

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

ABHANDLUNGEN · NEUE FOLGE, HEFT 122

KLAUS HELBIG

Die Indexfläche als Hilfsmittel
für strahlengeometrische Konstruktionen
bei der Interpretation seismischer Beobachtungen,
insbesondere bei anisotropem Untergrund

Mit 26 Abbildungen im Text und 36 Tafeln

Vorgelegt von Herrn Gustav Angenheister
am 9. Oktober 1964

MÜNCHEN 1965

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN KOMMISSION BEI DER C.H. BECK'SCHEN VERLAGSBUCHHANDLUNG MÜNCHEN

Printed in Germany

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei Nördlingen

Druck des Tafelteils: Graphische Anstalt Ernst Wartelsteiner, München

INHALTSVERZEICHNIS

1.	<i>Einleitung</i>	5
2.	<i>Grundbegriffe der Strahlengeometrie</i>	6
2.1	Die geometrische Form von Wellenfronten und Strahlen	8
2.2	Normalenvektor, Strahlvektor, Indexvektor, Strahlindexvektor	8
2.3	Die vier charakteristischen Flächen: Normalenfläche, Wellenfläche, Indexfläche und Strahlindexfläche	11
2.4	Das Brechungsgesetz	13
3.	<i>Die Hauptaufgaben der seismischen Interpretation</i>	18
3.1	Vorbemerkungen zu den graphischen Lösungsmethoden	20
3.21	Reflexionsseismische Beobachtungen mit zentraler Aufstellung	20
3.22	Reflexionsseismische Beobachtungen mit unsymmetrischer Aufstellung	22
3.23	Die Bestimmung der „Überdeckung“ bei der Interpretation von Reflexionsbeobachtungen	26
3.3	Refraktionsseismische Beobachtungen bei ebenen Refraktoren	28
3.31	Refraktionsseismische Beobachtungen mit einem einzelnen ebenen Refraktor	29
3.32	Refraktionsseismische Beobachtungen mit mehreren ebenen Refraktoren	34
4.	<i>Die formale Beschreibung der elastischen Anisotropie</i> im Hinblick auf die Verhältnisse in der Erdkruste	39
4.1	Die Anzahl der elastischen Konstanten anisotroper Medien	40
4.2	Indexflächen und Wellenflächen transversalisotroper Medien	41
4.3	Der Zusammenhang der elastischen Konstanten eines geschichteten Mediums mit den elastischen Konstanten der Schichten	45
5.	<i>Möglichkeiten zur experimentellen Ermittlung der Indexfläche und zum Ersatz der Indexfläche durch einfachere Flächen</i>	49
6.	<i>Zusammenfassung</i>	54
7.	<i>Literaturverzeichnis</i>	56
8.	<i>Anhang</i>	58
8.1	Index- und Wellenflächen transversalisotroper Medien	58
8.2	Anordnung der Kurven im Katalog	59
8.3	Auswahl der geeigneten Kurvengruppe	60
9.	<i>Kurvenkatalog</i>	63

1. EINLEITUNG

Die Indexfläche ist eine von vier charakteristischen Flächen, mit deren Hilfe sich die Ausbreitung von Wellen in anisotropen Medien beschreiben läßt. Auf diese vier Flächen wird im Abschnitt 2.3 noch näher eingegangen. An dieser Stelle sei nur bemerkt, daß zwischen den vier Flächen enge geometrische Beziehungen bestehen, so daß bereits eine einzige Fläche zur vollständigen Beschreibung ausreicht. Welche der vier Flächen man verwendet, ist für das Ergebnis der Konstruktion nicht entscheidend. Meist verwendet man die Wellenfläche, die man als Repräsentation der Wellenfront, die sich bei räumlich und zeitlich eng begrenzter Anregung in einem homogenen Medium nach einer Sekunde ausbildet, auffassen kann. Indexflächen werden dagegen meist nur als ein Zwischenstadium bei der Ermittlung der Wellenflächen berechnet. Es ist eines der Ziele dieser Untersuchung, zu zeigen, daß die Verwendung der Indexfläche bei strahlengeometrischen Konstruktionen rascher und einfacher zum Ziel führt als die Verwendung der Wellenfläche oder einer der beiden anderen Flächen (Normalenfläche und Strahlindexfläche). Diese Vereinfachung, die im wesentlichen auf der besonders günstigen graphischen Darstellung des Brechungsgesetzes mit Hilfe der Indexflächen beruht, ist nicht auf anisotrope Medien beschränkt, sondern gilt zum Teil auch in isotropen Ausbreitungsverhältnissen. Isotropie läßt sich stets als Grenzfall der Anisotropie auffassen, wobei alle vier Flächen in Kugeln übergehen.

Auf die Möglichkeit, die Indexfläche zur graphischen Repräsentation des Brechungsgesetzes zu verwenden, haben zuerst W. R. Hamilton (1837) und J. McCullagh (1837) hingewiesen. In neuerer Zeit ist die Indexfläche verschiedentlich für die Bestimmung der Ausbreitung von Schall-, Licht- und Radiowellen verwendet worden (Zusammenfassung bei Pöeverlein 1950), aber doch nicht so häufig, wie man eigentlich erwarten sollte. Insbesondere in die angewandte Seismik hat sie kaum Eingang gefunden, obwohl die Interpretation seismischer Beobachtungen fast ausschließlich auf strahlengeometrischen Konstruktionen beruht. Das dürfte vor allem an der Unanschaulichkeit der Indexfläche liegen, die noch durch den von McCullagh gewählten abstrakten Namen unterstrichen wird.

2. GRUNDBEGRIFFE DER STRAHLENGEOMETRIE

Die Ausbreitung einer seismischen Welle unterliegt – wie die meisten Wellenausbreitungsvorgänge – einer hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung in Raum und Zeit. Die Lösung dieser „Wellengleichung“ für ebene Wellen in unendlich ausgedehnten homogenen Medien bereitet keine besonderen Schwierigkeiten, aber bei Hinzunahme von Grenzbedingungen und Inhomogenitäten treten Komplikationen auf, die bisher nur in relativ einfachen Fällen überwunden werden konnten (CAGNIARD 1939, de HOOP 1958, KRAUT 1962, BORTFELD 1964). Zu brauchbaren Näherungen in genügender Entfernung von der Erregungsquelle und von Trenn- und Grenzflächen gelangt man auf Grund strahlengeometrischer Überlegungen, bei denen von dem eigentlichen Wellencharakter zunächst abgesehen wird.

Die Strahlengeometrie läßt sich entweder vom HUYGENSSchen Prinzip oder vom FERMATschen Prinzip aus entwickeln. Die beiden Prinzipien gehen von unterschiedlichen Ausgangspunkten aus, sind aber insofern gleichwertig, als sie sich in allen Folgerungen decken. Sie werden hier so formuliert, daß sie auch in anisotropen Medien gelten.

Das *Huygenssche Prinzip* sagt aus, daß jeder Punkt einer Wellenfront als Ausgangspunkt einer „Elementarwelle“ – d. h. einer Welle mit punktförmiger Erregung – angesehen werden kann, und daß die neue Front die Einhüllende aller dieser Elementarwellen ist. Die Elementarwellen haben dabei in homogenen Medien die Gestalt der Wellenflächen, auf die weiter unten noch eingegangen wird. In homogenen isotropen Medien haben die Elementarwellen Kugelgestalt.

Das *Fermatsche Prinzip* sagt aus, daß ein „Strahl“ zwischen zwei Punkten einen solchen Weg nimmt, daß bei einer Variation des Laufwegs die Variation der Laufzeit von zweiter Ordnung klein, die Laufzeit also – im mathematischen Sinne – stationär ist.¹

Die Gleichwertigkeit der beiden Prinzipien ist nicht unmittelbar augenscheinlich, aber sie kann durch folgende Überlegung plausibel gemacht werden: Nach dem FERMATschen Prinzip zeichnet sich der tatsächliche Strahl dadurch aus, daß die Laufzeiten auf unmittelbar benachbarten Strahlen sich höchstens um Größen zweiter Ordnung unterscheiden, mit anderen Worten die Erregung, die auf dem ausgezeichneten Strahl gelaufen ist, überlagert sich mit der auf unmittelbar benachbarten Strahlen gelaufenen gleichsinnig. Das ist aber der gleiche Prozeß, der beim HUYGENSSchen Prinzip zur Entstehung der neuen Wellenfront führt, da sich auf der Einhüllenden die Elementarfronten unter einem verschwindend kleinen Winkel schneiden und sich daher gleichsinnig überlagern.

Der Terminus „Strahl“ ist hier ohne scharfe Definition eingeführt worden. Darunter soll hier der tatsächliche Weg der Energie verstanden werden. Ein solcher Energiepfad hat immer eine seitliche Ausdehnung von der Größenordnung der Wellenlänge; daher ist der Strahl als mathematische Linie ebenso eine Abstraktion wie die scharfe Elementarfront des HUYGENSSchen Prinzips – beide werden näherungsweise für sehr kurze Wellenlängen realisiert.

Alle wirklichen Wellenfronten und Wellenzüge haben eine endliche Ausdehnung in Raum und Zeit. Daher erfolgt eine gleichsinnige Überlagerung nicht nur für genau gleiche

¹ Das Fermatsche Prinzip wird häufig als Minimalprinzip formuliert, aber es lassen sich leicht Beispiele angeben, bei denen für bestimmte Variationen des Laufwegs die Variation zweiter Ordnung der Laufzeit negativ wird. Hinsichtlich dieser Variationen ist die Laufzeit also ein Maximum. Variationen des Weges, für die die Variation zweiter Ordnung der Laufzeit positiv wird, gibt es stets. Die oben gegebene Definition läßt sich also nicht verschärfen.

Laufzeit beziehungsweise verschwindenden Schnittwinkel, sondern auch noch für kleine Zeitdifferenzen (kleine endliche Schnittwinkel). Die zulässige Größe dieser Differenzen hängt von der Wellenlänge ab. Die auf diesen Prinzipien beruhenden Konstruktionen sind daher nur dann gültig, wenn um jeden Punkt der Strahlen ein Bereich von der Größenordnung der vorherrschenden Wellenlänge homogen ist. Diese Voraussetzung ist durchaus nicht immer erfüllt, vor allem gilt sie nicht

- 1) an Grenzflächen,
- 2) bei seitlicher Begrenzung des Strahlquerschnitts durch Inhomogenitäten,
- 3) bei statistisch verteilten „kleinen“ Inhomogenitäten (Pulver- oder Betonstruktur) und
- 4) bei systematisch verteilten „kleinen“ Inhomogenitäten (räumlich periodische Strukturen wie dichteste Kugelpackungen, Kristallgitter, Lamellen- und Faserstruktur).

Dabei bedeutet „klein“ immer „klein verglichen mit der vorherrschenden Wellenlänge“.

In jedem dieser vier Fälle wird die Wellenausbreitung in charakteristischer Weise beeinflusst: an Grenzflächen treten zusätzlich zu den strahlengeometrischen Erscheinungen (Reflexion, Refraktion, Strahlaufspaltung) bei schrägem Einfall Strahlversetzung und schräggedämpfte Wellen auf; bei seitlicher Begrenzung des Strahlquerschnitts treten Beugungseffekte auf; statistisch verteilte Inhomogenitäten führen zu Streuung; periodische kleine Inhomogenitäten führen zu elastischer Anisotropie. Als Maßstabsgröße tritt dabei stets die vorherrschende Wellenlänge auf. Sie bestimmt die Eindringtiefe der Schräg- oder quergedämpften Wellen und die Größe der Strahlversetzung, das Verhältnis der mittleren Größe der Inhomogenitäten im Sinne von 3) zur Wellenlänge, entscheidet über die Art der Streuung, und sie entscheidet, ob ein geschichtetes Medium als „lamelliert“ im Sinne von 4) aufzufassen ist.

Die Abweichungen in den Fällen 1)–3) sind Abweichungen vom Prinzip der Strahlengeometrie. Außerdem hängt die Größe der Effekte (Eindringtiefe, Streu- und Beugungswinkel) von der Wellenlänge ab. Man kann bei Berücksichtigung dieser Effekte also gar nicht vom Wellencharakter absehen, was nach dem eingangs Gesagten das Wesentliche an der Strahlengeometrie ist. Aus diesem Grund eignen sie sich nicht besonders für graphische Behandlung. Man verfährt meist so, daß man die Größe der Effekte rechnerisch bestimmt und sie gegebenenfalls als Korrektur an den strahlengeometrischen Konstruktionen anbringt. Das ist berechtigt, da es sich meist um kleine Effekte handelt.

Die Abweichungen im Fall räumlich periodischer Inhomogenitäten unterscheiden sich von den im vorigen Absatz behandelten in mehrfacher Hinsicht. Erstens können sie ziemlich groß sein, zweitens können sie in einem Gebiet durchaus den „seismischen Normalfall“ darstellen, und schließlich sind sie wellenlängenunabhängig in dem Sinn, daß sie für alle Wellenlängen, die groß gegenüber der räumlichen Periode sind, in gleicher Weise auftreten. Die letzte Feststellung muß für die Praxis allerdings eingeschränkt werden: wenn die Struktur eine geologische Schichtung ist, so ist sie meist nicht periodisch. Eine solche Struktur kann man aber durch ein Fourierspektrum darstellen. Der „kurzwellige“ Teil dieses Spektrums kann als Ursache der Anisotropie, der „langwellige“ als Ursache der Inhomogenität des Mediums angesehen werden. Die Begriffe „kurzwellig“ und „langwellig“ beziehen sich dabei wieder auf die vorherrschende Wellenlänge des seismischen Signals. Bei einem breiten Spektrum des seismischen Signals können also die strahlengeometrischen Bedingungen für die verschiedenen Spektralanteile verschieden sein. Da die strahlengeometrischen Prinzipien in der eingangs dieses Abschnitts angegebenen Form ohne weiteres auch für anisotrope Medien gelten, eignen sich die unter 4) aufgezählten Fälle auch zur graphischen Behandlung.

Bei der Anisotropie durch periodische Inhomogenitäten handelt es sich im Grunde um die gleiche Erscheinung wie bei der elastischen Anisotropie der Kristalle, denn auch diese ist durch die periodische Anordnung der Moleküle im Kristallgitter verursacht. Der Unterschied besteht lediglich darin, daß die räumliche Periode der Kristalle verschwindend klein gegenüber allen in Frage kommenden Wellenlängen ist. Bei der Behandlung eines periodisch inhomogenen Mediums mit makroskopischer Periode als (quasi-)anisotrop und (quasi-)homogen bei gleichzeitiger Anwendung der strahlengeometrischen Prinzipien befindet man sich dagegen in einem Dilemma. Die strahlengeometrischen Konstruktionen gelten für kurze Wellen, während der Ersatz des periodisch inhomogenen Mediums durch ein homogenes, anisotropes Medium nur für lange Wellen zulässig ist. Im Einzelfall muß daher untersucht werden, ob die strahlengeometrischen Konstruktionen verwendet werden können.

2.1 DIE GEOMETRISCHE FORM VON WELLENFRONTEN UND STRAHLEN IN HOMOGENEN MEDIEN

Die im HUYGENSSchen Prinzip postulierte Elementarfront ist diejenige Fläche, die eine von einer punktförmigen Quelle ausgehende momentane Störung nach einem elementaren Zeitintervall gerade erreicht hat. Die Fläche, die die Störung nach der Zeiteinheit erreicht hat, heißt *Wellenfläche*. Die Wellenflächen elastischer Medien bestehen aus drei Schalen (entsprechend den drei möglichen Polarisationsrichtungen). Jede Schale ist vollständig geschlossen und überall konvex. Die Schalen können sich gegenseitig berühren oder durchdringen, sie können außerdem Doppelpunkte oder -linien und Umkehrpunkte oder Kanten besitzen. Der analytische Ausdruck für die gesamte Wellenfläche ist eine Gleichung vom höchstens 150. Grad in den Koordinaten x_i ($i = 1, 2, 3$). Das äußere Blatt gehört zu einer nahezu senkrecht zur Wellenfläche schwingenden Störung (daher „quasi-longitudinales“ Blatt); die beiden inneren Blätter gehören zu Wellen, die nahezu parallel zur Wellenfläche polarisiert sind (daher „quasi-transversale“ Blätter). In isotropen Medien besteht die Wellenfläche aus zwei kugelförmigen Blättern – kugelförmig, da keine Ausbreitungsrichtung bevorzugt ist, und zweiblättrig, da keine Polarisationsrichtung bevorzugt ist und daher die beiden transversalen Blätter zusammenfallen.

Strahlen sind nach dem FERMATSchen Prinzip in homogenen Medien geradlinig. Ist das Medium „bereichsweise“ homogen, so sind alle Strahlen aus geradlinigen Stücken zusammengesetzt.

In isotropen Medien steht der Strahl senkrecht auf der Wellenfront, das heißt die Energie pflanzt sich senkrecht zur Wellenfront fort. Für anisotrope Medien gilt das nicht – abgesehen von speziellen Richtungen wie zum Beispiel den kristallographischen Achsen oder den Richtungen senkrecht und parallel zur Ebene der Lamellen. Im allgemeinen schließen Wellennormale und Strahl einen Winkel ein, der um so größer werden kann, je stärker die Wellenfront von der Kugelgestalt abweicht.

2.2 NORMALENVEKTOR, STRAHLEKTOR, INDEXVEKTOR, STRAHLINDEXVEKTOR

Wie bereits erwähnt, sind die Elementarwellen in anisotropen Medien keine Kugeln. Es ist daher vorzuziehen, die Diskussion auf der Behandlung ebener Wellen aufzubauen, die sich einfacher geometrisch beschreiben lassen. Von den ebenen Wellen kann man wieder

zu den Wellenflächen gelangen, indem man Wellenebenen aller Normalenrichtungen, die zur Zeit $t = t_0$ durch den Ursprung gingen, zur Zeit $t = t_0 + 1$ überlagert. Zur Zeit $t = t_0$ erfolgt eine gleichsinnige Überlagerung nur im Ursprung, zu späteren Zeiten überall dort, wo sich Wellenebenen unter verschwindend kleinem Winkel schneiden. Daher ist die Einhüllende aller Wellenebenen zur Zeit $t = t_0 + 1$ gerade die Wellenfläche.

Die *Normalengeschwindigkeit* v ist die Geschwindigkeit, mit der eine Wellenebene sich fortpflanzt. Per definitionem wird die Normalengeschwindigkeit senkrecht zur Wellenebene gemessen. Als *Normalenvektor* $\vec{v}$ bezeichnet man einen Vektor von der Richtung der Wellennormale und vom Betrag v .

Als *Signal- oder Strahlgeschwindigkeit* g bezeichnet man die Geschwindigkeit, mit der sich die Energie längs des Strahles fortpflanzt. Für jede ebene Welle ist

$$g \geq v.$$

Der Name „Signalgeschwindigkeit“ erinnert an den engen formalen Zusammenhang zwischen Anisotropie und Dispersion (HELBIG 1958 S. 180–185). In dispersiven Medien müßte noch jeweils diskutiert werden, ob die Signalgeschwindigkeit (Geschwindigkeit der Front des Wellenzuges) oder die Gruppengeschwindigkeit (Geschwindigkeit des Energiemaximums) beobachtet wird. Für die hier angestellten Überlegungen wird vorausgesetzt, daß die Dispersion eine untergeordnete Rolle spielt. Der *Strahlvektor* $\vec{g}$ hat die Richtung des Strahls und den Betrag der Strahlgeschwindigkeit.

Als *Indexvektor* $\vec{n}$ bezeichnet man einen Vektor von der Richtung der Wellennormale und vom Betrag $1/v$. Der Name „Index“-vektor rührt daher, daß für Lichtwellen $1/v$ bis auf den konstanten Faktor $v_0 \approx 3 \cdot 10^{10}$ [cm/sec] der optische Brechungsindex des Mediums ist. Der Name ist sehr unanschaulich, besonders durch den Verlust der Worthälfte „Brechung“. In der englischsprachigen Literatur wird in einigen neueren Arbeiten von „slowness vector“ anstelle von „index vector“ gesprochen. Tatsächlich trifft diese Bezeichnung sehr gut, was gemeint ist. Die Geschwindigkeit v ist numerisch gleich der Strecke, die die Wellenebene in der Zeiteinheit zurücklegt; entsprechend ist die „Langsamkeit“ $1/v = n$ numerisch gleich der Zeit, die die Wellenebene zur Zurücklegung der Längeneinheit benötigt. Trotz der Vorzüge einer derartigen Bezeichnung schließt sich die vorliegende Arbeit – nicht zuletzt aus sprachlichen Gründen – dem allgemeinen Gebrauch an.

In Analogie zum Indexvektor $\vec{n}$ kann man einen *Strahlindexvektor* $\vec{n}_s$ definieren, dessen Richtung die des Strahles und dessen Betrag $n_s = 1/g$ ist. Der Strahlindex n_s wird in der Elektronenoptik verwendet, da sich mit seiner Hilfe das FERMATSche Prinzip auf strahlengeometrische Konstruktionen anwenden läßt. In dem hier vorliegenden Zusammenhang wird er verwendet, um die Diskussion der graphischen Verfahren zu vereinfachen. Für jede ebene Welle gilt

$$n \geq n_s.$$

Indexvektor $\vec{n}$ und Normalenvektor $\vec{v}$ repräsentieren stets eine ganze Wellenebene, Strahlvektor $\vec{g}$ und Strahlindexvektor $\vec{n}_s$ können im Gegensatz dazu auch mit einem Punkt auf der Wellenebene in Verbindung gebracht werden. Ist beispielsweise auf einer fortschreitenden Wellenebene zur Zeit t_0 die Umgebung des Punktes mit den Koordinaten $x_i(t_0)$, $i = 1, 2, 3 \dots$ durch eine besonders große Amplitude der Störung ausgezeichnet, so pflanzt sich diese nach der eingangs gegebenen Definition in Richtung des Strahlvektors $\vec{g}$ fort. Der Bereich größerer Amplitude befindet sich zur Zeit t in der Umgebung des Punktes:

$$x_i(t) = x_i(t_0) + g_i \cdot (t - t_0).$$

Den Komponenten des Strahlvektors kann also eine physikalische Bedeutung beigelegt werden.

Die Komponenten des Normalenvektors $\vec{v}$ und des Strahlindexvektors $\vec{n}$, haben keine unmittelbare physikalische Bedeutung, wohl aber die des Indexvektors $\vec{n}$. Um das zu zeigen, geht man von der oben angeführten Definition aus, nach der der Indexvektor aus dem Normalenvektor durch Inversion an der Einheitskugel hervorgeht. In Abbildung 1 ist ein Schnitt durch Achsensystem, Wellenebene und Inversionskugel gezeigt. Bei der Inversion gehen die Achsen in sich selber über, der Normalenvektor in den Indexvektor und die Wellenebene in eine Kugel vom Radius $n/2$, die durch den Koordinatenursprung und die

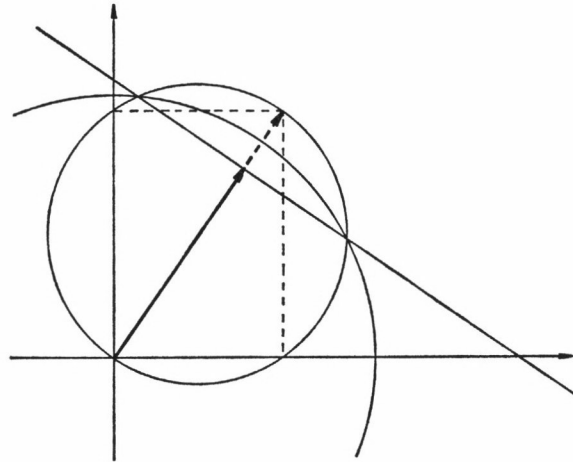


Abbildung 1. Bei der Inversion am Einheitskreis geht der Normalenvektor in den Indexvektor und die Spur der Wellenebene in den Thaleskreis über dem Indexvektor über. Die Bildpunkte der Schnittpunkte von Wellenebene und Koordinatenachsen sind orthogonale Projektionen der Spitze des Indexvektors auf die Achsen.

Spitze des Indexvektors geht. Diese Kugel schneidet die Koordinaten des Indexvektors auf den Achsen ab. Die Schnittpunkte sind aber Bildpunkte der Schnittpunkte der Wellenebene mit den Koordinatenachsen. Daher gilt:

„Die Komponenten des Indexvektors sind gleich den Kehrwerten der Schnittgeschwindigkeiten der Wellenebene längs der Achsen.“

Unter „Schnittgeschwindigkeit“ soll dabei die (virtuelle) Geschwindigkeit des Schnittpunkts der Wellenebene mit den Koordinatenachsen verstanden werden. Entsprechend wird mit „Spurgeschwindigkeit“ die Geschwindigkeit der Schnittgeraden („Spur“) der Wellenebene mit einer Koordinatenebene bezeichnet. Da die obigen geometrischen Beziehungen unabhängig vom Koordinatensystem sind, lassen sich folgende Relationen aufstellen:

„Wird die Wellenebene von einer anderen Ebene geschnitten, so ist der Kehrwert der Spurgeschwindigkeit (Geschwindigkeit der Schnittgeraden) gleich der Projektion des Indexvektors auf die die Wellenebene schneidende Ebene.“

und

„Wird die Wellenebene von einer beliebigen Geraden geschnitten, so ist der Kehrwert der Schnittgeschwindigkeit (Geschwindigkeit des Schnittpunkts) gleich der Projektion des Indexvektors auf die die Wellenebene schneidende Gerade.“

In der angewandten Seismik – und auch bei den seismischen Stationen zur Kontrolle von unterirdischen Atomspaltungen – wird fast ausschließlich mit linearen Empfängeranordnungen gearbeitet. Die unmittelbar gemessenen Geschwindigkeiten sind also Schnittgeschwindigkeiten. (In der Seismik bezeichnet man die längs der Oberfläche beobachteten Geschwindigkeiten als „Scheingeschwindigkeiten“, unabhängig von der jeweiligen geometrischen Anordnung). Berücksichtigt man außerdem, daß in der Seismik nicht eigentlich Geschwindigkeiten (in der Zeiteinheit zurückgelegte Strecken), sondern „Langsamkeiten“ (für die Zurücklegung der Längeneinheit – hier Aufstellungslänge – benötigte Zeit) gemessen werden, so leuchtet ein, daß der Indexvektor ein zur Interpretation seismischer Daten besonders geeignetes Hilfsmittel ist.

2.3 DIE VIER CHARAKTERISTISCHEN FLÄCHEN: NORMALENFLÄCHE, WELLENFLÄCHE, INDEXFLÄCHE UND STRAHLINDEXFLÄCHE

Die Beträge der vier im vorigen Abschnitt definierten Vektoren sind nur in isotropen Medien in allen Richtungen gleich (dann haben auch alle vier Vektoren die gleiche Richtung und je zwei haben den gleichen Betrag). In anisotropen Medien hängt die Länge der Vektoren von der Richtung ab. Die Richtungsabhängigkeit läßt sich am einfachsten durch die vier charakteristischen Flächen darstellen:

Die *Normalenfläche* ist die Gesamtheit der Spitzen aller Normalenvektoren,
 die *Wellenfläche* ist die Gesamtheit der Spitzen aller Strahlvektoren,
 die *Indexfläche* ist die Gesamtheit der Spitzen aller Indexvektoren,
 die *Strahlindexfläche* ist die Gesamtheit der Spitzen aller Strahlindexvektoren.

Die so definierte Wellenfläche ist identisch mit der bereits im Zusammenhang mit der HUYGENSSchen Elementarwelle definierten Wellenfläche.

Zwischen den vier Flächen bestehen eine Reihe geometrischer Beziehungen, die es erlauben, aus jeder Fläche die anderen zu entwickeln:

Normalenfläche und Wellenfläche stehen zueinander im Verhältnis von Fußpunkt- und Tangentenfläche, das heißt die Fußpunkte der Lote vom Ursprung auf die Tangentenebenen der Wellenfläche liegen auf der Normalenfläche. Das folgt aus der Bemerkung, daß die Normalenfläche die Spitzen aller Normalenvektoren enthält und daß die dazugehörigen Wellenebenen, die jeweils auf den Normalenvektoren senkrecht stehen, Tangentenebenen der Wellenfläche sind.

Die Indexfläche geht aus der Normalenfläche durch Inversion an der Einheitskugel hervor, ebenso die Strahlindexfläche aus der Wellenfläche. Diese Beziehungen sind selbstverständlich umkehrbar.

Indexfläche und Strahlindexfläche stehen zueinander im Verhältnis von Tangenten- und Fußpunktfäche. Um das zu zeigen, betrachtet man einen Achsenschnitt der vier Flächen mit einem Normalenvektor, dem zugehörigen Strahlvektor und der Spur der Tangentenebene (Wellenebene), die die Endpunkte der beiden Vektoren verbindet (Abbildung 2). Ein über dem Strahlvektor errichteter Thaleskreis geht durch den Fußpunkt, also den Endpunkt des zugehörigen Normalenvektors. Bei der Inversion geht der Berührungspunkt auf der Wellenfläche in einen Punkt der Indexfläche über, der Thaleskreis geht in die Spur einer Tangentenebene an die Indexfläche über und die Spur der Tangentenebene an die Wellenfläche in einen Thaleskreis über dem Indexvektor. Das heißt aber nichts anderes,

als daß der Fußpunkt des Lots vom Ursprung auf die Tangentenebene an die Indexfläche auf der Strahlindexfläche liegt.

Aus der Tatsache, daß die Strahlindexfläche die Fußpunktfläche der Indexfläche ist, folgt, daß die Flächennormale der Indexfläche die Richtung des zugehörigen Strahles hat.

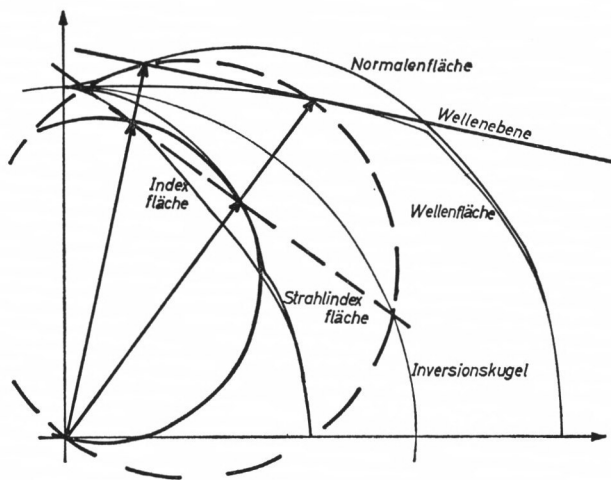
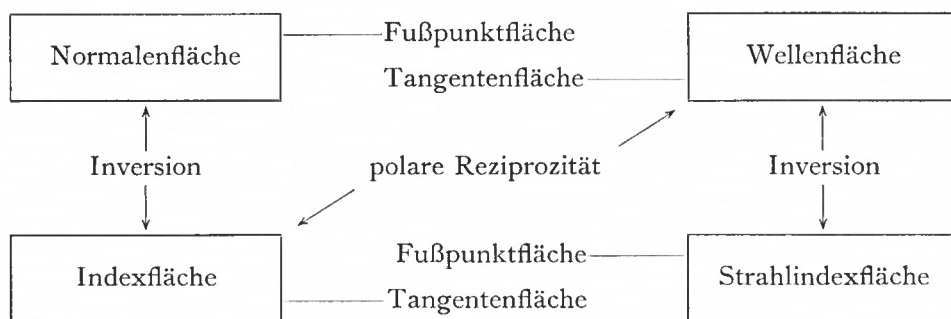


Abbildung 2. Geometrische Zusammenhänge zwischen den vier charakteristischen Flächen der Wellenausbreitung in anisotropen Verhältnissen. Der Fußpunkt des Lots vom Zentrum auf die Tangentenebene der Wellenfläche („Wellenebene“) liegt auf der Normalenfläche; der Fußpunkt des Lots vom Zentrum auf die Tangentenebene der Indexfläche liegt auf der Strahlindexfläche. Bei der Inversion an der Einheitskugel gehen die Tangentialebenen in die Thaleskreise, die Normalenfläche in die Indexfläche und die Wellenfläche in die Strahlindexfläche über. Eine Konsequenz dieser Inversionsbeziehungen ist die Parallelität von Strahlvektor und Flächennormale der Indexfläche.

Die in dieser Abbildung verwendeten Kurven sind hypothetische Beispiele: Ausgangspunkt war die Schnittkurve der Normalenfläche, die übrigen Schnittkurven wurden daraus abgeleitet.

Da außerdem per definitionem die Flächennormale der Wellenfläche die Richtung des Indexvektors hat, sind Indexfläche und Wellenfläche zueinander „polar reziprok“ (dieser Zusammenhang wird sonst meist analytisch nachgewiesen).



Aus diesem Schema geht hervor, daß Wellenfläche und Indexfläche gegenüber den anderen Flächen bevorzugt sind. Jede der beiden Flächen enthält alle Informationen, die man für strahlengeometrische Konstruktionen benötigt. Verwendet man die Wellenfläche, so ist die Strahlgeschwindigkeit gleich dem Radiusvektor, die zugehörige Normalenrichtung gleich der Richtung der Flächennormale im gleichen Punkt, die zugehörige Normalengeschwindigkeit gleich der Länge des Lots vom Ursprung auf die Tangentenebene im gleichen Punkt. Verwendet man die Indexfläche, so ist die Richtung der Wellennormale

gleich der Richtung des Radiusvektors, die Normalengeschwindigkeit gleich dem Kehrwert der Länge des Radiusvektors, die Strahlrichtung gleich der Richtung der Flächennormale im gleichen Punkt und die Strahlgeschwindigkeit gleich dem Kehrwert der Länge des Lots vom Ursprung auf die Tangentenebene im gleichen Punkt.

Beide Flächen sind gleichberechtigt, und es ist eine Frage der Bequemlichkeit und Arbeitsvereinfachung, welcher Fläche der Vorzug zu geben ist. Meist wird die Wellenfläche als Grundlage strahlengeometrischer Konstruktionen verwendet, vermutlich wegen der größeren Anschaulichkeit; hiergegen lassen sich jedoch eine Reihe von Gründen anführen. Zunächst ist die Wellenfläche eine mathematisch sehr viel kompliziertere Fläche. Für elastische Wellen gehört sie zur Klasse 6, das bedeutet, daß ihr Grad im ungünstigsten Fall $6 \cdot 5^2 = 150$ sein kann. Die Indexfläche elastischer Medien dagegen ist eine Fläche vom 6. Grade ohne Umkehrpunkte und ohne Punkte mit zwei Tangentenrichtungen. Bei der numerischen Berechnung der Wellenfläche wird die Indexfläche meist als Vorstufe ohnehin bestimmt (auf den wichtigen Fall der Transversalisotropie wird in 4.2 noch näher eingegangen. Wegen der Berechnung der Wellenflächen in Medien geringerer Symmetrie wird auf das Literaturverzeichnis bei KRAUT [1963] verwiesen). Außerdem sind aber strahlengeometrische Konstruktionen weitgehend auf der Spurgeschwindigkeit aufgebaut. Die Spurgeschwindigkeit ist mindestens gleich der Normalengeschwindigkeit und wird bei senkrechtem Einfall (Wellennormale gleich Grenzflächennormale) unendlich groß. Verwendet man die Indexfläche, so wird entsprechend der Kehrwert der Spurgeschwindigkeit benutzt. Dieser ist höchstens gleich der Länge des Indexvektors und wird Null bei senkrechtem Einfall.

Über die Gestalt der charakteristischen Flächen lassen sich ohne Rechnung einige Aussagen machen. Löst man die Wellengleichung für ebene Wellen nach der Normalengeschwindigkeit auf, so erhält man zu jeder Normalenrichtung drei Eigenwerte, zu denen drei aufeinander senkrecht stehende Verrückungsvektoren als Eigenvektoren gehören. Dementsprechend hat die Normalenfläche drei Blätter, deren jedes eine geschlossene Fläche ohne Doppelpunkte oder -linien und ohne Umkehrspitzen oder Kanten ist. Die einzelnen Blätter können sich gegenseitig berühren oder durchdringen. Da die Indexfläche aus der Normalenfläche durch Inversion hervorgeht, gilt für sie das gleiche. Für die Wellenfläche folgt aus der eindeutigen Zuordnung von Normalenrichtung und Normalengeschwindigkeit, daß auch ihre drei Blätter allseitig geschlossen und überall konvex sind (das heißt die Flächennormale der Wellenfläche ändert sich überall monoton). Sie kann Doppelpunkte (entsprechend Punkten der Indexfläche mit gemeinsamer Tangente), Spitzen (entsprechend Punkten der Indexfläche, in denen beide Hauptkrümmungen zugleich verschwinden) und Kanten (entsprechend Punkten der Indexfläche, in denen eine der beiden Hauptkrümmungen verschwindet) besitzen. Wegen der Existenz von Doppelpunkten für die einzelnen Blätter gibt es auch keine eindeutige Zuordnung zwischen Strahlrichtung und Strahlgeschwindigkeit: zu ein und derselben Strahlrichtung können mehrere Strahlgeschwindigkeiten gehören. Da die Strahlindexfläche aus der Wellenfläche durch Inversion hervorgeht, hat sie ebenso viele Doppelpunkte oder -linien, Spitzen und Kanten wie die Wellenfläche. Anders als diese kann sie aber auch teilweise konkav sein.

