Ein

Apparat zur mechanischen Lösung der nach Pothenot, Hansen u. A. benannten geodätischen Aufgaben

von

Carl Max Bauernfeind.

Mit einer Steindrucktafel.

Ein

Apparat zur mechanischen Lösung der nach Pothenot, Hansen u. A. benannten geodätischen Aufgaben

von

Carl Max Bauernfeind.

Wenn es Aufgabe der Geodäsie ist, die gegenseitige Lage von Punkten der Erdoberfläche zu bestimmen, so muss ihr jedes Hilfsmittel, welches diese Bestimmung erleichtert oder abkürzt, willkommen sein, und um so mehr dann, wenn mit diesen Vortheilen in vielen Fällen zugleich eine grössere Genauigkeit der Arbeit erreicht wird. Der hier zu beschreibende Apparat ist ein solches Hilfsmittel, da er die direkte Lösung der oben bezeichneten Aufgaben ohne jede Construction durch sofortige Verzeichnung von Kreisen möglich macht, welche entweder durch drei gegebene Punkte gehen oder über einer Sehne von gegebener Länge einen bestimmten Peripheriewinkel fassen.

Die Erfindung dieses Apparats beruht auf der Umkehrung des geometrischen Satzes, dass in einem Kreise alle auf dem nämlichen Bogen stehenden Peripheriewinkel einander gleich sind. Es wird demnach auch der Scheitel eines festen Winkels, dessen Schenkel an den Endpunkten einer Sehne hingleiten, einen Kreis beschreiben, und da, wenn drei Punkte gegeben sind, immer einer als Scheitel dieses Winkels angesehen werden kann, während die Verbindung der beiden anderen als Sehne erscheint, so folgt von selbst, dass die Lösung der Aufgabe:

durch drei gegebene Punkte einen Kreis zu legen, leicht darauf zurückgeführt werden kann: über einer gegebenen Sehne einen Kreisbogen zu beschreiben, welcher einen bestimmten Peripheriewinkel fasst.

Aus der hier dargelegten Idee der Erfindung ergibt sich, dass der in Rede stehende Apparat im Allgemeinen die Gestalt eines Zirkels haben muss, dessen Schenkel sich auf jeden Winkel einstellen lassen und der nicht, wie der gewöhnliche Zirkel, in vertikaler Stellung, sondern in horizontaler Lage gebraucht wird. Und da dieser Zirkel zunächst für die Lösung der Pothenot'schen Aufgabe, welche auch unter dem Namen „Rückwärtseinschneiden auf drei Punkte" bekannt ist, erfunden wurde und zur Lösung aller geodätischen Aufgaben dient, welche unter den Begriff des Einschneidens fallen, so kann man ihn füglich „Einschneidezirkel" nennen, wie von nun an geschehen soll.

Dieser Zirkel ist nach dem für die geodätische Sammlung der hiesigen k. polytechnischen Schule aus Stahl[1]) hergestellten Exemplare in Fig. 1 perspektivisch und in Fig. 2 geometrisch in halber natürlicher Grösse abgebildet, und es sind in beiden Figuren gleiche Theile mit gleichen Buchstaben bezeichnet.

Die beiden Schenkel A und B bewegen sich in dem Gewinde C wie die Schenkel eines gewöhnlichen Zirkels und können nach Auslösung der unendlichen Schraube s durch grobe Drehung in alle möglichen Lagen zwischen 0 und 250^0 gebracht werden. Ist durch diese Drehung die erforderliche gegenseitige Neigung der Winkelschenkel nahezu erreicht, so kann man mit der nunmehr wieder eingreifenden Schraube s den Schenkel B gegen A fein bewegen und so den Zirkel auf einen gegebenen Winkel genau einstellen.

Die erwähnte Auslösungsvorrichtung D ist sehr einfach. Auf der mit dem Schenkel B fest verbundenen Platte ae (Fig. 1) befinden sich nämlich zwei Drehpunkte: einer (a) für die Schraube, ein anderer (b) für den Hebel c, und ausserdem zwei Federn: eine (d) um den Hebel in der Auslösungsstellung mittels einer Nase zurückzuhalten und eine

1) Für die genannte Sammlung ist der Einschneidezirkel auch in Messing ausgeführt worden. Ich finde zwischen beiden Ausführungen bis jetzt keinen wesentlichen Unterschied; nach längerem Gebrauche mögen indessen die messingenen Schenkel durch die Reibung an den Anschlagnadeln sich etwas mehr abnützen als die von Stahl, wesshalb dieses härtere Metall vorzuziehen sein dürfte.

andere (e) zum Andrücken der Schraube gegen den mit einem entsprechenden Gewinde versehenen Rand des Zirkelkopfs bei der Einlösungsstellung.

Um die Wirkungsweise dieser Vorrichtung noch anschaulicher zu machen, dient die schematische Fig. 3. In derselben stellen die ausgezogenen Linien die durch Anziehen des Hebels c gegen den Zirkelkopf bewirkte Auslösung und die punktirten Linien die durch Niederdrücken der Feder d hervorgerufene Einrückung der Schraube s vor: bei der Auslösung bewegt sich die Schraube um den Winkel $kak' = \alpha$ vom Kopfrande weg, und bei der Einrückung kommt sie diesem Rande um gleichviel wieder näher, um in dessen Gewinde einzugreifen.

