

Geodaetische Bestimmung
der
Erdkrümmung und Lothablenkung

von
Carl Max Bauernfeind.

Mit 10 Holzschnitten.

(Der math.-phys. Classe der k. Akademie vorgelegt am 2. März 1872.)

Aus den Abhandlungen der k. bayer. Akademie der W. II. Cl. XI. Bd. II. Abth.

München 1872.
Verlag der k. Akademie,
in Commission bei G. Franz.
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

Begründung eines rein geodätischen Verfahrens zur Bestimmung der Erdkrümmung und Lothablenkung

von

Carl Max Bauernfeind.

Bei Ausarbeitung eines im Jahre 1866 gehaltenen öffentlichen Vortrags über die Bedeutung moderner Gradmessungen kam ich auf den Gedanken, grössere Lothablenkungen durch trigonometrische Höhenmessungen und exactes Nivelliren aufzufinden,¹⁾ und bei der zweiten allgemeinen Conferenz der europäischen Gradmessung zu Berlin im Jahre 1867 stellte ich die Behauptung auf, dass der polygonale Abschluss eines Nivellements allein noch keine ausreichende Garantie für dessen Genauigkeit gewähre. Diese Behauptung gründete ich vorzüglich auf die vielfach bestätigte Erfahrung, dass in einem grossen Nivellement merkliche Fehler von gleicher Grösse und entgegengesetztem Vorzeichen, welche sich zwar beim Abschlusse aufheben, aber in einer Reihe von Zwischenpunkten verbleiben und auf andere Höhenbestimmungen übergehen, möglich sind, theilweise aber auch auf die Ueberzeugung, dass selbst ein ganz fehlerfrei nivellirtes Polygon nicht nothwendig mit einer der Anfangscote gleichen Endcote abzuschliessen braucht, wenn die in der vertikalen Mantelfläche dieses Polygons vorkommenden Störungen

1) Man vergleiche: „Die Bedeutung moderner Gradmessungen.“ Vortrag in der öffentlichen Sitzung der k. Akademie der Wissenschaften am 25. Juli 1866 gehalten von C. M. Bauernfeind, S. 34 und 41. Dann: „Die atmosphärische Strahlenbrechung auf Grund einer neuen Aufstellung über die physicalische Constitution der Atmosphäre.“ II Abschnitt: Astronomische Nachrichten Nr. 1590, S. 85, und Separatabdruck, 2 Heft, S. 27.

der Schwere-Richtung nicht gleich und entgegengesetzt sind, oder wenn bei der Berechnung des Nivellements auf die Aenderungen der Schwere-Intensität keine Rücksicht genommen wird. In meiner Schrift über das Bayerische Präcisionsnivellement¹⁾ fand ich abermals Veranlassung, der Einwirkung der Schwereänderungen auf die Schlussfehler vollständig nivellirter Polygone zu gedenken, und es würde für mich nunmehr die Pflicht erwachsen, die mehrmals ausgesprochene Ansicht zu begründen, wenn mir hierin Herr Consistorialrath Theodor Wand nicht theilweise zuvorgekommen wäre, veranlasst (wie er mir persönlich mittheilte) durch meine eben genannte Abhandlung über das in Bayern ausgeführte Präcisionsnivellement. Herr Wand zeigt nämlich in § 36 seiner gehaltvollen Schrift über die Principien der mathematischen Physik,²⁾ dass bei Nichtberücksichtigung der veränderlichen Intensität der Schwere am Schlusse eines fehlerfrei nivellirten Polygons eine Differenz sich ergeben muss, die zwar im Allgemeinen unbedeutend ist, theoretisch aber doch besteht und bei Polygonen von grosser horizontaler Ausdehnung in der Richtung der Mittagslinie und bedeutender Erhebung im vertikalen Sinne immerhin auch Beachtung verdient. In welcher Weise ich mir den Einfluss der gestörten Richtung der Schwerkraft, also der Lothabweichungen, auf den Schluss vollständig nivellirter Polygone dachte und noch denke, werde ich im § 7 dieser Abhandlung näher erörtern.