2.4 DAS BRECHUNGSGESETZ

In jedem homogenen Bereich sind alle Strahlen gerade Linien. An den Grenzflächen zwischen homogenen Bereichen werden die Strahlen gebrochen, reflektiert und aufgespalten. Eine vollständige Beschreibung des Vorgangs besteht aus der Angabe aller sekundären

Strahlen (oder Wellenfronten) und der Verteilung der in dem primären Strahl einfallenden Energie auf die sekundären Strahlen. Der zweite Teil wird – als nicht eigentlich zur Strahlengeometrie gehörend – hier nur qualitativ behandelt. Den ersten Teil der Beschreibung liefert das Brechungsgesetz. Es war im Prinzip bereits Ptolemäus bekannt (FLÜGGE 1948). Für isotrope Medien wurde es 1621 von SNELL mathematisch formuliert und später von HUYGENS aus dem nach ihm benannten Prinzip abgeleitet. Selbstverständlich läßt es sich auch aus dem FERMATSchen Prinzip ableiten, aber das FERMATSche Prinzip beruht auf der Verwendung von Signalgeschwindigkeiten, die in anisotropen Medien häufig unhandlich sind, da Strahlen und Flächennormalen nicht in einer Ebene zu liegen brauchen.

Die bekannte HUYGENSSche Konstruktion läßt sich leicht auf anisotrope Medien verallgemeinern (Abbildung 3 a), indem man an Stelle der kugelförmigen Elementarwellen solche von der Gestalt der Wellenflächen verwendet. Für die Konstruktion in Abbildung 3 a wurde vorausgesetzt, daß die Flächennormale in der Zeichenebene liegt. Das Prinzip der Konstruktion ist, daß alle an dem Reflexions-/Refraktionsvorgang beteiligten Wellen die gleiche Spurgeschwindigkeit haben und daß jede ebene Welle die entsprechende Wellenfläche tangiert.

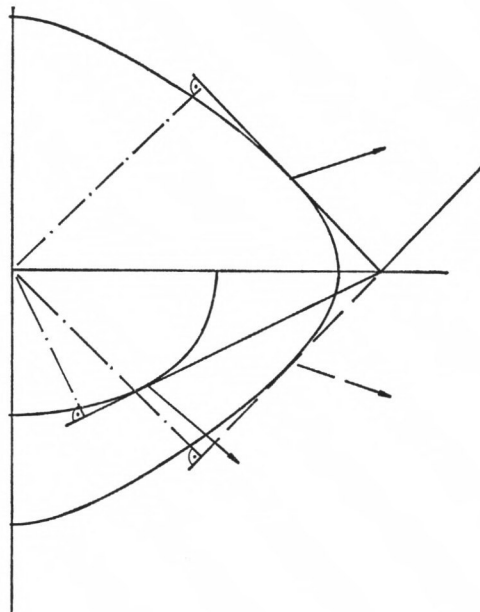


Abbildung 3a. HUYGENS' Konstruktion für das Brechungsgesetz: Alle an dem Reflexions-/Refraktionsvorgang beteiligten Wellenebenen sind Tangentialebenen von einer gemeinsamen Spurlinie aus an die jeweilige Wellenfläche. Die Strahlen haben die Richtung Zentrum–Berührungspunkt. Die Berührungspunkte (und daher auch die Strahlen) brauchen nicht in der Zeichenebene zu liegen. Bei der abgebildeten Konstruktion wurde jedoch vorausgesetzt, daß Grenzflächennormale, Strahlen und Wellennormalen in der Zeichenebene liegen.

Die Wellenflächen anisotroper Medien werden meist auf dem Umweg über Normalen- und Indexfläche bestimmt. Daher liegt es nahe, die Konstruktion so abzuwandeln, daß an Stelle der Wellenfläche eine der anderen Flächen verwendet werden kann. Abbildung 3 b zeigt in leicht abgewandelter Form eine Konstruktion, die zum Beispiel von M. WEBER

(GASSMANN und WEBER 1960, § 291) angegeben wird: über der Strecke Reflexionspunkt–Spurpunkt wird der Thaleskreis errichtet. Die Schnittpunkte des Thaleskreises mit den verschiedenen Normalenflächen sind die Endpunkte der zu den Wellenebenen gehörenden Wellenebenen. Die Richtigkeit der Konstruktion ergibt sich aus der Bemerkung, daß die Normalenfläche die Fußpunktfläche der Wellenfläche ist, und durch Vergleich mit der Abbildung 3 a. Die Konstruktion ist auch dann richtig, wenn die Strahlen und die Berührungspunkte der Wellenebenen mit der Wellenfläche nicht in der Zeichenebene liegen, da die

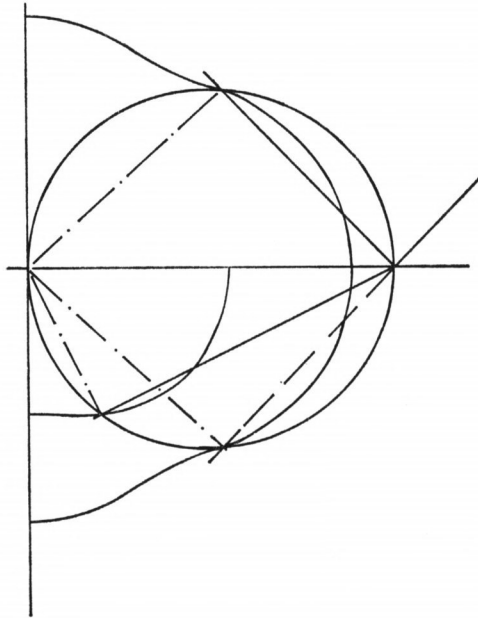


Abbildung 3b. Konstruktion der reflektierten und gebrochenen Wellenebenen mit Hilfe der Normalenflächen: die Wellenebenen werden durch die gemeinsame Spurlinie und durch die Fußpunkte der Lote vom Zentrum festgelegt. Diese Fußpunkte liegen auf dem Thaleskreis und zugleich auf der jeweiligen Normalenfläche. Diese Konstruktion erlaubt für anisotrope Medien keine Bestimmung der Strahlrichtungen.

Normalenvektoren aller beteiligten Wellen stets in der durch die Grenzflächennormale und den Normalenvektor der einfallenden Welle aufgespannten Ebene (Einfallsebene) liegen. Die Konstruktion hat zwei Nachteile: sie liefert keinerlei Aussage über die Strahlrichtung, und außerdem wird bei steilem Einfall der Abstand Reflexionspunkt–Spurpunkt sehr groß, so daß man entweder mit ungünstig großen Thaleskreisen oder mit ungünstig kleinem Maßstab für die Normalenflächen arbeiten muß.

Beide Nachteile werden vermieden, wenn man an Stelle der Normalenfläche die Indexfläche verwendet. Durch Inversion an einem Einheitskreis mit dem Zentrum im Reflexionspunkt geht die in Abbildung 3 b dargestellte Konstruktion in die Konstruktion der Abbildung 3 c über: aus den Normalenflächen werden bei der Inversion Indexflächen, aus dem Thaleskreis eine Senkrechte zur Grenzfläche und aus den Spurlinien der Wellenebenen Thaleskreise über den Indexvektoren (diese Kreise sind in Abbildung 3 c nicht mitgezeichnet). Bei senkrechtem Einfall rückt das Bild des Spurpunktes in den Ursprung. Wegen der geometrischen Beziehungen zwischen Indexfläche und Wellenfläche haben die an dem Reflexions-/Refraktionsprozeß beteiligten Strahlen die Richtungen der Flächennormalen der Indexflächen in den Schnittpunkten mit der Grenzflächennormale.

Die im letzten Absatz beschriebene graphische Darstellung des Brechungsgesetzes wurde von W. R. HAMILTON (Hamilton 1837) angegeben. Man kann die in Abbildung 3c dargestellten Zusammenhänge in folgender Weise zusammenfassen:

Die Spitzen der Indexvektoren aller an einem Reflexions-/Refraktionsprozeß beteiligten Wellen liegen auf einer gemeinsamen Senkrechten zur Grenzfläche. Die zugehörigen Strahlen haben die gleiche Richtung wie die Flächennormalen der Indexflächen in den Durchstoßpunkten der Grenzflächennormale.

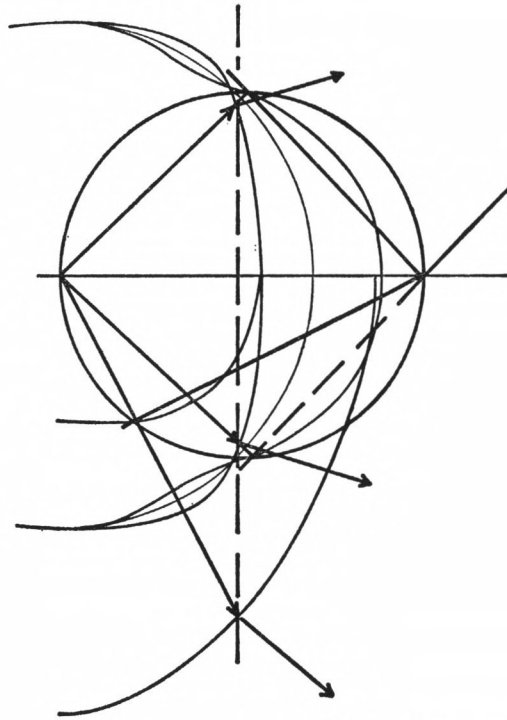


Abbildung 3c. Konstruktion der gebrochenen und reflektierten Wellen mit Hilfe der Indexfläche. Bei der Inversion an der Einheitskugel gehen die Normalenflächen (Abbildung 3b) in die Indexflächen, der Thaleskreis in eine Grenzflächennormale und die Wellenebenen in Kugeln mit den Indexvektoren als Durchmesser über (die Schnittkurven dieser Kugeln sind nicht mitgezeichnet). Die Spitzen der Indexvektoren liegen auf den Indexflächen und auf der Grenzflächennormale, die Strahlen haben die Richtung der Flächennormalen der Indexflächen in den Schnittpunkten. Alle wesentlichen Elemente der Konstruktion liegen in der Zeichenebene (Einfallsebene), nur die Strahlvektoren können aus der Zeichenebene herauszeigen.

Wie bei der Verwendung der Normalenfläche ist es nicht erforderlich, daß die Zeichenebene eine Symmetrieebene der Indexflächen ist. Alle Indexvektoren liegen in der durch die Grenzflächennormale und den Indexvektor der einfallenden Welle aufgespannten Ebene. Ist diese Ebene Symmetrieebene, so liegen auch die Strahlen in dieser Ebene, anderenfalls können mehrere oder gar alle Strahlen, die an dem Reflexions-Refraktionsprozeß beteiligt sind, gegen die Konstruktionsebene geneigt sein.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß das Brechungsgesetz ein geometrisches und kein dynamisches Gesetz ist. Die Umkehrung – etwa daß alle Wellen, deren Indexvektoren die gleiche Projektion auf die Grenzfläche haben wie der Indexvektor der einfallenden Welle, bei dem Reflexions-Refraktionsprozeß auftreten – gilt also nicht. Für *eine* derartige Welle

ist das trivial: man kann stets eine aus dem zweiten Medium auf die Grenzfläche einfallende Welle angeben, die die gleiche Spurgeschwindigkeit wie die aus dem ersten Medium einfallende Welle hat. Diese Welle wird dadurch ausgeschlossen, daß nach stillschweigender Voraussetzung die aus dem ersten Medium einfallende Welle die alleinige Ursache des ganzen Vorganges sein soll, daß also primär Energie zur Grenzfläche hin und sekundär von der Grenzfläche fortfließen soll. Bei der aus dem zweiten Medium einfallenden Welle kann es sich aber nicht um eine Folge der aus dem ersten Medium einfallenden Welle handeln. Darüber hinaus werden die Möglichkeiten eingeschränkt durch die Forderung, daß an der Grenzfläche Spannungen und Verrückungsgeschwindigkeiten stetig bleiben sollen. Wenn die Einfallsebene eine Symmetrieebene der charakteristischen Flächen ist, so führt diese Forderung dazu, daß eine im Hauptschnitt polarisierte primäre Welle nur ebenfalls im Hauptschnitt polarisierte sekundäre Wellen zur Folge haben kann. Umgekehrt kann unter diesen Bedingungen eine senkrecht zum Hauptschnitt polarisierte primäre Welle nur senkrecht zum Hauptschnitt polarisierte sekundäre Wellen erzeugen. Im allgemeinen Fall verteilt sich die einfallende Energie so auf die verschiedenen nach dem Brechungsgesetz möglichen sekundären Wellen, daß Spannungen und Verrückungen an der Grenzfläche stetig bleiben. Die Einzelheiten dieser Energieverteilung lassen sich auch für anisotrope Medien aus den elastischen Parametern ermitteln. Im Rahmen der vorliegenden Untersuchung soll jedoch von einer strengen Behandlung dieses Punktes abgesehen werden.

3. DIE HAUPTAUFGABEN DER SEISMISCHEN INTERPRETATION

Die bei der Interpretation seismischer Beobachtungen auftretenden Aufgaben gliedern sich in drei Gruppen: a) Bestimmung von Herdort und Herdzeit, b) Untersuchung des Herdvorgangs und c) Ermittlung des Strahlwegs und damit der Untergrundstruktur aus Beobachtungen an der Erdoberfläche oder im Erdinnern bei bekanntem Herdort und bekannter Herdzeit. Strahlengeometrische Konstruktionen im eigentlichen Sinne kommen nur in der Gruppe c) vor. Soweit sie für Aufgaben der Gruppen a) und b) erforderlich sind, werden sie heute durch Verwendung von Standard-Laufzeitkurven und Standard-Strahlwegen umgangen. Insbesondere die bei der seismischen Prospektion auftretenden Probleme gehören fast ausschließlich zur Gruppe c), da Ort, Zeit und Art der Wellenerzeugung von vornherein bekannt sind. Auch die Ermittlung der elastischen Eigenschaften des Erdinnern gehört zur Gruppe c). In der hier vorgelegten Untersuchung wird auf die mit der kugelsymmetrischen Schichtung zusammenhängenden Probleme nicht eingegangen. Die Verallgemeinerungen sind relativ einfach, aber eine vollständige Diskussion würde den Rahmen sprengen.

In Abbildung 4 ist das Wellenfeld einer räumlich und zeitlich eng begrenzten Störung nahe der Grenze zwischen einem isotropen Halbraum und einer isotropen Deckschicht dargestellt. Dabei wurde noch vorausgesetzt, daß bei der Sprengung nur eine longitudinale Welle (P) erregt wird. In anisotropen elastischen Medien würde man zwei transversale

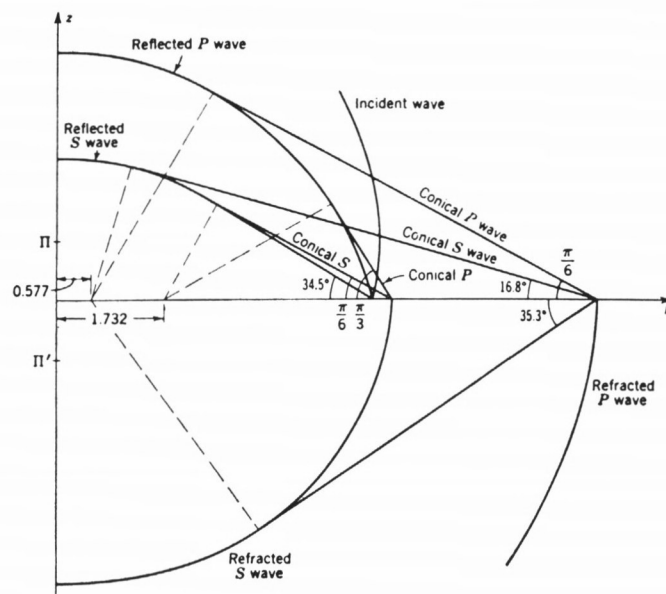


Abbildung 4. Reflektierte und refraktierte Wellenfronten in einem isotropen Medium in der Umgebung von Erregungszentrum π und Grenzfläche r (Aus L. CAGNIARD, Reflection and Refraction of Progressive Seismic Waves).

Wellen (S) verschiedener Polarisierung beobachten, wenn die Grenzfläche nicht für beide Medien eine Symmetrieebene ist.

Die meisten Untersuchungen in der angewandten Seismik sind von einem der beiden nachfolgend beschriebenen Typen:

A. Bei der *Reflexionsseismik* beobachtet man das verhältnismäßig einfache Wellenfeld in der Umgebung des Erregungszentrums. Meist wird in unmittelbarer Umgebung des Zentrums beobachtet, so daß in erster Linie der in sich selbst reflektierte Strahl und die ihm benachbarten Strahlen für die Interpretation in Frage kommen („Zentralaufstellung“). Aus technischen Gründen wird gelegentlich der seitliche Abstand der Empfänger so groß gewählt, daß der in sich selbst reflektierte Strahl nicht mehr beobachtet werden kann („unsymmetrische Aufstellung“); der Abstand der Empfänger vom Erregungszentrum bleibt aber fast immer kleiner als die Tiefe der reflektierenden Grenzfläche.

B. Bei der *Refraktionsseismik* beobachtet man bis in Entfernungen, die ein Mehrfaches der Tiefe der Grenzfläche sind, aber man beschränkt sich auf die Interpretation der ersten Einsatzgruppen. Dabei hat man es in erster Linie mit der direkt an der Erdoberfläche entlang gelaufenen Welle und mit den Wellen zu tun, die an der Grenzfläche unter dem Grenzwinkel der Totalreflexion („kritisch“) refraktiert werden und dabei einen Teil des Weges entlang der Grenzfläche zurücklegen.

Unter der Interpretation wird der folgende Prozeß verstanden: Ausgangspunkt ist die „Laufzeitkurve“, die graphische Darstellung der Laufzeit der zu interpretierenden Wellengruppen zu den einzelnen Beobachtungspunkten. Das Endergebnis ist die geometrische Beschreibung desjenigen Teils der Grenzfläche, der von den Erregungszentrum und Empfänger verbindenden Strahlen berührt wurde. Bei der Refraktionsseismik werden außerdem die Signalgeschwindigkeiten entlang der Grenzflächen ermittelt. Auch in der Reflexionsseismik ist die Bestimmung der Geschwindigkeiten längs der Strahlen im Prinzip möglich. Bei der normalerweise verwendeten Technik reicht die Genauigkeit des Beobachtungsmaterials jedoch dazu nicht aus, so daß die Geschwindigkeiten meist getrennt bestimmt werden.

In der hier vorgelegten Untersuchung wird nur die eben definierte Interpretation im engeren Sinne behandelt. Sowohl die vorausgehenden Reduktionen, die die bekannten Unregelmäßigkeiten der Erdoberfläche und der oberflächennahen Schichten berücksichtigen, als auch die anschließenden Bearbeitungen, die den geometrischen Strukturen eine geologische und letztlich ökonomische Deutung geben, bleiben außerhalb der Diskussion.

Abgesehen von diesen beiden „Hauptaufgaben“ gibt es noch eine Anzahl von seltener durchgeführten Spezialuntersuchungen, zum Beispiel Salzstockrandbestimmungen und Geschwindigkeitsmessungen in Bohrlöchern. Auch sie werden in dieser Untersuchung nicht speziell behandelt. Da jedoch die Lösung dieser Aufgaben stets auf dem Brechungsgesetz basiert, ist die Möglichkeit der Verallgemeinerung auf anisotrope Medien unmittelbar evident.

Zur Lösung der „Hauptaufgaben“ in isotropen Ausbreitungsverhältnissen sind verschiedene numerische und graphische Verfahren bekannt, zum Beispiel für reflexionsseismische Messungen die „Spiegelpunkt-“ und „Tangentenverfahren“. Meist wird dabei angenommen, daß im Hangenden die Geschwindigkeit konstant (und gleich der Durchschnittsgeschwindigkeit) sei. Diese Voraussetzung wird auch für die hier beschriebenen Interpretationsverfahren gemacht.

Eine unmittelbare Verallgemeinerung der für isotrope Ausbreitungsverhältnisse gebräuchlichen Verfahren auf anisotrope Ausbreitungsverhältnisse ist nicht ohne weiteres möglich. Beispielsweise beruhen die Spiegelpunktverfahren auf der Tatsache, daß in einem

homogenen isotropen Medium die an einer ebenen Grenzfläche reflektierten Strahlen so verlaufen, als kämen sie von einem „Spiegelpunkt“ (π' in Abbildung 4). In anisotropen Medien gilt diese Beziehung aber nicht, da der in sich reflektierte Strahl nicht generell senkrecht auf dem Reflektor steht.

3.1 VORBEMERKUNGEN ZU DEN GRAPHISCHEN LÖSUNGSMETHODEN DER SEISMISCHEN HAUPTAUFGABEN MIT HILFE DER INDEXFLÄCHE

Im folgenden werden graphische Lösungsmethoden für die oben definierten „seismischen Hauptaufgaben“ angegeben, die auf der Verwendung der Indexfläche beruhen. Alle beteiligten Medien können anisotrop sein, wobei je nach Art der Aufgabe noch gegebenenfalls die Einschränkung gemacht werden muß, daß die Indexflächen oder wenigstens die Gestalt der Indexflächen bekannt sein muß. Ein Spezialfall der beschriebenen Methoden ist der, daß alle beteiligten Medien isotrop sind. Meist gehen im isotropen Grenzfall die Konstruktionen in bereits bekannte über, aber in einigen Fällen können die hier angegebenen Verfahren auch die Interpretation bei isotropem Untergrund vereinfachen.

Um die Figuren übersichtlich zu halten, werden in den Konstruktionen meist nur einblättrige Indexflächen verwendet. Das entspricht der allgemein üblichen Beschränkung auf longitudinale Wellen. Eine Verallgemeinerung auf dreiblättrige Wellenflächen (Berücksichtigung der beiden transversalen Wellen) bietet keine grundsätzlichen Schwierigkeiten.

Anstelle der in den theoretischen Beispielen dieses Kapitels verwendeten Indexflächen könnte jede allseits geschlossene Fläche mit monoton variierendem Radiusvektor und einem Symmetriezentrum verwendet werden, ohne daß die prinzipiellen Zusammenhänge sich ändern würden. Für eine praktische Anwendung der Verfahren muß jedoch, wie bereits erwähnt, Gestalt und Orientierung der tatsächlichen Indexfläche ermittelt werden. Das kann in Einzelfällen beträchtliche Schwierigkeiten machen. Die Typen von Indexflächen, die normalerweise bei seismischen Interpretationsproblemen auftreten können, und die Möglichkeiten zur Bestimmung der Indexflächen werden in Kapitel 5 behandelt. Der Anhang enthält einige hundert Musterkurven, die die konkrete Ermittlung wesentlich vereinfachen.

3.21 *Reflexionsseismische Beobachtungen mit zentraler Aufstellung*

Unter einer zentralen Aufstellung soll eine solche verstanden werden, bei der Laufzeit und Scheingeschwindigkeit des in sich selbst reflektierten Strahls beobachtet oder durch Interpolation hinreichend genau bestimmt werden können, bei denen die Geophonaufstellung also bis mindestens zum Schußpunkt reicht. Im Normalfall einer zentralen Aufstellung liegt der Schußpunkt etwa in der Mitte der Geophonaufstellung.

A. Aufstellung senkrecht zum Streichen.

Wenn die Aufstellung senkrecht zum geologischen Streichen des Reflektors liegt, steht die von Grenzflächennormale und Wellennormale aufgespannte Ebene senkrecht. In Abbildung 5 ist die Konstruktion dargestellt: Vom Zentrum der Indexfläche aus wird in horizontaler Richtung der Kehrwert der negativen Scheingeschwindigkeit abgetragen (die Verwendung der negativen Scheingeschwindigkeit bedeutet, daß man nicht den auftauchenden Strahl, sondern den eintauchenden Strahl konstruiert). Per definitionem ist die Scheingeschwindig-

keit die Geschwindigkeit des Schnittpunkts der Wellenfront mit der Geophonaufstellung, der Kehrwert ist also bei einer ebenen Welle bis auf einen Maßstabsfaktor gleich der Zeit zwischen dem Eintreffen der Welle am ersten und am letzten Geophon. Die Konstruktion wird besonders einfach, wenn man – wie in Abbildung 5 angedeutet – den horizontalen Durchmesser der Indexfläche mit einer Teilung in Millisekunden im geeigneten Maßstab versieht. Die Reflexion ist im Seismogramm gekrümmt, daher wird man zur Feststellung

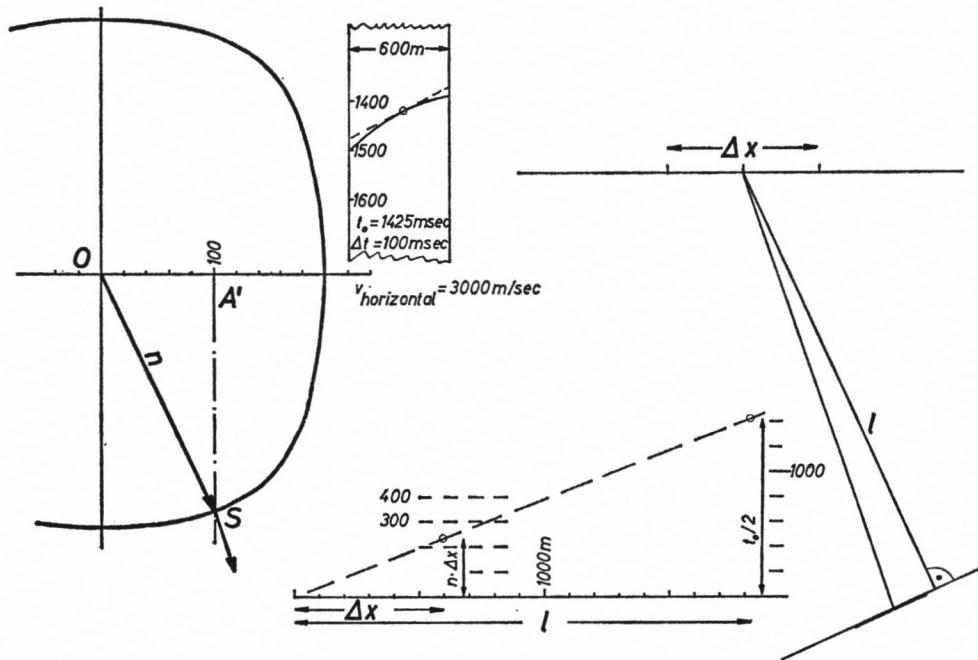


Abbildung 5. Konstruktion von Reflexionsebene und Reflexionspunkt des in sich reflektierten Strahls mit Hilfe der Indexfläche. Der Kehrwert der Scheingeschwindigkeit am Schußpunkt ist gleich der Horizontal-komponente OA' des Indexvektors $\vec{n}$. Bei geeigneter Wahl der Einheitsentfernung ist der Kehrwert der Scheingeschwindigkeit numerisch gleich der Zeitdifferenz zwischen dem Eintreffen der Welle am ersten und letzten Geophon (bei gekrümmten Reflexionen ist gegebenenfalls eine Tangente an die Reflexion zu verwenden). Die Strahlrichtung ist gleich der Richtung der Flächennormale der Indexfläche im Punkt S; die Reflexionsebene steht senkrecht auf dem Indexvektor; der Lotweg l ergibt sich aus

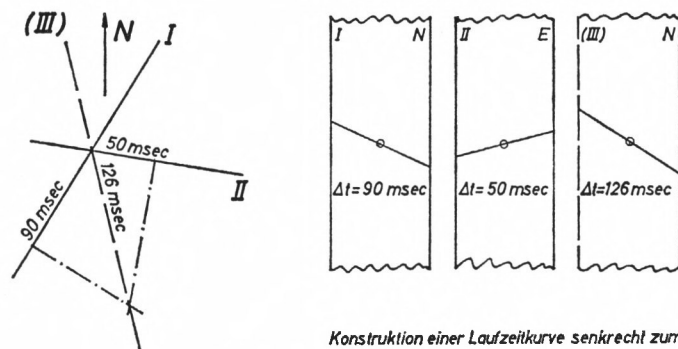
$$l/(t_0/2) = v(\beta) = 1/n.$$

der Scheingeschwindigkeit des in sich reflektierten Strahls gegebenenfalls eine Tangente an die Laufzeitkurve verwenden. Bei schwacher Neigung des Reflektors und wenn der Schußpunkt in der Mitte der Aufstellung liegt, kann man jedoch unmittelbar die Differenz der Endzeiten verwenden. Der Endpunkt A' der vom Zentrum aus abgetragenen Strecke ist der Bildpunkt des Spurpunktes A . In A' wird eine Senkrechte zur (ebenen) Erdoberfläche errichtet, die die Indexfläche in S schneidet. OS ist der Indexvektor $\vec{n}$ des in sich selbst reflektierten Strahls, der zugleich senkrecht auf dem Reflektor steht. Die Länge l des Lotes auf den Reflektor läßt sich durch eine einfache Rechnung ermitteln oder graphisch konstruieren (siehe Abbildung 5). Damit ist die räumliche Lage der das Reflexionselement enthaltenden Ebene festgelegt. Um die Lage des Reflexionselementes in dieser Ebene zu bestimmen, benötigt man die Richtung des in sich selbst reflektierten Strahls. Sie ist gleich der Richtung der Flächennormale der Indexfläche in S . In anisotropen Medien braucht der

Strahl – abweichend von den Verhältnissen in isotropen Medien – nicht in der Konstruktionsebene zu verlaufen, noch braucht er senkrecht auf dem Reflektor zu stehen.

B. Kreuzende Aufstellungen.

Bei Aufstellungen schräg zum Streichen kann nur dann richtig konstruiert werden, wenn die Neigung der durch Grenzflächennormale und Wellennormale aufgespannten Ebene bekannt ist. Am einfachsten ist es, wenn man zunächst eine senkrechte Ebene aufsucht, die die Grenzflächennormale enthält. Diese Ebene enthält gleichzeitig den Indexvektor des in sich reflektierten Strahls und seine Projektion auf die Erdoberfläche, den Kehrwert der Spurgeschwindigkeit. Für die Konstruktion braucht nur berücksichtigt zu werden, daß die Kehrwerte der Scheingeschwindigkeiten längs der Aufstellung Projektionen des Indexvektors – und daher auch Projektionen des Kehrwerts der Spurgeschwindigkeit – auf die Aufstellungsrichtung sind (Abbildung 6). Die weitere Konstruktion verläuft in der so festgelegten vertikalen Ebene wie unter A.



Konstruktion einer Laufzeitkurve senkrecht zum Streichen des Reflektors (II) aus Beobachtungen auf sich kreuzenden Aufstellungen (I und II)

Abbildung 6. Konstruktion eines fiktiven Seismogramms (III) aus zwei auf sich kreuzenden Aufstellungen beobachteten Seismogrammen. Die Konstruktion geht davon aus, daß der Kehrwert der Scheingeschwindigkeit gleich der Projektion des Kehrwerts der Spurgeschwindigkeit auf die Aufstellungsrichtung ist.

C. Reflexionsseismische Beobachtungen mit brechenden Horizonten im Hangenden.

Wenn sich im Hangenden der Reflexion ein brechender Horizont befindet, verfährt man wie in Abbildung 7: Zunächst wird wie zuvor der Indexvektor im oberen Medium ermittelt. Durch seinen Endpunkt wird die Normale zum brechenden Horizont gezeichnet. Deren Schnitt mit der zweiten Indexfläche ist der Endpunkt des Indexvektors im zweiten Medium. Diese Art der Konstruktion ist auch in isotropen Medien zweckmäßig (Abbildung 8). Wenn der brechende Horizont und der Reflektor verschiedene Streichrichtung haben, muß man der Konstruktion dreidimensionale Darstellungsmethoden zugrunde legen.

3.22 Reflexionsseismische Beobachtungen mit unsymmetrischer Aufstellung

Als unsymmetrisch sollen Aufstellungen bezeichnet werden, bei denen es nicht möglich ist, Laufzeit und Scheingeschwindigkeit des in sich reflektierten Strahls durch Interpolation zu bestimmen. Derartige Aufstellungen werden bei Schüssen in Luft verwendet, da der

Luftschall die seismische Bodenbewegung völlig überdecken würde (Abbildung 9). Der Einfachheit halber werden nur Aufstellungen senkrecht zum Streichen des Reflektors diskutiert. Die Verallgemeinerung auf beliebig orientierte Aufstellungen erfolgt ähnlich wie bei den zentralen Aufstellungen.

Die graphische Konstruktion des reflektierenden Horizontes ist besonders einfach, wenn ein „fortlaufendes Profil“ beobachtet wurde. Mit diesem Ausdruck bezeichnet man Kombinationen von Aufstellungen und Schußpunkten, die derart aufeinanderfolgen, daß die Reflexionselemente aneinander anschließen. Bei einem fortlaufenden Profil werden ins-

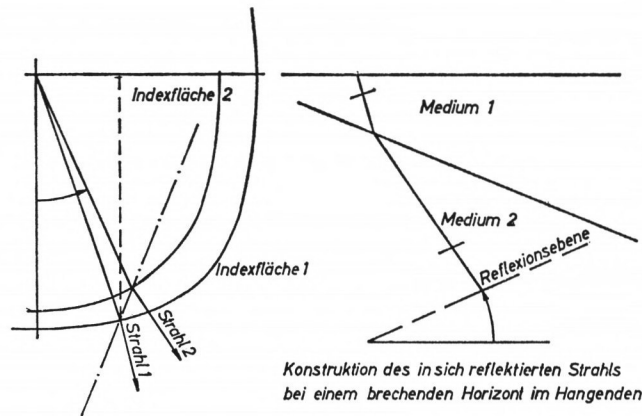


Abbildung 7. Reflexionsseismik mit einem brechenden Horizont im Hangenden. Die Projektion des Indexvektors im Medium 1 auf die Oberfläche ist gleich dem Kehrwert der Scheingeschwindigkeit, die Projektionen beider Indexvektoren auf die Grenzfläche sind gleich. Die Reflexionsebene steht senkrecht auf dem Indexvektor im zweiten Medium, die Strahlen haben die Richtungen der Flächennormalen der Indexflächen in den Schnittpunkten.

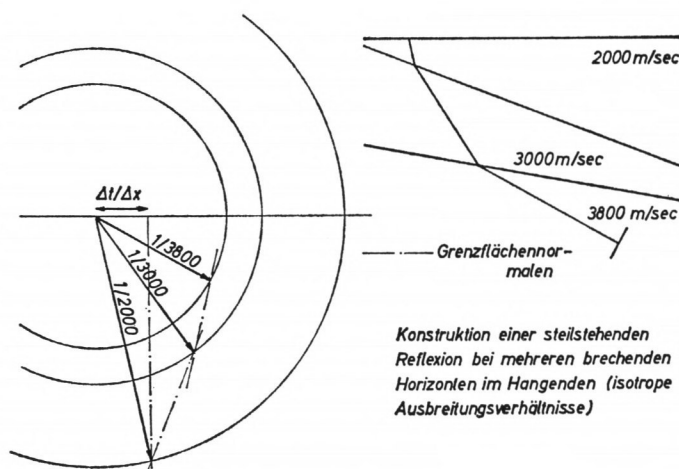
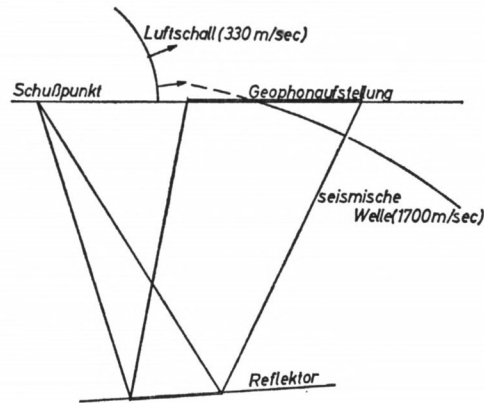


Abbildung 8. Reflexionsseismik mit mehreren brechenden Horizonten im Hangenden. Die Projektion des Indexvektors im Medium 1 auf die Oberfläche ist gleich dem Kehrwert der beobachteten Scheingeschwindigkeit; der erste und der zweite Indexvektor haben die gleiche Projektion auf die erste Grenzfläche, der zweite und der dritte Indexvektor haben gleiche Projektion auf die zweite Grenzfläche. Es wurden isotrope Ausbreitungsverhältnisse vorausgesetzt, daher sind die Indexflächen Kugeln und die Strahlen haben die Richtung der Indexvektoren.