Damit man auf dem Felde den Zirkel sofort auf einen durch Signale bezeichneten Winkel genau einstellen kann, befindet sich auf jedem Schenkel ein Diopter. Diese Absehen haben das Ocular o, welches entweder ein kleines Loch (Fig. 1) oder eine scharfe Kante (Fig. 4) ist, gemeinsam. Die Kante o, welche nur bei stark geneigtem Boden zum Visiren benützt wird, und ebenso der Mittelpunkt des kreisrunden Oculars fallen selbstverständlich mit der Zirkelaxe zusammen, und das letztere Ocular muss jedesmal in die Richtung gedreht werden, nach der visirt werden soll: zuerst also in die Richtung des Schenkels A mit dem Diopterflügel f, und dann in die des Schenkels B mit dem Diopterflügel g. Die Visirebenen of und og schneiden sich beide in der Axe des unten in eine feine Spitze p ausgehenden Zirkelgewinds und jede läuft in dem Abstande einer halben Nadeldicke der anliegenden inneren genau abgeschliffenen Seitenfläche eines der Schenkel A und B parallel. (Nach gemachtem Gebrauche werden die Diopterflügel auf diese Schenkel niedergeklappt).

Eine für den Einschneidezirkel unentbehrliche Hilfsvorrichtung sind die Anschlagnadeln (m, n), welche in den Endpunkten der Sehne, worüber ein Kreis mit gegebenem Peripheriewinkel (m p n) zu beschreiben ist, senkrecht auf das Zeichnungsbrett gestellt werden müssen, damit an ihnen die Zirkelschenkel hingleiten und sich drehen können. Diese Nadeln (feinste englische Nähnadeln) stecken in kleinen senkrechten Messingcylindern (i, i) und ragen unten etwa 3, oben 10 Millimeter über deren Grundflächen hervor. Auf den oberen Grundflächen ruhen die

Zirkelschenkel, wenn ein Kreis beschrieben wird. Aus der Bedingung, dass diese Schenkel sowohl bei diesem Geschäfte als bei der Winkelaufnahme der Zeichnungstafel parallel sein müssen, ergibt sich die Forderung gleicher Höhe der Cylinder i, der elfenbeinernen Füsse h und des den Kreis beschreibenden Stiftes p.

Für einen andern, mit der Verzeichnung von Kreisen nicht zusammenhängenden und später näher zu erörternden Zweck sind die Zirkelschenkel von ihrer Drehaxe aus in halbe Centimeter eingetheilt: diese Eintheilung dient nämlich in Verbindung mit der Winkelmessung zur systematischen Aufstellung des Messtisches über einem gegebenen Punkt und nach einer gegebenen Richtung.

Der Einschneidezirkel ist in ein Gehäuse eingeschlossen, das dem eines gewöhnlichen Zirkels gleicht: für den hier beschriebenen Apparat ist es 26 ^{cm} lang, 5 ^{cm} breit und 3 ^{cm} dick; es lässt sich also leicht verpacken und transportiren. Die Kosten eines stählernen Einschneidezirkels mit Etui berechnet der am geodätischen Institute der hiesigen polytechnischen Schule angestellte Mechaniker Heinrich Mayer mit 21 fl. oder 12 Thlr.

Die Prüfung des Einschneidezirkels hat sich über folgende Punkte zu erstrecken:

1) ob die inneren Wände der Winkelschenkel genau eben und senkrecht zu den oberen Wänden sind;
2) ob die durch die oberen Schenkelflächen gebildete Instrumentenebene der durch die Füsse und dem Zeichenstift bestimmten Unterlagsebene parallel ist;
3) ob die Visirebenen zur Instrumentenebene senkrecht stehen und den anliegenden inneren Zirkelwänden parallel laufen;
4) ob das Ocular des Diopters in der Axe des Zirkelgewindes liegt;
5) ob die Anschlagnadeln auf ihren Cylindern senkrecht stehen und diese die richtige Höhe haben.

Was die erste dieser fünf Untersuchungen betrifft, so kann sie mit bekannten mechanischen Hilfsmitteln leicht ausgeführt werden; es wird sich aber kaum jemals ein erheblicher Fehler in dieser Beziehung ergeben, da die Herstellung von parallelepipedischen Stäben zu den elementarsten und am meisten geübten Arbeiten des Mechanikers gehört.

Die zweite Untersuchung führt man in derselben Weise mit Hilfe von Dioptern auf einem Messtischblatte aus, wie die Prüfung des Spiegelsextanten in Bezug auf die Forderung, dass die Visirlinie des Fernrohrs der Sextantenebene parallel sein soll. Ein allenfallsiger Fehler würde sich durch Abschleifen der Stützen des untersuchten Instrumentes beseitigen lassen.

Die dritte Untersuchung zerfällt in zwei Theile, von denen der erste (ob die Visirebenen senkrecht zur Instrumentenebene stehen) von der gleichnamigen Prüfung eines Diopters sich nicht unterscheidet, während der zweite Theil (ob die Visirebenen den anliegenden inneren Schenkelflächen parallel laufen) sich in genügender Weise dadurch erledigen lässt, dass man die Schenkel des Zirkels, soweit es die Diopterflügel gestatten, aneinander legt und zusieht, ob erstens die inneren Schenkelflächen überall gleichweit (um die Nadeldicke) von einander abstehen, und ob zweitens die vereinigten Visirebenen der Diopter den Schlitz zwischen den Zirkelschenkeln halbiren. Ein durch diese Untersuchungen festgestellter Fehler wird an den Diopterflügeln verbessert.