1. Ueber den Begriff des Höhenunterschieds zweier Punkte.

In allen Schriften über Geodäsie wird der Höhenunterschied zweier Punkte als der normale Abstand der durch diese Punkte gelegten wahren Horizontalflächen definirt, und es werden unter diesen Flächen in der Regel die Kugeln verstanden, welche man vom Erdmittelpunkt aus durch die gegebenen Punkte gelegt denken kann. Bei strengerer Auffassung versteht man unter den wahren Horizontalflächen zweier Punkte die concentrischen Umdrehungsellipsoide, welche durch diese Punkte gehen und dem

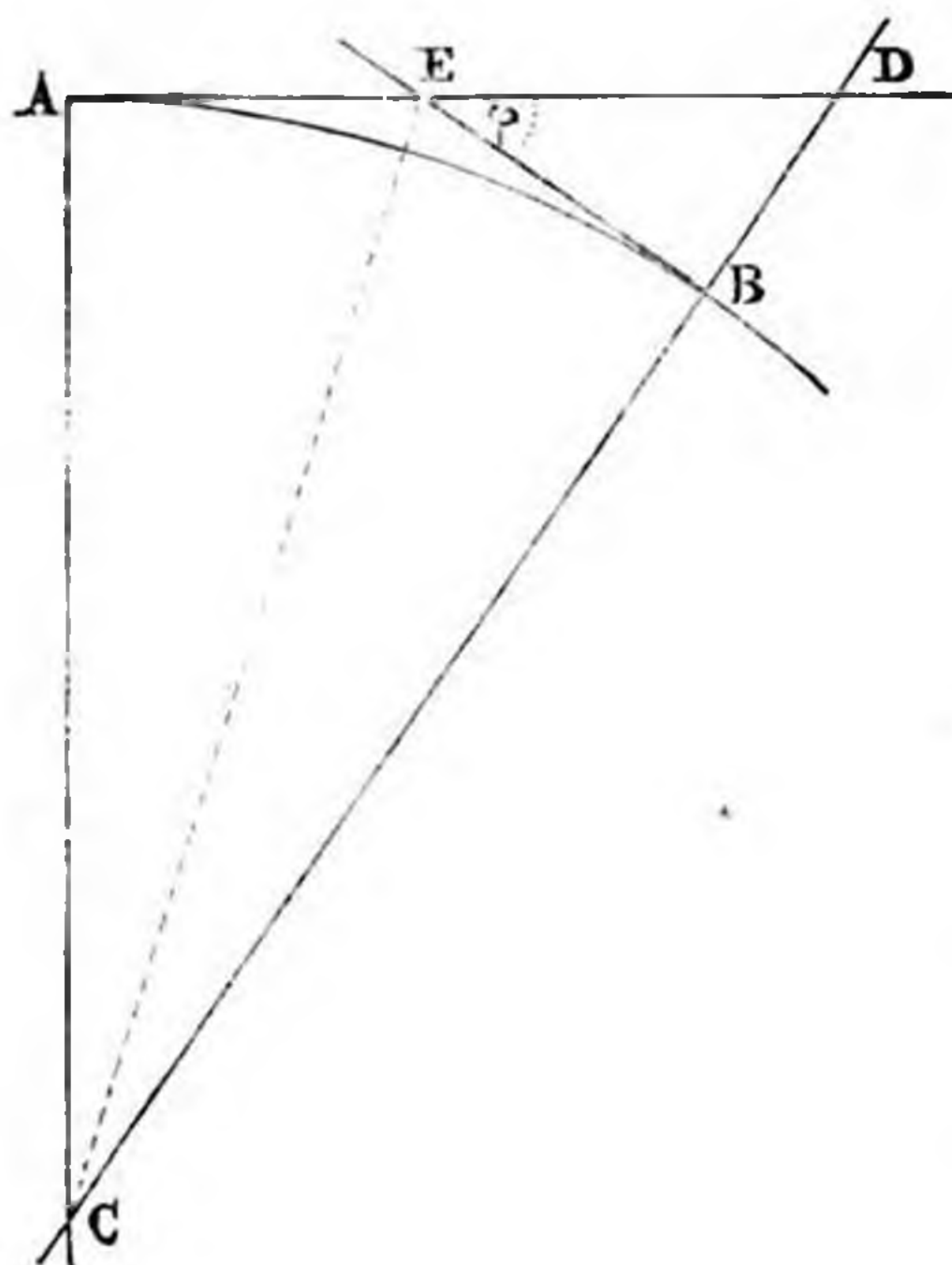
1) Der vollständige Titel ist: „Ergebnisse des in Verbindung mit der europäischen Gradmessung in Bayern ausgeführten Präcisions-Nivellements.“ Abhandlungen der K. Bayerischen Akademie der Wissenschaften, II Cl., X. Bd., III. Abthlg., München 1870, Verlag der Akademie.

