,135(16,5 - 18) - 710,6 = 3,07$$

$$c_2 = 708,0 + 1,47 - 0,135(16,8 - 16,7) - 706,5 = 2,96$$

$$c_2 = 715,2 + 1,47 - 0,135(13,5 - 12,3) - 713,7 = 2,81.$$

1) Vergl. C. W. Gumbel, Bayerische Alpen, S. 63.

Aus diesen drei Werthen, die um so kleiner werden, je weiter die Beobachtungszeiten von der grössten Anstrengung des Aneroids Nr II abliegen, ergibt sich eine mittlere Aenderung der Standcorrection c_2 von 2,34 auf 2,95 oder von 0,61 Millimeter, während diese Aenderung am 14. Sept. Vormittags halb zehn Uhr 0,73, Abends sechs Uhr 0,62 und am 17. Sept. Vormittags zehn Uhr 0,47 Millimeter betrug. Ganz verschwand dieselbe nicht, indem die Constante am 21. und 22. December 1873, also nach drei Monaten noch einen Werth von 2,53 hatte und folglich um 0,19 Millimeter grösser war als vor der Besteigung des Hochgern.

Aus den hier mitgetheilten Beobachtungen lässt sich mit Sicherheit schliessen: dass erstens nach starker Druckverminderung der Zeiger eines Aneroids (wahrscheinlich in Folge zu starker Spannung der Spiralfeder, welche dem Winkelhebel entgegenwirkt) kleinere Ablesungen gibt als dem Luftdrucke entsprechen, wodurch die Standcorrection vermehrt wird, und dass zweitens diese fehlerhaften Angaben nach und nach sich wieder vermindern bis auf einen kleinen Rest, welcher bleibt. Diesem bei technischen Nivellementen glücklicherweise nicht oft eintretenden Uebelstande lässt sich am wirksamsten dadurch begegnen, dass man bei Ermittlung grosser Höhenunterschiede stets nur dasselbe Instrument auf der obersten Station verwendet und dessen Standcorrection Tag für Tag und so lange durch Vergleichen mit dem keinen starken Druckdifferenzen ausgesetzten Normalaneroïd bestimmt, bis diese Correction wieder einen bleibenden Werth erlangt hat.

VII. Ueber die zulässigen horizontalen Entfernungen correspondirender barometrischer Beobachtungsstationen.

Bei der Entwicklung der barometrischen Höhenformel nimmt man an, die beiden Beobachtungsstationen seien in horizontaler Richtung nur so weit von einander entfernt, dass eine Aenderung des Luftdrucks, welche an der einen Station eintritt, sofort auch an der andern sich kundgibt. Wie gross diese Entfernung in den vorkommenden Fällen anzunehmen ist, hat man durch Beobachtungen noch nicht entschieden; es gibt hierüber nur Meinungen, und diese gehen weit auseinander. Ich habe deshalb die Gelegenheit, welche sich mir bot, einen Beitrag zur Lösung der oben formulirten Frage zu leisten, nicht unbenützt vorüber

gehen lassen wollen und theile daher in der nachstehenden Tafel Nr 17 die Beobachtungen mit, welche ich in der Zeit vom 7. bis 11. Oct. 1873 in München und Regensburg als Controlbeobachtungen für meine barometrischen Messungen auf den Eisenbahnstrecken München-Landshut und Landshut-Regensburg anstellen liess. Die Münchener Beobachtungen besorgte der Diener des geodätischen Instituts am Polytechnicum, Mechaniker Carl Bürker, und es wurde hiezu ein Gefässbarometer benützt, der im geodätischen Laboratorium auf einem Steinpfeiler in einer Meereshöhe von 518,1 Meter stand, während in Regensburg der Ingenieurpracticant Herr Carl v. Leistner die Gefälligkeit hatte, den Federbarometer Nr II, der im Locale der k. Eisenbahnbausection in einer Meereshöhe von 343,8 Meter aufgestellt war, stündlich abzulesen. Der Höhenunterschied der Standorte beider Instrumente betrug somit 176,3 Meter und die horizontale Entfernung nach der sogenannten Luftlinie belief sich auf nahezu 14 Meilen.

Tafel Nr 17.

Gleichzeitige Barometerbeobachtungen in München und Regensburg
vom 7. bis 11. October.