Ob viertens das Diopter-Ocular in der Axe des Zirkelgewinds liegt, d. h. ob keine Excentricität der Visirlinie stattfindet, kann man wie folgt untersuchen. Es sei F in Fig. 5 das Objectiv eines Diopters, O dessen Ocular, A die Axe des Zirkelgewinds und OFG die Visirlinie nach einem Gegenstand G. Die Spitze A werde in das Papier des Messtisches gedrückt. Dreht man das Ocular O in der Axe A um 180^0, so kommt es zunächst nach O; stellt man aber damit auf G ein, so muss es um den Winkel $O'FO = 2\delta$ gedreht werden, wodurch die Spitze A nach A' kommt. Wird dieser Punkt wieder markirt, so zeigt der Abstand A A' die doppelte Excentricität $e = AO$ an. Eine solche Excentricität lässt sich nur durch ein neues Ocular verbessern, ihr Einfluss aber sofort aus dem Dreiecke AOF berechnen, worin die eine Seite AO die Excentricität e des Oculars und die andere AF die Länge l des Diopters ist. Für $e = \frac{1}{4}{}^{\,mm}$ und $l = 25^{\,cm} = 250^{\,mm}$ wäre $\delta = 206'' = 3'\,26''$; ein solcher grober Fehler wird aber wohl von keinem Mechaniker begangen werden.

Die fünfte Anforderung kann in der Praxis ebenfalls sehr leicht erfüllt werden; ob es geschehen wird theils nach Nr. 2, theils dadurch untersucht, dass man zusieht, ob die Nadel mit ihrem durch die obere Cylinder-Endfläche erzeugten Spiegelbilde in einer Geraden liegt oder nicht. Ein geneigtes Spiegelbild würde auf eine schiefe Stellung der Nadel deuten und deren erneute verbesserte Einsetzung in den Metallcylinder fordern.

Wir gehen nun zur Anwendung des als vollständig berichtigt vorausgesetzten Einschneidezirkels über.

1. Mechanische Lösung der Pothenot'schen Aufgabe.

Die Aufgabe, um deren mechanische Lösung es sich hier handelt, rührt bekanntlich nicht von Pothenot, nach dem sie benannt wird, sondern von Snellius, dem Entdecker des Lichtbrechungsgesetzes und Erfinder der Triangulation her. Gleichwohl behalten wir den einmal üblichen Namen bei, da er bei dem Fachmanne sofort die Vorstellung weckt, welche unserer Aufgabe entspricht, die Vorstellung nämlich, dass die Lage eines Punktes D aus der bekannten Lage dreier anderen Punkte A, B, C zu bestimmen ist. Die Pothenot'sche Aufgabe ist eine der wichtigsten in der praktischen Geometrie und hat desshalb eine grosse Literatur hervorgerufen; am meisten beschäftigten sich die Geometer mit ihrer Lösung auf graphischem Wege. In diesem Falle lässt sich die vorliegende Aufgabe auch so aussprechen: es soll (Fig. 6) auf dem Messtische ein Viereck a b c d construirt werden, welches einem Vierecke ABCD in der Natur ähnlich ist, von dem die Seiten AB, BC und die Winkel $ADB = \mu$ und $BDC = \nu$ bekannt sind.

Die einfachste graphische Lösung der vorliegenden Aufgabe geht aus der Betrachtung hervor, dass der Punkt D durch die zwei Sehwinkel μ und ν, unter denen die Seiten AB und BC des Dreiecks ABC von ihm aus erscheinen, charakterisirt ist: kein anderer Punkt gibt gleichzeitig dieselben zwei Sehwinkel, den seltenen Fall ausgenommen, dass D mit A, B, C auf einem Kreise oder in einer Geraden liegt. Man wird daher einen geometrischen Ort des Punktes d auf dem Messtische erhalten, wenn man über a b als Sehne einen Kreis beschreibt, der den Peripheriewinkel μ fasst; ein zweiter geometrischer Ort des Punktes d ist ein Kreis über b c, welcher durch den Peripheriewinkel ν bedingt ist. Da nun der Punkt d auf diesen beiden Kreisen liegen muss, so kann er sich nur in ihrem Durchschnitt befinden, und er lässt sich folglich finden, wenn man auf dem Felde die Winkel μ, ν misst und dann die beiden Kreise abd und bcd construirt.

Dieses einfache direkte Verfahren, den Punkt d zu finden, wird aber bekanntlich nicht angewendet, weil man auf dem Messtische keine umständlichen Constructionen ausführen will und auch der Fall eintreten kann, dass der Mittelpunkt eines zu beschreibenden Kreises über das Messtischblatt hinausfällt, wodurch das Ziehen dieses Kreises unmöglich wird. Mein Einschneidezirkel soll diesem direkten Verfahren in der Praxis Geltung verschaffen, indem er gestattet, ohne jede Construction die geometrischen Oerter von d zu zeichnen und folglich auch den Punkt d selbst zu bestimmen.

Es sei der Messtisch, welcher das dem Dreieck ABC (Fig. 7) ähnliche Bilddreieck abc enthält, über dem Punkte D horizontal aufgestellt und auf ihn dieser Punkt mit der Lothgabel nach d' projicirt. Auf diesen Punkt d' stelle man die Zirkelspitze p, öffne den Zirkel mittelst der groben Drehung nahezu um den Winkel ADA und stelle mit der Schraube die Diopter genau auf A und B ein. Damit ist also der Winkel μ gemessen. Befestigt man nun in a und b die Anschlagnadeln, so kann man mit dem Zirkel, indem man die Schenkel sanft an a und b andrückt, den Kreis adb beschreiben. Misst man hierauf in gleicher Weise den Winkel $\nu = BDC$ und beschreibt über bc den Kreis bdc, so gibt der Schnitt dieses Kreises mit adb den gesuchten Punkt d und damit das Viereck abcd, welches dem ABCD ähnlich ist.

Will man nun auch den Messtisch in Bezug auf D centriren und nach ABC orientiren, so braucht man nur den eben gefundenen Punkt d in das Loth von D und irgend eine der Richtungen da, db, dc in die entsprechende Vertikalebene DA, DB, DC zu bringen, was auf die weiter unten anzugebende Weise systematisch und leicht geschehen kann.