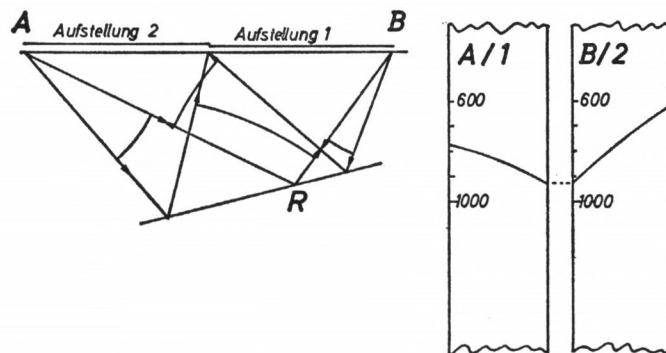
besondere die von einem Schußpunkt ausgehenden und am Anschlußschußpunkt registrierten Strahlen (Korrelationsstrahlen) in beiden Richtungen beobachtet. Wenn zwei Reflexionen auf aneinander anschließenden Seismogrammen vom gleichen Reflektor stammen, so müssen die Laufzeiten für die Korrelationsstrahlen in beiden Richtungen gleich sein (man sagt dann: die beiden Reflexionen ‚korrelieren‘).



Unsymmetrische Geophonaufstellung bei unverdämmtem Schuß

Abbildung 9. Registrierung von Schüssen, die ohne Verdämmung über dem Erdboden abgetan werden: um zu vermeiden, daß die Registrierung der seismischen Wellen durch den Luftschall gestört wird, muß sich das erste Geophon in genügend großer Entfernung vom Schußpunkt befinden.

In Abbildung 10 ist das Aufstellungsprinzip und in Abbildung 11 die Konstruktion des Reflexionselements dargestellt. Der Schuß in *A* wird auf der Aufstellung 1 beobachtet, der Schuß in *B* auf der Aufstellung 2. Das letzte Geophon der Aufstellung 1 empfängt den Strahl *A R B*, das erste Geophon der Aufstellung 2 den Strahl *B R A*. Aus den in *A* und *B*



Beobachtung korrelierender Reflexionen mit unsymmetrischen Aufstellungen

Abbildung 10. Aufstellungsanordnung zur Beobachtung eines „fortlaufenden Profils“ bei Schüssen in Luft. Der Korrelationsstrahl (mit dem Reflexionspunkt *R*) wird bei beiden Schüssen beobachtet, die Laufzeit muß in beiden Fällen gleich sein. Bei der Erweiterung des Profils würde man von der Mitte zwischen *A* und *B* aus schießen und auf Aufstellungen links von *A* und rechts von *B* beobachten.

beobachteten Spurgeschwindigkeiten werden die Indexvektoren der dort jeweils auftauchenden Strahlen ermittelt. Die Umkehrung des in A auftauchenden Strahls liefert den Indexvektor des in A eintauchenden Strahls. Die beiden so ermittelten Indexvektoren gehören zu Strahlen, die „an ein und demselben Reflexionsprozeß teilnehmen“, daher liegen ihre Spitzen auf einer Normalen zur Grenzfläche. Damit ist die Orientierung der Grenzfläche bekannt. Um außerdem auch ihre Lage zu bestimmen, genügt es, einen auf der Grenzfläche liegenden Punkt zu ermitteln. Am einfachsten ist der Punkt R zu konstruieren: er liegt auf beiden in A beziehungsweise B auftauchenden Strahlen. Wie zuvor sind die Strahlrichtungen gleich den Richtungen der Flächennormalen der Indexfläche. Man kann die Konstruktion kontrollieren, indem man die Laufzeit längs ARB bestimmt. Die dazu erforderlichen Strahlgeschwindigkeiten erhält man als Kehrwerte der Strahlindexvektoren n_s (Abbildung 11).

Eine andere Möglichkeit, die Lage der Reflexionsebene zu bestimmen, ist in Abbildung 12 dargestellt: zunächst trägt man von A aus die Strecke $l'_B = (\Delta x / \Delta t_A) \cdot t_{AB}$ über B hinaus ab und bezeichnet den Endpunkt mit B' . (t_{AB} : Korrelationszeit; $\Delta x / \Delta t_A$ Scheingeschwindigkeit in A). Zeichnet man durch B eine Gerade senkrecht zum Indexvektor des in B auftauchenden Strahls und durch B' eine Gerade senkrecht zum Indexvektor des in A auftauchenden Strahls, so liegt der Schnittpunkt R'_B auf der Spur der Reflexionsebene mit

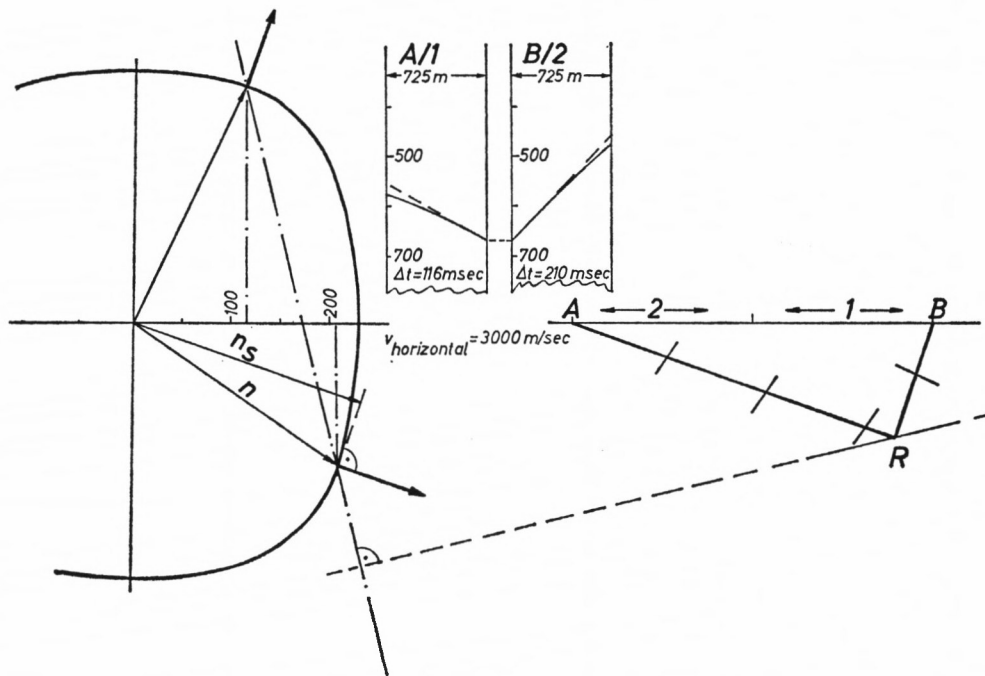


Abbildung 11. Interpretation korrelierender Reflexionen bei unsymmetrischer Aufstellung. Der Kehrwert der in B beobachteten Scheingeschwindigkeit ist gleich der Projektion des Indexvektors des in B auftauchenden Strahls; der negative Kehrwert der in A beobachteten Scheingeschwindigkeit ist gleich der Projektion des Indexvektors des in A eintauchenden Strahls. Die Spitzen der beiden Indexvektoren liegen auf einer gemeinsamen Normalen zur Reflexionsebene. – Den Reflexionspunkt R erhält man als Schnitt der beiden Strahlen AR und BR . Diese Strahlen haben die Richtung der Flächennormalen der Indexfläche in den Schnittpunkten mit der Grenzflächennormalen. Die beobachtete Korrelationszeit muß gleich der für den konstruierten Strahlweg ARB benötigten Zeit sein. Zu ihrer Berechnung benötigt man die Strahlgeschwindigkeiten. Diese sind umgekehrt proportional zur Länge der Strahlindexvektoren n_s (Projektion der Indexvektoren auf die Strahlrichtungen).

der Zeichenebene. Selbstverständlich kann man dieselbe Konstruktion auch von B aus mit l'_A , A' und R'_A durchführen.

Die Konstruktion beruht auf folgendem Zusammenhang: die Schnittlinie zweier Wellenebenen, die jeweils senkrecht auf den Indexvektoren in A und B stehen, liegt dann und nur dann in der Grenzfläche, wenn die Summe der durch die jeweilige Normalengeschwindigkeit dividierten Abstände der Ebenen von den Ausgangspunkten gleich der Gesamtlaufzeit der Reflexion ist. In der Abbildung 12 ist der Abstand der Front BR'_B von B Null, der Abstand der Front $B'R'_B$ von A ist gleich $t_{AB} \cdot v(\beta_A)$. Auf dem gleichen Prinzip beruht das Wellenfrontenverfahren, das bei der Auswertung von Refraktionsbeobachtungen häufig angewendet wird.

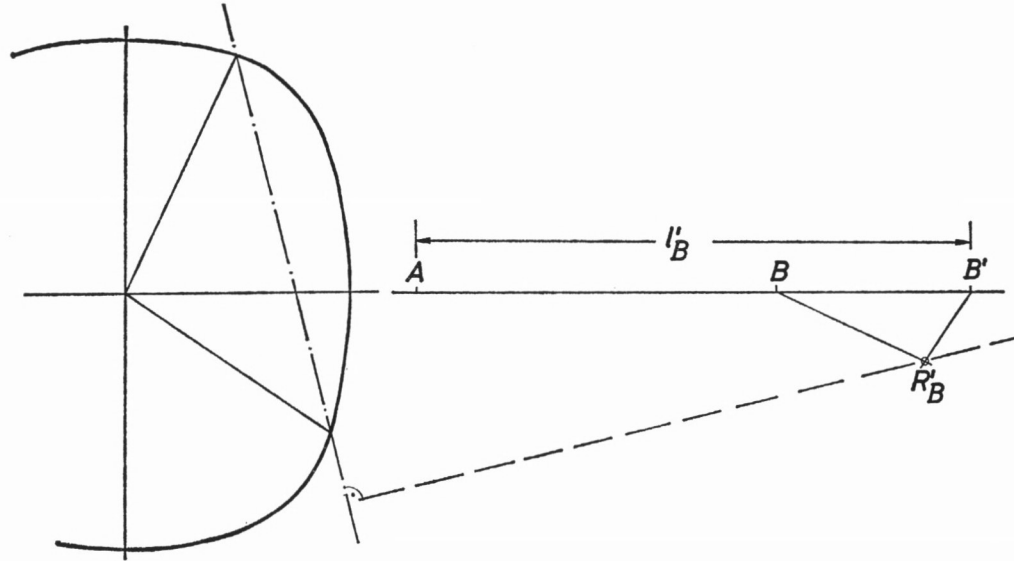


Abbildung 12. Eine andere Möglichkeit zur Bestimmung der Lage der Reflexionsebene: die Schnittlinie zweier Wellenebenen senkrecht zu den Indexvektoren liegt in der Reflexionsebene, wenn die Summe der durch die Normalengeschwindigkeiten dividierten Länge der Lote gerade gleich der Gesamtlaufzeit ist. l'_B ist gleich der Gesamtlaufzeit multipliziert mit der in A beobachteten Scheingeschwindigkeit. Der Abstand der Wellenebene $B'R'_B$ dividiert durch die entsprechende Normalengeschwindigkeit ist gleich der Gesamtlaufzeit, der Abstand der Wellenebene BR'_B von B ist Null, daher liegt R'_B auf der Reflexionsebene.

3.23 Die Bestimmung der „Überdeckung“ bei der Interpretation von Reflexionsbeobachtungen

Als „Überdeckung“ oder „Länge der Spurlinie“ bezeichnet man die Entfernung zwischen dem ersten und dem letzten Reflexionspunkt der reflektierten Strahlen. Bezieht man sich dabei auf eine einzelne Aufstellung und einen einzelnen Schußpunkt, so spricht man auch von „Spurlinienelement“. Bei den bisherigen Konstruktionen wurde stets eine Reflexionsebene und in den meisten Fällen der Reflexionspunkt des „Konstruktionsstrahls“ (das ist bei zentralen Aufstellungen der in sich reflektierte Strahl, bei unsymmetrischer Aufstellung der Korrelationsstrahl) bestimmt.

Bei einem fortlaufenden Profil erhält man die Spurlinie als Verbindungslinie aller Reflexionspunkte längs der Einhüllenden der Reflexionsebenen. In isotropen, homogenen Medien ist stets die Spurlinie die orthogonale Projektion der Aufstellungen auf den

Reflektor, in anisotropen Medien erfolgt die Projektion längs der Strahlen, die nicht senkrecht auf dem Reflektor zu stehen brauchen. Insbesondere kann die Spurlinie auch dann außerhalb der Vertikalebene durch die Aufstellungen liegen, wenn das Profil senkrecht zum geologischen Streichen angelegt ist. Bezeichnet man die Fläche, in der die an den Geophonen registrierten Strahlen gelaufen sind, als „Konstruktionsfläche“, so ist die

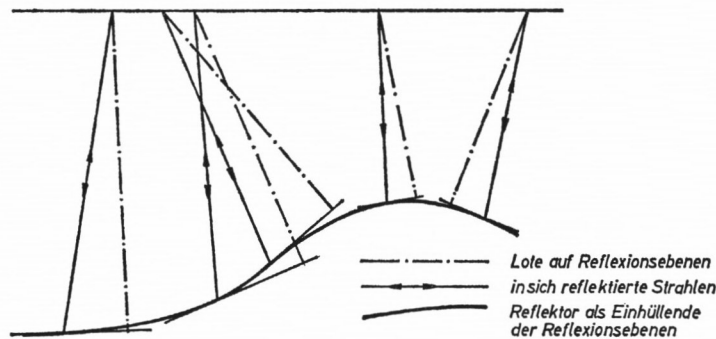


Abbildung 13. Die Reflexionsebene tangiert den Reflektor im Reflexionspunkt. In anisotropen Medien sind das im allgemeinen nicht die Lotpunkte; insbesondere können die Berührungspunkte außerhalb der Vertikalebene liegen, auch wenn das Profil senkrecht zum geologischen Streichen angelegt ist.

Spurlinie die Schnittkurve von Konstruktionsfläche und Einhüllender der Reflexionsebenen (Abbildung 13). Bei homogenen Ausbreitungsverhältnissen, ebenem Reflektor und geradliniger Aufstellung ist die Konstruktionsfläche eine Ebene. Bei Abweichung von diesen Voraussetzungen – insbesondere bei gekrümmten Reflektoren – kann die geometrische Beschreibung der Konstruktionsflächen und Spurlinien ziemlich kompliziert werden.

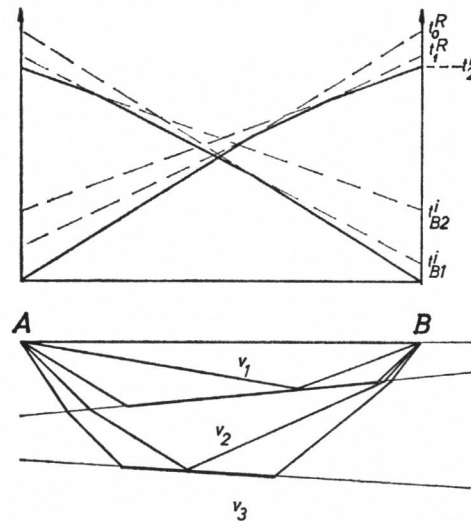
Die Konstruktion der Spurlinie als Schnitt von Konstruktionsfläche und Einhüllender der Reflexionsebenen ist nur bei ungestörten, schwach gekrümmten Reflexionshorizonten in befriedigender Weise möglich. An Störungen, bei „blinden“ Profilenden (das sind Profilenden, die nicht mit einem Schußpunkt, sondern mit einer Geophonaufstellung abschließen) und dort, wo der Reflektor stark gekrümmt ist, ist es ratsam, das Reflexionselement – genauer gesagt das Spurlinienelement – getrennt zu konstruieren. Bei Profilen, die nicht senkrecht zum Streichen des Reflektors verlaufen, kann die seitliche Lage des Spurlinienelementes nur in der Umgebung von Kreuzaufstellungen ermittelt werden. Bei wechselnder Neigung des Reflektors ist daher eine räumlich korrekte Interpretation nur möglich, wenn genügend Profilkreuzungen oder Queraufstellungen vorliegen (diese Schwierigkeiten treten selbstverständlich in isotropen Medien in entsprechender Form auf).

Das Spurlinienelement ist festgelegt, wenn in der Reflexionsebene sein Anfang und sein Ende festgelegt sind. Bei zentralen Aufstellungen handelt es sich dabei um die Reflexionspunkte der Korrelationsstrahlen, die sich ebenso konstruieren lassen wie die Reflexionspunkte der Korrelationsstrahlen bei unsymmetrischen Aufstellungen. Die entscheidende Voraussetzung für derartige Konstruktionen ist, daß die Reduktionen, die an der Rohlaufzeit wegen etwaiger Inhomogenitäten nahe der Oberfläche und zum Ausgleich der Topographie angebracht werden müssen, hinreichend genau bekannt sind. Ohne spezielle Reduktionsschüsse ist das aber nur in der Nähe von Schußpunkten der Fall. Aus dem Gesagten ergibt sich, daß an blinden Aufstellungen und bei Reflexionen, die – etwa wegen einer geologischen Störung – abbrechen, Anfangs- und Endpunkt des Spurlinienelements nicht genau bestimmt werden können.

3.3 REFRAKTIONSSSEISMISCHE BEOBACHTUNGEN BEI EBENEN REFRAKTOREN

Der prinzipielle Strahlengang bei refraktionsseismischen Beobachtungen ist in der unteren Hälfte der Abbildung 14 dargestellt. Vom Schußpunkt A aus gelangen Wellen auf drei Wegen zum Beobachtungspunkt B : direkt entlang der Erdoberfläche mit der Geschwindigkeit g_1 (hier muß die Strahlgeschwindigkeit verwendet werden, da der tatsächliche Strahlweg vorgeschrieben ist); als Reflexionen von den Grenzflächen; und drittens unter den Grenzwinkeln der Totalreflexion mit der jeweiligen (Normalen-)Geschwindigkeit $v(\beta_A)$, an den Grenzflächen im unteren Medium entlang mit den Geschwindigkeiten g_i ($i = 2, 3, \dots$) und wieder unter dem Grenzwinkel der Totalreflexion mit den Geschwindigkeiten $v(\beta_B)$ nach B . (Der Einfachheit halber wird vorausgesetzt, daß an den Grenzflächen die Geschwindigkeit jeweils zunimmt). Werden Schußpunkt und Beobachtungspunkt vertauscht, so bleibt die Gesamtlaufzeit für alle Äste der Laufzeitkurve gleich.

Streng genommen gilt diese Überlegung für jeden der drei möglichen Wellentypen, außerdem treten bei Reflexion und Refraktion jeweils Umwandlung in die anderen Wellentypen auf, so daß man es mit einer Vielzahl von Einsätzen zu tun hat. Man kann selbstverständlich alle diese Einsätze zur Interpretation verwenden, und es gibt Fälle, wo eine eindeutige Interpretation ohne Berücksichtigung mehrerer Einsatztypen nicht möglich ist. Diese Schwierigkeiten treten jedoch auch in isotropen Ausbreitungsverhältnissen auf. Die vorliegende Untersuchung beschränkt sich daher auf den einfachen Fall, daß zur Interpretation die Einsätze genügen, die auf dem ganzen Weg als (quasi-)longitudinale Welle gelaufen sind. Meist werden diese Einsätze auch die ersten sein, so daß die Beobachtung besonders einfach wird. Die Laufzeitkurve aus den ersten Einsätzen hat die in der oberen Hälfte der Abbildung 14 dargestellte Gestalt. Ist die Geschwindigkeit in den einzelnen



Laufzeitkurve und Strahlengang bei refraktionsseismischen Messungen (ohne transversale Wellen, Laufzeitkurven ohne reflektierte Wellen)

Abbildung 14. Laufzeitkurve und Strahlengang der (quasi-)longitudinalen Wellen bei refraktionsseismischen Messungen. In der Laufzeitkurve sind nur die an den Grenzflächen entlang führenden Strahlwege (und nicht die reflektierenden Strahlen) berücksichtigt. Die ersten Einsätze sind ausgezogen. Die rückwärts verlängerten Äste der Laufzeitkurven schneiden die Zeitachsen in den Abschnittszeiten $t_{A1}^i \dots t_{B2}^i$, die vorwärts verlängerten Äste (auch als spätere Einsätze zu verfolgen) schneiden die Zeitachsen in den Gegenzeiten $t_1^R \dots t_2^R$. Die Gegenzeiten sind in beiden Richtungen gleich,

Schichten konstant, so erhält man als Laufzeitkurve einen konvexen Streckenzug mit überall positiver Krümmung. Falls in einer Schicht die Geschwindigkeit stetig zunimmt, so ist der entsprechende Ast der Laufzeitkurve ein konvexes Kurvenstück. Bei mehrschichtigen Medien kann es nötig sein, Einsätze zu verfolgen, die nicht als erste an der Beobachtungsstelle eintreffen.

Verlängert man die einzelnen Geschwindigkeitsäste rückwärts bis zum Schnitt mit der Zeitachse, so erhält man die „Abschnittszeit“ t^i (intercept time). Errichtet man in B eine zweite Zeitachse und verlängert die Äste der Laufzeitkurve vorwärts bis zum Schnitt – falls sie nicht ohnehin als zweite Einsätze zu verfolgen sind –, so erhält man die Gegenzeiten t^R (reciprocal times). Die Neigung der einzelnen Kurvenäste ist gleich dem Kehrwert der Scheingeschwindigkeit, also numerisch gleich der Horizontalkomponente des zugehörigen Indexvektors.

Wird mit derselben Geophonaufstellung ein Schuß in B beobachtet, so erhält man – falls die Refraktoren nicht horizontal sind – andere Abschnittszeiten und andere Scheingeschwindigkeiten. Die Gegenzeiten jedoch müssen wegen der Umkehrbarkeit des Strahlenganges gleich sein, wenn die Strahlen am gleichen Refraktor entlang gelaufen sind. Bei komplizierten Laufzeitkurven kann man mit Hilfe dieses Zusammenhanges die in verschiedenen Richtungen beobachteten Äste der Laufzeitkurve einander zuordnen.

Für die folgende Diskussion wird der Einfachheit halber vorausgesetzt, daß die Profile senkrecht zum geologischen Streichen angelegt sind. Andernfalls muß man die räumliche Lage der Spurlinienelemente aus kreuzenden Aufstellungen ermitteln.

3.31 Refraktionsseismische Beobachtungen mit einem einzelnen ebenen Refraktor

Wie bereits erwähnt besteht der Interpretationsprozeß darin, daß man die „Koordinaten“ des Refraktionselements und die Strahlgeschwindigkeit entlang der Grenzfläche aus den Parametern der Laufzeitkurve bestimmt. Unter Koordinaten wird dabei ein Satz von Zahlen verstanden, der Lage und Stellung des Refraktionselementes eindeutig festlegt. Eine Möglichkeit ist zum Beispiel Richtung und Länge des Lots vom Schußpunkt auf die Refraktionsebene und in dieser Ebene Anfangs- und Endpunkt des Refraktionselementes (Spurlinienelementes).

In Abbildung 15 ist dargestellt, wie die Parameter der Laufzeitkurve mit den Koordinaten der Grenzfläche und der Strahlgeschwindigkeit g_2 zusammenhängen. Die Strecken $F_A A''$ und $F_B B''$ repräsentieren an der Grenzfläche kritisch refraktierte Wellenebenen. Eine Wellenebene ist eine Fläche gleicher Laufzeit, daher benötigt ein Signal von einem beliebigen Punkt der einen Wellenebene zu einem beliebigen Punkt der anderen Wellenebene jeweils die gleiche Zeit. Das gilt insbesondere auch für die beiden Punkte F_A und F_B . Daher ist die Laufzeit zwischen den beiden Wellenebenen

$$t_{A''B''} = t_{F_A F_B} = (x \cdot \cos \alpha) / g_2.$$

Die Laufzeiten von den Wellenebenen zu den Punkten A und B sind

$$t_{AA''} = h_A \cdot \cos(\beta_A - \alpha) / v_1(\beta_A) \text{ und}$$

$$t_{B''B} = h_B \cdot \cos(\beta_B - \alpha) / v_1(\beta_B),$$

daher ergibt sich als Gesamtlaufzeit von A bis zu einem Empfänger in der Entfernung x

$$t_A(x) = x \cdot \cos \alpha / g_2 + h_A \cdot \cos(\beta_A - \alpha) / v_1(\beta_A) + h_B \cdot \cos(\beta_B - \alpha) / v_1(\beta_B).$$

Nun gilt

$$h_B = h_A - x \cdot \sin \alpha.$$

Daher kann man die Gleichung für den refraktierten Ast der Laufzeitkurve in der folgenden Form schreiben:

$$(1) \quad t_A(x) = h_A \cdot \left[\frac{\cos(\beta_A - \alpha)}{v_1(\beta_A)} + \frac{\cos(\beta_B - \alpha)}{v_1(\beta_B)} \right] + \\ + x \cdot \left[\frac{\cos \alpha}{g_2} - \sin \alpha \cdot \frac{\cos(\beta_B - \alpha)}{v_1(\beta_B)} \right].$$

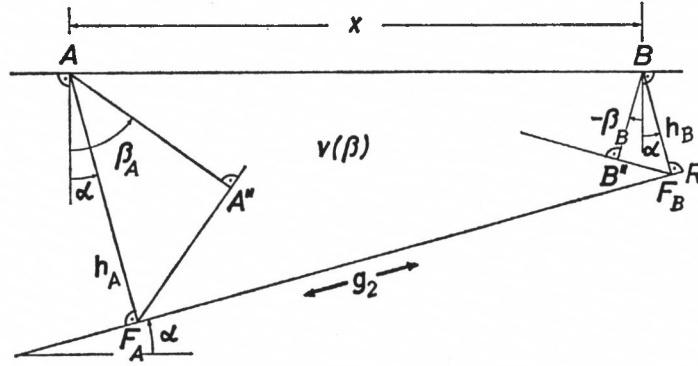


Abbildung 15. Zur Ableitung der Gleichung der Laufzeitkurve. $F_A A''$ und $F_B B''$ sind kritisch refraktierte Wellenebenen. Die Gesamtlaufzeit setzt sich aus drei Teilen zusammen: $F_A F_B$ mit der Strahlggeschwindigkeit g_2 , $A A''$ mit der Normalengeschwindigkeit $v(\beta_A)$ und $B'' B$ mit der Normalengeschwindigkeit $v(\beta_B)$.

Der erste Summand ist die Abschnittszeit $t_A^i (= t_A(0))$, der Faktor von x im zweiten Summanden ist der Kehrwert der Scheingeschwindigkeit, mit anderen Worten die Horizontalkomponente des Indexvektors, der zum auftauchenden Strahl gehört.

Drückt man die Gleichung für den refraktierten Ast der Laufzeitkurve nicht durch die Geschwindigkeiten, sondern durch die Indexvektoren aus, so erhält man an Stelle von (1)

$$(2) \quad t_A(x) = h_A \cdot [n_1(\beta_A) \cdot \cos(\beta_A - \alpha) + n_1(\beta_B) \cdot \cos(\beta_B - \alpha)] + x \cdot n_1(\beta_B) \cdot \sin(-\beta_B).$$

Für den ersten Term folgt das unmittelbar aus der Definition des Indexvektors, für die Umformung des zweiten Terms wurde vom Brechungsgesetz Gebrauch gemacht (Abbildung 16). Im Zusammenhang mit Abbildung 16 wird noch einmal darauf hingewiesen, daß es sich bei der Geschwindigkeit, mit der das seismische Signal an der Grenzfläche entlang läuft, nicht um die Normalengeschwindigkeit im unteren Medium zu handeln braucht, da die Wellenfront in anisotropen Medien auch bei kritischer Refraktion nicht senkrecht auf der Grenzfläche zu stehen braucht. Der Indexvektor, der zu der im unteren Medium laufenden Welle gehört, kann beliebig gerichtet sein, nur muß seine Spitze auf der Normalen zur Grenzfläche liegen. $1/g_2$ ist der Strahlindexvektor dieser Welle, der per definitionem gleich der Projektion des Indexvektors auf die Strahlrichtung ist.

Bei einer analytischen Interpretation wären (1) oder (2) unter Berücksichtigung des Brechungsgesetzes und der Geschwindigkeits-Richtungs-Gleichung $v_1 = v_1(\beta)$ nach h_A , g_2 und α aufzulösen. Da $v = v(\beta)$ in anisotropen Medien mindestens vom vierten Grade ist, dürfte die praktische Durchführung auf Schwierigkeiten stoßen.

In Abbildung 17 und 18 ist die graphische Bestimmung der Neigung und der Signalgeschwindigkeit entlang der Grenzfläche gezeigt. Dabei wird davon Gebrauch gemacht, daß der Kehrwert einer Geschwindigkeit numerisch gleich der für die Zurücklegung der Einheitsstrecke benötigten Zeit ist. Die Kehrwerte der an der Erdoberfläche gemessenen Scheingeschwindigkeiten sind die Horizontalkomponenten der Indexvektoren der auftauchenden Strahlen. Da der gesamte Strahlengang umkehrbar ist, erhält man aus den so

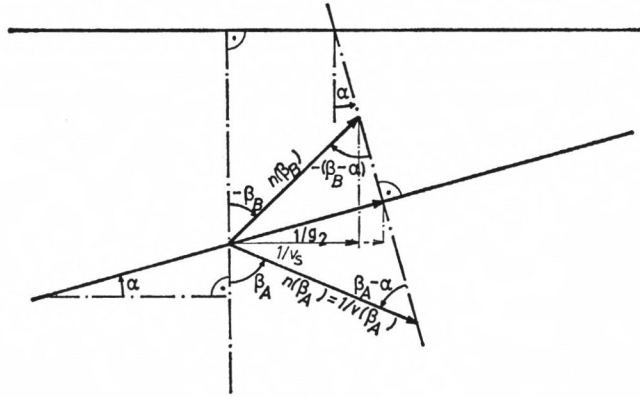


Abbildung 16. Zur Darstellung der Gleichung der Laufzeitkurve durch die Indexvektoren. Bei kritischer Refraktion ist die gemeinsame Projektion der Indexvektoren auf die Grenzfläche gleich dem Kehrwert der Strahlgeschwindigkeit entlang der Grenzfläche (also gleich dem Strahlindexvektor). Die Projektion der Indexvektoren auf die Erdoberfläche ist gleich dem Kehrwert der Scheingeschwindigkeit. Nach der Zeichnung gilt $1/v_{sA} = n_1(\beta_B) \cdot \sin(-\beta_B) = \cos \alpha / g_2 - \sin \alpha \cdot \cos(\beta_B - \alpha) \cdot n_1(\beta_B)$.

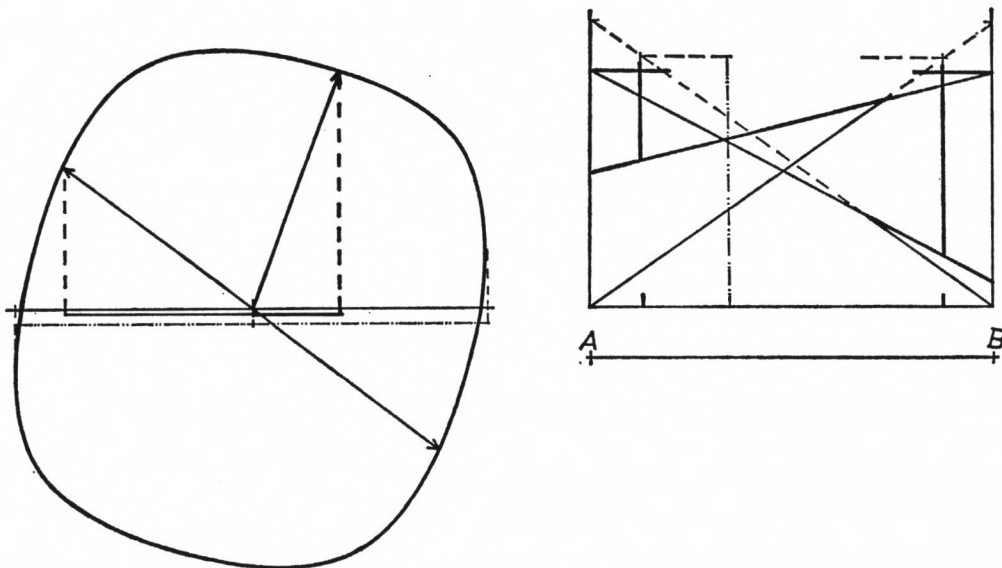


Abbildung 17. Erster Schritt bei der Interpretation refraktionsseismischer Daten: die Maßstäbe von Indexfläche und Laufzeitkurve werden so gewählt, daß die Projektion der Indexfläche auf die Horizontale gleich der Ordinate des ersten Astes der Laufzeitkurve für die Entfernungseinheit wird (— · — · — · —). Dann werden die Zeitinkremente der zweiten Äste (bezogen auf die Entfernungseinheit) vom Zentrum der Indexfläche nach rechts und links abgetragen. Aus ihnen erhält man die Indexvektoren der in A und B auftauchenden Strahlen und durch Umkehr die der abtauchenden Strahlen.

bestimmten Indexvektoren diejenigen der abtauchenden Strahlen durch einfache Umkehr. Der bei A abtauchende und der bei B auftauchende Strahl nehmen an einem Refraktionsprozeß teil, also liegen ihre Spitzen auf einer gemeinsamen Normalen zur Grenzfläche (Abbildung 18). Auch die Spitze des Indexvektors der im zweiten Medium laufenden Welle liegt auf der gemeinsamen Normalen zur Grenzfläche. Seine Projektion auf die Strahlrichtung (parallel zur Grenzfläche) ist der Strahlindexvektor, dessen Länge gleich dem Kehrwert der Strahlgeschwindigkeit g_2 ist.

Die Konstruktion der Länge h_A des Lotes vom Schußpunkt A auf die Grenzfläche ist in Abbildung 18 dargestellt. Setzt man in (2) $x = 0$ und löst nach h_A auf, so erhält man

$$h_A = t_A^i / [n_1(\beta_A) \cdot \cos(\beta_A - \alpha) + n_1(\beta_B) \cdot \cos(\beta_B - \alpha)] .$$

Der Divisor auf der rechten Seite ist nichts anderes als die Summe der Projektionen der Indexvektoren auf die Grenzflächennormale. Bezeichnet man diese Projektionen vorübergehend mit $n_{A\alpha}$ (für $n_1(\beta_A) \cdot \cos(\beta_A - \alpha)$) und $n_{B\alpha}$, so kann man schreiben:

$$h_A = t_A^i / (n_{A\alpha} + n_{B\alpha}) .$$

Diese Division läßt sich leicht graphisch durchführen, zum Beispiel mit Hilfe des Strahlensatzes wie in Abbildung 18.

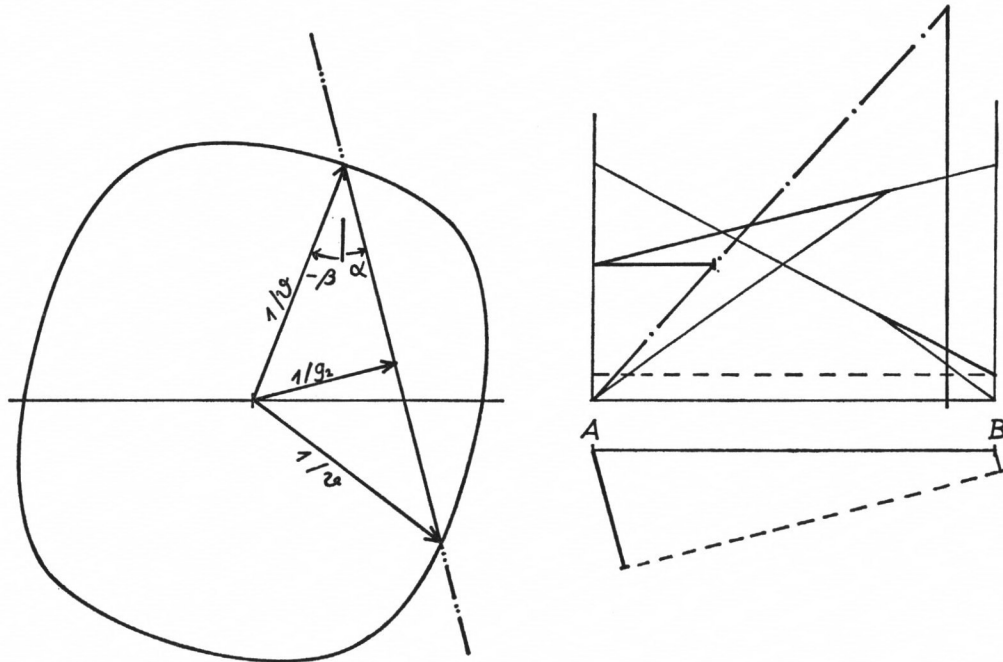


Abbildung 18. Zweiter Schritt bei der Interpretation refraktionsseismischer Daten: die Verbindungslinie der Spitzen der beiden Indexvektoren steht senkrecht zum Refraktor, der Strahlindexvektor des an der Grenzfläche entlang gelaufenen Strahls steht senkrecht auf diese Grenzflächennormale. Seine Länge ist gleich dem Kehrwert der Strahlgeschwindigkeit g_2 .

Dritter Schritt: Bestimmung der Länge der Lote auf den Refraktor. In der Entfernungseinheit wird eine Senkrechte errichtet, deren Länge gleich der Summe der Projektionen der Indexvektoren auf die Grenzflächennormale ist; ihr Endpunkt wird mit A verbunden. Die Längen der Lote sind gleich den Abständen der so erhaltenen Geraden (— — — —) von der Zeitachse für die Abschnittszeiten.