Nr	1873 October		Gefäss - Barometer in München			Federbarometer Nr II in Regensburg			Diffe- renz D	Mittl. Luft- Temp.	Berech- nete Höhe h	v	v ²
			A	t	A ₀	B	t	A ₀					
1	7. um	2 Uhr	718,6	14,6	718,72	732,7	12,5	734,06	15,34	0	181,24 ^m	+ 4,36 ^m	19,0096
2		3	18,3	14,6	18,42	32,4	12,8	33,73	15,31	15,5	180,96	+ 4,08	16,6464
3		4	17,5	14,5	17,64	31,5	12,8	32,84	15,20	15,0	179,50	+ 2,62	6,8644
4		5	17,3	14,5	17,44	31,2	12,8	32,55	15,11	14,4	178,02	+ 1,14	1,2996
5		6	16,9	14,4	17,05	31,0	13,3	32,28	15,23	12,8	178,40	+ 1,52	2,3104
6	8. um	8 Uhr	15,2	14,4	15,35	29,2	11,8	30,71	15,36	12,5	179,98	+ 3,10	9,6100
7		9	15,2	15,3	15,24	29,5	12,2	30,95	15,71	13,8	185,09	+ 8,21	67,4041
8		10	15,2	15,7	15,19	29,2	12,5	30,62	15,43	13,5	181,60	+ 4,72	22,2784
9		11	14,9	15,2	14,95	28,0	12,8	29,40	14,45	14,0	170,60	— 6,28	39,4384
10		12	14,2	15,9	14,16	27,7	13,4	29,03	14,87	14,3	175,94	— 0,94	0,8836
11		2	14,0	14,7	14,11	27,0	13,7	28,30	14,19	14,3	167,97	— 8,91	79,3881
12		3	13,5	14,6	13,62	26,5	13,3	27,86	14,24	14,0	168,85	— 8,03	64,4809
13		4	13,1	14,5	13,24	26,3	13,3	27,66	14,42	14,0	170,66	— 6,22	38,6884
14		5	13,1	14,5	13,24	26,0	13,3	27,37	14,13	14,0	167,26	— 9,62	92,5444
15		6	13,0	14,4	13,15	26,5	13,5	27,83	14,68	14,0	173,73	— 3,15	9,9225
16	9. um	8 Uhr	716,7	13,4	717,07	730,0	11,7	731,51	14,44	12,5	168,90	— 7,98	63,6804

Nr	1873 October		Gefäss - Barometer in München			Federbarometer Nr II in Regensburg			Diffe- renz D	Mittl. Luft- Temp.	Berech- nete Höhe h	v	v ²
			A	t	A ₀	B	t	A ₀					
17	9. um	9 Uhr	716,7	13,4	717,07	730,0	11,7	731,51	14,44	12,6	168,97	— 7,91	62,5681
18		10	16,7	13,5	17,06	30,5	11,5	32,03	14,97	12,7	174,19	— 2,69	7,2361
19		11	16,7	13,5	17,06	30,2	11,4	31,75	14,69	12,5	171,83	— 5,05	25,5025
20		12	16,9	13,5	17,26	30,4	11,3	31,95	14,69	12,5	171,75	— 5,13	26,3169
21		2	16,9	13,4	17,17	30,4	11,0	31,99	14,82	12,2	173,04	— 3,84	14,7456
22		3	16,9	13,2	17,20	30,3	11,6	31,82	14,62	12,5	170,94	— 5,94	35,2836
23		4	17,0	13,1	17,31	30,3	11,5	31,83	14,52	12,3	169,60	— 7,28	52,9984
24		5	17,0	13,0	17,32	30,7	11,7	32,20	14,88	12,5	174,00	— 2,88	8,2944
25		6	17,0	12,7	17,37	31,3	11,3	32,84	15,47	12,1	180,38	+ 3,50	12,2500
26	10. um	8 Uhr	19,1	12,4	19,55	33,8	9,8	35,49	15,94	11,2	184,55	+ 9,67	93,5089
27		9	19,3	12,7	19,67	34,0	10,8	35,56	15,89	11,8	184,32	+ 7,44	55,3536
28		10	19,9	12,7	20,27	33,9	11,4	35,38	15,11	12,1	175,56	— 1,32	1,7424
29		11	20,0	12,8	20,35	34,6	11,4	36,07	15,72	12,2	182,63	+ 5,75	33,0625
30		12	20,0	12,7	20,37	34,5	11,5	35,96	15,59	12,2	181,14	+ 4,26	18,1476
31		2	20,0	12,7	20,37	34,6	11,2	36,10	15,73	12,0	182,59	+ 5,71	32,6041
32		3	20,4	12,7	20,77	34,6	11,2	36,10	15,33	12,0	177,90	+ 1,02	1,0201
33		4	20,5	12,7	20,87	34,7	11,2	36,20	15,33	12,0	177,87	+ 0,99	0,9801
34		5	20,5	12,7	20,87	34,7	11,2	36,20	15,33	11,8	177,75	+ 0,87	0,7569
35		6	20,5	12,6	20,90	34,9	11,5	36,35	15,45	11,8	179,08	+ 2,20	4,8400
36	11. um	8 Uhr	23,5	12,6	23,90	37,6	9,5	39,27	15,37	11,2	176,97	+ 0,09	0,0081
37		9	23,7	14,0	23,90	38,0	10,0	39,60	15,70	12,5	181,76	+ 4,88	23,8144
38		10	23,8	14,1	23,99	38,1	10,5	39,63	15,64	12,8	181,29	+ 4,41	19,4481
39		11	23,8	14,5	23,94	38,0	10,7	39,51	15,57	12,8	180,50	+ 3,62	13,1044
40		12	723,5	14,0	723,76	737,6	10,8	739,10	15,40	12,8	178,60	+ 1,72	2,9584
			717,90	13,76	718,17	731,81	11,785	733,28	15,11	12,93	176,88	ε = +5,26	1080,9948