2) Man vergleiche: „Die Principien der mathematischen Physik und die Potentialtheorie“ von Theodor Wand, Consistorialassessor und Mitglied der Bayer. Abgeordnetenversammlung. Leipzig 1871, Verlag von B. G. Teubner.

2. Die Erhöhung des scheinbaren Horizonts über dem wahren Horizont eines Punktes.

Es wird selten eine gerade Eisenbahnstrecke geben, welche 1 Meile lang ist: die Seitenlängen der Polygone der auf Eisenbahnen auszuführenden Präcisionsnivellements werden daher auch in der Regel weniger als 1 Meile betragen. Angenommen aber auch, eine Seite wäre 1 Meile lang, so umschlösse sie doch nur einen Bogen von 4 Minuten, und ein solches Bogenstück irgend eines vertikalen Schnitts des Erdellipsoids kann unter allen Umständen als ein Kreisbogen angesehen werden, der mit dem Krümmungshalbmesser des Ellipsoids an der betreffenden Stelle und in der Vertikalebene des Bogens beschrieben ist. Die oben bezeichnete Aufgabe lässt sich daher auch so ausdrücken: für eine gegebene Entfernung vom Berührungspunkt den Abstand der Tangente eines Kreisbogens von diesem Bogen zu bestimmen.

Fig. 1.



Ist in Fig. 1 AB der gegebene Kreisbogen vom Halbmesser r und der Amplitude φ , also der Länge $b = r\varphi$, und AD eine Tangente in A, so findet man für deren Abstand $BD = F$ aus dem rechtwinkligen Dreiecke BDE, in welchem der Winkel $BED = \varphi$ und die Tangente $BE = r \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi$ ist, sofort den Ausdruck

$$F = r \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi,$$

und wenn man mit hinreichender Genauigkeit

$$\operatorname{tg} \varphi = \varphi + \frac{1}{3} \varphi^3 \text{ und } \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi = \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{24} \varphi^3$$