Die Interpretation wird abgeschlossen durch die Bestimmung des Spurlinienelementes (Abbildung 19). Da die Lotlängen bereits in Abbildung 18 bestimmt wurden, kann die Lage der beiden Brechungspunkte A' und B' ermittelt werden, wenn die Strahlrichtungen bekannt sind. Diese erhält man wie bisher als Flächennormalen der Indexfläche in den Endpunkten der zu den Strahlen gehörenden Indexvektoren.

Die Konstruktion kann mehrfach überprüft werden. Einmal muß der Endpunkt von h_B auf der durch h_A und α festgelegten Grenzfläche liegen, dann muß die Gesamtlaufzeit $AA'B'B$ gleich der Gegenzeit t^R sein. Das kann man kontrollieren, indem man die Laufzeiten nach dem Schema der Abbildung 15 zusammensetzt; man kann aber auch die Strahlgeschwindigkeiten längs des tatsächlichen Strahlwegs verwenden. Dabei wird zugleich die

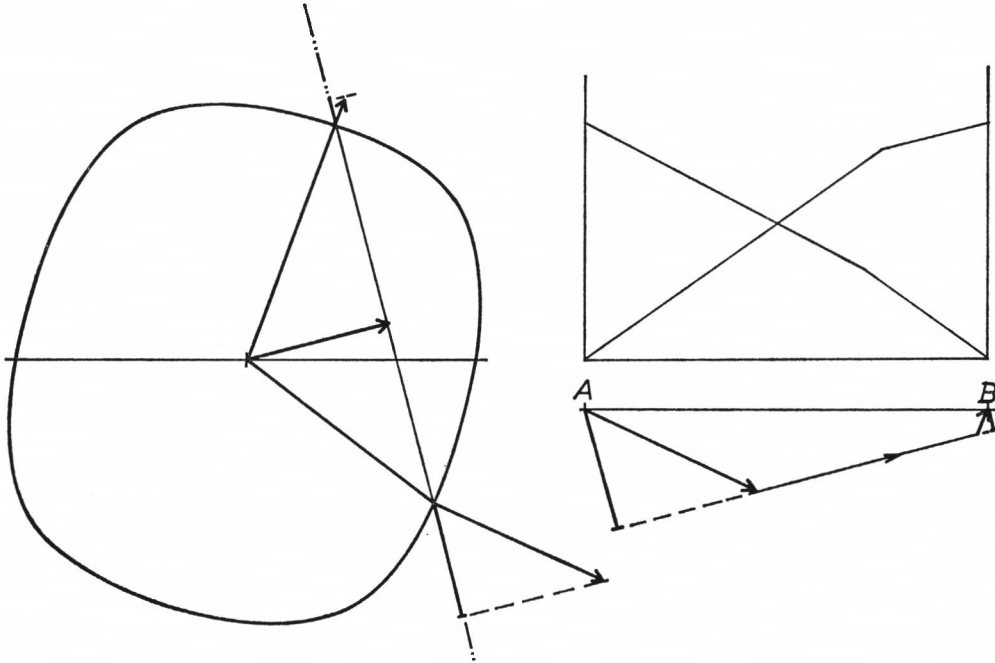


Abbildung 19. Vierer Schritt bei der Interpretation refraktionsseismischer Daten: Bestimmung des tatsächlichen Strahlwegs. Die Strahlen haben die Richtung der Flächennormale der Indexfläche in den entsprechenden Punkten.

Lage der Punkte A' und B' kontrolliert. Die Strahlgeschwindigkeiten erhält man wieder als Kehrwerte der Länge der Strahlindexvektoren (Projektionen der Indexvektoren auf die Strahlrichtung).

Die einzelnen Schritte sind hier nur wegen der besseren Übersicht getrennt dargestellt worden. In der Praxis würde man die ganze Konstruktion auf einem einzigen Zeichenblatt durchführen. Es versteht sich von selbst, daß die angegebene Konstruktion auch für isotrope Ausbreitungsverhältnisse richtig ist.

Die Ermittlung der tatsächlichen Strahlwege ist dann besonders wichtig, wenn man mit einer Reihe aufeinanderfolgender Refraktionsaufstellungen eine lückenlose Überdeckung des Refraktors erreichen will. Es sei noch darauf hingewiesen, daß man bei einer Folge von Schüssen in einer Richtung auf Gegenschüsse verzichten kann, wenn nur in der unmittelbaren Umgebung der einzelnen Schußpunkte Neigung und Geschwindigkeit des Refraktors konstant bleiben. Da die Abschnittszeit in B nur von den Geschwindigkeiten

und der Lotlänge h_B abhängt, kann sie ebensogut aus einem Schuß BC wie aus einem Schuß BA ermittelt werden. Da die Gegenzeit außerdem bereits aus dem Schuß AB bekannt ist, läßt sich auf diese Weise die Laufzeitkurve des – fiktiven – Schusses BA konstruieren. Für isotrope Ausbreitungsverhältnisse wurde dieses Verfahren ausführlich von WYROBEK (1956) beschrieben. In WYROBEKS Veröffentlichung ist eine Erweiterung auf schwach gekrümmte Refraktoren beschrieben, die sich unter gewissen Voraussetzungen auch für anisotrope Medien durchführen läßt.

3.32 Refraktionsseismische Beobachtungen mit mehreren ebenen Refraktoren

Formeln für die Interpretation refraktionsseismischer Beobachtungen bei mehreren Refraktoren unterschiedlicher Neigung werden selbst für isotrope Ausbreitungsverhältnisse nur selten angegeben, da sie ziemlich kompliziert sind. Allerdings ist die praktische Bedeutung dieser Formeln auch deswegen beschränkt, weil man nur selten alle erforderlichen Daten aus den Beobachtungen ableiten kann (insbesondere werden nicht immer alle Äste der Laufzeitkurve als erste Einsätze auftreten). Bei Verwendung der Indexfläche als Hilfsmittel läßt sich jedoch sogar für anisotrope Ausbreitungsverhältnisse eine relativ einfache Konstruktion für beliebig viele Refraktoren angeben. Selbstverständlich gelten hinsichtlich der praktischen Bedeutung die gleichen Einschränkungen wie für isotrope Medien. Der Einfachheit halber sei vorausgesetzt, daß alle beteiligten Refraktoren gleiche Streichrichtung haben. Falls diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, wird die geometrische Darstellung komplizierter, es entstehen jedoch keine prinzipiellen Schwierigkeiten.

Wie bei allen bisherigen Überlegungen muß für jede Schicht – bis auf die letzte – die Indexfläche bekannt sein. Das würde zu einer Überbestimmung oder zu Widersprüchen führen, da sich die Strahlgeschwindigkeiten entlang den Grenzflächen aus den Beobachtungen ergeben. Man kann diese Schwierigkeit umgehen, wenn man als Voraussetzung fordert, daß Gestalt und Orientierung – nicht aber die Größe – der Indexflächen für alle Schichten bis auf die letzte bekannt sein sollen. Zusammen mit den Strahlgeschwindigkeiten entlang den Grenzflächen liefert das dann gerade die vollständige Bestimmung der Indexflächen. Diese Voraussetzung ist auch im Hinblick auf den Grenzfall der Isotropie sinnvoll, da in isotropen Medien die Gestalt und die Orientierung der (kugelförmigen) Indexflächen stets bekannt ist. Ob es noch andere Fälle gibt, wo man von vornherein Aussagen über Gestalt und Orientierung der Indexflächen machen kann, wird in Kapitel 5 diskutiert.

Es sei angenommen, daß für $n - 1$ Grenzflächen die Koordinaten (Länge h_{Ai} der Lote vom Punkt A und Neigungen α_i) sowie die Indexflächen bekannt sind. Die Behauptung ist, daß sich dann aus den in beiden Richtungen beobachteten $(n + 1)$ -ten Geschwindigkeitsästen die Koordinaten der n -ten Grenzfläche, die Strahlgeschwindigkeit im $(n + 1)$ -ten Medium und der Weg des an der Grenzfläche entlang gelaufenen Strahls ermitteln lassen. Wenn diese Behauptung bewiesen ist, so ist auch das ganze Konstruktionsverfahren bewiesen, da es für $n = 1$ im Abschnitt 3.31 durchgeführt wurde.

Zunächst wird gezeigt, wie sich die Neigung der Grenzfläche, der Strahlweg und die Geschwindigkeit entlang der Grenzfläche bestimmen lassen (s. Abbildung 20). Aus den Scheingeschwindigkeiten in beiden Richtungen ermittelt man wie zuvor die Indexvektoren der in A und B auftauchenden Strahlen. Durch Umkehr des Indexvektors des in A auftauchenden Strahls erhält man den Indexvektor des in A abtauchenden Strahls. Durch die beiden Endpunkte werden Senkrechte zur ersten Grenzfläche bis zum Schnitt mit der

Indexfläche der zweiten Schicht gezogen. Die Schnittpunkte sind die Endpunkte der Indexvektoren der im zweiten Medium verlaufenden Strahlen. Durch sie werden Senkrechte zur zweiten Grenzfläche bis zum Schnitt mit der Indexfläche der dritten Schicht gezogen. Die Endpunkte sind die Spitzen der Indexvektoren der in der dritten Schicht verlaufenden Strahlen. So verfährt man weiter bis zu den Schnittpunkten mit der n -ten Indexfläche (den Spitzen der Indexvektoren der in der n -ten Schicht verlaufenden Strahlen). Eine diese beiden Schnittpunkte verbindende Gerade steht senkrecht auf der n -ten Grenzfläche, die Länge des Lots vom Zentrum auf diese Gerade ist gleich dem Betrag des Strahlindexvektors (oder gleich dem Kehrwert der Strahlgeschwindigkeit) des im $(n+1)$ -ten Medium entlang der n -ten Grenzfläche laufenden Strahls. Die Strahlrichtungen in den einzelnen Schichten erhält man wieder aus den Richtungen der Flächennormalen der Indexflächen in den Endpunkten der Indexvektoren.

Abbildung 20 zeigt die Konstruktion für einen Zweischichtenfall. Die Konstruktion ist mit Hilfe der dritten Äste der beiden Laufzeitkurven, der beiden Indexflächen und der bekannten Lage der ersten Grenzfläche durchgeführt. Die gestrichelte Linie rechts unten ist eine Parallele zur zweiten Grenzfläche. Deren Lage könnte man ermitteln, indem man sie probeweise so lange verschiebt, bis die Gesamtlauftzeit gerade gleich t_2^R wird. Der Voll-

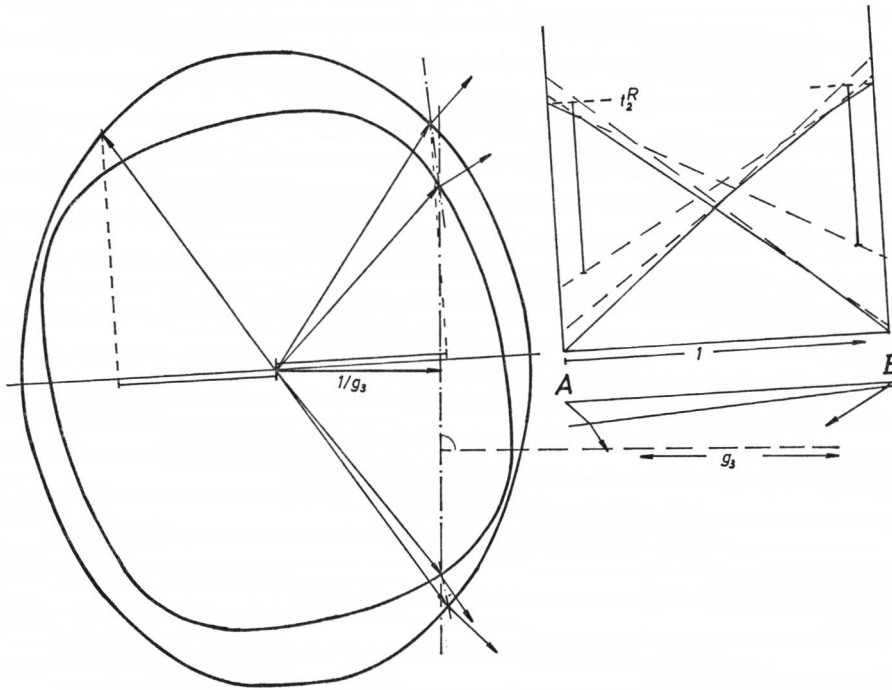


Abbildung 20. Bestimmung der Neigung und Geschwindigkeit eines zweiten Refraktors. Es wird vorausgesetzt, daß die Indexflächen der beiden Deckschichten und die Lage der ersten Grenzfläche bereits bekannt sind. Die Indexvektoren der (an der zweiten Grenzfläche kritisch refraktierten) in A eintauchenden und in B auftauchenden Strahlen ermittelt man wie bisher aus den Scheingeschwindigkeiten der dritten Äste der Laufzeitkurven und der Indexfläche der obersten Schicht. Die Indexvektoren für den in der zweiten Schicht verlaufenden Teil des Strahlwegs erhält man durch Anwendung des Brechungsgesetzes: die Spitzen der Indexvektoren der in der ersten Schicht und der in der zweiten Schicht verlaufenden Strahlen müssen auf gemeinsamen Normalen zur ersten Grenzfläche liegen. Die Spitzen der Indexvektoren der in der zweiten Schicht verlaufenden Strahlen liegen auf einer gemeinsamen Normalen zur zweiten Grenzfläche, der Abstand dieser Normalen vom Zentrum ist gleich dem Kehrwert der Strahlgeschwindigkeit g_3 entlang der zweiten Grenzfläche.

ständigkeit halber soll aber noch angegeben werden, wie sich die Lage der letzten Grenzfläche mit Hilfe der Abschnittszeit ausdrücken läßt. Vorher sei aber im Zusammenhang mit Abbildung 20 noch auf zwei Dinge hingewiesen: ohne Berücksichtigung des brechenden Horizontes (der ersten Grenzfläche) hätte man nahezu dieselbe Strahlggeschwindigkeit entlang der zweiten Grenzfläche erhalten, aber die Neigung wäre entgegengesetzt gewesen. Ferner sieht man, daß der von A ausgehende Strahl an der ersten Grenzfläche abwärts gebrochen wird, obwohl von der zweiten Schicht ein Refraktionsast beobachtet worden ist. Das steht in scheinbarem Widerspruch zu der von isotropen Ausbreitungsverhältnissen bekannten Tatsache, daß Refraktionsäste nur von solchen Schichten beobachtet werden, an deren Oberkante die Strahlen aufwärts gebrochen werden. Der Widerspruch ist nur scheinbar: der soeben formulierte Zusammenhang beruht auf dem Brechungsgesetz, und das Brechungsgesetz sagt primär nichts über Strahlen, sondern nur über Wellennormalen aus. Außerdem beruht die Aussage auf der stillschweigenden Voraussetzung kugelförmiger Indexflächen. Die Indexfläche der zweiten Schicht in Abbildung 20 weicht aber sehr von der Kugelgestalt ab.

Um die Beziehung zwischen der Abschnittszeit des $(n + 1)$ -ten Astes der Laufzeitkurve und der Länge des Lots auf die n -te Grenzfläche aufzustellen, benötigt man zunächst die Gleichung dieses Astes. In diesem Zusammenhang kann man sich mit der Ermittlung der Abschnittszeit begnügen, da die Scheingeschwindigkeit als Kehrwert der Horizontalkomponente des Indexvektors in der obersten Schicht graphisch nach Abbildung 20 ermittelt werden kann. Die folgenden Gleichungen beziehen sich auf das Schema der Abbildung 21, das eine Verallgemeinerung der Abbildung 15 ist. Die durch die Schnittpunkte der Lote auf die n -te Grenzfläche mit den anderen Grenzflächen gezogenen Linien entsprechen Wellenebenen, die zu dem an der n -ten Grenzfläche kritisch refraktierten Strahl gehören. Sie stehen jeweils senkrecht auf den Indexvektoren, die nach dem Prinzip der Abbildung 20 bestimmt werden können. Nennt man den Teil des von A auf die n -te Grenzfläche gefällten Lots, der in der m -ten Schicht liegt, h_{Amn} , so gilt offenbar nach der in Abbildung 21 angegebenen Konstruktion für den $(n + 1)$ -ten Ast der Laufzeitkurve

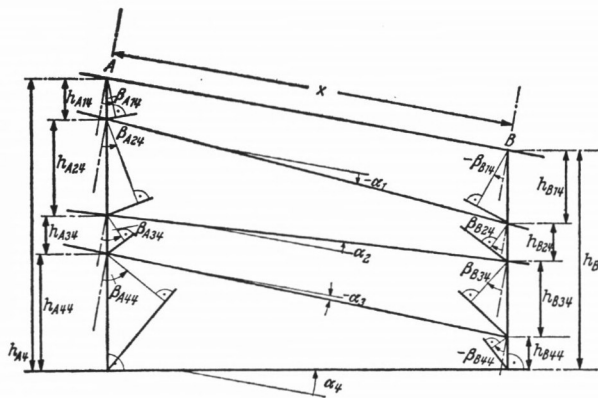


Abbildung 21. Zur Bestimmung der Abschnittszeiten in Vielschichtenfällen. Die durch die Schnittpunkte der Lote auf die vierte Grenzfläche mit den übrigen Grenzflächen gezogenen Linien repräsentieren die Wellenfronten, die zu dem an der vierten Grenzfläche kritisch refraktierten Strahl gehören. Ihre Lage läßt sich nach dem Prinzip der Abbildung 20 ermitteln, da sie jeweils senkrecht auf den Indexvektoren stehen müssen. Die Lote auf die vierte Grenzfläche werden durch die übrigen drei Grenzflächen in vier Abschnitte geteilt. Die Abschnitte des rechten Lots lassen sich durch die des linken und die Neigungen α_i der vier Grenzflächen ausdrücken.

$$(4) \quad t_{An}(x) = \frac{x \cdot \cos \alpha_n}{g_n + 1} + \sum_{m=1}^n \frac{h_{Amn} \cos(\beta_{Amn} - \alpha_n)}{v_m(\beta_{Amn})} + \sum_{m=1}^n \frac{h_{Bmn} \cdot \cos(\beta_{Bmn} - \alpha_n)}{v_m(\beta_{Bmn})}.$$

Die h_{Bmn} lassen sich durch die h_{Amn} und die α_m ausdrücken:

$$h_{Bmn} = h_{Amn} - x \cdot \cos \alpha_n \cdot [tg(\alpha_n - \alpha_{m-1}) - tg(\alpha_n - \alpha_m)], m = 1, 2 \dots n. \alpha_0 = 0.$$

Setzt man diese Ausdrücke in (4) ein, so ergibt sich

$$(5) \quad t_{An}(x) = \sum_{m=1}^n h_{Amn} \cdot \left(\frac{\cos(\beta_{Amn} - \alpha_n)}{v_m(\beta_{Amn})} + \frac{\cos(\beta_{Bmn} - \alpha_n)}{v_m(\beta_{Bmn})} \right) + x/v_{Asn}.$$

Darin ist x/v_{Asn} die Scheingeschwindigkeit des $(n+1)$ -ten Astes der von A ausgehenden Laufzeitkurve. Da sie bereits graphisch ermittelt wurde, interessiert nur noch die Abschnittszeit $t_{An}^i = t_{An}(0)$. Die Gleichung (5) läßt sich umschreiben zu

$$(6) \quad t_{An}^i = \sum t_{Amn}^i; \quad t_{Amn}^i = h_{Amn} \cdot \left[\frac{\cos(\beta_{Amn} - \alpha_n)}{v_m(\beta_{Amn})} + \frac{\cos(\beta_{Bmn} - \alpha_n)}{v_m(\beta_{Bmn})} \right].$$

Die einzige Unbekannte in (6) ist h_{Ann} . Sie ist relativ einfach zu berechnen, indem man zunächst die partiellen Abschnittszeiten t_{Amn}^i ($m = 1 \dots n-1$) berechnet, dann daraus und aus t_{An}^i die n -te partielle Abschnittszeit t_{Ann}^i bestimmt und schließlich

$$(6a) \quad h_{Ann} = t_{Ann}^i \left[\frac{\cos(\beta_{Ann} - \alpha_n)}{v(\beta_{Ann})} + \frac{\cos(\beta_{Bnn} - \alpha_n)}{v(\beta_{Bnn})} \right]$$

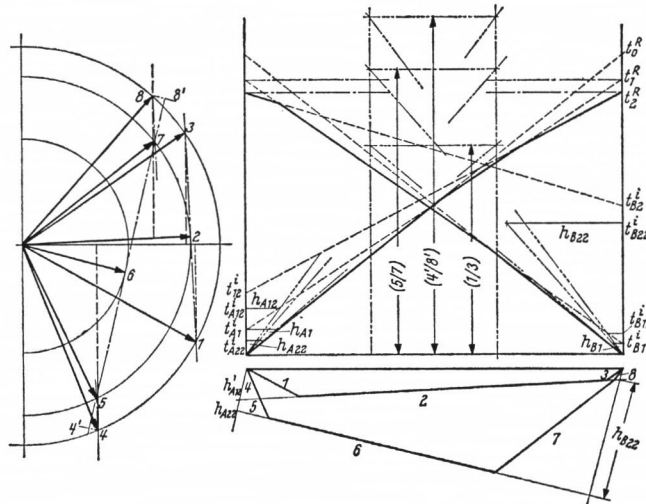


Abbildung 22. Vollständige graphische Konstruktion zweier Refraktoren in isotropen Ausbreitungsverhältnissen. Die Konstruktion der Neigungen und der Geschwindigkeiten erfolgt wie in Abbildung 20. Die Abschnittszeiten t_{A2}^i, t_{B2}^i werden nach dem in Abbildung 21 erläuterten Prinzip in partielle Abschnittszeiten $t_{A12}^i \dots t_{B22}^i$ aufgespalten und durch graphische Division in partielle Lotlängen $h_{A22} \dots$ verwandelt. Am deutlichsten ist der Prozeß auf der rechten Seite der Abbildung zu erkennen.

bildet. Die in (5), (6) und (6a) in den Klammern auf der rechten Seite auftretenden Ausdrücke sind die Projektionen der zu den in der m -ten Schicht verlaufenden Strahlen gehörenden Indexvektoren auf die Senkrechte zur n -ten Grenzfläche, so daß die geometrische Division ganz ähnlich wie bei der Interpretation einer Laufzeitkurve mit nur einem Refraktor verläuft. In Abbildung 22 ist das Verfahren an einem Beispiel mit zwei isotropen Schichten über einem isotropen Halbraum durchgeführt. Bei anisotropen Schichten müßten noch zusätzlich die Strahlrichtungen bestimmt werden.

4. DIE FORMALE BESCHREIBUNG DER ELASTISCHEN ANISOTROPIE IM HINBLICK AUF DIE VERHÄLTNISSE IN DER ERDKRUSTE

Für die bisherigen Überlegungen wurde lediglich angenommen, daß die seismischen Wellen sich in anisotropen Medien ausbreiten und daß die Indexflächen für diese Medien bekannt sind. Die praktische Bedeutung der angegebenen Verfahren hängt von zwei Fragen ab: Haben die Schichten der Erdkruste eine merkliche Anisotropie, und falls ja, wie lassen sich die Indexflächen bestimmen?

Die erste Frage ist in der Literatur mehrmals bejaht worden, und zwar auf mehrfache Weise. Einmal konnte experimentell nachgewiesen werden, daß viele Gesteine schon in Handstückform deutliche elastische Anisotropie aufweisen (ZISMAN 1933, GRAF 1926, GIESEL 1963, THYSSEN 1964). Zweitens ist mehrmals beobachtet worden, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit seismischer Wellen über Entfernungen von einigen hundert bis tausend Metern von der Richtung abhängt (RICKER 1951, CHOLET and RICHARD 1954, HAGEDOORN 1954, KLEYN 1956, UHRIG and VAN MELLE 1955, HELBIG 1958, SCHMIDT 1964), und schließlich haben theoretische Untersuchungen über den Zusammenhang von periodischen Inhomogenitäten (räumliche Periode klein zur Wellenlänge) mit den elastischen Eigenschaften eines Mediums gezeigt, daß man in der Erdkruste elastische Anisotropie erwarten muß (RAYLEIGH 1892, BRUGGEMANN 1937, RIZNICHENKO 1949, POSTMA 1955, HELBIG 1958, BACKUS 1962, GIESEL 1963).

Die zweite Frage läßt sich in dieser allgemeinen Form nicht ohne weiteres beantworten. Die Anzahl der zur Berechnung der Indexfläche erforderlichen Parameter hängt von den Symmetrieeigenschaften des Tensors der elastischen Konstanten ab. Daher ist es angebracht, sich zunächst über die Symmetrieeigenschaften der elastischen Größen in der Erdkruste Rechenschaft abzulegen.

Die Ursachen der elastischen Anisotropie des Materials der Erdkruste sind hauptsächlich

Schichtung mit Schichtmächtigkeiten, die klein gegenüber der Wellenlänge sind (dabei kann es sich sowohl um eine jahreszeitlich bedingte Variation der Sedimentation als auch um wechselnde Herkunft des sedimentierten Materials handeln),

vertikale Kompression durch die Schwerkraft,

horizontale oder schräge Kompression durch tektonische Kräfte (und die daraus eventuell resultierende Schieferung). Hinzu kommen Ursachen geringerer Bedeutung wie die Ausrichtung der Mineralkörner klastischer Sedimente durch Strömung in Flüssen und in Küstennähe. Jeder einzelne dieser Vorgänge verursacht für sich genommen eine axiale Symmetrie (hinsichtlich der elastischen Konstanten mit der eines hexagonalen Kristalls gleichwertig). Bei Überlagerung mehrerer anisotropie-erzeugender Ursachen erhält man je nach der gegenseitigen Lage der Achsen rhombische, monokline oder trikline Symmetrie. Die Anzahl der zur Festlegung der Indexfläche erforderlichen unabhängigen Parameter ist gleich der für ein Medium der entsprechenden Symmetrie erforderlichen elastischen Konstanten, vermehrt um die zur Festlegung der Orientierung der Symmetrieachsen erforderlichen Richtungskosinus.

4.1 DIE ANZAHL DER ELASTISCHEN KONSTANTEN ANISOTROPER MEDIEN

Ein Medium wird als elastisch anisotrop bezeichnet, wenn die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen von der Orientierung des Spannungstensors relativ zum Medium abhängen. Die formale Beschreibung der Spannungs-Dehnungs-Beziehungen erfolgt durch den Elastizitätstensor (s. z. B. HEARMON 1961):

$$(7) \quad \sigma_{ij} = c_{ijkl} \cdot \zeta_{kl}$$

(σ_{ij} Komponenten des Spannungstensors, ζ_{kl} Komponenten des Verzerrungstensors, $i, j, k, l = 1 \dots 3$; es gilt das Summationsübereinkommen). Spannungs- und Dehnungstensor sind symmetrische Tensoren zweiter Stufe mit je sechs unabhängigen Komponenten, der Elastizitätstensor ist ein mehrfach symmetrischer Tensor vierter Stufe. Von den formal möglichen 81 Komponenten sind auf Grund der Symmetriebedingungen höchstens 21 voneinander unabhängig. Die Symmetriebedingungen sind

$$\begin{aligned} c_{ijkl} &= c_{jikl}, \\ c_{ijkl} &= c_{ijlk} \text{ und} \\ c_{ijkl} &= c_{klij}. \end{aligned}$$

Die erste Bedingung folgt aus der Symmetrie der σ_{ij} , die zweite aus der Symmetrie der ζ_{kl} , die dritte ergibt sich aus der Existenz eines eindeutigen elastischen Potentials.

Aus Gründen der Bequemlichkeit schreibt man meist die je sechs Komponenten des Spannungs- und Verzerrungstensors als einspaltige Matrizen (sechsdimensionale Vektoren) und dementsprechend die 21 Komponenten des Elastizitätstensors in der Form einer symmetrischen Matrix der Ordnung sechs:

$$\sigma_m = c_{mn} \cdot \zeta_n \quad (m, n = 1 \dots 6).$$

Die m, n gehen aus den $i, j; k, l$ nach folgender Regel hervor:

$\begin{smallmatrix} i,j \\ k,l \end{smallmatrix}$	1,1	2,2	3,3	2,3	1,3	1,2
$\begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6

Die Höchstzahl von 21 voneinander unabhängigen und von Null verschiedenen elastischen Konstanten ergibt sich aus allgemeinen Überlegungen unabhängig von der Art des betrachteten Mediums. Besitzt das Medium selbst eine strukturelle Symmetrie, so wird die Zahl der elastischen Konstanten weiter eingeschränkt. Verwendet man die kristallographische Nomenklatur zur Kennzeichnung der strukturellen Symmetrie, so gilt (HEARMON 1961):

System	Anzahl / Indizes	der unabhängigen elastischen Konstanten
Triklin	21	alle
Monoklin	13	11, 12, 13, 15, 22, 23, 25, 33, 35, 44, 46, 55, 66
Rhombisch	9	11, 12, 13, 22, 23, 33, 44, 55, 66
Tetragonal 1	7	11, 12, 13, 16, 33, 44, 66
Tetragonal 2	6	11, 12, 13, 33, 44, 66
Trigonal 1	7	11, 12, 13, 14, 15, 33, 44
Trigonal 2	6	11, 12, 13, 14, 33, 44
Hexagonal	5	11, 12, 13, 33, 44
Kubisch	3	11, 12, 44
Isotrop	2	11, 12

Elastische Konstanten, die in dieser Tabelle nicht aufgeführt sind, sind entweder Null oder lassen sich aus den übrigen berechnen. So gilt zum Beispiel bei hexagonaler Symmetrie $c_{66} = (c_{11} - c_{12})/2$. Bei trigonaler Symmetrie und in isotropen Medien gilt die gleiche Beziehung. Tetragonal 1 und Trigonal 1 bedeutet „ohne Spiegelebene $\perp$ zur vier- (drei-)zähligen Achse“, Tetragonal 2 und Trigonal 2 entsprechend mit Spiegelebene.

Die eben erwähnte Einschränkung der Zahl der unabhängigen elastischen Konstanten ergibt sich aus rein geometrischen Überlegungen. Zwischen den Konstanten einer Symmetriegruppe lassen sich jedoch auf Grund der Bedingung, daß das Medium stabil sein muß, noch zusätzlich einige Ungleichungen angeben. So gilt zum Beispiel für isotrope Medien

$$0 \leq c_{66} < \infty ; \quad 0 \leq c_{66}/c_{11} \leq 3/4 .$$

Weitere Ungleichungen ergeben sich, wenn man die Ursache der Anisotropie spezifiziert, indem man etwa fordert, daß die „periodischen Inhomogenitäten“ selbst stabil sein sollen. Die auf der Stabilitätsbedingung beruhenden Ungleichungen verringern im allgemeinen nicht die Zahl der elastischen Konstanten, sondern begrenzen nur die numerischen Werte, die sie annehmen können. Wenn allerdings die Art der periodischen Inhomogenitäten sehr genau festgelegt wird, so können sich an Stelle von Ungleichungen zwischen den Konstanten Gleichungen ergeben, die dann auch die Zahl der unabhängigen Konstanten verringern (vgl. 4.3).

Ein Blick auf die Tabelle zeigt, daß bereits im einfachsten Fall zur Festlegung der Indexfläche fünf elastische Konstanten und zwei Orientierungsparameter, im ganzen also sieben Zahlen erforderlich sind (von dem trivialen Fall der Isotropie wurde dabei abgesehen. Kubische Symmetrie im großen tritt in der Erdkruste sicherlich nicht auf, da dazu in drei aufeinander senkrecht stehenden Richtungen jeweils gleich große (axialsymmetrische) Effekte erzeugt werden müßten). Für monokline und trikline Symmetrie ist die Zahl der zu ermittelnden Parameter so groß, daß in der Praxis vorerst nicht daran zu denken ist. Glücklicherweise scheint jedoch in den meisten Fällen eine einzelne Ursache vorwiegend die Art der Anisotropie zu bestimmen. Meist ist das die Schichtung; in mächtigen, ungestörten Schieferlagen kann es auch die Schieferung sein. Es besteht daher Berechtigung zu der Annahme, daß die Materialien der Erdkruste im wesentlichen „hexagonale“ Symmetrie aufweisen. Da parallel zur Symmetrieebene alle Richtungen gleichberechtigt sind, nennt man ein derartiges Medium auch „transversalisotrop“. Entsprechend werden im folgenden Abschnitt die Index- und Wellenflächen transversalisotroper Medien näher untersucht (wegen der charakteristischen Flächen in Medien anderer Symmetrieklassen siehe KRAUT 1963 und MUSGRAVE 1959).

4.2 INDEXFLÄCHEN UND WELLENFLÄCHEN TRANSVERSALISOTROPER MEDIEN

Index- und Wellenflächen für ein transversalisotropes Medium wurden erstmals von RUDZKI (1912) berechnet. Inzwischen haben eine größere Zahl von Autoren Untersuchungen über dieses Problem veröffentlicht (Zusammenfassung bei KRAUT 1963). Der von RUDZKI nach einem Vorschlag von CONSTANZI (1901) beschrittene Weg führt zu einer Parameterdarstellung der Index- und Wellenfläche, die sich besonders für numerische Rechnungen eignet. Da das im Anhang angegebene Rechenprogramm auf dieser Parameterdarstellung beruht, schließt sich die folgende Diskussion den Überlegungen RUDZKIS an.

Der Verzerrungstensor ist definiert als

$$(8) \quad \xi_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \quad \text{mit } u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j.$$

Die Bewegungsgleichungen lassen sich daher bei Abwesenheit äußerer Kräfte in der Form

$$(9) \quad \varrho \cdot \ddot{u}_i = c_{ijkl} \cdot u_{k,jl}$$

schreiben. Setzt man als Verrückungsvektor für eine ebene Welle an

$$(10) \quad u_i = \alpha_i \cdot u \cdot e^{i(\beta_k \cdot x_k - v \cdot t)} \quad \text{mit}$$

α_i	Einheitsvektor in Richtung der Verrückung u
β_k	Einheitsvektor in Richtung der Wellennormale
x_k	Ortsvektor
v	Normalengeschwindigkeit,

so erhält man unter Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften des Elastizitätstensors bei Einsetzen von (10) in (9) und Wegheben gleicher Faktoren

$$(11) \quad \alpha_k \cdot (c_{ijkl} \cdot \beta_l \cdot \beta_j - \delta_{ik} \cdot v^2 \cdot \varrho) = 0.$$

Das sind drei lineare homogene Gleichungen in den α_k . Damit nichttriviale Lösungen existieren, muß die Determinante verschwinden. Diese Forderung führt zu einer Gleichung dritten Grades in v^2 , die drei reelle Lösungen zu jeder Normalenrichtung β_i hat. Zu jedem dieser drei Eigenwerte gehört als Eigenvektor eine Verrückungsrichtung, die drei zu einer Normalenrichtung gehörigen Verrückungsrichtungen stehen aufeinander senkrecht.

Für die hier vorliegende Untersuchung interessiert die Normalengeschwindigkeit nicht so sehr wie der Indexvektor. Er ist definiert als

$$n_i = \beta_i / v,$$

daher wird (11) zu dem linearen homogenen Gleichungssystem

$$(12) \quad \alpha_k \cdot (c_{ijkl} \cdot n_j \cdot n_l - \delta_{ik} \cdot \varrho) = 0.$$

Wie zuvor muß zur Existenz nichttrivialer Lösungen die Determinante verschwinden:

$$(13) \quad \det(c_{ijkl} \cdot n_j \cdot n_l - \delta_{ik} \cdot \varrho) = 0.$$

(13) ist die Gleichung der Indexfläche für den allgemeinen Fall. Bei höherer Symmetrie läßt sich diese Gleichung stark vereinfachen. Für transversalisotrope Medien gilt

c_{ijkl}	$(= c_{mn}) = c_{pr}$
1111	11
2222	22 11
1133	13
2233	23 13
2323	44
3333	33
1122	12 11 — 2 · (66)
1212	55

Alle anderen Konstanten sind gleich Null.

(Diese Tabelle ist zu lesen als $c_{1122} = c_{12} = c_{11} - 2 \cdot c_{66}$). Außerdem kann man sich wegen der Symmetrie um die 3-Achse auf einen Hauptschnitt beschränken, also etwa $n_2 = 0$ setzen. Damit und mit den obigen Werten für die elastischen Konstanten zerfällt (13) in zwei Gleichungen:

$$(14a) \quad c_{66} \cdot n_1^2 + c_{44} \cdot n_3^2 - \varrho = 0$$

und

$$(14b) \quad \begin{vmatrix} c_{11} \cdot n_1^2 + c_{44} \cdot n_3^2 - \varrho & (c_{13} + c_{44}) \cdot n_1 \cdot n_3 \\ (c_{13} + c_{44}) \cdot n_1 \cdot n_3 & c_{44} \cdot n_1^2 + c_{33} \cdot n_3^2 - \varrho \end{vmatrix} = 0.$$

(14a) ist ein Blatt der Indexfläche. Durch Einsetzen stellt man fest, daß zu diesem Blatt eine Verrückung senkrecht zum Hauptschnitt gehört. Diese Welle ist also rein transversal. Wenn die 3-Achse vertikal steht, entspricht sie der SH-Welle (sekundär, horizontal polarisiert) der Seismik. Die Indexfläche ist ein Rotationsellipsoid mit den Achsenlängen $\sqrt{(\varrho/c_{44})}$ (Rotationsachse) und $\sqrt{(\varrho/c_{66})}$. Infolgedessen ist auch die Wellenfläche ein Ellipsoid mit den Halbachsen $\sqrt{(c_{44}/\varrho)}$ und $\sqrt{(c_{66}/\varrho)}$.