Wäre der Punkt D auf dem Felde nur annähernd gegeben und seine endgültige Festsetzung dem Geometer überlassen, so würde dieser nach der Bestimmung von d die Kippregel an da legen, den Messtisch drehen, bis da mit DA zusammenfällt, und schliesslich den Punkt d auf das Feld hinablothen und dort mit einem Pfahle bezeichnen.

Läge der Punkt D mit den drei anderen A, B, C ganz oder nahezu in einem Kreise, so würde dieses sofort durch die volle oder annähernde Deckung der Hilfskreise abd und bcd angezeigt werden, und es wäre hiedurch Veranlassung gegeben, die Bestimmung dieses Punktes aus A, B, C nicht weiter zu verfolgen oder wenigstens erst dann vorzunehmen, wenn ein anderer Punkt D' gefunden ist, der in Verbindung mit zweien der drei Punkte A, B, C die Lösung der Aufgabe in Bezug auf D zulässt.

Da Diopter überhaupt nicht weit zu sehen gestatten und für minder gute Augen diese Weite noch kleiner ist, so kann man die Sehwinkel μ und ν auch mit der Kippregel auf das Tischblatt zeichnen und von dieser Zeichnung aus mit dem Einschneidezirkel zur Beschreibung der Hilfskreise abnehmen. Es gehört dazu nur, dass man die Axe p des Zirkels in den Scheitel d' des überzutragenden Winkels μ bringt und, nach vorausgegangener grober Drehung, den linken Schenkel mit Hilfe des elfenbeinernen Fusses h, der scharf nach der Innenfläche dieses Schenkels begrenzt ist, auf die Linie d' A stellt und den rechten Schenkel durch die Schraube k in die Richtung d' B so dreht, dass diese von dem Fusse h des Schenkels gedeckt wird.

2. Geometrische und mechanische Lösung der Hansen'schen Aufgabe.

Auch die nunmehr zu behandelnde Aufgabe führt nicht den Namen ihres Erfinders. Man hat ihr den vorstehenden Namen gegeben, weil sie Herr Geheimrath Hansen in Gotha in Nr. 419, S. 165 der Astronomischen Nachrichten trigonometrisch aufgelöst und als neu bezeichnet hat. Diese Angabe beruhte aber auf einem Irrthum, da eine trigonometrische Lösung der vorliegenden Aufgabe schon von van Swinden in seinen Elementen der Geometrie (S. 321 der deutschen Uebersetzung von Jakobi) und von Gerling in Nr. 62 S. 233 der Astronomischen Nachrichten, eine praktisch-geometrische Lösung aber schon 1838 von Pross in seinem Lehrbuch der praktischen Geometrie (S. 198) gegeben wurde. Wir behalten indessen aus demselben Grunde wie in Nr. 1 den einmal angenommenen Namen bei, nachdem auf die Unrichtigkeit desselben wiederholt hingewiesen worden ist.

Hier haben wir es nicht mit der trigonometrischen, sondern lediglich mit der geometrischen und beziehungsweise mechanischen Lösung der Hansen'schen Aufgabe zu thun: wir werden also auf graphischem und mechanischem Wege die Lage zweier Standorte A, B (Fig. 8) des Messtisches aus den daselbst gemessenen scheinbaren Grössen $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ der Verbindungslinien dieser Orte mit zwei anderen gegebenen Punkten C, D bestimmen, oder was dasselbe ist: wir werden auf dem Messtische ein Viereck abcd aus einer Diagonale cd und den an der anderen Diagonale ab liegenden Winkeln $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, so verzeichnen, dass es dem Vierecke ABCD in der Natur ähnlich ist.

Stellt man nämlich den Messtisch über dem Punkte A horizontal auf, projicirt diesen Punkt auf das Blatt und stellt den Einschneidezirkel auf den Winkel CAD $= \alpha + \alpha'$ ein, so kann man mit dieser Einstellung über der Sehne cd sofort den Kreis cadf beschreiben. Nimmt man dann ferner den Winkel CAB $= \alpha$ in den Zirkel und legt den einen Schenkel desselben an c und seinen Scheitel in α' auf den eben beschriebenen Kreis, so schneidet der zweite Schenkel diesen Kreis in dem Punkte e. Wird hierauf der Messtisch nach B versetzt und horizontal aufgestellt, der Punkt B auf das Blatt projicirt und der Winkel CDB $= \beta + \beta'$ mit dem Einschneidezirkel aufgenommen, so lässt sich mit diesem über der Sehne cd der Kreis cbde beschreiben.

Misst man endlich den Winkel ABD $= \beta'$ und legt ihn so auf den eben beschriebenen Kreis, dass der Scheitel irgend einen Punkt b' deckt und der Schenkel b'd an dem Endpunkte d anliegt, so schneidet der andere Schenkel des Zirkels (b' e) den Kreis cbde in dem Punkte e. Verbindet man nun die Schnittpunkte e und f durch eine gerade Linie, so schneidet diese die zwei Kreise cadf und cbde in zwei Punkten a und b, welches die gesuchten Punkte sind.