setzt und berücksichtigt, dass $\varphi = \frac{b}{r}$ ist,

so wird schliesslich

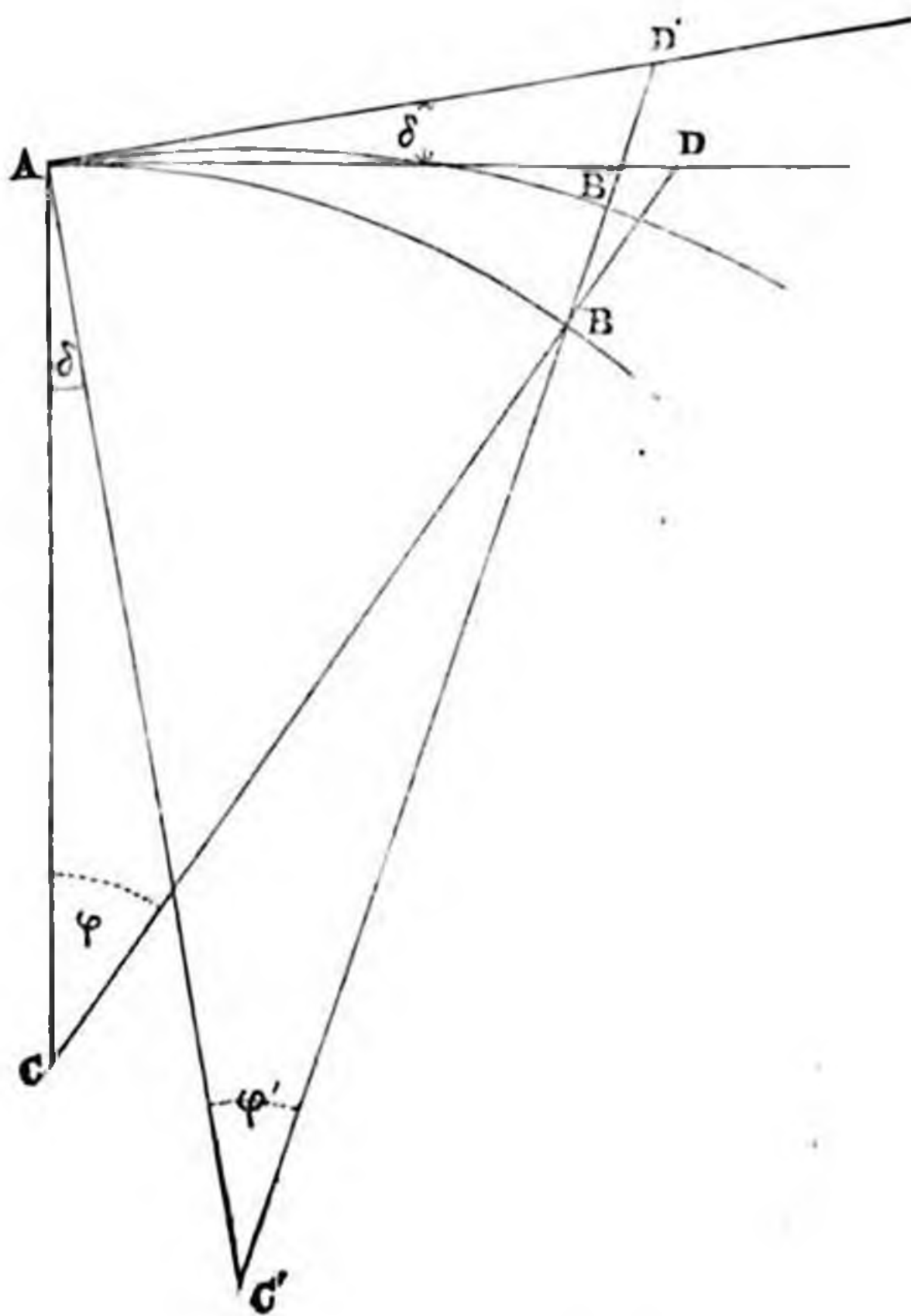
$$F = \frac{b^2}{2r} \left(1 + \frac{5}{12} \frac{b^2}{r^2} \right) \dots \dots \dots (1)$$

Das zweite Glied dieses Ausdrucks kann man fast immer vernachlässigen, da es für $b = 1$ Meile nur 0,000000564 und folglich für $b = 10$ Meilen nur 0,0000564 gegen 1 beträgt, demnach

in dem ersten Falle nur einen absoluten Werth von $0^{\text{mm}}0024$ und in dem zweiten von $0^{\text{mm}}24$ hat.