Multipliziert man die erste Zeile der Determinante in (14b) mit n_1 und die zweite mit n_3 und dividiert anschließend die erste Spalte durch n_1 und die zweite durch n_3 , so erhält man

$$(14c) \quad \begin{vmatrix} c_{11} \cdot n_1^2 + c_{44} \cdot n_3^2 - \varrho & (c_{13} + c_{44}) \cdot n_1^2 \\ (c_{13} + c_{44}) \cdot n_3^2 & c_{44} \cdot n_1^2 + c_{33} \cdot n_3^2 - \varrho \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichung (14c) ist quadratisch in n_1^2 und n_3^2 , es gibt also zu jeder Normalenrichtung zwei Lösungen, die zugehörigen Verrückungsrichtungen liegen im Hauptschnitt und stehen aufeinander senkrecht. (Die dritte Lösung war bereits in (14a) abgespalten worden). Die zu der Lösung mit dem kleineren Betrag von n (oder der größeren Normalengeschwindigkeit) gehörende Welle ist nahezu in Richtung der Wellennormale polarisiert, die andere nahezu in der Wellenebene. Infolgedessen bezeichnet man diese beiden Wellentypen als quasilongitudinal und quasitransversal.

Man könnte aus (14c) leicht einen geschlossenen Ausdruck für die Indexfläche ableiten. Für die numerische Rechnung und für die Berechnung der Wellenfläche ist eine Parameterdarstellung günstiger. Zu der Parameterdarstellung gelangt man durch folgende Überlegung: Damit (14c) erfüllt ist, müssen entweder die beiden Zeilen oder die beiden Spalten einander proportional sein. Es muß also eine der beiden folgenden Beziehungen gelten:

$$(15) \quad w = (c_{11} \cdot n_1^2 + c_{44} \cdot n_3^2 - \varrho)/A \cdot n_3^2 = A \cdot n_1^2/(c_{44} \cdot n_1^2 + c_{33} \cdot n_3^2 - \varrho)$$

oder

$$(16) \quad w = (\varrho - c_{44} \cdot n_1^2 - c_{33} \cdot n_3^2)/A \cdot n_3^2 = A \cdot n_1^2/(\varrho - c_{11} \cdot n_1^2 - c_{44} \cdot n_3^2)$$

mit $A = (c_{13} + c_{44})$.

(15) liefert das quasitransversale Blatt der Indexfläche, (16) das quasilongitudinale Blatt.

Mit den weiteren Abkürzungen $B = c_{11} - c_{44}$, $C = c_{33} - c_{44}$, $Q = c_{11}/c_{33}$, $V = c_{44}/c_{33}$, $P = B/A + C/A$, $R = (A^2 - C^2)/A \cdot c_{33}$ und $U = (A^2 + C^2)/A \cdot c_{33}$ lassen sich die beiden Blätter der Indexfläche in der folgenden Form ausdrücken:

$$(17) \quad t g^2 \beta = w \cdot \frac{C/A + w}{1 + B/A \cdot w}$$

$$(18) \quad n_1^2 = \frac{\varrho}{c_{33}} \cdot (1 + P \cdot w + w^2) / (1 + (P + R) \cdot w + Q \cdot w^2)$$

$$(19) \quad n_{tr}^2 = \frac{\varrho}{c_{33}} \cdot (1 + P \cdot w + w^2) / (V + (P - U) \cdot w + V \cdot w^2).$$

Um die Schnittkurve der Wellenfläche zu bestimmen, geht man von den geometrischen Beziehungen zwischen Index- und Wellenfläche aus. Das Skalarprodukt aus Indexvektor und Strahlvektor ist gleich dem Produkt der Beträge von Normalenvektor und Indexvektor, also gleich 1. Daher

$$(20) \quad n_i \cdot g_i = 1.$$

Außerdem stehen die Tangente an die Schnittkurve und der Strahlvektor aufeinander senkrecht. Das bedeutet

$$(21) \quad \delta n_i \cdot g_i = 0.$$

In (20) und (21) sind jeweils zum gleichen Parameterwert w gehörende Index- und Strahlvektoren zu verwenden, der Tangentenvektor δn_i ist der zum gleichen Wert des Parameters gehörende Vektor $\delta n_i = (\partial n_i / \partial w) \cdot \delta w$.

Die Auflösung des Gleichungssystems (20,21) liefert für den Hauptschnitt des quasilongitudinalen Blatts der Wellenfläche

$$(22) \quad g_{1,l} = n_{1,l} [c_{11} - E^2 / (C + 2 \cdot A \cdot w + B \cdot w^2)] \cdot \frac{1}{\varrho}$$

$$g_{3,l} = n_{3,l} [c_{33} - E^2 \cdot w^2 / (C + 2 \cdot A \cdot w + B \cdot w^2)] \cdot \frac{1}{\varrho},$$

und für das quasitransversale Blatt

$$(23) \quad g_{1,tr} = n_{1,tr} \cdot [c_{44} + E^2 / (C + 2 \cdot A \cdot w + B \cdot w^2)] \cdot \frac{1}{\varrho}$$

$$g_{3,tr} = n_{3,tr} \cdot [c_{44} + E^2 \cdot w^2 / (C + 2 \cdot A \cdot w + B \cdot w^2)] \cdot \frac{1}{\varrho}.$$

Dabei ist $E^2 = B \cdot C - A^2$.

Schon RUDZKI (1912) hatte festgestellt, daß das quasitransversale Blatt der Wellenfläche Spitzen besitzen kann und auch bereits die Diskriminante für das Auftreten dieser Spitzen angegeben. Es ist eine Gleichung sechsten Grades in w , die also höchstens sechs reelle Wurzeln besitzen kann. RUDZKI schloß, daß daher auch sechs Spitzen im Quadranten der Schnittkurve auftreten könnten. Mit Hilfe der cartesischen Zeichenregel läßt sich zeigen, daß höchstens vier positive reelle Wurzeln existieren, so daß – da w per definitionem nur positive Werte annimmt – nur vier Spitzen auftreten könnten. Außerdem sind die Werte, die die in den Gleichungen auftretenden Parameter annehmen können, noch durch die Stabilitätsbedingung eingeschränkt, so daß tatsächlich höchstens zwei Spitzen auftreten.

Um einen besseren Überblick über die in transversalisotropen Medien möglichen Typen von Index- und Wellenflächen zu bekommen, wurden die Gleichungen (15)–(23) für eine

elektronische Rechenmaschine programmiert und für einige hundert Parameterkombinationen die Kurven berechnet und gezeichnet. Für die Berechnungen stand – im Rahmen der Rechenzeit der Universität München – die IBM 7090 und der Moseley-Kurvenschreiber des Instituts für Plasmaphysik GmbH in Garching zur Verfügung. Die Kurven sind als Anhang beigelegt.

Es ist zweckmäßig, die Frage nach der Zahl der zur Bestimmung der Indexflächen erforderlichen Parameter jetzt noch einmal speziell für transversalisotrope Medien zu untersuchen. Aus (14c) folgt, daß die beiden zu den im Hauptschnitt polarisierten Wellen gehörenden Blätter der Indexfläche vollständig durch Angabe der Richtung der Symmetrieachse (3-Achse) und durch vier elastische Parameter definiert sind (von der Dichte ρ kann in diesem Zusammenhang abgesehen werden, da man stets c_{mn}/ρ als neue elastische Parameter verwenden kann). Von den vier elastischen Parametern bestimmen bereits drei die Gestalt der Indexfläche (und der Wellenfläche), während der vierte nur die linearen Abmessungen bestimmt.

Am Ende des letzten Abschnitts wurde darauf hingewiesen, daß die elastische Anisotropie der Materialien der Erdkruste hauptsächlich durch Schichtung und Schieferung – die phänomenologisch als eine Wechsellagerung aus sehr dünnen Schichten aufgefaßt werden könnte – verursacht wird. Im nächsten Abschnitt wird daher untersucht, ob man bei der Beschränkung auf durch Schichtung verursachte Anisotropie die möglichen Kombinationen der Parameter weiter einschränken kann.

4.3 DER ZUSAMMENHANG DER ELASTISCHEN KONSTANTEN EINES GESCHICHTETEN MEDIUMS MIT DEN ELASTISCHEN KONSTANTEN DER SCHICHTEN

Schichtung (und Schieferung) sind die wichtigsten Ursachen der elastischen Anisotropie geologischer Medien. Der Zusammenhang zwischen den elastischen Konstanten der Schichten und den elastischen Konstanten des Gesamtmediums ist häufig untersucht worden (RIZNICHENKO 1949, POSTMA 1955, HELBIG 1958), zuletzt und am ausführlichsten von BACKUS (1962). Das einfachste Rechenverfahren ist das von BRUGGEMANN angegebene (BRUGGEMANN 1937), das hier kurz wiedergegeben wird.

Es wird ein Medium betrachtet, das aus einer periodischen Folge von Schichten parallel zur 1–2 Ebene besteht. Aus der Stetigkeit der Spannungen σ_{ij} und der Verzerrungen ζ_{ij} folgt, daß die Tensorkomponenten σ_{13} , σ_{23} und σ_{33} sowie ζ_{11} , ζ_{22} und ζ_{12} im ganzen Medium konstant sind, während die anderen Komponenten in jeder einzelnen Schicht andere Werte haben können. BRUGGEMANN definiert eine Größe φ , die nur von den sechs im ganzen Medium konstanten Variablen abhängt. Diese Größe wird dann einmal als Mittelwert der entsprechenden Größen der Schichten und ein zweites Mal mit Hilfe der zunächst unbestimmten elastischen Konstanten des Gesamtmediums ausgedrückt. Die elastischen Konstanten des Gesamtmediums erhält man dann durch Koeffizientenvergleich.

$$(24) \quad \varphi = -\sigma_{33}^2 \cdot (1/c_{33}) + (\sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) \cdot (1/c_{44}) + (\xi_{11} + \xi_{22})^2 \cdot \left(c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}} \right) + \\ + 2 \cdot \sigma_{33} \cdot (\xi_{11} + \xi_{22}) \cdot (c_{13}/c_{33}) + (\xi_{12}^2 - 4 \cdot \xi_{11} \cdot \xi_{22}) \cdot c_{66}.$$

Bezeichnet man die elastischen Konstanten der Einzelmedien mit c_{ij}^e , so gilt offenbar wegen $\varphi = \overline{\varphi^e}$

$$\begin{aligned}
 (25) \quad 1/c_{33} &= \overline{1/c_{33}^e} & 1/c_{44} &= \overline{1/c_{44}^e} \\
 (c_{11} - c_{13}^2/c_{33}) &= \overline{(c_{11}^e - (c_{13}^e)^2/c_{33}^e)} \\
 c_{13}/c_{33} &= \overline{c_{13}^e/c_{33}^e} & c_{66} &= \overline{c_{66}^e}.
 \end{aligned}$$

Gleichung (25) erlaubt die Bestimmung der elastischen Konstanten eines periodisch geschichteten Mediums, wobei die Schichtungsperiode aus beliebig vielen anisotropen Schichten bestehen kann. BACKUS (1962) hat gezeigt, daß die Periodizität nicht erforderlich ist. Bei unperiodischer Schichtung (oder kontinuierlicher Änderung) sind die oben erwähnten sechs Tensorkomponenten nicht „im ganzen Medium konstant“, sondern im Vergleich zu den übrigen sechs Tensorkomponenten „langsam veränderlich“.

Besonders wichtig ist der Fall, daß die Einzelschichten selbst isotrop sind. Dann haben die individuellen Konstanten auf den rechten Seiten von (25) die Werte

$$c_{11} = c_{33} = \lambda + 2\mu; c_{44} = c_{66} = \mu; c_{13} = \lambda.$$

(λ, μ LAMÉsche Konstanten).

Durch die Forderung, daß nicht nur das Gesamtmedium, sondern jede einzelne Schicht stabil sein soll, ergeben sich zusätzliche Ungleichungen zwischen den elastischen Konstanten. Nach BACKUS (1962) läßt sich die Gesamtheit aller theoretisch möglichen transversal-isotropen Medien in fünf Klassen einteilen, die sich gegenseitig einschließen und die sich durch Stabilitätsbedingungen zunehmender Schärfe unterscheiden. BACKUS verwendet dazu für die Einzelmedien die Parameter

$$\begin{aligned}
 (26) \quad \Theta &= (v_{\text{trans}}/v_{\text{long}})^2 = \mu/(\lambda + 2\mu) \\
 &\text{und } \mu.
 \end{aligned}$$

Die Parameter für das Gesamtmedium sind

$$\begin{aligned}
 (27) \quad L &= c_{44}; M = c_{66}; R_n = 1/c_{33}; \\
 S &= (c_{13}^2 + 2 \cdot c_{66} \cdot c_{33} - c_{12} \cdot c_{33})/4 \cdot c_{33} \text{ und} \\
 T &= (c_{33} - c_{13})/2 \cdot c_{33}.
 \end{aligned}$$

Diese Parameter lassen sich durch die Θ und μ ausdrücken:

$$\begin{aligned}
 (28) \quad 1/L &= \overline{1/\mu} = \overline{1/[(v_{\text{trans}})^2 \cdot \varrho]} \\
 M &= \overline{\mu} = \overline{(v_{\text{trans}})^2 \cdot \varrho} \\
 R_n &= \overline{\Theta/\mu} = \overline{1/[v_{\text{long}})^2 \cdot \varrho]} \\
 S &= \overline{\Theta \cdot \mu} = \overline{[(v_{\text{trans}})^4 \cdot \varrho / (v_{\text{long}})^2]} \\
 T &= \overline{\Theta} = \overline{(v_{\text{trans}}/v_{\text{long}})^2}.
 \end{aligned}$$

Die elastischen Konstanten des Gesamtmediums hängen mit den BACKUSSchen Parametern in folgender Weise zusammen:

$$\begin{aligned}
 (29) \quad c_{11} &= 4 \cdot (M - S) + (1 - 2 \cdot T)^2/R_n; \quad c_{33} = 1/R_n; \\
 c_{44} &= L; \quad c_{66} = M; \quad c_{13} = (1 - 2 \cdot T)/R_n.
 \end{aligned}$$

Für spätere Verwendung wird noch angemerkt, daß

$$(30) \quad \begin{aligned} A &= c_{13} + c_{44} = L + (1 - 2 \cdot T)/R_n \quad \text{und} \\ C &= c_{33} - c_{44} = 1/R_n - L. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Parameter läßt sich die Einteilung aller theoretisch möglichen stabilen transversalisotropen Medien wie folgt darstellen:

Transversalisotrope Medien

Stabilitätsbedingung: $L \geq 0$; $M \geq 0$; $R_n \geq 0$; $3 \cdot M \geq 4 \cdot S$.

Geschichtete Medien (oder Medien, die einem geschichteten Medium äquivalent sind)

Stabilitätsbedingung: $0 < R_n < 3/4 \cdot L$; $0 < S < 3 \cdot M/4$

$$T^2 \leq R_n \cdot S; \quad 0 < T < 3/4$$

außerdem $L \leq M$ $(3/4 - T)^2 \leq (R_n - 3/4 \cdot L) \cdot (S - 3 \cdot M/4)$.

Geschichtete Medien aus nur zwei Schichten (oder Medien, die einem solchen äquivalent sind).

Stabilitätsbedingung: wie zuvor, aber zusätzlich

$$S/M \leq T \leq R_n \cdot L.$$

Geschichtete Medien mit konstantem Θ (oder Medien, die einem solchen äquivalent sind).

Stabilitätsbedingung: wie zuvor, aber zusätzlich

$$S/M = T = R_n \cdot L.$$

Geschichtete Medien mit konstantem μ (oder Medien, die einem solchen äquivalent sind). Stabilitätsbedingung: wie zuvor, aber $L = M$. (Diese Medien sind isotrop).

Die Bedingung $L \leq M$ ist keine eigentliche Stabilitätsbedingung, sondern folgt aus der Tatsache, daß das geometrische Mittel stets kleiner oder gleich dem arithmetischen Mittel ist (SCHWARZsche Ungleichung). Es sei noch darauf hingewiesen, daß nach BACKUS (1962) jedes geschichtete Medium einem geschichteten Medium aus höchstens drei Schichten äquivalent ist in dem Sinne, daß man stets eine Kombination von drei stabilen Schichten angeben kann, die die gleichen elastischen Konstanten für das Gesamtmedium ergibt.

Die letzte Klasse (Medien mit konstantem μ) hat in diesem Zusammenhang nur theoretisches Interesse, da sich diese Medien isotrop verhalten und keine Schwierigkeiten bereiten. Die vorletzte Klasse (Medien mit konstantem Θ) dagegen hat große praktische Bedeutung. Zwar variiert das Verhältnis von Transversalwellengeschwindigkeit zu Longitudinalwellengeschwindigkeit, aber die Variationsbreite ist nicht besonders groß. Es gibt

eine ganze Anzahl von Fällen, wo Θ praktisch konstant ist. Dieser Fall ist deswegen so wichtig, weil hier an die Stelle der letzten Ungleichung eine Gleichung getreten ist. Das heißt mit anderen Worten, daß man zur Beschreibung derartiger Medien einen Parameter weniger benötigt als für allgemeine transversalisotrope Medien. Dementsprechend haben auch die Index- und Wellenflächen eine spezielle Eigenschaft: setzt man die Beziehung $R_n \cdot L = T$ in (30) ein, so erhält man $A = C$. Damit wird die Größe R in (18) gleich Null, so daß Nenner und Zähler der Gleichung (18) bis auf das letzte Glied übereinstimmen:

$$(31) \quad n_1^2 = \frac{\varrho}{c_{33}} \cdot \frac{1 + P \cdot w + w^2}{1 + P \cdot w + Q \cdot w^2} = \frac{\varrho}{c_{33}} \cdot \left[1 + \frac{(1 - Q) \cdot w^2}{1 + P \cdot w + Q \cdot w^2} \right].$$

Außerdem ist in diesem Fall nach (17)

$$(32) \quad tg^2 \beta = w \cdot \frac{1 + w}{1 + (B/A) \cdot w}.$$

Für kleine w (geringe Abweichung der Normalenrichtung von der Vertikalen) ist n_1 bis auf Glieder von der Ordnung β^4 konstant. Das ist aber gerade die Bedingung dafür, daß der Krümmungsmittelpunkt in das Zentrum der Indexfläche fällt. Wegen der Reziprozität gilt das auch für die Wellenfläche. Auf diesen Zusammenhang hat als erster KREY (KREY und HELBIG 1956) hingewiesen. Der Kürze halber sei ein solches Medium als „KREYSches Medium“ und der Fall, daß alle Schichten einer Schichtfolge das gleiche Θ haben, als „KREYScher Idealfall“ bezeichnet.

Für ein KREYSches Medium ist der Einfluß der Anisotropie für nahezu senkrechte Strahlen verschwindend gering. Die überwiegende Mehrzahl aller reflexionsseismisch beobachteten Strahlen ist aber nur wenig gegen die Vertikale geneigt. Für etwas größere Neigungen hat der Verfasser (KREY und HELBIG 1956) ein Nomogramm angegeben, mit dessen Hilfe man für ein KREYSches Medium die genaue Lage des Reflexionselementes angeben kann.

Diese Sonderstellung des KREYSchen Mediums läßt sich in den graphischen Darstellungen im Anhang besonders gut erkennen. Diesem Fall entspricht jeweils die mittlere Kurve in allen Kurvengruppen. In der rechten unteren Ecke der Kurvenblätter ist die Strahlrichtung der quasi-longitudinalen Welle als Funktion der Normalenrichtung dargestellt. Für die dem KREYSchen Idealfall entsprechende mittlere Kurve ergibt sich jeweils über einen gewissen Winkelbereich eine Gerade der Steigung eins.

5. MÖGLICHKEITEN ZUR EXPERIMENTELLEN ERMITTLUNG DER INDEXFLÄCHE UND ZUM ERSATZ DER INDEXFLÄCHE DURCH EINFACHERE FLÄCHEN

In diesem Abschnitt wird untersucht, unter welchen Bedingungen sich die Indexflächen geologischer Medien ermitteln lassen, mit anderen Worten, unter welchen Bedingungen die hier vorgelegten Verfahren praktisch angewendet werden können. Ferner wird untersucht, ob sich die Indexflächen durch einfachere Flächen ersetzen lassen und welche Fehler bei diesem Ersatz auftreten. Diese zweite Frage wird nicht so sehr deswegen gestellt, weil die Berechnung der Indexflächen zu schwierig wäre – unter den Kurven im Anhang dürfte für jeden praktisch vorkommenden Fall die Indexfläche bereits vorliegen – sondern weil man bis zum Beweise des Gegenteils stets annehmen wird, das Medium sei isotrop. Das heißt aber nichts anderes, als daß man die Indexfläche durch eine Kugel ersetzt. Die Fehler, die dabei entstehen, sind also die Fehler, die jeder seismischen Interpretation anhaften können, bei der nicht kontrolliert wurde, ob Anisotropie vorliegt. Falls die Anisotropie zwar nachgewiesen worden ist, aber nicht genug Parameter zur vollständigen Bestimmung der Indexfläche ermittelt werden konnten, wird man als Näherung für das Medium ein KREY-sches Medium annehmen. Die dabei entstehenden Fehler werden hier nicht ausdrücklich diskutiert. Die Kurvenblätter im Anhang sind aber so angelegt, daß man die Größenordnung dieser Fehler sofort übersehen kann.

Unter der „Ermittlung“ einer Indexfläche wird hier nicht die Feststellung ihrer Geometrie verstanden, sondern in erster Linie die Ermittlung der erforderlichen Parameter. Mit diesen kann man die entsprechenden Kurven aus dem beigelegten Kurvenatlas entnehmen.

A. Makroskopische Schichtung.

Unter makroskopischer Schichtung soll der Fall verstanden werden, daß die einzelnen Schichten noch getrennt – etwa mit seismischen Wellen kürzerer Wellenlänge – zugänglich sind. Das ist zum Beispiel der Fall, wenn in einem Gebiet Reflexionsmessungen und zugleich Refraktionsmessungen mit langen Aufstellungen durchgeführt werden; die kürzeren Wellen können aber auch die eines Akustik-Logs sein.

Im Idealfall sind für alle Schichten die Geschwindigkeiten der longitudinalen und transversalen Wellen und die Dichte bekannt. Diese Kenntnisse können von Messungen an Bohrkernen, von direkten Messungen unter Tage oder von Bohrlochmessungen stammen (allerdings ist bisher eine Bohrlochsonde zur Messung von der Transversalwellengeschwindigkeit noch nicht entwickelt worden). In solchen Fällen kann man mit Hilfe der Gleichungen (28) die BACKUSSchen Parameter und aus diesen mit Hilfe von (29) die elastischen Konstanten berechnen. Diese Gleichungen eignen sich gut für Analog-Rechenverfahren, in einfachen Fällen wird man schon mit einer Tischrechenmaschine auskommen.

Falls die Geschwindigkeiten der Transversalwellen in den einzelnen Schichten nicht bekannt sind, so wird man zunächst annehmen, daß alle etwa gleich dem $\sqrt{3}$ -fachen der jeweiligen Longitudinalgeschwindigkeit sind. Das entspricht einem KREY-schen Medium mit $L \cdot R_n = 1/3$. Bei Verwendung des Kurvenatlas' wäre dann an den Nachbarkurven

zu prüfen, wie weit die Indexfläche in dem für die Interpretation interessierenden Winkelbereich von der angenommenen abweichen könnte, wenn die Transversalgeschwindigkeit einen anderen Wert hätte oder wenn der KREYSche Idealfall nicht vorliegen würde.

B. Lamellenstruktur.

Unter „Lamellenstrukturen“ sollen Schichtungen verstanden werden, bei denen die individuellen Schichten so klein sind, daß sie nicht mehr getrennt werden können. Ein wichtiges Beispiel ist Schieferung. Es kann sich aber auch um wesentlich mächtigere Schichten handeln, wenn diese so tief liegen, daß sie weder von Bohrungen noch von kurzen seismischen Wellen erreicht werden.

Im Falle geschieferter Gesteine besteht die Möglichkeit, die elastischen Parameter an Handstücken zu messen. Dieses Verfahren ist aber deswegen unbefriedigend, weil diese Messungen ziemlich kompliziert sind, man andererseits aber wegen lokaler Inhomogenitäten des Gesteins eine größere Anzahl von Proben messen muß, um repräsentative Werte zu erhalten. Bei diesen Messungen dürfen nicht zu kurze Wellenlängen – und daher auch nicht zu kleine Handstücke – verwendet werden, damit die erhaltenen Werte auch noch für seismische Wellen gelten. Außerdem muß man mit der Möglichkeit rechnen, daß sich die Eigenschaften der Probe bei der Druckentlastung und Trocknung verändern.

Wenn weder Bohrkerne noch Handstücke zur Verfügung stehen bleibt nur die Möglichkeit, Geschwindigkeiten in verschiedener Orientierung zur Lamellenebene zu messen und die Werte mit den Wellenflächen des Kurvenatlas zu vergleichen. Wenn nicht genügend Bestimmungsstücke vorliegen, wird man die fehlenden wieder probeweise einsetzen und variieren. Die Erfahrung hat gezeigt, daß zum Beispiel devonische Schiefer, über die eine Anzahl detaillierter Messungen vorliegen (SCHMIDT 1964), merklich vom KREYSchen Idealfall abweichen.

Wenn man die Indexfläche nicht bestimmen kann oder wenn man keine Möglichkeit hat, eine etwaige Anisotropie festzustellen, wird man in der Regel eine kugelförmige Indexfläche annehmen. Dabei wird man je nach Art der Kenntnisse die Geschwindigkeit parallel oder senkrecht zur Schichtung verwenden. Die Fehler, die bei Verwendung dieser beiden Ersatzflächen (und bei Verwendung eines Ellipsoids mit den gleichen Halbachsen) für die Interpretation refraktionsseismischer Daten entstehen, sind in Abbildung 23 erläutert. Die Konstruktion bezieht sich unmittelbar auf Abbildung 18, allerdings ist ein horizontaler Refraktor angenommen worden. Aus den numerischen Werten sieht man, daß bei Verwendung der Geschwindigkeit parallel zum Refraktor (also bei Nicht-Berücksichtigung der Anisotropie) der relative Fehler mindestens gleich $(v_{\parallel} - v_{\perp})/v_{\perp}$ ist und mit abnehmendem Geschwindigkeitskontrast bis zum Doppelten anwachsen kann.

Die entsprechenden Zusammenhänge für die Interpretation von Reflexionsbeobachtungen sind in Abbildung 24 erläutert. Für den speziellen Fall der Verwendung einer Kugel mit dem Radius $1/v_{\perp}$ (d. h. Nicht-Berücksichtigung der Anisotropie) wurden die Fehler in Normalenrichtung, Strahlrichtung und Länge des Lots auf die Reflexionsebene numerisch berechnet. Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß im KREYSchen Idealfall diese Fehler für einen großen Winkelbereich klein bleiben (KREY und HELBIG 1956). Um den Geltungsbereich dieser Beziehung und die Variation bei Abweichung vom KREYSchen Idealfall zu überprüfen, wurden die wesentlichen Ergebnisse für einige praktisch wichtige Parameterkombinationen mit dem MOSELEY-Kurvenschreiber des Instituts für Plasmaphysik aufgezeichnet (Abbildung 26). Wie man sieht, ist die Vernachlässigung der Anisotropie selbst dann, wenn die Geschwindigkeit parallel zur Schichtung das 1,3-fache der Geschwindigkeit senkrecht zur Schichtung ist, für Neigungen bis etwa 30° ohne weiteres

möglich. Der Fehler in der Länge des Lots auf die Grenzfläche ist dann höchstens 4% und der Fehler in der Normalenrichtung etwa 2,5°. Lediglich die Strahlrichtung, die die Lage des Spurlinienelements in der Reflexionsebene bestimmt, kann dann um 12° abweichen.

Abschließend sei noch kurz diskutiert, welche der drei einfachen Ersatzflächen für die

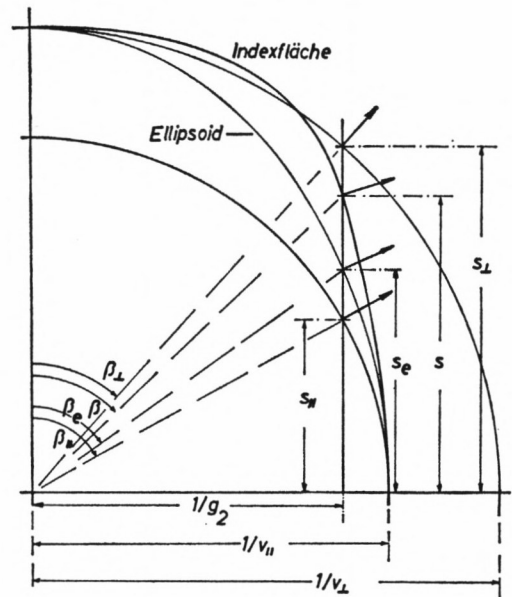


Abbildung 23. Fehler in der Tiefenlage eines horizontalen Refraktors bei Ersatz der Indexfläche durch eine Kugel mit dem Radius $1/v_L$, durch eine Kugel mit dem Radius $1/v_H$ und durch ein Ellipsoid mit den gleichen Halbachsen. Nach der in Abbildung 18 dargestellten Konstruktion verhalten sich die Tiefen umgekehrt wie die Längen der Lote s , s_e , s_H und s_L .

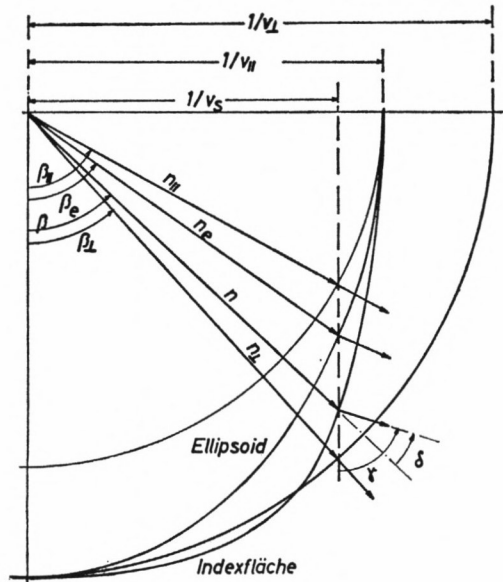


Abbildung 24. Fehler, die bei der Interpretation reflexionsseismischer Daten entstehen, wenn die Indexfläche durch eine Kugel mit dem Radius $1/v_L$, eine Kugel mit dem Radius $1/v_H$ oder durch ein Ellipsoid mit diesen Halbachsen ersetzt wird. Die Länge der berechneten Lotwege verhalten sich umgekehrt wie die Längen der Indexvektoren.

Praxis zu bevorzugen ist. Für Reflexionen geringer Neigung ist dies zweifellos die Kugel mit dem Radius $1/v_{\perp}$ – das heißt, die Anisotropie bleibt unberücksichtigt. Die Richtigkeit dieser Behauptung im KREYSchen Idealfall war bereits früher gezeigt worden (KREY und HELBIG 1956). Numerische Rechnungen (Abbildung 26) zeigen aber, daß das auch noch bei kleinen Abweichungen vom Idealfall gilt. Wichtig ist in diesem Zusammenhang, daß für Reflexionen geringer Neigung das Ellipsoid mit den Halbachsen $1/v_{\perp}$ und $1/v_{\parallel}$ kein guter Ersatz für die Indexfläche ist. KREY (a. a. O.) hat gezeigt, daß für alle geschichteten Medien die Scheitelkrümmung der Indexfläche stets kleiner oder höchstens gleich der

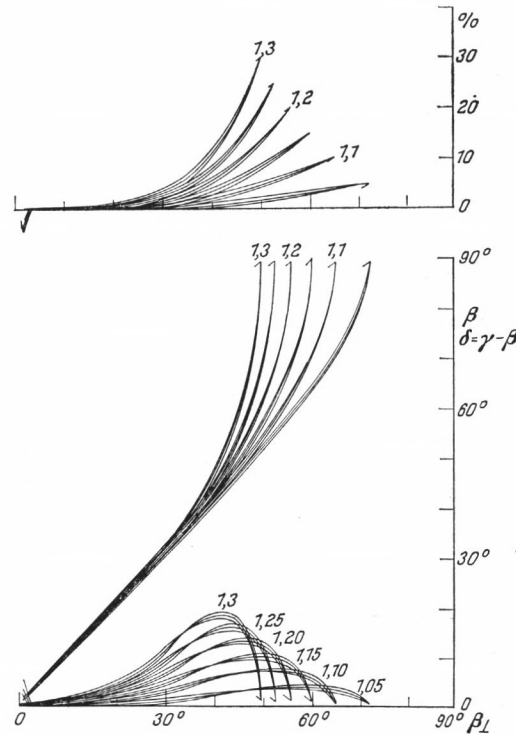


Abbildung 25. Fehler bei der Interpretation reflexionsseismischer Messungen bei Ersatz der Indexfläche durch eine Kugel mit dem Radius $1/v_{\perp}$ (Nichtberücksichtigung der Anisotropie). Scharparameter ist $v_{\parallel}/v_{\perp}$. Die jeweils mittlere Kurve eines Tripels entspricht dem KREYSchen Idealfall. Für die beiden anderen Kurven ist $R = +0.5$ und -0.5 .

$$[R = (A^2 - C^2)A \cdot c_{33}; A = c_{13} + c_{44}; C = c_{33} - c_{44}].$$

Als unabhängige Variable wurde die scheinbare Normalenrichtung $\beta_{\perp}$ verwendet, damit das Diagramm auch für Korrekturen benutzt werden kann. $\delta = \gamma - \beta$ ist der Winkel zwischen Strahl- und Normalenrichtung.

Im oberen Teil des Diagramms ist der prozentuale Fehler des Lotwegs dargestellt $[(l - l_1)/l_1]$.

Scheitelkrümmung dieses Ellipsoids ist. An praktisch durchgerechneten Beispielen hat HELBIG (a. a. O.) gezeigt, daß im KREYSchen Medium die Fehler bei Verwendung eines Ellipsoids ein Vielfaches der bei Nicht-Berücksichtigung der Anisotropie entstehenden betragen können.

Für die Interpretation refraktionsseismischer Daten ist die Antwort nicht so einfach, da die Strahlen stets sehr viel stärker gegen die Vertikale geneigt sind. Bei der Berechnung der Kurven wurde die Größe der zu erwartenden Abweichungen mit bestimmt. Aus Platzgründen sind die Zahlenwerte in dieser Veröffentlichung nicht enthalten. Auf Grund der

Zahlenwerte läßt sich jedoch ganz allgemein sagen, daß für Geschwindigkeitskontraste, die größer als 1,5 sind – also für steile Strahlen in der Deckschicht – wiederum die Kugel mit dem Radius $1/v_{\perp}$ die beste Näherung ergibt. Für die Refraktionsseismik bedeutet das aber nicht die Vernachlässigung der Anisotropie, da bei refraktionsseismischen Messungen die Strahlgeschwindigkeit $g_{\parallel}$ gemessen wird, die aus Symmetriegründen gleich der Normalengeschwindigkeit $v_{\parallel}$ ist. Für flacher verlaufende Strahlen – geringeren Geschwindigkeitskontrast – wächst der Fehler sehr rasch an. Für diesen Bereich liefert das Ellipsoid die beste Näherung von den drei Ersatzflächen. Die Kugel mit dem Radius $1/v_{\parallel}$ (Nicht-Berücksichtigung der Anisotropie) liefert für alle Winkel eine schlechtere Annäherung als die anderen Flächen in den für sie jeweils vorzuziehenden Winkelbereichen. Da das Ellipsoid aus dieser Kugel durch eine lineare Streckung in 3-Richtung hervorgeht, sind die Tiefenwerte $h_{\parallel}$ um dem Faktor $v_{\parallel}/v_{\perp}$ größer als die Tiefenwerte h_e (Abbildung 23).