Der Beweis für die Richtigkeit dieses Verfahrens ist sehr einfach. Die Lage des Punktes a ist offenbar durch die scheinbaren Grössen α, α' und $\alpha + \alpha'$, die des Punktes b durch β, β' und $\beta + \beta'$ bestimmt, also muss der Kreis cadf ein geometrischer Ort von a und der Kreis cbde ein geometrischer Ort von b sein. Dadurch, dass man ca'f $= \alpha$ und folglich da'f $= \alpha'$ macht, bestimmt man einen Punkt f, der die Eigenschaft hat, durch seine Verbindung mit den Punkten a, a'... des Ortes von a alle auf der Sehne cd stehenden Peripheriewinkel cad = ca'd

$= \ldots = \alpha + \alpha'$ in ihre zwei Bestandtheile α und α' zu zerlegen: jede von f ausgehende Sehne des Kreises cadf liefert folglich einen Punkt a, a'..., welcher mit c, f, d die Winkel $\alpha, \alpha', \alpha + \alpha'$ bildet. Ebenso hat der durch den Winkel db'e $= \beta'$ bestimmte Punkt e des Kreises cbde die Eigenschaft, durch seine Verbindung mit den Punkten b, b'... des Ortes von b alle auf der Sehne cd stehenden Peripheriewinkel cbd, cb'd... $= \beta + \beta'$ in ihre zwei Bestandtheile β und β' zu zerlegen, so dass jede von e ausgehende Sehne des Kreises cbde einen Punkt b, b'... liefert, welcher mit c, e, d die Winkel $\beta, \beta', \beta + \beta'$ bildet. Wenn nun die Sehnen fa', fa... in Bezug auf den Punkt a und die Sehnen eb', eb... in Bezug auf den Punkt b allen Bedingungen der Aufgabe genügen, so ist klar, dass nur die zwei Sehnen fa und eb, welche in eine Gerade fe zusammenfallen, den Bedingungen der Aufgabe in Bezug auf die beiden Punkte a und b genügen können. In der That liegen gleichzeitig nur an den Enden der Geraden ab einerseits die scheinbaren Grössen α, α' der Seiten BC, BD und andererseits die scheinbaren Grössen β, β' der Seiten AC, AD, während jene Enden selbst auf den Kreisen ruhen, welche durch die Gesichtswinkel $\alpha + \alpha'$ und $\beta + \beta'$ der Geraden CD bestimmt sind.

Wollte man die Kreise cad und cbd nicht ganz ausziehen, um die Punkte f und e als deren Schnitte mit den Geraden a'f und b'e zu erhalten, so dürfte man nur auf dem Kreise cad noch einmal den Winkel $\alpha =$ ca''f und auf dem Kreise cbd den Winkel $\beta' =$ db''e antragen und die Schnitte der Schenkel a'f, a''f, beziehungsweise b'e, b''e suchen, welche mit den Kreisschnitten f und e übereinstimmen müssen. Jedenfalls gewähren die eben genannten Winkelschenkel a''f und b''f eine Controle für die Genauigkeit der Arbeit, wenn diese nach der ersten Vorschrift ausgeführt wurde.

Sind die Punkte a und b auf dem Messtische gefunden, so versteht es sich von selbst, wie derselbe für diese Punkte zu centriren und nach den Richtungen ac, ad und beziehungsweise bc, bd zu orientiren ist.

Um meine gegenwärtige Auflösung der vorliegenden Aufgabe mit der älteren von Pross vergleichen zu können[1]), führe ich letztere nach

1) In meinen „Elementen der Vermessungskunde", 3. Aufl. S. 499 findet sich eine von der Pross'schen abweichende Lösung der Hansen'schen Aufgabe, welche bei Messtischaufnahmen in kleinen Massstäben vortheilhaft anzuwenden ist.

dessen Lehrbuch der praktischen Geometrie (S. 198) hier an. Es handle sich dabei (mit Bezug auf Fig. 9) um die Bestimmung der Punkte C und D aus den gegebenen Punkten A und B.

Auf dem Messtische sei ab gegeben. Man orientire denselben in D nach dem Augenmasse und schneide diesen Punkt in D durch die rückwärts gezogenen Visirlinien aA, bB ein. Von d visire man auch nach C und ziehe dc. Der Punkt D wird nunmehr mit einem Stabe bezeichnet und der Messtisch nach C so versetzt, dass cd mit CD in einer Ebene liegt, der Tisch also dieselbe Orientirung wie in D hat. Nun lege man die Kippregel an a, visire nach A und ziehe Aa rückwärts bis c in dc: von c visire man noch B und ziehe b'c. Trifft diese Vision den Punkt b, so war die Orientirung in D richtig und ist es folglich auch in C; tritt aber der gewöhnliche Fall ein, dass b'c nicht mit bc zusammenfällt, so sind die Punkte d und c fehlerhaft bestimmt. Hierauf verbinde man a mit b', so ist ab' parallel zu AB, während es ab sein sollte: der Tisch ist folglich um den Winkel b'ab unrichtig orientirt. Um ihn in die richtige Lage zu bringen, lege man das Lineal der Kippregel an ab' und lasse in dieser Richtung in grosser Entfernung einen Stab E ausstecken, bringe dann das Lineal an ab und drehe den Tisch, bis das Fadenkreuz des Fernrohrs der Kippregel den Stab E deckt. Von allen bis jetzt gezogenen Visionen und ihren Durchschnittspunkten wird jetzt keine Notiz mehr genommen, sondern aufs Neue von a nach A und von b nach B visirt, wodurch sich der richtige Punkt c ergibt. Visirt man schliesslich von diesem Punkte nach D zurück, zieht eine neue Vision cd und ändert auch die früher gezogene Vision ad um den Winkel b'ab, der die falsche Orientirung anzeigt, so wird auch der Punkt D richtig erhalten.

Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, dass meine Lösung der sog. Hansen'schen Aufgabe auch eine rein geometrische Bedeutung hat, indem sie zeigt, wie auf einfachste Weise ein Viereck abcd zu construiren ist, von dem man eine Diagonale (cd) und die vier Winkel an der anderen Diagonale ($\alpha, \alpha', \beta, \beta'$) kennt.