Zu der vorstehenden Tafel ist Folgendes zu bemerken. Die Ablesungen A am Gefässbarometer geschahen am Kuppenrand: es war also behufs der Reduction die Summe der Kuppenhöhe k und der Depression d des Quecksilbers zu addiren und die Ausdehnung a der Quecksilbersäule zwischen 0 und t° R abzuziehen. In dem vorliegenden Falle betrug $k + d = 2,25^{\text{mm}}$ und die Ausdehnung a wurde aus der auf S. 409 des zweiten Bands meiner Elemente der Vermessungskunde enthaltenen Tafel entnommen, nachdem die beobachteten Reaumur'schen Grade in Centesimalgrade verwandelt worden waren.

Der auf 0^0 reducirte Barometerstand A'_0 , welcher den Beobachtungen B und t am Aneroid Nr II entspricht, ging aus der Formel $A'_0 = B + 2,53 + 0,167(760 - B) - 0,13t$ hervor, welche zur Zeit der Beobachtungen diesem Aneroid am besten entsprach. Die mittlere Lufttemperatur ist aus den Beobachtungen in München und Regensburg und der Höhenunterschied h zwischen diesen beiden Stationen aus der Formel $\log h = \log u + A - 0,00009$ berechnet, da die Correction wegen der Breite -14 und die wegen der Höhe der unteren Station $+5$ Einheiten der fünften Decimale des Logarithmus von h , die Summe beider folglich -9 solcher Einheiten beträgt.

Ueberblickt man die Fehler v , welche zugleich ein Mass für die Schwankungen der Druckdifferenzen $D = A'_0 - A_0$ sind, so fällt sofort auf, dass diese Fehler für die Beobachtungen Nr 1 bis Nr 8 positiv, für Nr 9 bis Nr 24 negativ und für Nr 25 bis Nr 40 wieder positiv sind; hieraus geht klar hervor, dass zur Zeit der Beobachtungen 1 bis 8 und 25 bis 40, also vom 7. October Nachm. 2 Uhr bis 8. October Vorm. 10 Uhr und vom 9. October Abends 6 Uhr bis 11. October Mittags 12 Uhr der Luftdruck in einer Höhe von 176^m über Regensburg grösser war als der in gleicher Höhe in München beobachtete Luftdruck, und dass zur Zeit der Beobachtungen 9 bis 24 das Entgegengesetzte stattfand; mit anderen Worten: während dieser drei Perioden war der atmosphärische Druck in einer und derselben über München und Regensburg gelegt gedachten wahren Horizontalfläche nicht der nämliche: es ist also in gewöhnlichen Fällen eine Entfernung von 14 geographischen Meilen für zwei correspondirende Barometerstationen zu gross, und es kann eine solche Entfernung zur Berechnung des Höhenunterschieds zweier Stationen aus den daselbst angestellten Barometer- und Thermometer-Beobachtungen nur dann zugelassen werden, wenn die Zahl dieser Beobachtungen ziemlich gross ist. Denn in diesem Falle wird die Ausgleichung der Druckunterschiede, welche in gleich hohen horizontalen Luftschichten von meilenweiter Ausdehnung immer stattfinden, durch die Rechnung bewirkt, in der sich die in ungefähr gleicher Zahl und Grösse auftretenden positiven und negativen Werthe jener Unterschiede grösstentheils gegen einander aufheben. Liegt hierin der erste Grund, warum 40 Beobachtungen den Höhenunterschied

zwischen München und Regensburg bis auf 0,6^m genau lieferten, so beweist doch auch andererseits der geringe mittlere Fehler einer einzigen Beobachtung von $\pm 5,26^m$, dass eine Entfernung von 14 Meilen den Maximalabstand zweier correspondirender Barometerstationen dann nicht stark überschreitet, wenn diese Stationen nicht durch Gebirge getrennt sind, sondern auf einer weit sich erstreckenden Ebene (hier der bayerischen Hochebene) liegen. In ebenen Gegenden dürfen daher die Controlstationen für barometrische Höhenmessungen jedenfalls 8 bis 10 Meilen von den Beobachtungsstationen entfernt sein, wie dieses auch bei meinen in den Tafeln Nr 13 bis Nr 16 dargestellten barometrischen Nivellementen der Fall war.