6. ZUSAMMENFASSUNG

Von den vier Flächen, die – jede für sich – die Wellenausbreitung in elastischen Medien zu beschreiben gestatten, nehmen die Indexfläche und die Wellenfläche Sonderstellungen ein. Geometrisch drückt sich das darin aus, daß diese beiden Flächen zueinander polar reziprok sind. Beide eignen sich für strahlengeometrische Konstruktionen. Die Wellenfläche ist die anschaulichere von beiden, trotzdem ist die Indexfläche für die graphische Interpretation seismischer Beobachtungen vorzuziehen. Die Gründe dafür sind: 1. Die Indexfläche ist höchstens vom sechsten Grade, während der Grad der Wellenfläche einhundert- und fünfzig betragen kann. 2. Bei senkrechtem Einfall rückt der Spurpunkt bei der Wellenfläche ins Unendliche, während bei der Konstruktion mit der Indexfläche der Bildpunkt des Spurpunktes ins Zentrum rückt. 3. Die Wellenfläche repräsentiert die Strahlen direkt, die Wellennormalen indirekt, bei der Indexfläche ist es umgekehrt. Die Wellennormalen liegen bei Reflexions-Refraktionsprozessen in einer Ebene mit dem Einfallslot, während die Strahlen von dieser Ebene wesentlich abweichen können. Daher garantiert nur die Indexfläche eine ebene Konstruktion.

Bei einer Durchmusterung der am häufigsten vorkommenden Aufgaben der seismischen Interpretation zeigt es sich, daß sich alle auch unter anisotropen Ausbreitungsbedingungen verhältnismäßig einfach lösen lassen, wenn die Indexflächen bekannt sind. Bei der Anwendung der so entwickelten Verfahren auf den Grenzfall der Isotropie gelangt man in einigen Fällen zu einer – zumindest theoretischen – Vereinfachung bekannter Verfahren, so etwa bei der Behandlung von Mehrschichtenproblemen in der Refraktionsseismik.

Während in isotropen Medien die Kenntnis der Ausbreitungsgeschwindigkeit elastischer Wellen gleichbedeutend mit der Kenntnis der (kugelförmigen) Indexflächen ist, müssen in anisotropen Medien wesentlich mehr Parameter zur Bestimmung der Indexflächen bekannt sein. Die Zahl der Parameter setzt sich zusammen aus der Zahl der elastischen Konstanten und der Zahl der zur Festlegung des Achsensystems erforderlichen Richtungs-cosinus. Die Zahl der elastischen Konstanten kann höchstens 21 betragen, meist wird sie durch die Symmetrie des Mediums weiter verringert. Der häufigste Fall von Anisotropie in der Erdkruste ist der der Transversalisotropie (alle Richtungen senkrecht zur Symmetrieachse sind gleichberechtigt). Ein transversalisotropes Medium besitzt fünf elastische Konstanten, zur Festlegung der Orientierung genügen zwei Winkel. Von den fünf elastischen Konstanten tritt eine nur im Zusammenhang mit der senkrecht zum Hauptschnitt polarisierten (rein transversalen) Welle auf, die bei seismischen Beobachtungen keine große Rolle spielt. Index- und Wellenfläche dieser rein transversalen Welle sind Rotationsellipsoide. Die beiden zu den im Hauptschnitt polarisierten (quasi-longitudinalen und quasi-transversalen) Wellen gehörenden Blätter hängen von den übrigen vier elastischen Konstanten ab. Für transversalisotrope Medien benötigt man also für die beiden wichtigeren Blätter der Indexfläche zwei Parameter zur Festlegung der Orientierung, einen für die Größe und drei für die Gestalt der Indexfläche. In dem praktisch wichtigen Falle eines „KREYSchen Mediums“ (das ist ein geschichtetes Medium, bei dem das Verhältnis der Geschwindigkeit longitudinaler zu der transversaler Wellen für alle individuellen Schichten dasselbe ist) verringert sich die Zahl

der erforderlichen Parameter um eins. Viele reale Medien können mit guter Näherung als KREYSche Medien angesehen werden. Sind für ein solches Medium die Orientierung der Symmetrieachse und das Verhältnis von Longitudinal- zu Transversalgeschwindigkeit bekannt, so reicht die Messung zweier Geschwindigkeiten (beispielsweise senkrecht und parallel zur Schichtung) zur Festlegung der Indexfläche aus. Es gibt jedoch reale Medien (zum Beispiel Schiefer), die merklich vom KREYSchen Idealfall abweichen können.

Sind für ein geschichtetes Medium die elastischen Konstanten der einzelnen Schichten bekannt, so lassen sich die fünf elastischen Konstanten des Gesamtmediums berechnen. Aus diesen Konstanten lassen sich die Meridiankurven der beiden zu den im Hauptschnitt polarisierten Wellen gehörenden Blätter der Indexfläche angeben. Das geschieht in Form einer Parameterdarstellung, die auf RUDZKI (1912) zurückgeht. Auf dieser Parameterdarstellung beruhen die FORTRAN-Programme, mit deren Hilfe die im Anhang beigefügten Meridianschnittkurven von Index- und Wellenflächen transversalisotroper Medien berechnet wurden. Der Katalog enthält die Kurven für einige hundert Parameterkombinationen, die nahezu jeden praktisch vorkommenden Fall einschließen dürften. Die Berechnung der Index- und Wellenflächen ist somit auf eine reine Maßstabsänderung reduziert worden. Diese Kurven kann man auch dazu verwenden, um aus experimentell ermittelten Strahlgeschwindigkeiten in verschiedener Orientierung zur Symmetrieachse (etwa aus seismischen Messungen in Grubengebäuden) durch Vergleich und Einpassen die elastischen Konstanten des Gesamtmediums zu bestimmen.

Wenn an Stelle der Indexfläche eine einfachere Fläche verwendet wird, so werden bei der Interpretation eine Reihe von Fehlern auftreten. Für die Verwendung einer einfacheren Fläche kann es verschiedene Gründe geben: Entweder ist die Anisotropie nicht bekannt. Dann wird man das Medium für isotrop halten und die Indexfläche durch eine Kugel ersetzen. Oder der erhöhte Arbeitsaufwand wird durch den zu erwartenden Gewinn an Genauigkeit nicht gerechtfertigt. Dann könnte man die Indexfläche durch eine Kugel oder durch ein Ellipsoid mit den gleichen Achsen ersetzen. Die zu erwartenden Fehler sind – für KREYSche Medien und für Medien, die nicht wesentlich vom KREYSchen Idealfall abweichen – etwa abzuschätzen. Für die Reflexionen geringer Neigung sind die Fehler bei Nicht-Berücksichtigung der Anisotropie – das heißt bei Ersatz der Indexfläche durch eine Kugel mit dem Radius $1/v_1$ – gering. Die beiden anderen Flächen eignen sich höchstens für steilstehende Reflexionen. Einfacher ist es, durchweg für die erste Konstruktion die Anisotropie unberücksichtigt zu lassen und anschließend Korrekturen – etwa nach Abbildung 25 – anzubringen. Für die Refraktionsseismik ist bei Geschwindigkeitskontrasten über 1,5 eine Kugel mit dem Radius $1/v_1$ der beste Ersatz, für geringeren Geschwindigkeitskontrast ist es das Ellipsoid mit den gleichen Achsen wie die Indexfläche. Bei Nicht-Berücksichtigung der Anisotropie (Ersatz der Indexfläche durch eine Kugel mit dem Radius $1/v_H$) werden die berechneten Tiefenwerte um den Faktor v_H/v_1 größer als bei Verwendung des Ellipsoids. Diese Abschätzungen ließen sich durch numerische Berechnungen bestätigen. Für geneigte Refraktoren lassen sich die zu erwartenden Fehler leicht unter Verwendung der Kurven des Anhangs mit Hilfe einer der Abbildung 24 entsprechenden Konstruktion abschätzen.

Danksagungen

Ich danke Herrn Professor Angenheister für seine Unterstützung und für wertvolle Diskussionen. Besonderen Dank schulde ich den Mitarbeitern des Rechenzentrums des Instituts für Plasmaphysik GmbH in Garching für ihre Hilfe bei der Vorbereitung und Anfertigung des Kurventeils. Herr cand. phys. Elfinger leistete wertvolle Hilfe bei der Bedienung des Kurvenschreibers und Herr Dr. Soffel bei der Durchsicht des Entwurfs. Auch die übrigen Mitarbeiter des Instituts für Angewandte Geophysik der Universität München haben mich bei der Anfertigung dieser Untersuchung jederzeit bereitwillig unterstützt.

7. LITERATURVERZEICHNIS

- BACKUS, G. E., 1962, Long-Wave elastic anisotropy produced by horizontal layering. *Journal of Geophysical Research* 67, 4427-4440.
- BORTFELD, R., 1964, Examples of synthetic refraction arrivals and wide angle reflections. *Geophysical Prospecting* 12, 100-114.
- BRUGGEMANN, D. A. G., 1937, Berechnung der verschiedenen physikalischen Konstanten von heterogenen Substanzen. Teil 3: Die elastischen Konstanten der quasi-isotropen Mischkörper aus isotropen Substanzen. *Ann. Phys.* (5), 29, 160.
- CAGNIARD, L., 1939, *Reflexion et refraction des ondes sismiques progressives*. Paris.
- CHOLET, J., and H. RICHARD, 1954, A test on elastic anisotropy measurements at Berriane (North Sahara). *Geophysical Prospecting* 2, 232-246.
- CONSTANZI, G., 1901, Breve riassunto degli studi del Prof. M. P. Rudzki sulla propagazione dei terremoti. *Boll. della Soc. Sismologica Italiana*, 7.
- FLÜGGE, S., 1948, *Theoretische Optik*. Wolfenbüttel und Hannover.
- GIESEL, W., 1963, Elastische Anisotropie in tektonisch verformten Sedimentgesteinen, *Geophysical Prospecting* 11, 423-458.
- GASSMANN, F., und M. WEBER, 1960, *Einführung in die angewandte Geophysik*. Bern.
- GRAF, O., 1926, Versuche über die Druckelastizität von Basalt, Gneis, Muschelkalk, Quarzit, Granit, Buntsandstein sowie Hochofenschlacke. *Beton und Eisen* 25, 399.
- HAGEDOORN, J. G., 1954, A practical example of an anisotropic velocity layer. *Geophysical Prospecting* 2, 52-60.
- HAMILTON, W. R., 1837, Theory of systems of rays. *Trans. Roy. Irish Acad.* 17, 1.
- HEARMON, R. F. S., 1961, *An introduction to applied anisotropy*. Oxford.
- HELBIG, K., 1958, Elastische Wellen in anisotropen Medien. *Gerlands Beiträge zur Geophysik* 67, 177-211; 256-288.
- DE HOOP, A. T., 1958, Representation theorems for the displacement in an elastic solid and their application to elastodynamic diffraction theory. Sc. D. Thesis, Delft.
- KLEYN, A. H., 1956, On seismic wave propagation in anisotropic media with applications in the Betun area, South Sumatra. *Geophysical Prospecting* 4, 56-69.
- KRAUT, E. A., 1962, Propagation of a pulse from a surface line source on a transversely isotropic elastic half space. *Dissert. Univ. of Calif., Los Angeles*.
- KRAUT, E. A., 1963, Advances in the theory of anisotropic elastic wave propagation. *Reviews of Geophysics* 1, 401-448.
- KREY, Th., and K. HELBIG, 1956, A theorem concerning anisotropy of stratified media and its significance for reflection seismics. *Geophysical Prospecting* 4, 294-302.
- McCULLAGH, J. 1837, Geometrical proposition applied to the wave theory of light. *Trans. Roy. Irish Acad.* 17, 241.
- MUSGRAVE, M. J. P., 1959, The propagation of elastic waves in crystals and other anisotropic media. *Repts. on Progr. in Physics* 22, 75-96.
- MUSGRAVE, M. J. P., 1961, Elastic waves in anisotropic media. *Progr. Solid Mech.* 2, 64-85.
- POEVERLEIN, H., 1960, Über Wellen in anisotropen Ausbreitungsverhältnissen. *Z. Naturf.* 5a, 492-499.
- POSTMA, G. W., 1955, Wave propagation in a stratified medium. *Geophysics* 20, 780-806.

- RAYLEIGH, Lord, 1892, On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium. *Phil. Mag.* 34, 481.
- RICKER, N., 1951, The form and laws of propagation of seismic wavelets. *Proc. 3rd World Petroleum Congr.*, sect. 1, 514-536.
- RIZNICHENKO, Yu. W., 1949, On seismic quasi-anisotropy. *Isw. A. N. SSSR, Ser. geograf. i geofiz.*, 13, 518-540.
- RUDZKI, M. P., 1912, Parametrische Darstellung der elastischen Welle in anisotropen Medien. *Anz. d. Akad. d. Wiss. Krakau Jgg. 1911*, 503-536.
- SCHMIDT, E., 1964, persönliche Mitteilung.
- THYSSEN, F., 1964, persönliche Mitteilung.
- UHRIG, L. F., and F. A. VAN MELLE, 1955, Velocity anisotropy in stratified media. *Geophysics* 20, 774-779.
- Wyrobek, S. M., 1956, Application of delay and intercept times in the interpretation of multilayer refraction time distance curves. *Geophysical Prospecting* 4, 112-130.
- ZISMAN, W. A., 1933, Young's modulus and Poisson's ratio with reference to geophysical application. Compressibility and anisotropy of rocks at and near the surface. *Proc. Nat. Acad. Sci.* 19, 653.

8. ANHANG

Der Anhang enthält eine graphische Darstellung von Index- und Wellenflächen transversalisotroper Medien für eine Reihe von Parameterkombinationen. Die Kurven wurden mit der Rechenanlage des Instituts für Plasmaphysik GmbH, Garching, berechnet und unmittelbar mit dem Kurvenschreiber aufgezeichnet. Außer der graphischen Ausgabe wurde eine numerische Ausgabe verwendet, die außer den für die graphische Darstellung erforderlichen Werten auch einige der in 5. definierten Korrekturgrößen enthält. Aus Platzmangel konnten diese numerischen Werte nicht veröffentlicht werden. Die verwendeten Programme sind in FORTRAN-II für die IBM 7090 geschrieben. Sowohl die Programme als auch die numerischen Werte können auf Wunsch eingesehen werden.

Im folgenden werden die im Anhang zusammengefaßten Kurven soweit erläutert, daß sie auch ohne gründliches Studium des Hauptteils verstanden und benutzt werden können.

8.1 INDEX- UND WELLENFLÄCHEN TRANSVERSALISOTROPER MEDIEN

In transversalisotropen Medien gibt es zu jeder *Normalenrichtung* (festgelegt durch den Winkel β zwischen Symmetrieachse und Wellennormale) *drei Wellentypen*, deren Schwingungsrichtungen paarweise aufeinander senkrecht stehen. Eine der drei Schwingungsrichtungen steht senkrecht auf der durch Symmetrieachse und Wellennormale aufgespannten Ebene. Die entsprechende Welle (in der Nomenklatur der Seismologie die SH-Welle) ist *rein transversal*. Die *Indexfläche* der rein transversalen Welle ist ein Rotationsellipsoid mit den Halbachsen $\sqrt{\rho/c_{44}}$ (Rotationsachse) und $\sqrt{\rho/c_{66}}$. Die *Wellenfläche* der rein transversalen Welle ist ebenfalls ein Rotationsellipsoid, ihre Halbachsen sind $\sqrt{c_{44}/\rho}$ und $\sqrt{c_{66}/\rho}$. Diese Flächen sind in den Kurvenkatalog *nicht* mit aufgenommen worden.

Die anderen beiden Schwingungsrichtungen liegen in der durch Wellennormale und Symmetrieachse aufgespannten Ebene (*Hauptebene*). Sie schließen mit der Wellennormale Winkel ein, die im allgemeinen von 0° und 90° verschieden sind. Diese Wellen sind daher nicht rein longitudinal beziehungsweise transversal. Man bezeichnet sie als *quasi-longitudinale* Welle (entsprechend der P-Welle in seismologischer Nomenklatur) und *quasi-transversale* Welle (entsprechend der SV-Welle). Die Index- und Wellenflächen, die zu diesen Wellen gehören, sind Rotationsflächen. Der Kurvenkatalog enthält die *normierten Schnittkurven* dieser Flächen mit der Hauptebene. In den Kurvenblättern liegt jeweils die Symmetrie-(Rotations-)Achse parallel zur linken Bildkante.

In transversalisotropen Medien sind Symmetrieachse, Wellennormale und Strahlrichtung (Ausbreitungsrichtung) komplanar. Die Wellennormalen der quasi-transversalen und quasi-longitudinalen Wellen schließen mit der Symmetrierichtung die Winkel β_t und β_l ein. γ_t und γ_l sind die Winkel zwischen den Strahlrichtungen und der Symmetrieachse. *Im allgemeinen fallen Strahl- und Normalenrichtung nicht zusammen*. Der Kurvenkatalog enthält deshalb die graphische Darstellung der Funktionen $\gamma_t = \gamma_t(\beta_t)$ und $\gamma_l = \gamma_l(\beta_l)$.

8.2 ANORDNUNG DER KURVEN IM KATALOG

Ein transversalisotropes Medium ist durch die Dichte ρ und durch die *fünf wesentlichen Konstanten* $c_{11}, c_{13}, c_{33}, c_{44}, c_{66}$ des elastischen Materials bestimmt. Für die im Hauptschnitt polarisierten (quasi-transversalen und quasi-longitudinalen) Wellen ist c_{66} ohne Bedeutung. Wenn man außerdem die Schnittkurven der charakteristischen Flächen derart *normiert*, daß die halbe Rotationsachse der quasi-longitudinalen Blätter gleich eins ist, so verbleiben schließlich nur noch *drei wesentliche Parameter*. Für den vorliegenden Kurvenkatalog wurden die folgenden drei Parameter gewählt:

$$\begin{aligned} Q &= c_{11}/c_{33} = (v_{II}/v_{I1})^2 && \text{„bedeutet: parallel zur Symmetrieebene} \\ V &= c_{44}/c_{33} = (v_{t1}/v_{I1})^2 \\ R_n &= (c_{33} - c_{13})/2 \cdot c_{44} \end{aligned}$$

Für isotrope Medien ist $Q = 1$, $R_n = 1$ und $0 < V < 0.75$. Für geschichtete Medien, bei denen sämtliche Einzelschichten das gleiche Verhältnis v_t/v_l (m. a. W. gleiche Poisson'sche Zahl) besitzen, ist $R_n = 1$. Derartige Medien wurden in 4.3 als „KREYSche Medien“ bezeichnet.

Der Katalog besteht aus 72 Blättern, deren jedes einer bestimmten Wertekombination (Q, V) entspricht. Auf jedem Blatt des Katalogs befinden sich links die Meridianschnittkurven der quasi-transversalen und quasi-longitudinalen Blätter der Indexflächen für die Werte $R_n = 0.5; 0.6; \dots 1.4; 1.5$. Im oberen rechten Feld sind die Meridianschnittkurven der Wellenflächen und im unteren rechten Feld die beiden Funktionen $\gamma_l = \gamma_l(\beta_l)$ und $\gamma_t = \gamma_t(\beta_t)$ für dieselben Parameterwerte dargestellt. Maßstäbe, Anordnung der Kurvengruppen und Zuordnung der Werte des Parameters R_n sind aus Abbildung A 1 zu ersehen, in der als Beispiel das Blatt 9 des Kataloges wiedergegeben ist, jedoch nur die Kurven mit den extremen Werten R_n ($R_n = 0.5; R_n = 1.5$).

Die Zuordnung der einzelnen Katalogblätter zu den Parameterkombinationen (Q, V) ergibt sich aus der nachstehenden Tabelle:

		$V = 0.2000$	0.2667	0.3333	0.4000	0.4666	0.5333
Q	v_{II}/v_{I1}	$\frac{v_t}{v_l} = 0.4472$	0.5164	0.5774	0.6324	0.6831	0.7303
0.8	0.8944	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6
0.9	0.9487	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6
1.0	1.000	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/6
1.1	1.048	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/6
1.2	1.095	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/6
1.3	1.140	6/1	6/2	6/3	6/4	6/5	6/6
1.4	1.183	7/1	7/2	7/3	7/4	7/5	7/6
1.6	1.265	8/1	8/2	8/3	8/4	8/5	
1.8	1.342	9/1	9/2	9/3	9/4	9/5	
2.0	1.414	10/1	10/2	10/3	10/4	10/5	
2.2	1.483	11/1	11/2	11/3	11/4	11/5	
2.4	1.549	12/1	12/2	12/3	12/4	12/5	
2.6	1.612	13/1	13/2	13/3	13/4	13/5	

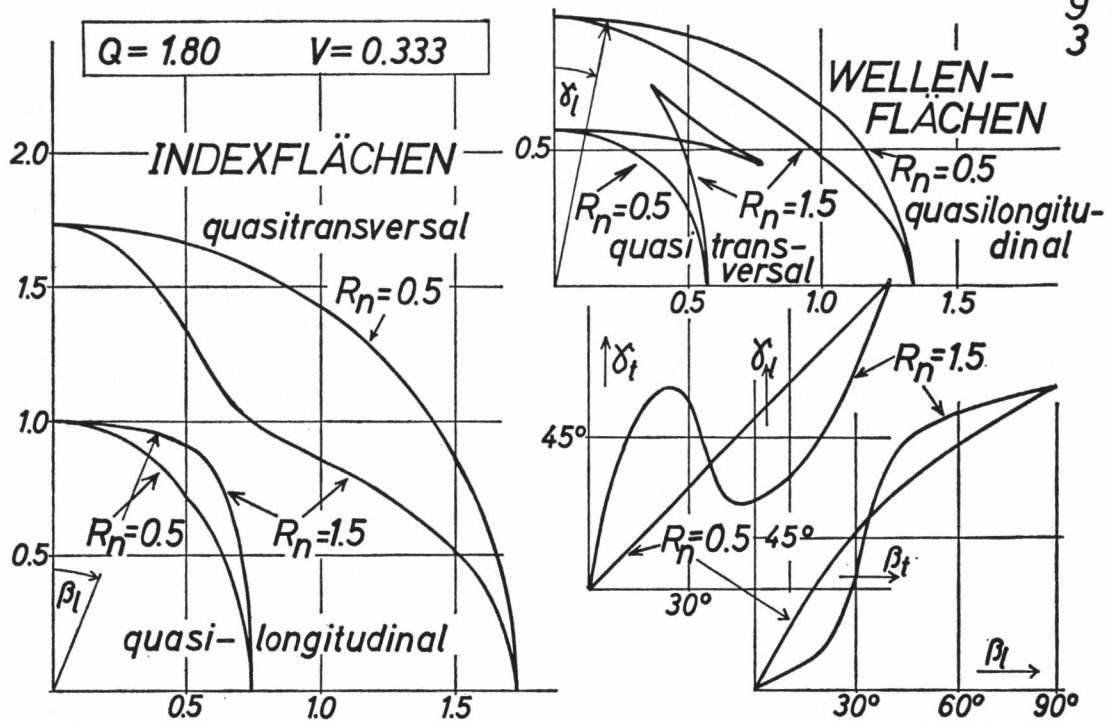


Abbildung A 1. Beispiel eines Blattes aus dem Kurvenkatalog. Links: Die Meridianschnittkurven der quasi-transversalen und quasi-longitudinalen Blätter der Indexflächen für den kleinsten Wert $R_n = 0,5$ und den größten Wert $R_n = 1,5$. - Rechts oben: Meridianschnittkurven der quasi-transversalen und quasi-longitudinalen Blätter der Wellenflächen. - Rechts unten: Die beiden Funktionen $\gamma_t(\beta_t)$ und $\gamma_l(\beta_l)$. - Als Beispiel ist Blatt $\frac{9}{3}$ gewählt.

8.3 AUSWAHL DER GEEIGNETEN KURVENGROPPE

Für die in Abschnitt 3 beschriebenen graphischen Konstruktionen war die Kenntnis der Indexflächen vorausgesetzt worden. Die Indexflächen lassen sich unmittelbar aus dem Katalog entnehmen, wenn die drei Parameter Q , V und R_n bekannt sind. Die Schritte für die Parameter sind so klein gewählt worden, daß sich in den meisten Fällen die Kurven für Zwischenwerte interpolieren lassen.

Wenn alle drei Parameter bekannt sind – z. B. in Fällen, wo von bekannten elastischen Konstanten c_{nm} ausgegangen wird – bereitet das Aufsuchen der geeigneten Kurven keinerlei Schwierigkeiten.

Häufig werden nur die Parameter Q und V bekannt sein, zum Beispiel dann, wenn die Geschwindigkeit longitudinaler und transversaler Wellen senkrecht und parallel zur Symmetrieebene beobachtet wurde. Durch diese beiden Parameter ist das Kurvenblatt festgelegt. Falls noch eine Geschwindigkeit in einer anderen Richtung vorliegt, so kann durch Einpassen dieser Geschwindigkeit in die Meridianschnittkurven der Wellenflächen der passende Wert des Parameters R_n ermittelt werden. Liegen keine weiteren Informationen vor, so wird man im allgemeinen $R_n = 1$ annehmen. Die graphische Konstruktion ist zweckmäßiger Weise mit einigen anderen Werten (z. B. $R_n = 0.8$ und 1.2) zu wiederholen. Auf diese Weise läßt sich Art und Größenordnung der Unsicherheit abschätzen.

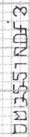
Falls *nur* Q bekannt ist (z. B. wenn nur die Geschwindigkeit der longitudinalen Wellen in den beiden Hauptrichtungen vorliegt), so verfährt man am zweckmäßigsten entsprechend: falls keine besonderen Gründe für eine andere Wahl vorliegen, wird man $R_n = 1$ und $0.333 \leq V \leq 0.400$ annehmen und bei der Konstruktion wieder die Kurven für benachbarte Parameterwerte mitverwenden.

Wegen näherer Einzelheiten wird auf die Abschnitte 4.3 und 5. verwiesen.

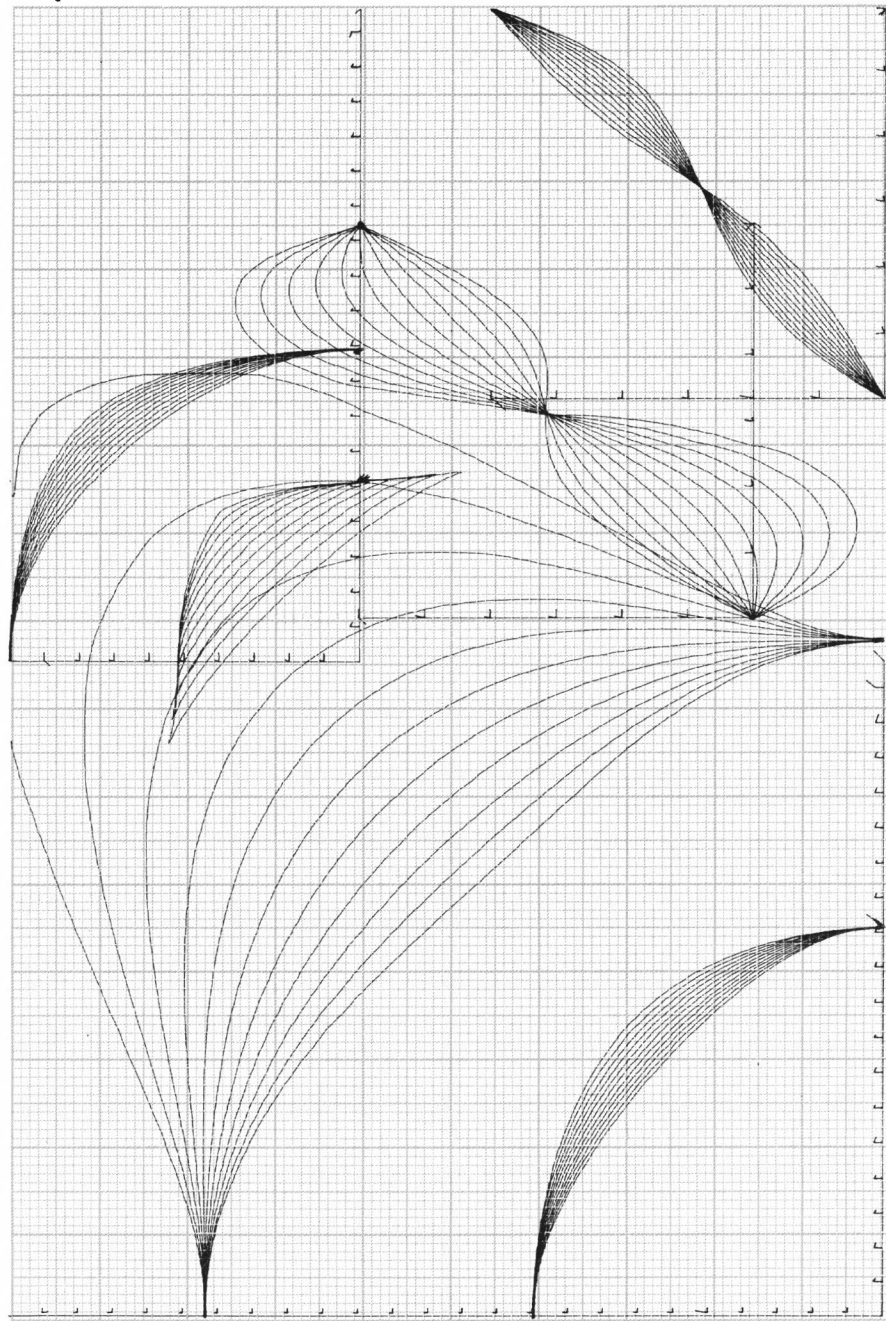
Wegen der Anwendung der Indexflächen bei der graphischen Lösung von Problemen der angewandten Seismik wird auf den Abschnitt 3. und die entsprechenden Abbildungen verwiesen.

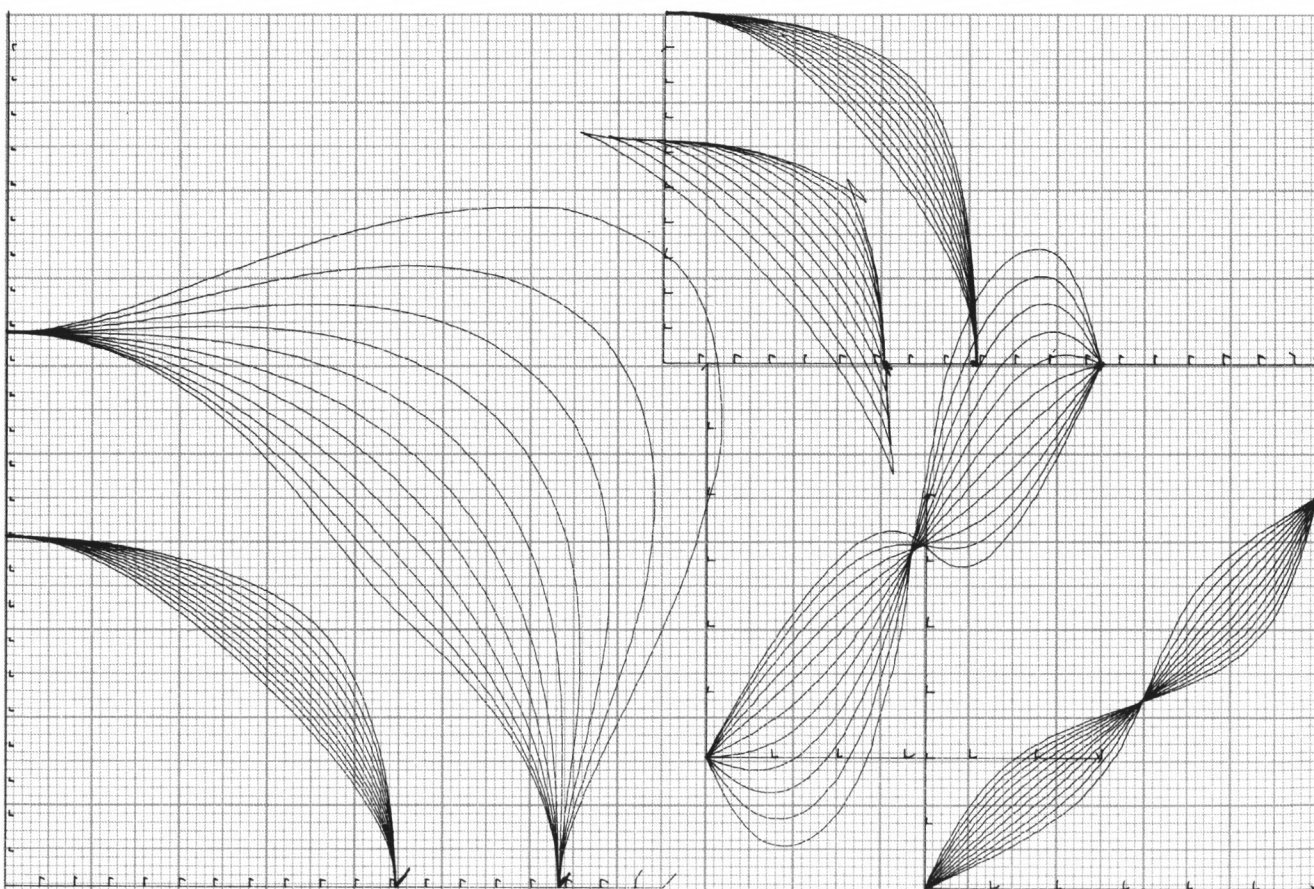
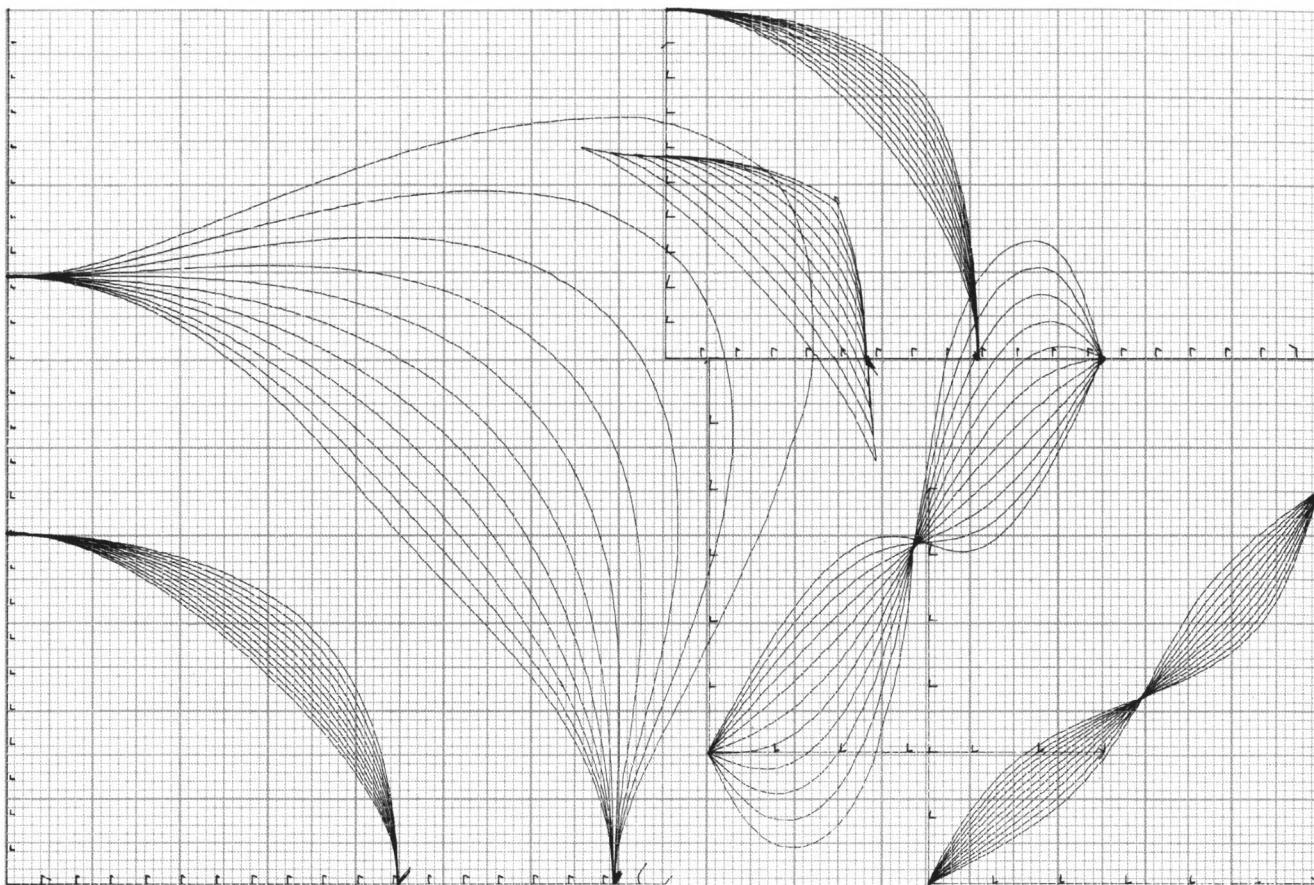
9. KURVENKATALOG