3. Das Centriren und Orientiren des Messtisches mit Hilfe des Einschneide-Zirkels.

In der Zeitschrift des österreichischen Ingenieur-Vereins, Bd. XXII, S. 215 hat Herr Joseph Schlesinger darauf aufmerksam gemacht, dass es bis jetzt an einem Mittel fehle, den Messtisch systematisch so aufzustellen, dass er nach einer auf ihm gegebenen Geraden mn, mit dem Punkte m lothrecht über M, orientirt ist, und er hat hiefür einen „Ordinatenwinkel" vorgeschlagen, welcher nichts anderes als ein vom Scheitel aus auf beiden Schenkeln getheiltes Winkelmass ist. Diese einfache Vorrichtung erfüllt ihren Zweck sehr gut und bedarf keiner Verbesserung; mein Einschneidezirkel ersetzt aber den obengenannten Ordinatenwinkel vollständig, wenn seine Schenkel von der Gewindaxe aus gleichmässig eingetheilt sind, wie es wirklich der Fall ist.

Wenn nämlich auf dem Messtische die Gerade mn (Fig. 10) und auf dem Felde die Vertikalebene MN gegeben und verlangt ist, den Punkt m des Messtisches in das Loth von M und mn in die Ebene MN zu stellen, so kann dieser Forderung durch folgendes systematische Verfahren genügt werden. Von dem (mit der Lothgabel leicht zu findenden) Durchschnittspunkte p der Drehaxe des Messtisches mit dem Zeichnungsblatte ziehe man auf diesem die Verbindungslinie pm, stelle den Einschneidezirkel auf den Winkel $pmn = \omega$ ein und messe auf dem feststehenden rechten Schenkel den Abstand $mp = l$ ab. Bringt man hierauf am Boden (etwa mit Hilfe einer Messlatte) den einen Winkelschenkel (hier den linken) in die Richtung MN und die Gewindaxe in den Punkt M, so bezeichnet der Punkt p des rechten Zirkelschenkels auf diesem Boden den Punkt P, über den der Punkt p des Messtisches lothrecht aufzustellen ist, wenn man diesen nach m und mn centriren und orientiren will. Ist p wirklich im Lothe von P und der Tisch horizontal gestellt, so ist klar, dass durch entsprechende grobe und feine Drehungen m in das Loth von M und mn in die Vertikal-Ebene MN kommen muss und dass damit der Aufgabe genügt ist.

Während ich hier die Aufstellung des Messtisches mit Polarcoordinaten bewirke, benützt Herr Schlesinger rechtwinkelige Coordinaten, indem er auf dem Messtische die Senkrechte pq auf mn fällt, die Abscisse $mq = x$, die Ordinate $qp = y$ misst und beide mittelst eines rechten Winkels (pqm) auf das Feld überträgt. Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, dass man dieses Verfahren auch mit meinem Einschneidezirkel nachahmen kann, wenn man beide Schenkel mit Hilfe einer am Gewinde des Zirkels angebrachten Marke auf 90° ein- und feststellt.

Ebenso ist leicht einzusehen, dass der Einschneidezirkel auch wie ein gewöhnlicher Zirkel benützt werden kann, wenn man die Schenkel bei A und B mit Spitzen oder Einsätzen versieht.

4. Die Genauigkeit und der Zeitgewinn, welche der Einschneidezirkel gewährt.

Die Genauigkeit des Einschneidezirkels kann entweder in Hinsicht auf die Beschreibung von Kreisen allein oder in Bezug hierauf und die Aufnahme der Peripheriewinkel geprüft werden; in dem letzteren Falle setzt sich der Ausdruck für die Genauigkeit aus denen für Winkelmessung und Kreisbeschreibung zusammen. Ich habe über beide Fälle Beobachtungen angestellt, beziehungsweise anstellen lassen.

Mit welcher Genauigkeit man Kreise beschreiben kann, von welchen entweder eine Sehne und ein Peripheriewinkel oder drei Punkte (also auch wieder Sehne und Peripheriewinkel) gegeben sind, erfährt man am besten dadurch, dass man die mit dem Einschneidezirkel und auf gewöhnliche Weise beschriebenen Kreise miteinander vergleicht, wobei es gleich ist, ob man zu dem vom Einschneidezirkel gelieferten Bogen den Mittelpunkt sucht und von diesem aus den Weg des Einschneidezirkels mit dem gewöhnlichen Zirkel prüft, oder ob man mit letzterem im Voraus einen Kreis beschreibt, den Einschneidezirkel auf drei Punkte desselben einstellt und zusieht, ob oder wie weit der von der Axe des Einschneidezirkels beschriebene Bogen mit dem voraus gezogenen Kreise zusammenfällt. Nach längerer Uebung, namentlich im sanften Andrücken der Winkelschenkel an die Einsatznadeln, ist jeder in geometrischen oder graphischen Arbeiten nur einigermassen Geübte im Stande, mit dem Einschneidezirkel Kreise zu beschreiben, welche sich von den auf gewöhnliche Weise erzeugten nicht mehr unterscheiden, als zwei mit einem Stockzirkel aus Einem Mittelpunkte beschriebene Kreise, welche gleiche Halbmesser haben: der Einschneidezirkel gewährt somit als Kreisbeschreiber volle Befriedigung, und dasselbe ist mit seiner Gesammtleistung der Fall, wie aus den nachfolgenden Mittheilungen hervorgeht.

Herr Assistent August Vogler hat in der Umgebung von München (bei der Georgenschwaige) die Pothenot'sche und die Hansen'sche Aufgabe einerseits mit dem Theodolithen trigonometrisch, andrerseits mit dem Messtische geometrisch und mechanisch gelöst, und ich habe die gefundenen Messungsergebnisse in den zwei Tafeln Nr. 1 und Nr. 2 zusammengestellt. Ueber diese Versuche ist folgendes zu bemerken.