So lange man wie bisher annimmt, dass die horizontalgestellte Visirlinie des Nivellirinstrumentes mit der Tangente des elliptischen Schnitts AB zusammenfällt, bedeutet allerdings F die Erhöhung des scheinbaren Horizonts über dem wahren; wenn aber AB nicht der wahre Horizont ist, so kann auch AD nicht der scheinbare sein, und es bedeutet in diesem Falle F lediglich den Abstand der Tangente AD vom Bogen AB für die Entfernung AB. Stellt man sich vor, es fände in A eine Loth-

Fig. 2.



ablenkung $\delta = \angle CAC'$ statt und es sei $AC' = C'B' = r'$ der Halbmesser der wirklichen Erdkrümmung AB' an dieser Stelle, während $AC = r$ der Halbmesser des Bessel'schen Ellipsoids oder der idealen Krümmung AB vorstellt, so ist AB' der wahre und AD' der scheinbare Horizont von A, und es beträgt die Erhöhung des letzteren über dem ersteren nach der eben entwickelten Formel $B'D'$ oder

$$F' = \frac{b^2}{2r'} \left(1 + \frac{5}{12} \frac{b^2}{r'^2} \right).$$

Es gehört wesentlich zu der hier zu lösenden Aufgabe: für je zwei aufeinander folgende Standorte des Nivellirinstrumentes die gegenseitige Lage der Tangenten AD und AD', wovon letztere durch das Fernrohr des Nivellirinstrumentes angezeigt

wird, zu finden; denn der Winkel dieser Tangenten DAD' ist der Lothabweichung δ gleich und steht in einfacher Beziehung zu dem Krümmungswinkel φ' , die wir beide suchen, um damit und aus den sonst gegebenen Grössen den Abstand BB' der Niveaufläche vom Erdellipsoid zu berechnen.

worin t die Temperatur der Luft in Centigraden und b den Barometerstand in Millimetern bedeutet, dividirt werden muss, da $m = \frac{m_0}{d}$ ist.

Was den Werth von v anlangt, so kann man ihn aus den Formeln

$$v = \frac{5\alpha}{m} \text{ und } \alpha = d\alpha_0$$

berechnen, da

$$\alpha_0 = 0,00027895 \text{ und } \log \alpha_0 = 6,4455264 - 10$$

ist. Uebrigens folgt aus den Werthen von α und m die Zahl

$$v = \frac{5\alpha_0}{m_0} \cdot d^2 = v_0 d^2.$$

Bleibt daher die geringe Aenderung des Werths von m_0 mit der geographischen Breite unberücksichtigt, so lässt sich aus dem mittleren Werthe von

$$v_0 = 0,186865, \log v_0 = 9,2715281 - 10$$

der von v jederzeit erhalten, wenn man v_0 mit dem Quadrat der Luftdichtigkeit multiplicirt.

Wenden wir den Ausdruck für die Höhe x auf den vorliegenden Fall an, so ist

$$z = 90^\circ, \quad r_0 = r_1, \quad \varphi = \varphi_1, \quad x = x_1$$

zu setzen, wodurch erhalten wird:

$$x_1 = \frac{1}{2} r_1 \varphi_1^2 (1 - v) \left(1 + \frac{v}{3m} \varphi_1^2 \right). \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Diese Höhe ist offenbar $= f' - c'$, und man findet aus der Gleichung $c' = f' - x_1$, wenn $f' = r_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_1$ gesetzt und entwickelt wird:

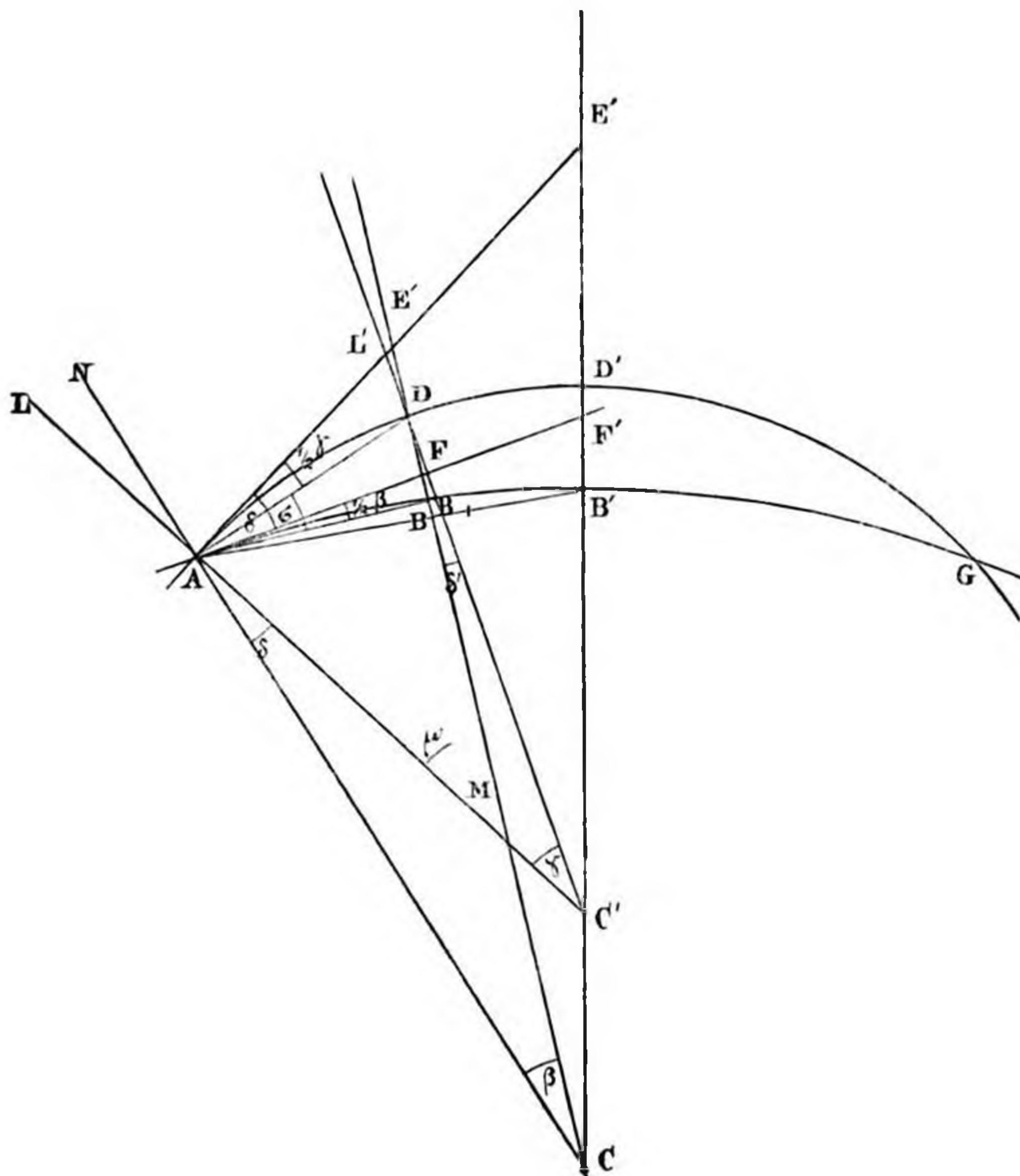
$$c' = \frac{1}{2} r_1 \varphi_1^2 v \left(1 - \frac{4v(1-v) - 5m}{12mv} \varphi_1^2 \right). \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Da das zweite Glied des Ausdrucks für c' nur bei weit ausgedehnten trigonometrischen Höhenbestimmungen einen merklichen Werth erlangt, so kann man es in unserem Falle, wo es sich nur um Nivellirstationen oder höchstens Polygonseiten von einer Meile Länge handelt, weglassen und daher

$$c' = \frac{1}{2} r_1 \varphi_1^2 v = \frac{b_1^2}{2 r_1} v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

es ist folglich die Lothablenkung in A, um deren Bestimmung es sich handelt, gleich $LAN = CAC' = \delta$.

Fig. 6



Wenn AD der Schnitt einer Niveaufläche ist, so kann man offenbar den Winkel der Lothe in A und D, nämlich $LC'L' = \gamma$ nach Nr. 4 durch exactes Nivelliren bestimmen; wir können also diesen Winkel als bekannt ansehen, und eben so ist aus den Bessel'schen Dimensionen des