1 1

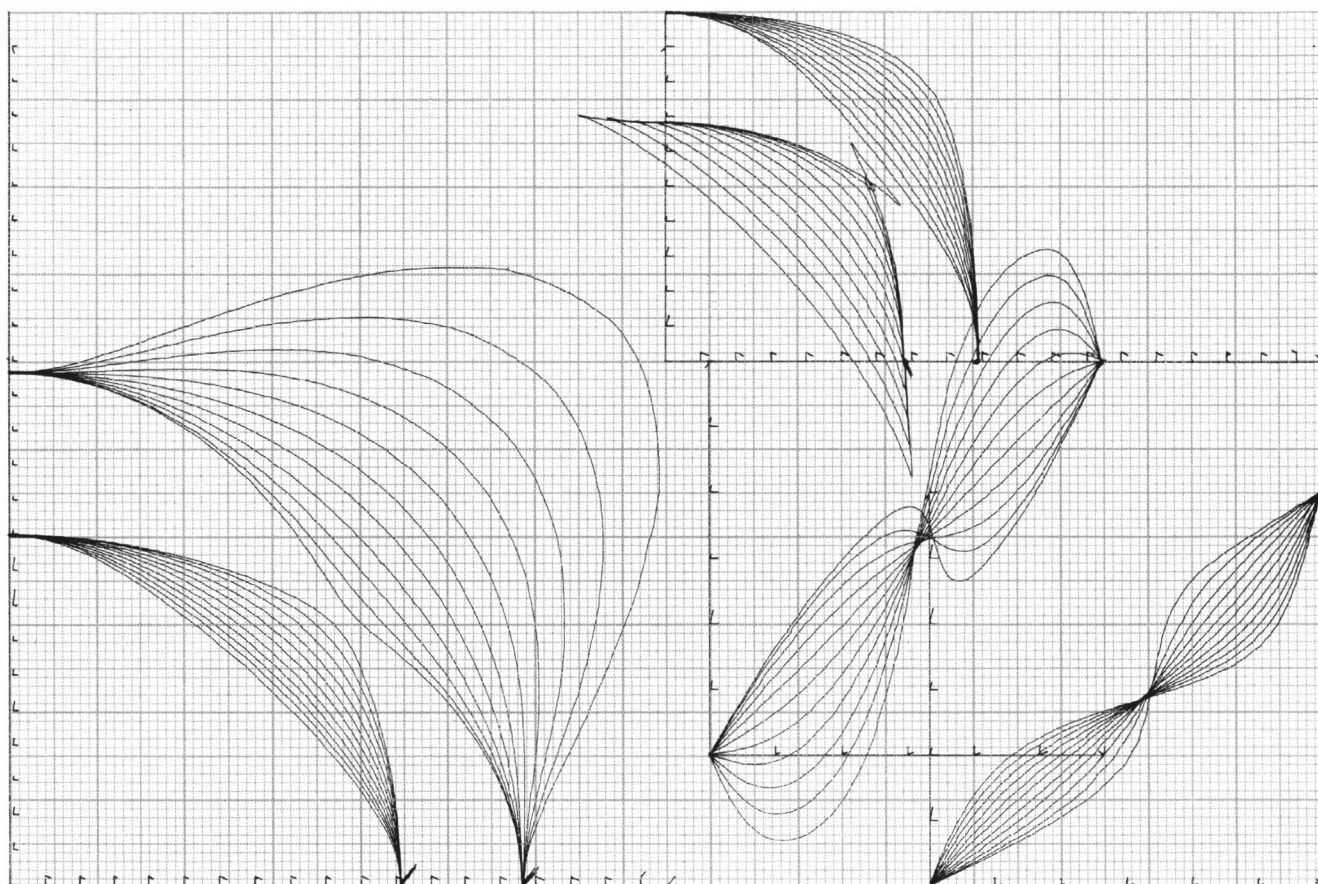


12

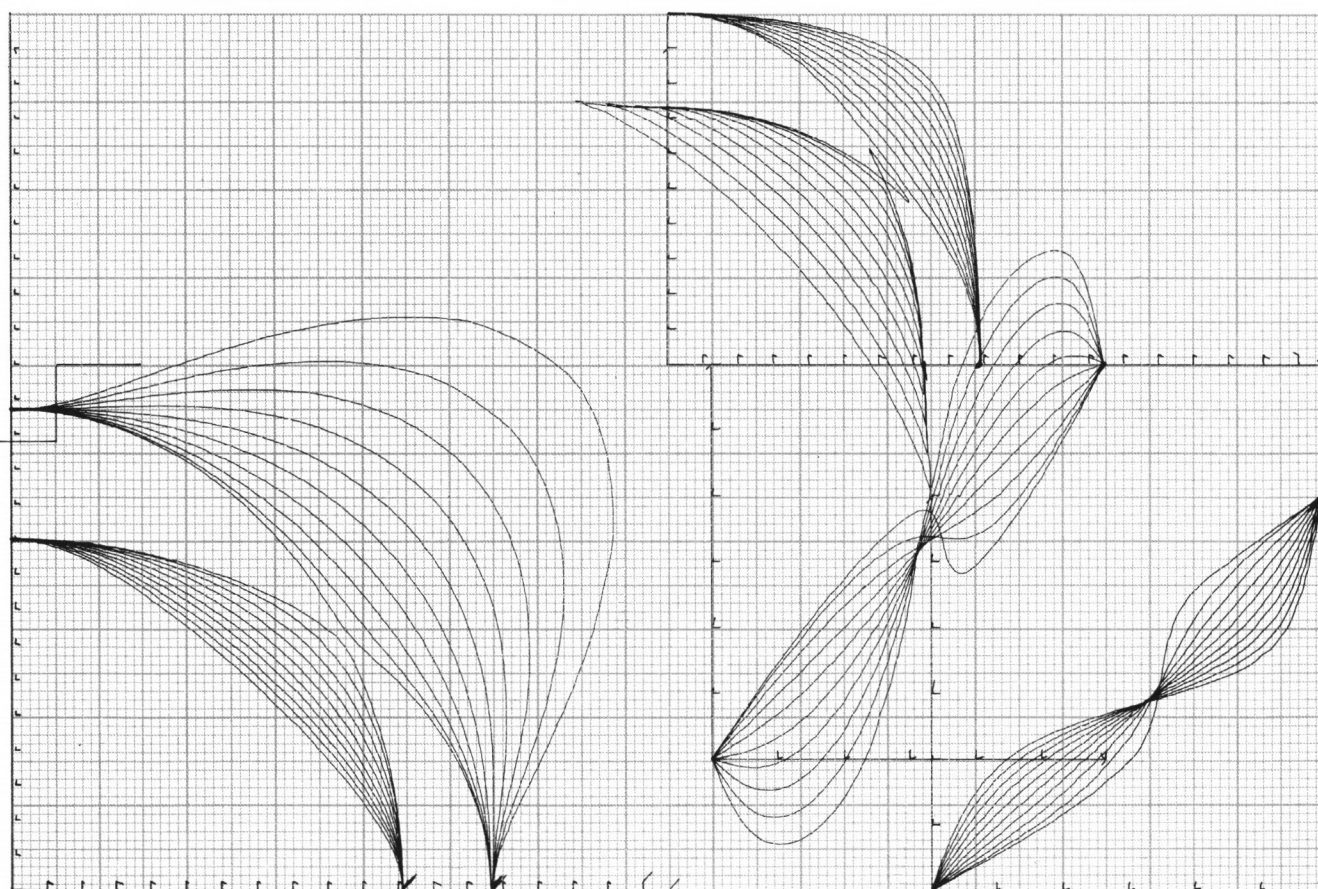


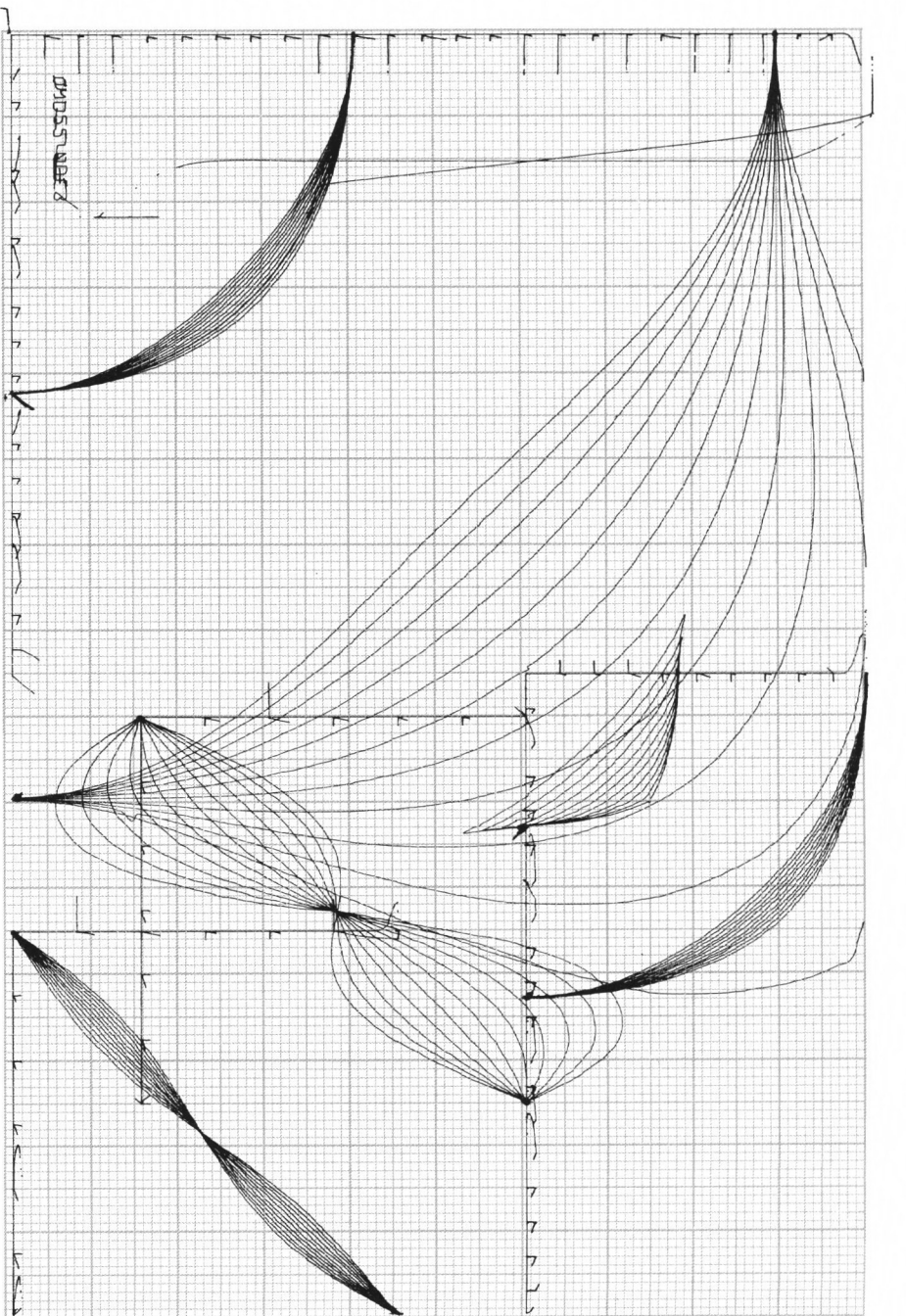


1
5

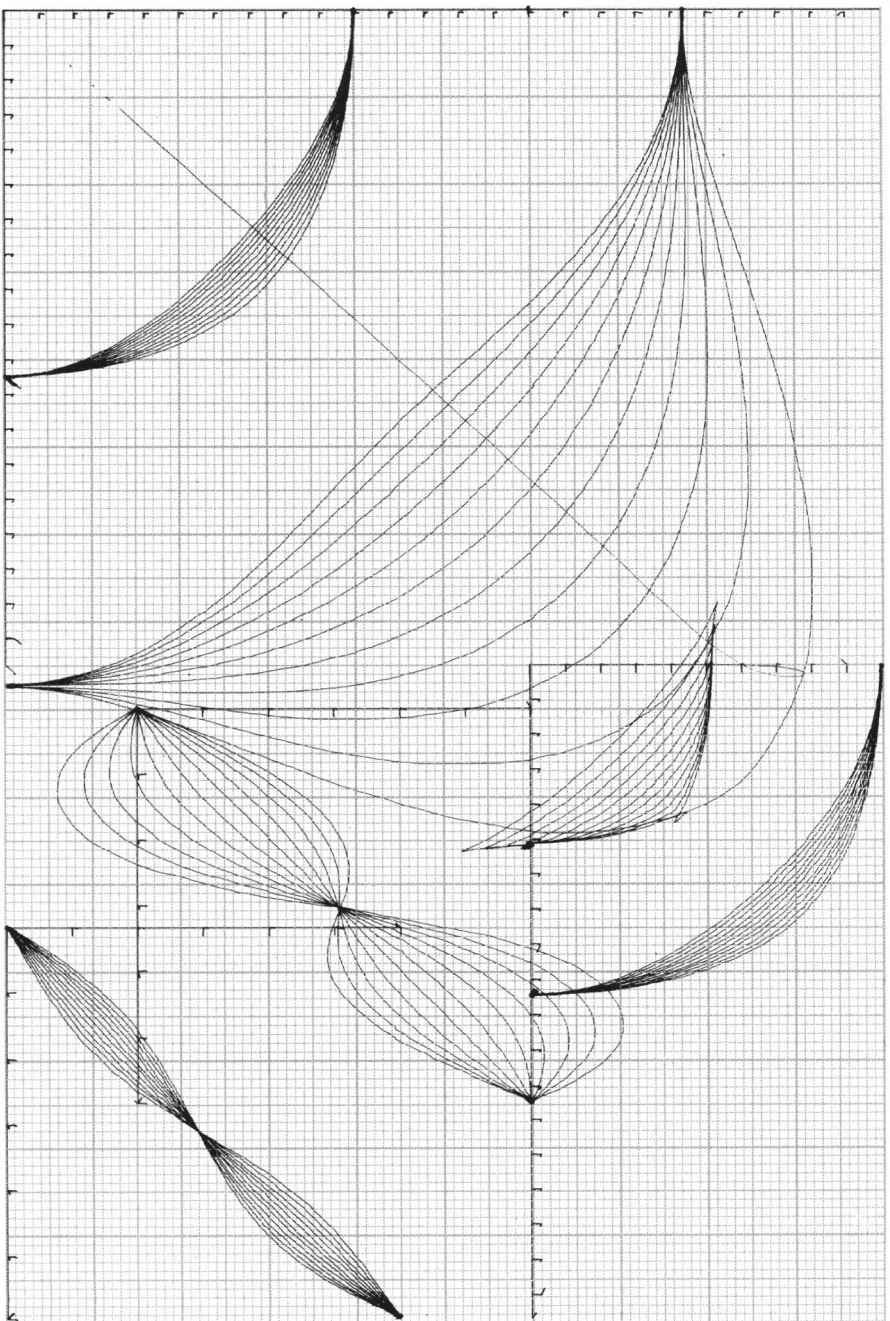


1
6

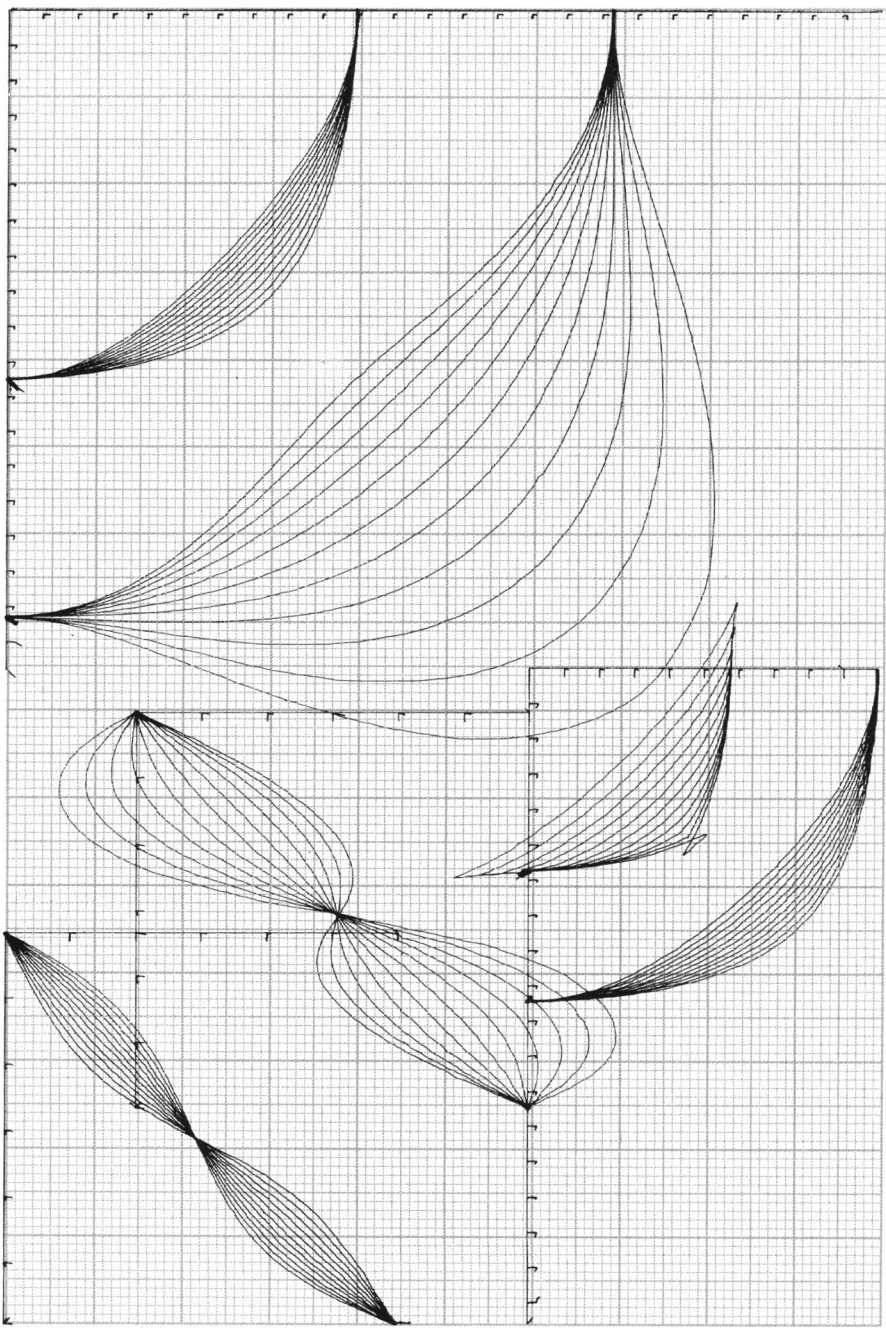




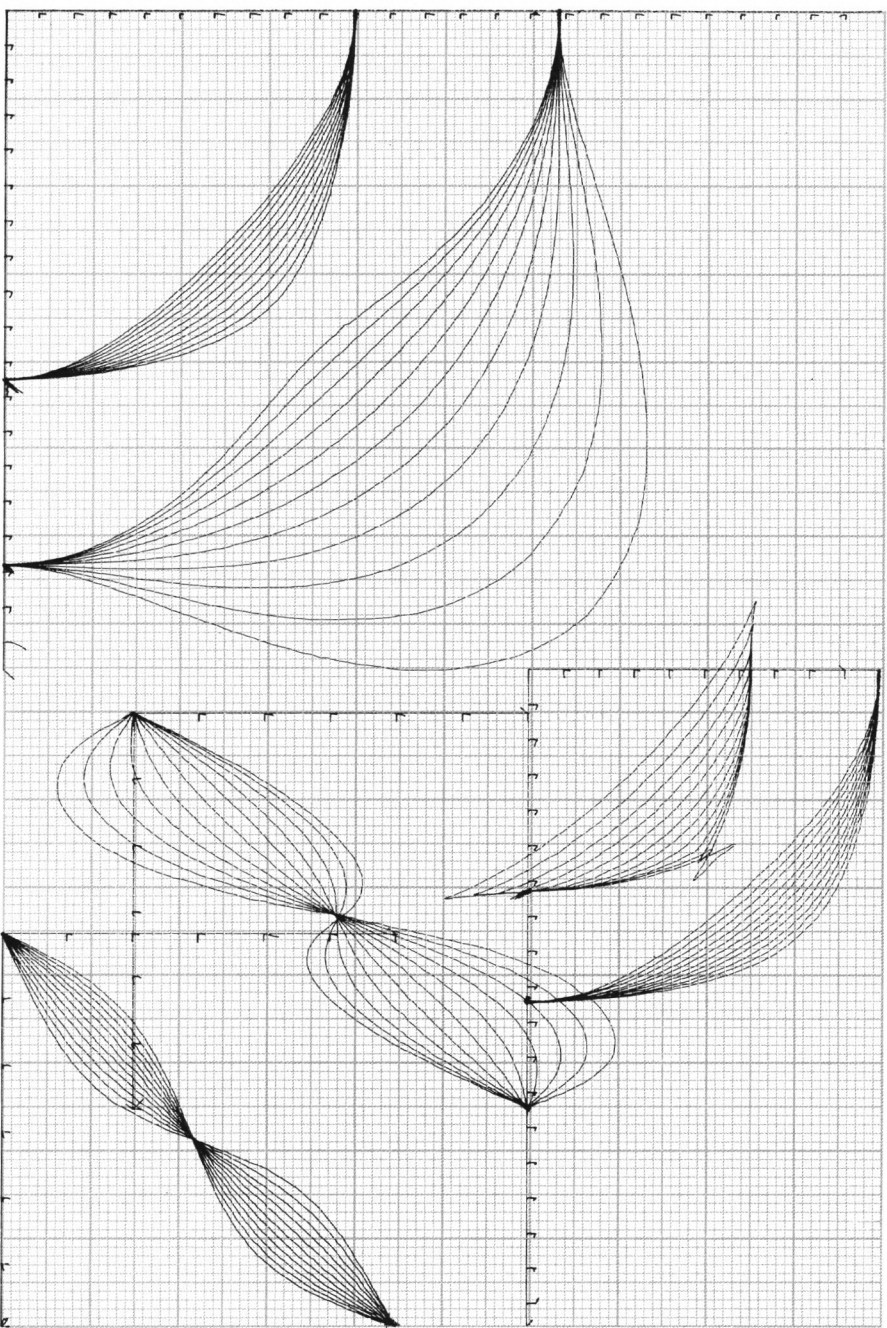
21



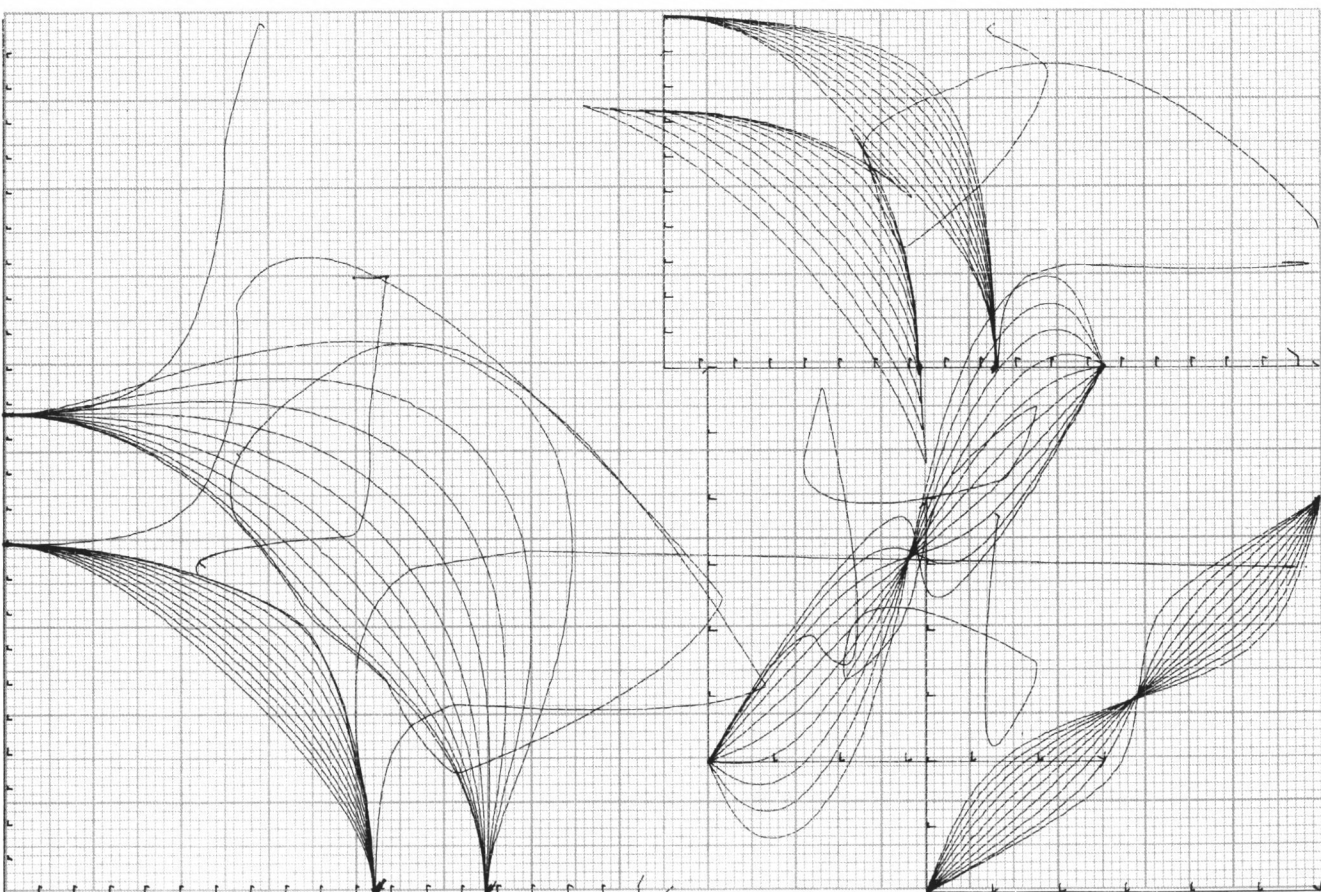
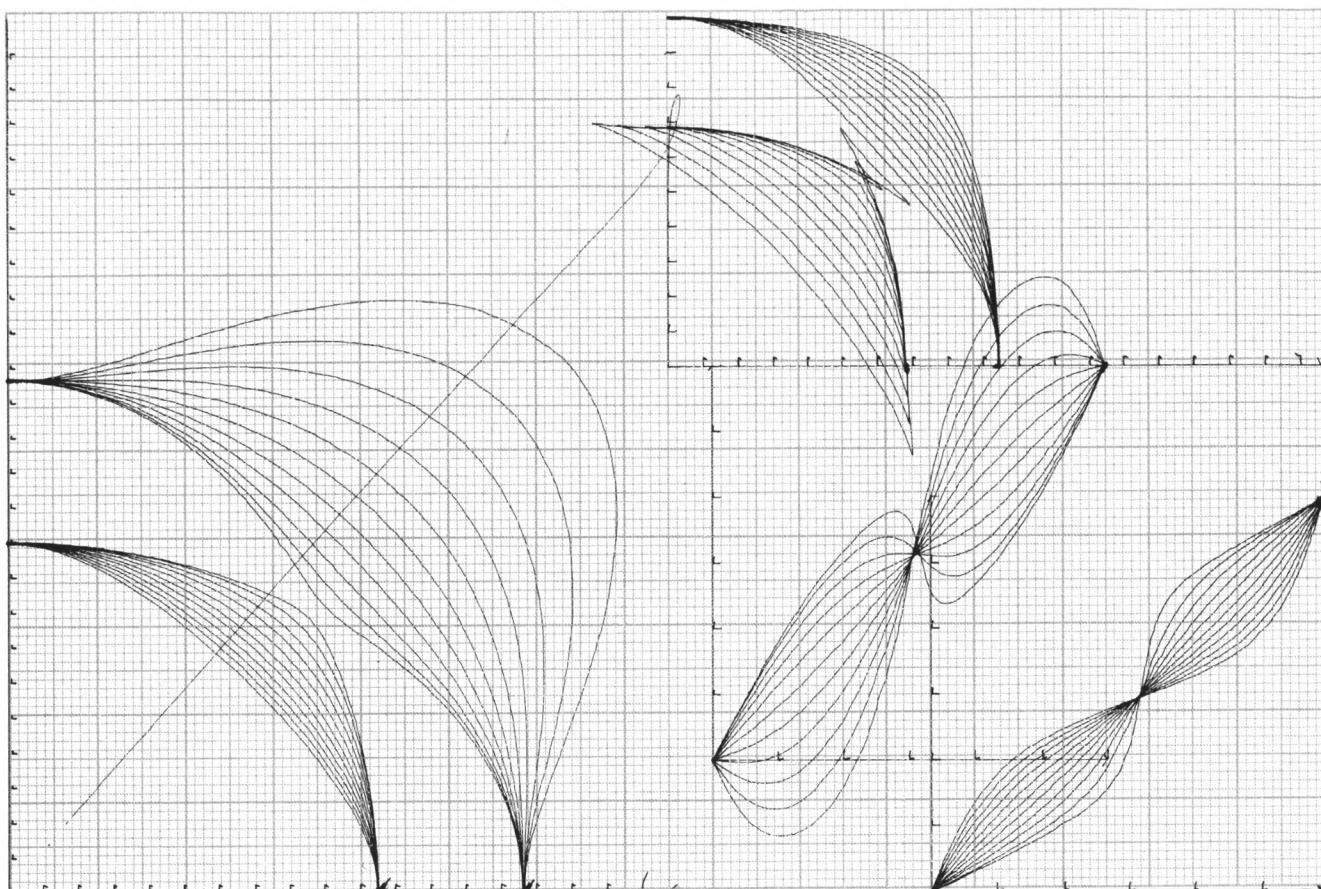
22