Zunächst wurde ein Dreieck ABC (Fig. 11) aus einer direkt mit Messstangen gemessenen Grundlinie $AC = 743^m,421 = b$ und den drei Winkeln $A = 56^0\ 30'\ 15'',4$; $B = 49^0\ 7'\ 15'',4$ und $C = 74^0\ 22'\ 29'',2$ bestimmt, wobei die Rechnung die Seitenlänge $BC = 819^m,950 = a$ und $AB = 946^m,904 = c$ ergab. Innerhalb des durch A, B, C gehenden Kreises wurden zwei Standpunkte D_2, D_3 angenommen und deren Abstände von A, B, C aus den hiezu erforderlichen Stücken berechnet. Auf denselben Standpunkten wurden dann je 4 Bestimmungen mit dem Einschneidezirkel und nach dem Lehmann'schen Verfahren gemacht und die Abstände der gefundenen Punkte d_2, d_3 von a, b, c mit genauen Massstäben in Centimetern gemessen. Die Resultate dieser Messungen sind in den Tabellen aufgeführt und es sind daselbst auch die Mittel aus je 4 solchen Messungen mit den betreffenden trigonometrischen Bestimmungen zusammengestellt.

Weiter wurden in dem Viereck ABC_1D_1 die Abstände AC_1, AD_1, BC_1, BD_1, C_1D_1 mit Hilfe des Theodolithen und der Grundlinie $AB = 946^m,904$ möglichst genau gemessen und in der Verjüngung von 1 : 6000 in der Tafel Nr. 1, Abth. B unter der Bezeichnung „berechnet“ vorgetragen. Dieselben Abstände wurden dann je 4 mal theils nach meinem Verfahren (mechanisch), theils nach der oben angegebenen Methode von Pross (geometrisch) bestimmt und sowohl einzeln als nach ihren Mitteln in der eben genannten Abtheilung B der Tafel Nr. 1 aufgeführt.

Endlich wurden auch die Zeiten beobachtet und aufgeschrieben, welche für die mechanischen und geometrischen Lösungen der beiden hier in Betracht kommenden Aufgaben nöthig waren. Die hierauf bezüglichen Angaben befinden sich in der Tafel Nr. 2. Es ist hiezu nur zu bemerken, dass bei den mechanischen Lösungen die Zeiten für die Orientirung des Messtisches besonders vorgetragen sind, weil diese Lösungen, abweichend von den rein geometrischen, eine Orientirung des Messtisches nicht voraussetzen.

Tafel Nr. 1
enthaltend die Ergebnisse der Genauigkeitsversuche.

I. Die Pothenot'sche Aufgabe.

A. Mechanische Lösung. Massstab = 1:5000.

Nr. des Versuchs	Standpunkt D_2 Entfernung in Centimeter			Standpunkt D_3 Entfernung in Centimeter		
	ad_2	bd_2	cd_2	ad_3	bd_3	cd_3
1	10,41	11,68	6,75	11,00	8,37	14,62
2	10,40	11,67	6,76	11,11	8,25	14,69
3	10,48	11,61	6,76	11,11	8,28	14,68
4	10,49	11,62	6,72	11,07	8,31	14,69
Mittel	10,445	11,645	6,748	11,073	8,303	14,670
Berech.	10,449	11,615	6,775	11,100	8,262	14,646

B. Lösung nach Lehmann. Massstab = 1:5000.

1	10,45	11,62	6,78	11,08	8,30	14,65
2	10,45	11,61	6,78	11,10	8,28	14,65
3	10,44	11,61	6,79	11,09	8,28	14,64
4	10,43	11,62	6,78	11,09	8,28	14,64
Mittel	10,443	11,615	6,783	11,090	8,285	14,645
Berech.	10,449	11,615	6,775	11,100	8,262	14,646

II. Die Hansen'sche Aufgabe.

A. Mechanische Lösung. Massstab = 1:6000.

Nr. des Versuchs	Entfernung in Centimeter				
	ac_1	ad_1	bc_1	bd_1	$c_1 d_1$
1	19,06	10,52	9,91	17,27	14,34
2	19,05	10,45	9,94	17,30	14,40
3	19,07	10,52	9,86	17,26	14,38
4	19,07	10,50	9,90	17,31	14,41
Mittel	19,063	10,498	9,903	17,285	14,383
Berechnet	19,046	10,516	9,907	17,256	14,320

B. Lösung nach Pross. Massstab = 1:6000.

1	19,07	10,52	9,90	17,23	14,32
2	19,03	10,50	9,90	17,24	14,31
3	19,05	10,51	9,92	17,25	14,32
4	19,05	10,51	9,91	17,27	14,32
Mittel	19,050	10,510	9,908	17,248	14,318
Berechnet	19,046	10,516	9,907	17,256	14,320

Tafel Nr 2

enthaltend die Beobachtungen über den Zeitaufwand.

(In Minuten.)

I. Pothenot'sche Aufgabe.

Nr. des Versuchs	A. Mechanische Lösung (Massstab 1 : 5000)						B. Nach Lehmann	
	Standpunkt D_2			Standpunkt D_3			D_2	D_3
	Bestimmung	Orientirung	Summe	Bestimmung	Orientirung	Summe	Bestimmung und Orientirung	
1	10	4	14	9	6	15	17	24
2	8	4	12	8	4	12	15	25
3	7	5	12	8	3	11	16	23
4	9	3	12	9	5	14	14	15
Mittel	8,5	4,0	12,5	8,5	4,5	13,0	15,5	21,8

II. Die Hansen'sche Aufgabe.

Nr. des Versuchs	A. Mechanische Lösung				B. Lösung nach Pross		
	Bestimmung von		Orientirung	Summe	Bestimmung von		Summe
	C_1	D_1			C_1	D_1	
1	10	17	6	33	6	23	29
2	10	14	3	27	5	22	27
3	9	11	3	23	4	21	25
4	11	11	4	26	6	27	33
Mittel	10,0	13,3	4,0	27,3	5,3	23,3	28,5

Die vorstehenden Zahlen sprechen für sich selbst: die Genauigkeit des geometrischen Verfahrens scheint zwar im Allgemeinen etwas grösser zu sein als die des mechanischen, allein die Unterschiede zwischen den gemessenen und berechneten Entfernungen in Tafel Nr. 1 sind meistens so gering, dass sie innerhalb der Genauigkeitsgrenzen von Messtischaufnahmen liegen und daher zu einem entscheidenden Urtheile um so weniger berechtigen, als die auf trigonometrischem Wege bestimmten Entfernungen keineswegs absolut genau sind und die Fertigkeit eines

Beobachters in rein geometrischen Aufnahmen, die Jahre lang geübt sind, offenbar grösser ist als in rein mechanischen Bestimmungen, die zum ersten Male ausgeführt werden.

Die Zeitersparniss, welche das mechanische Verfahren dem geometrischen gegenüber gewährt, ist namentlich dann bedeutend, wenn lediglich die Bestimmung der Standpunkte in Betracht kommt, also auf die Orientirung des Messtisches verzichtet werden darf: in diesem Falle kann die Pothenot'sche Aufgabe in der halben Zeit, welche zur Ausführung des Lehmann'schen Verfahrens nothwendig ist, gelöst werden, während die Ausführung der Hansen'schen Aufgabe einen so auffallenden Zeitgewinn allerdings nicht gewährt, und namentlich dann nicht, wenn statt des Pross'schen Verfahrens zur Lösung dieser Aufgabe dasjenige angewendet wird, welches ich in der dritten Auflage meiner Elemente der Vermessungskunde S. 499 beschrieben habe.

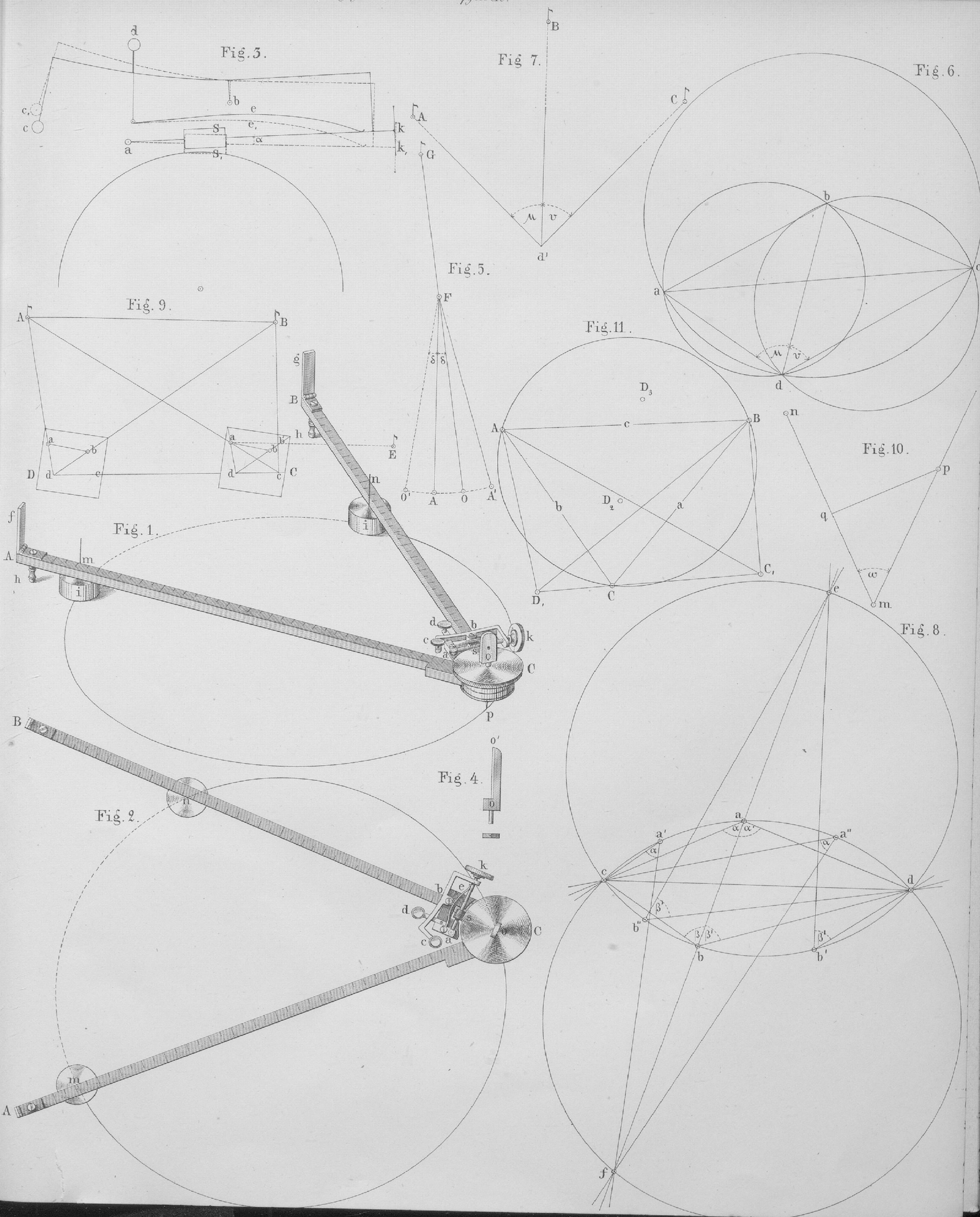

Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.