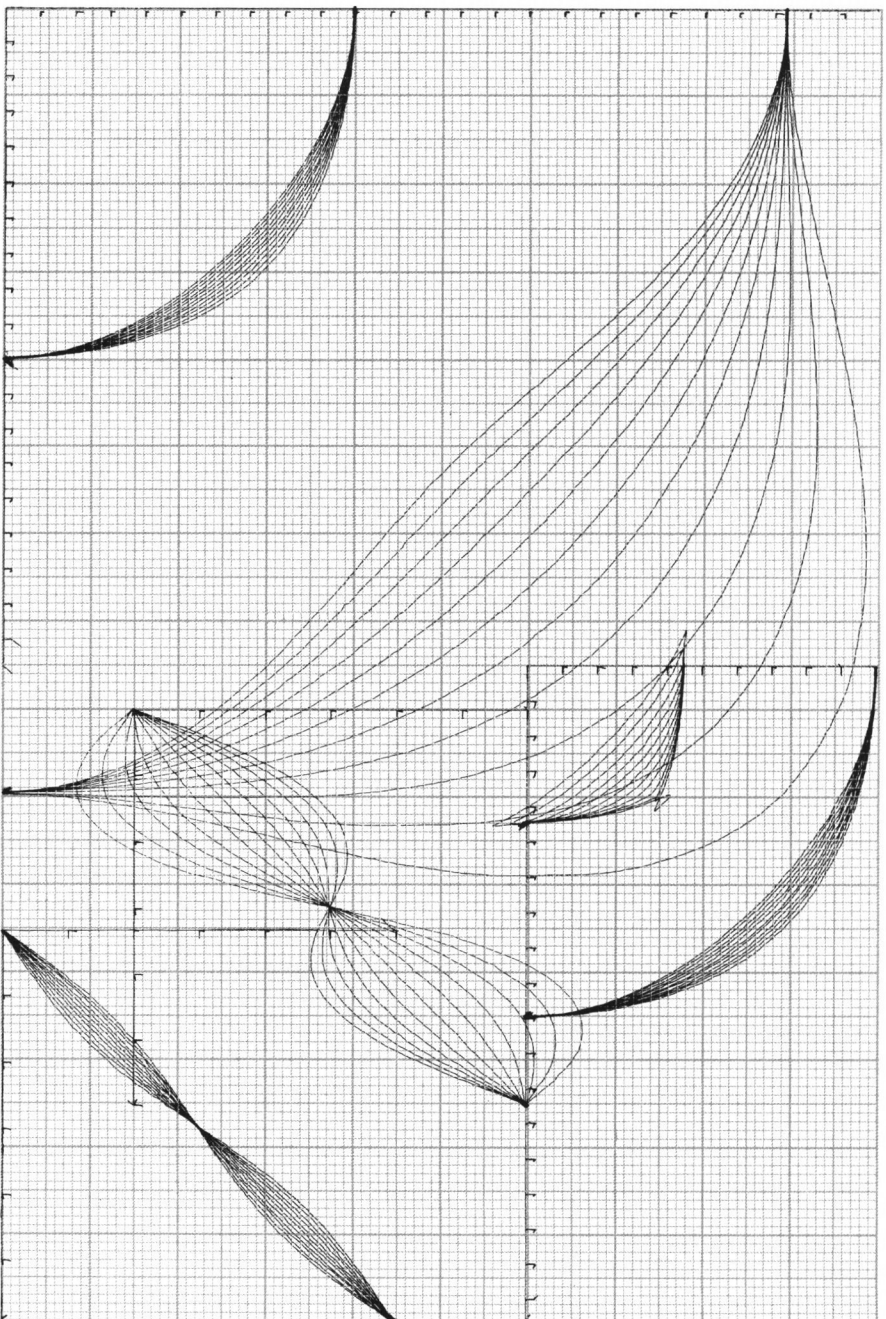


3

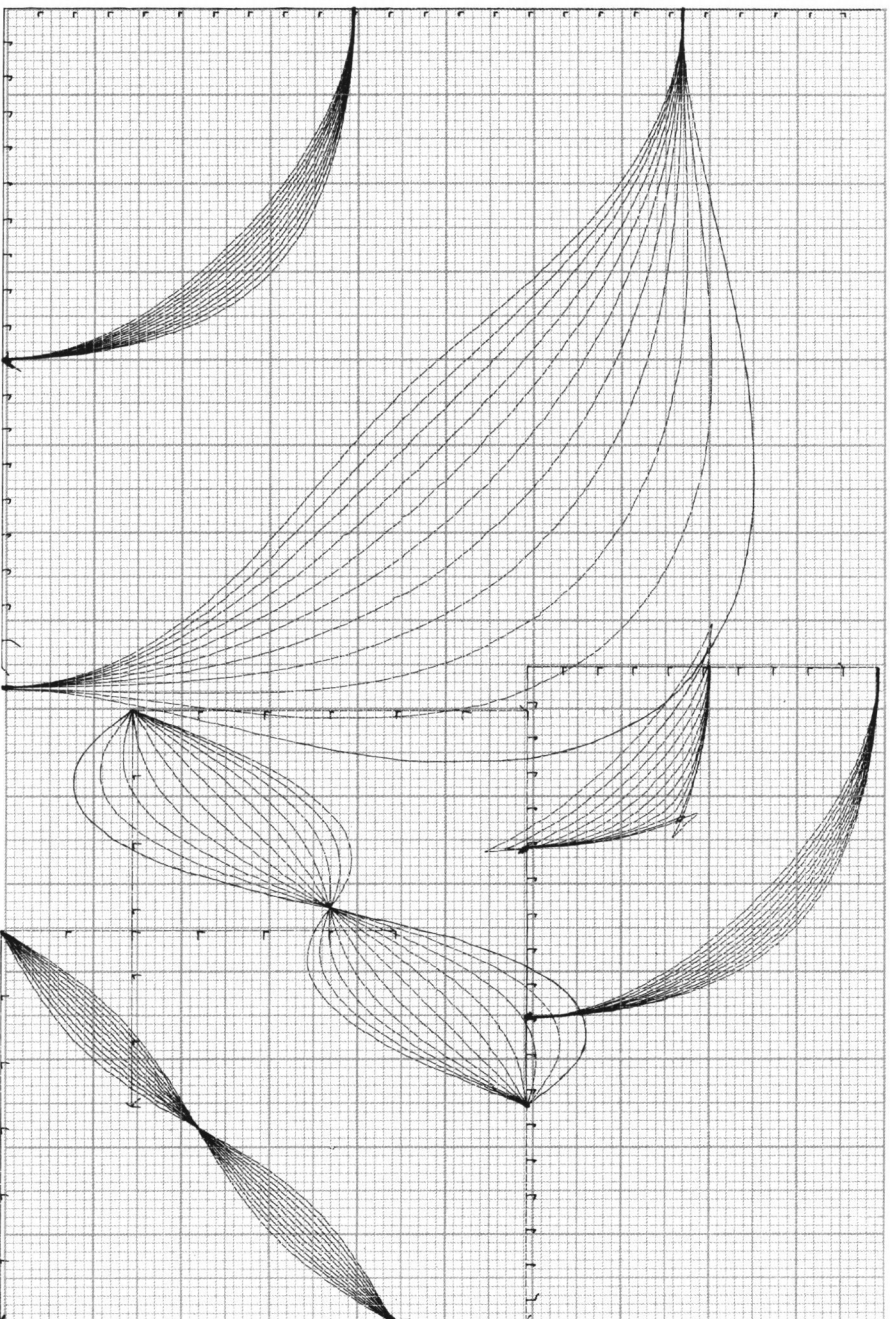


4

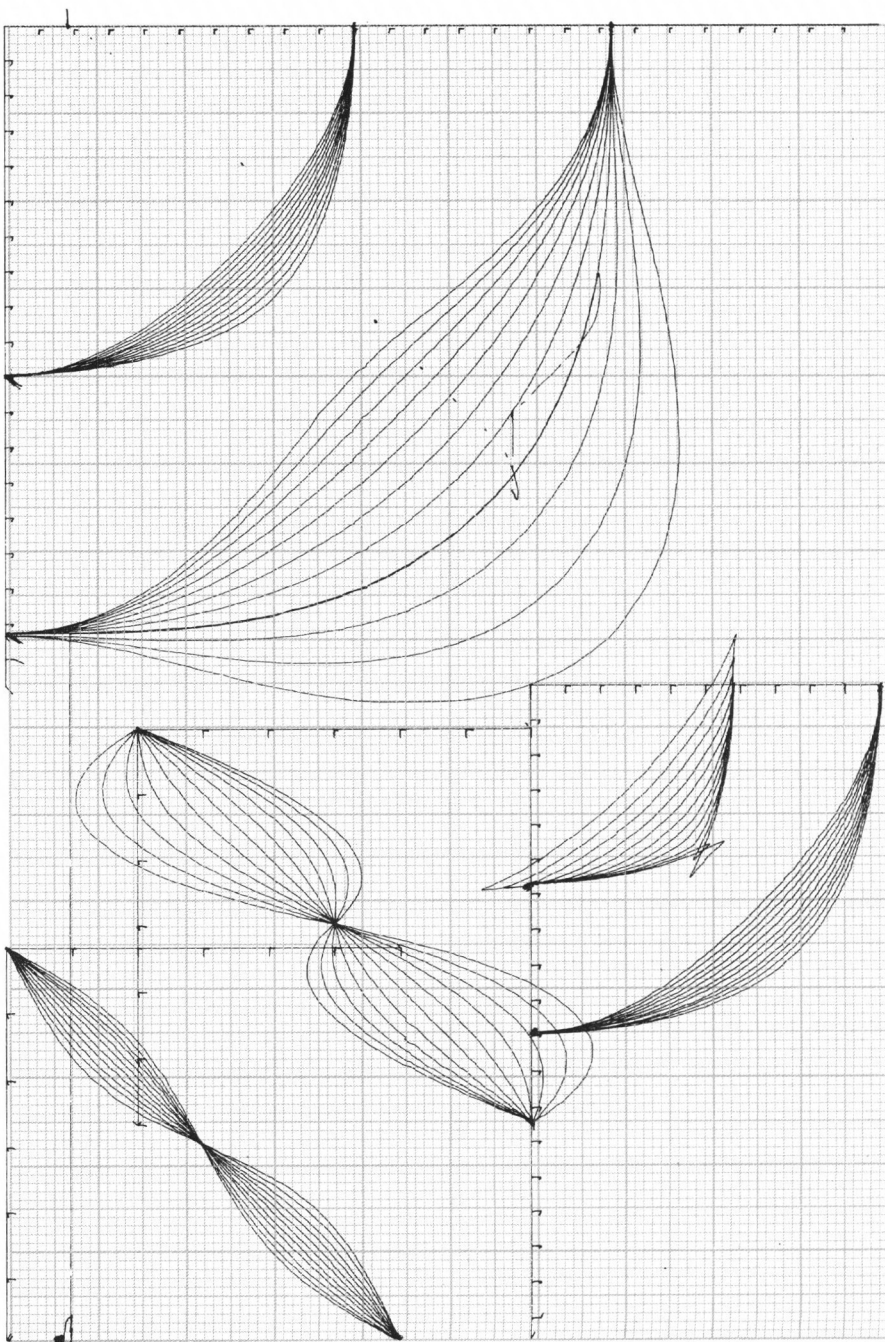




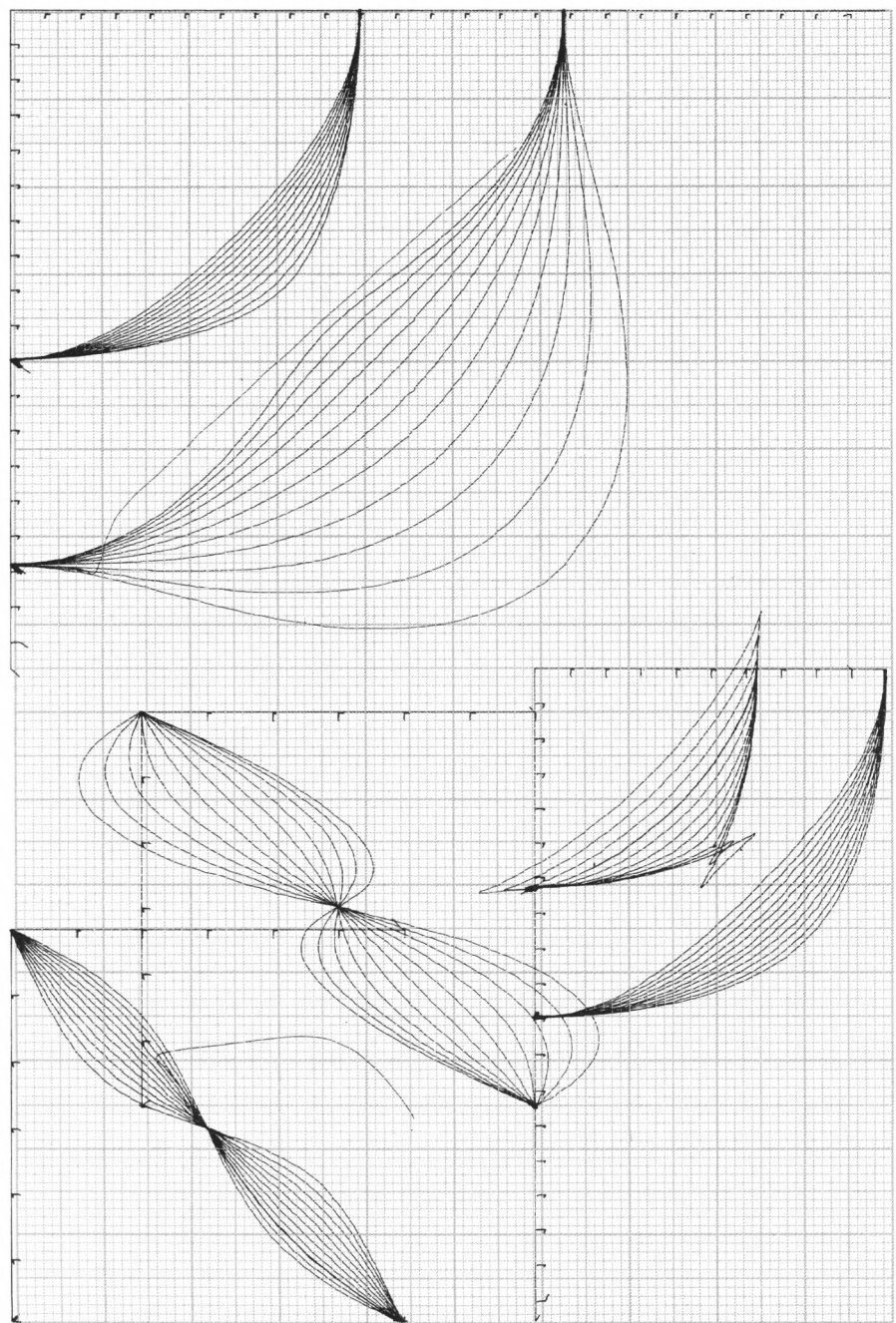
3
1



3
2

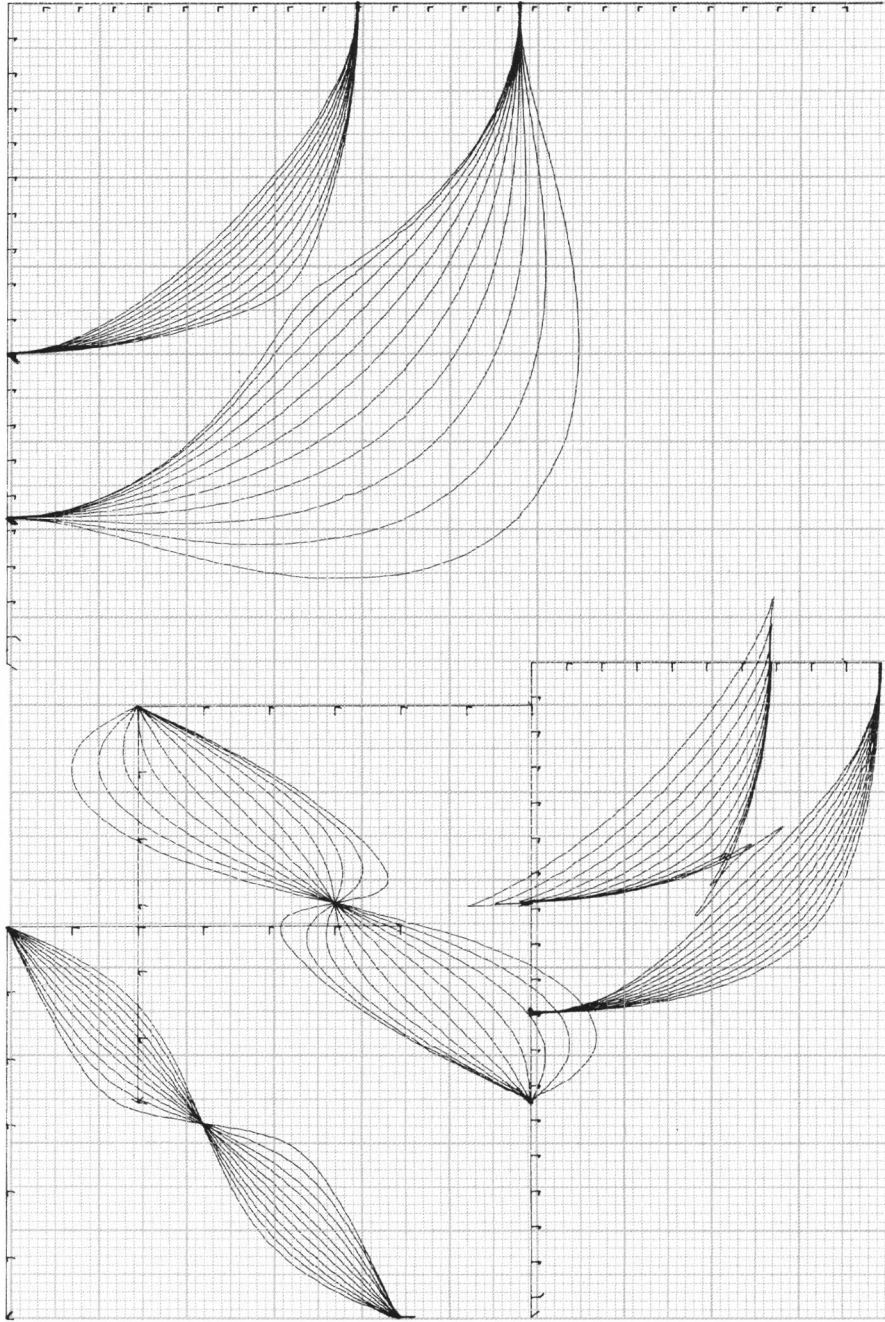


3 3

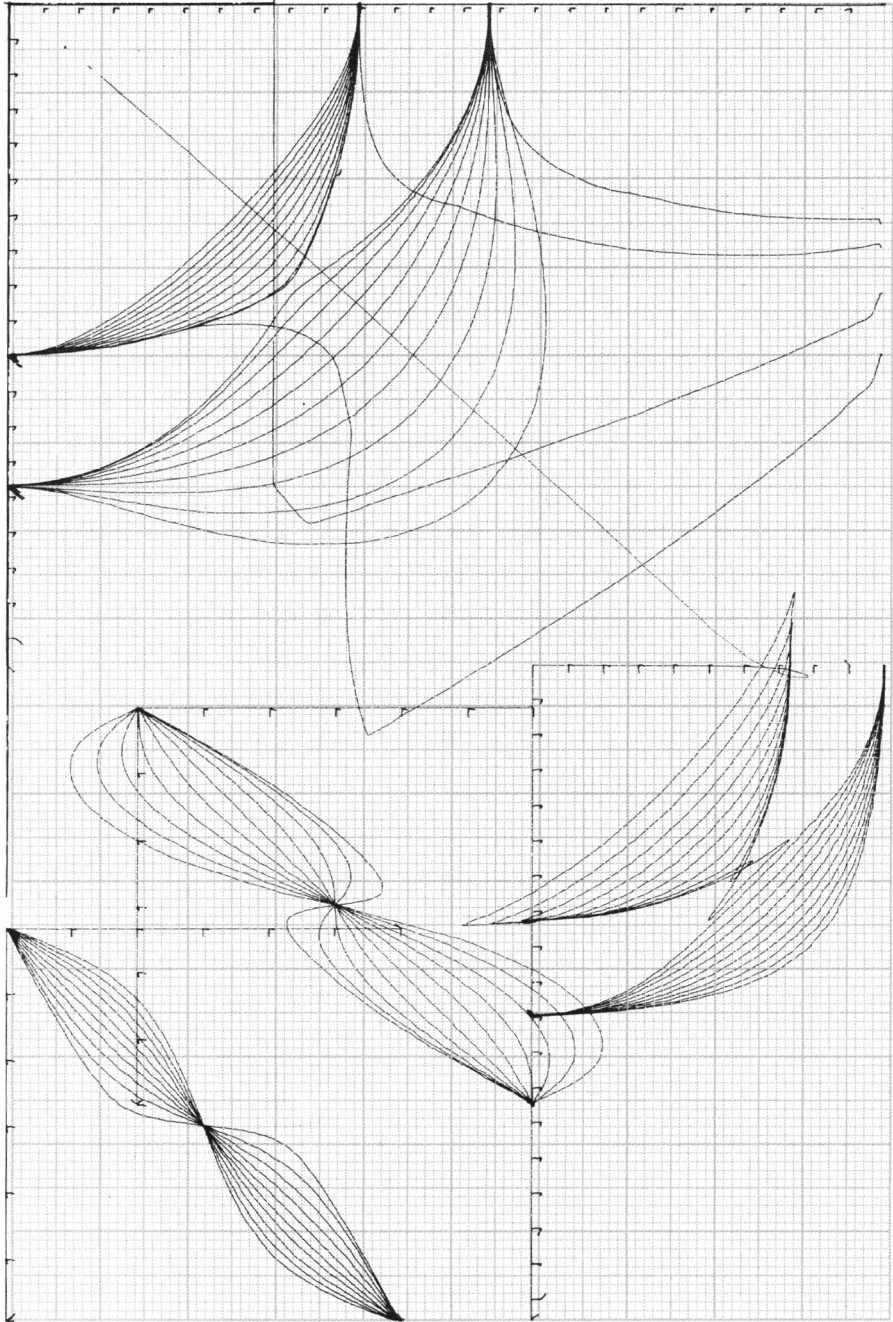


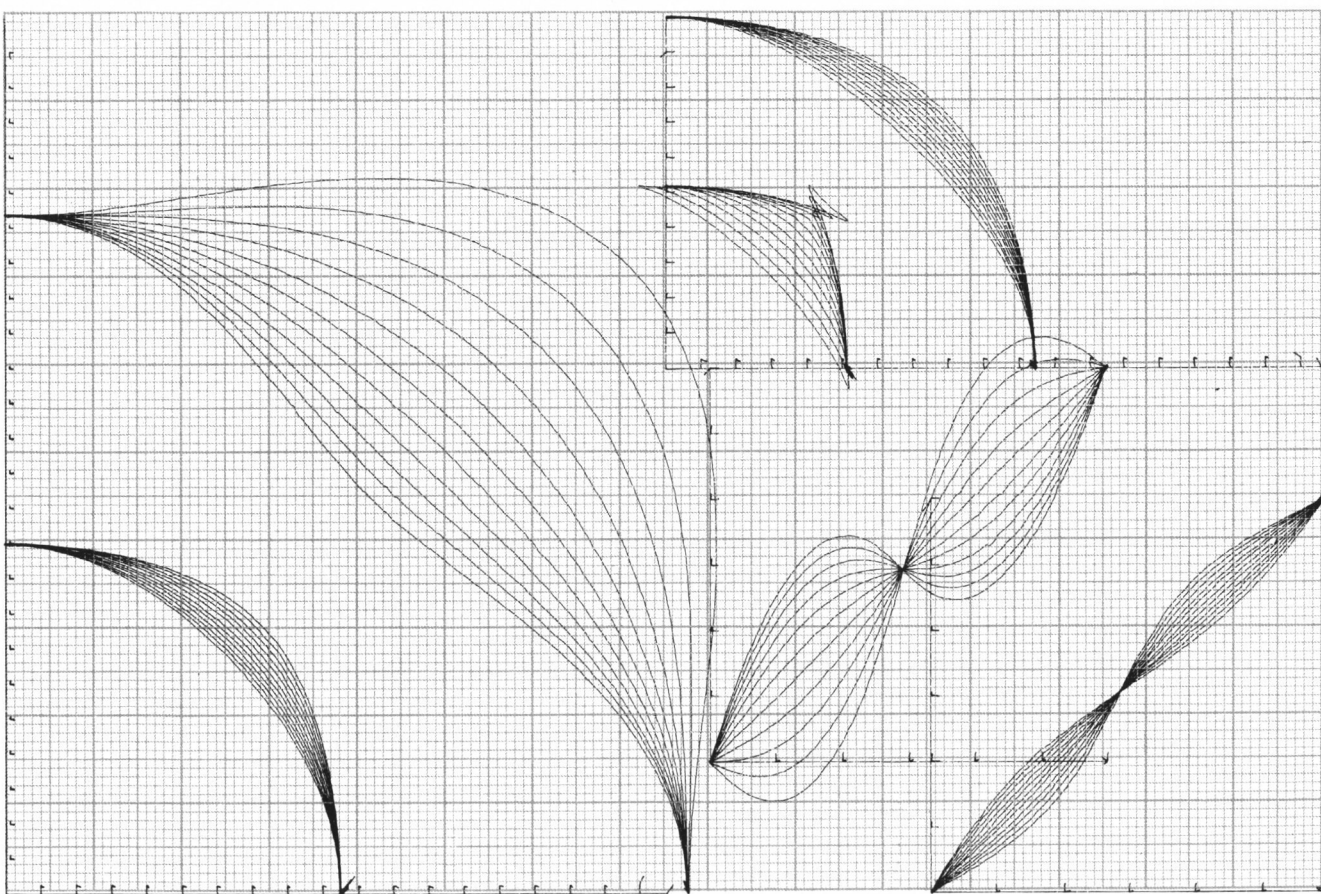
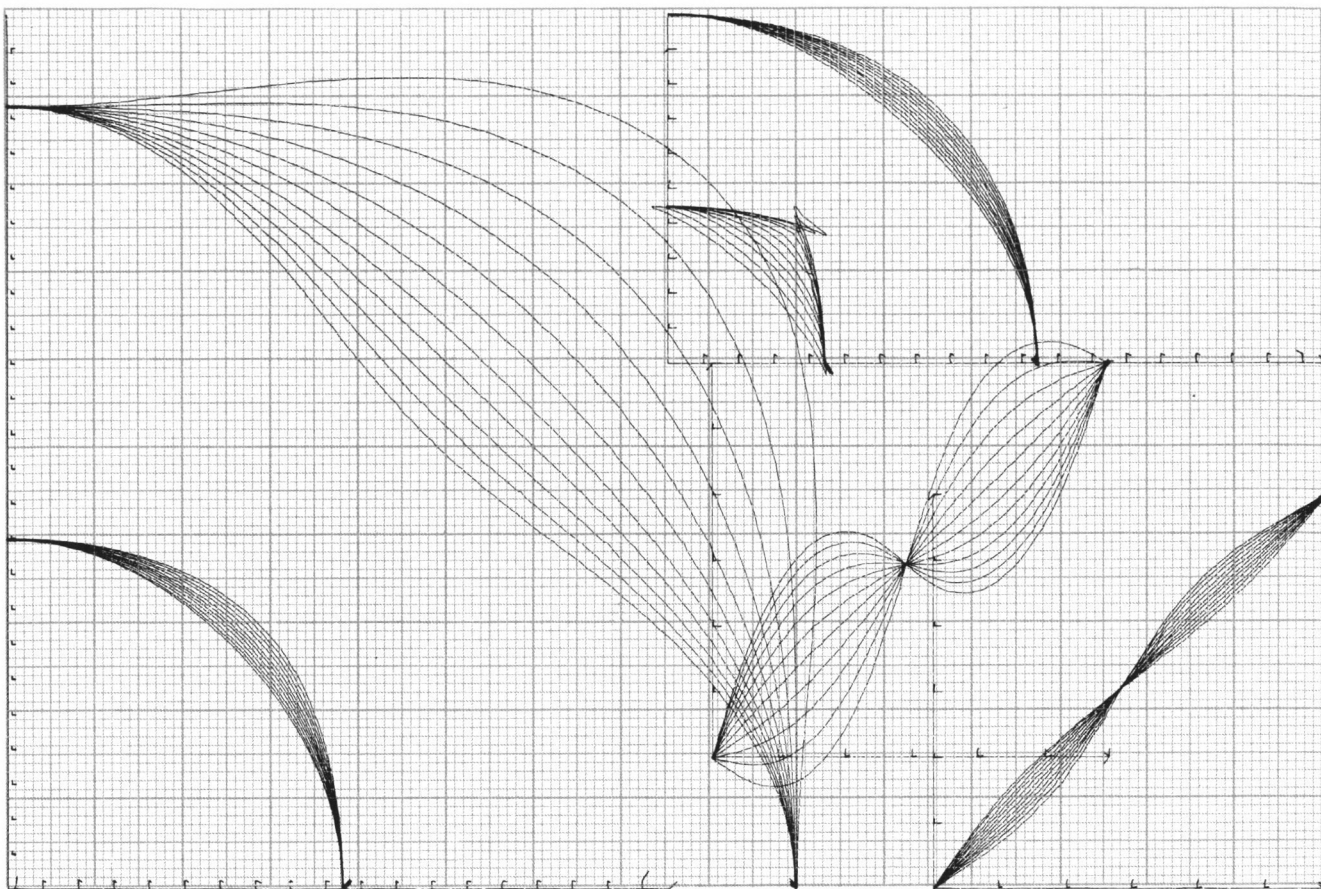
3 4

35

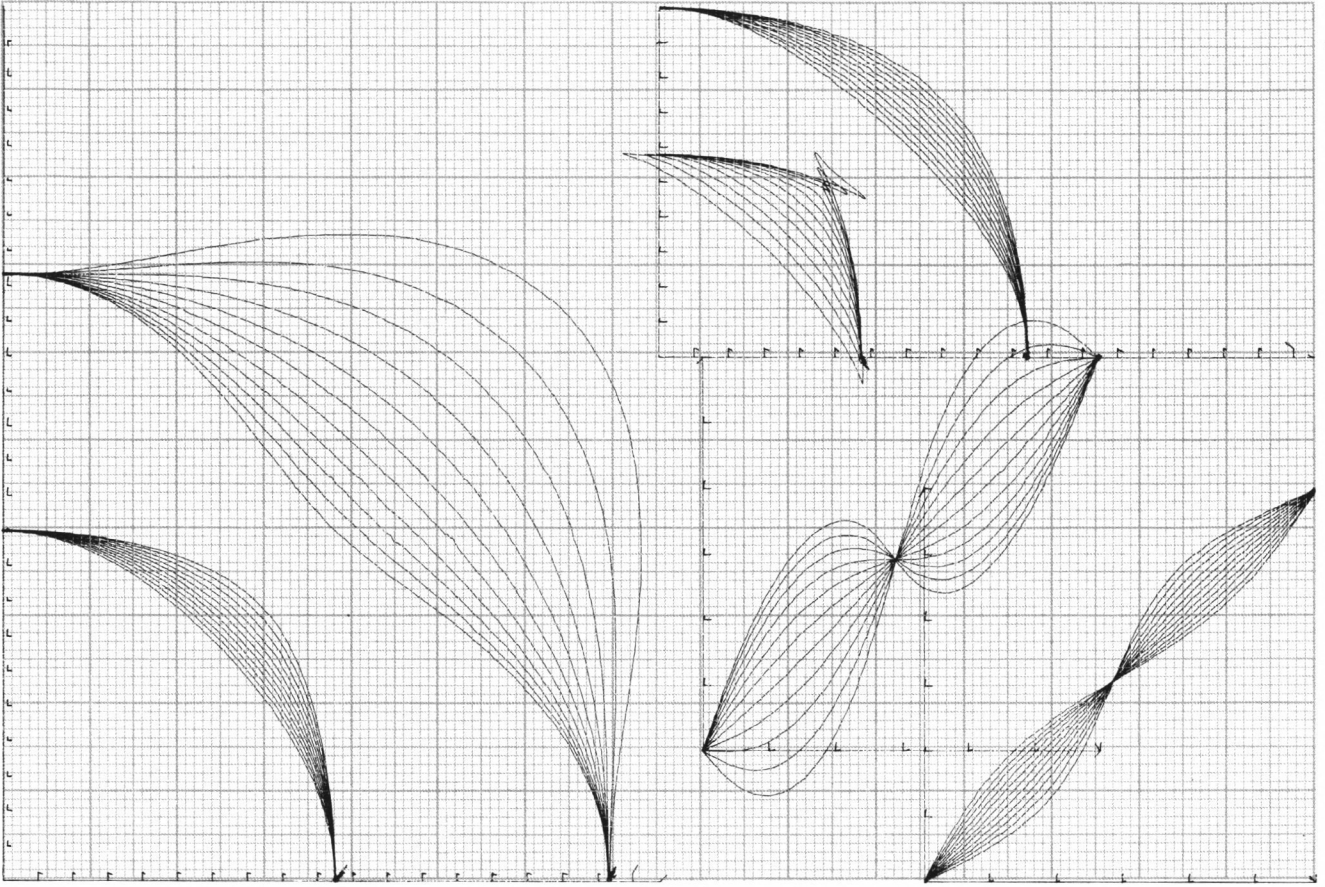


36

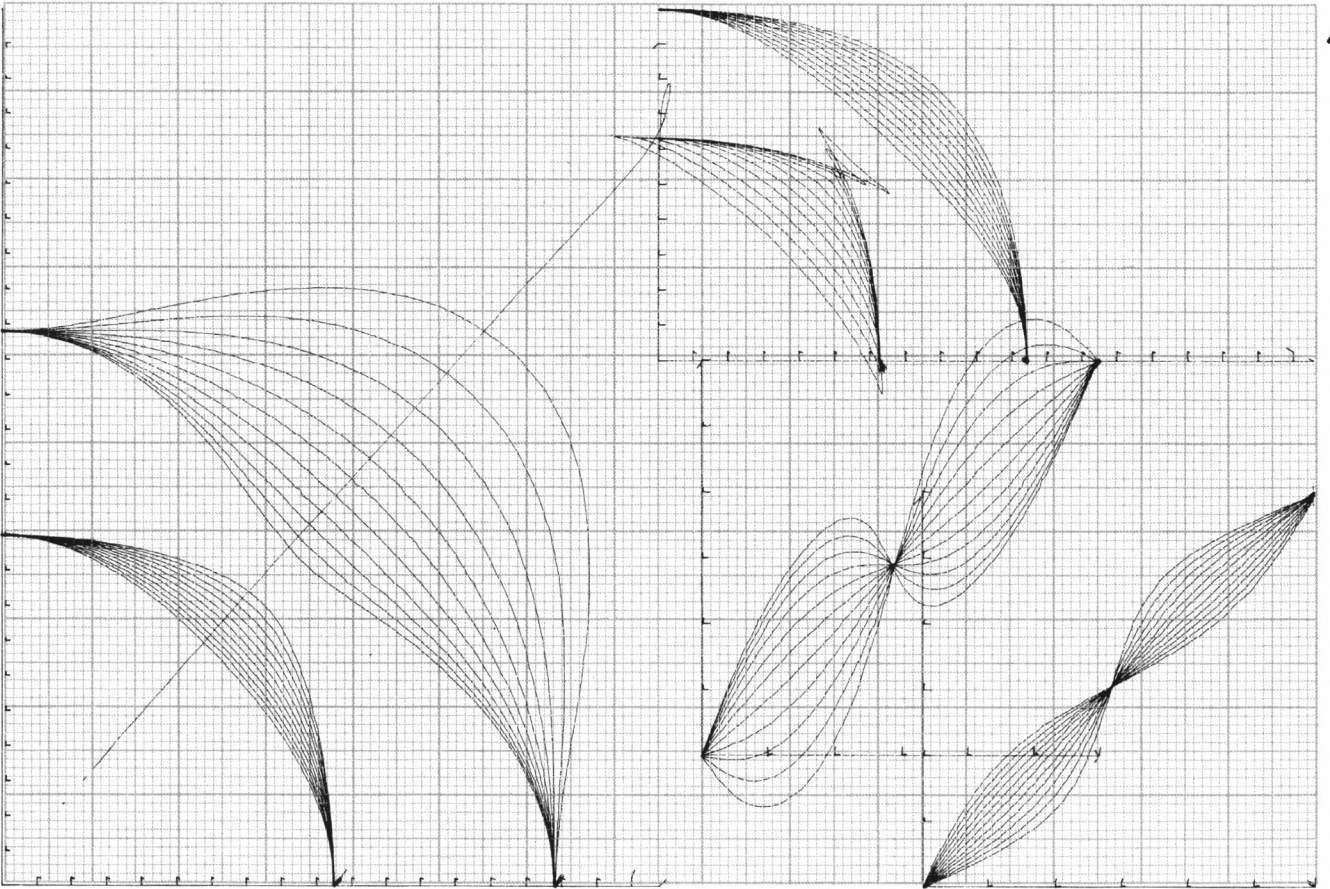


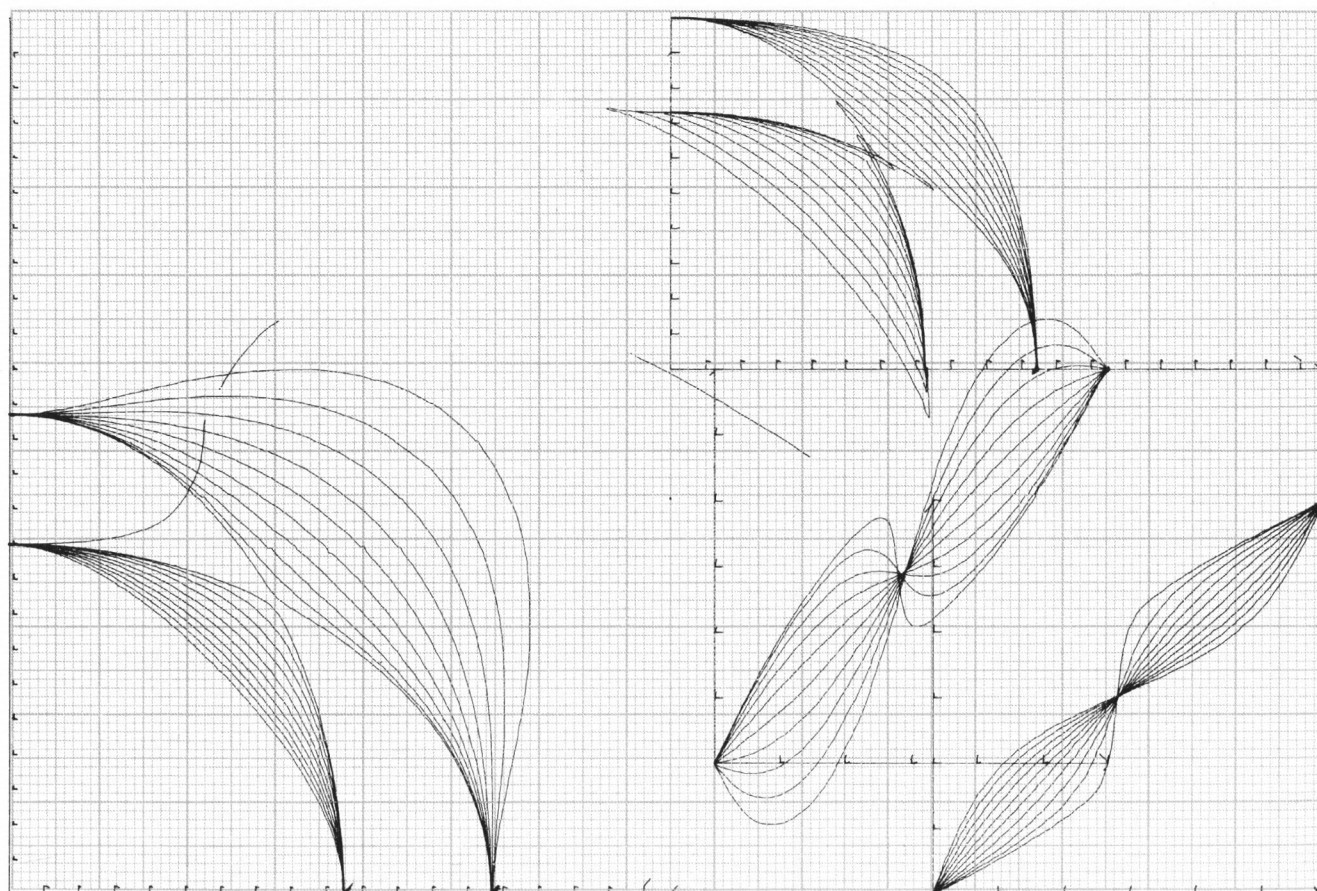
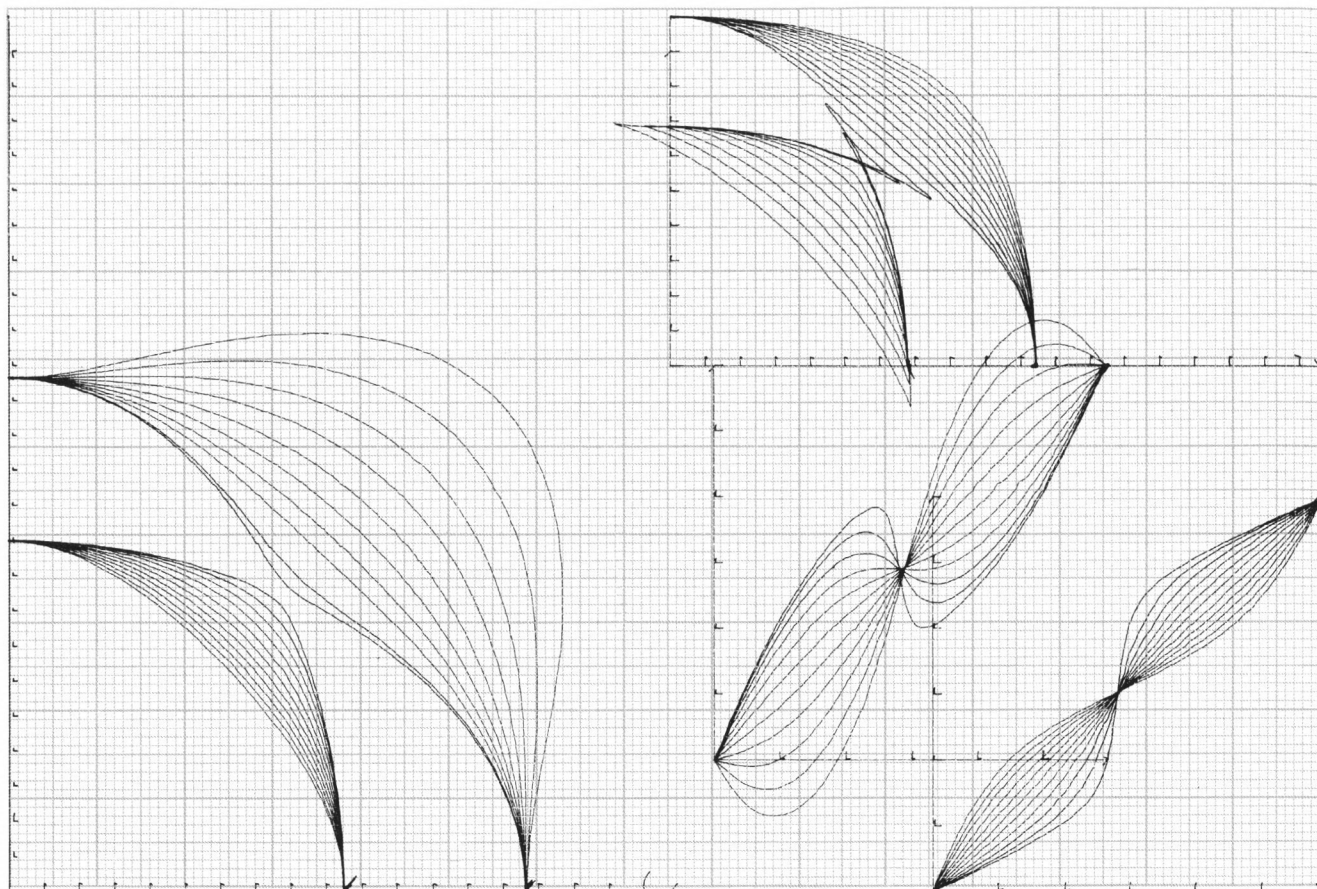


4
3

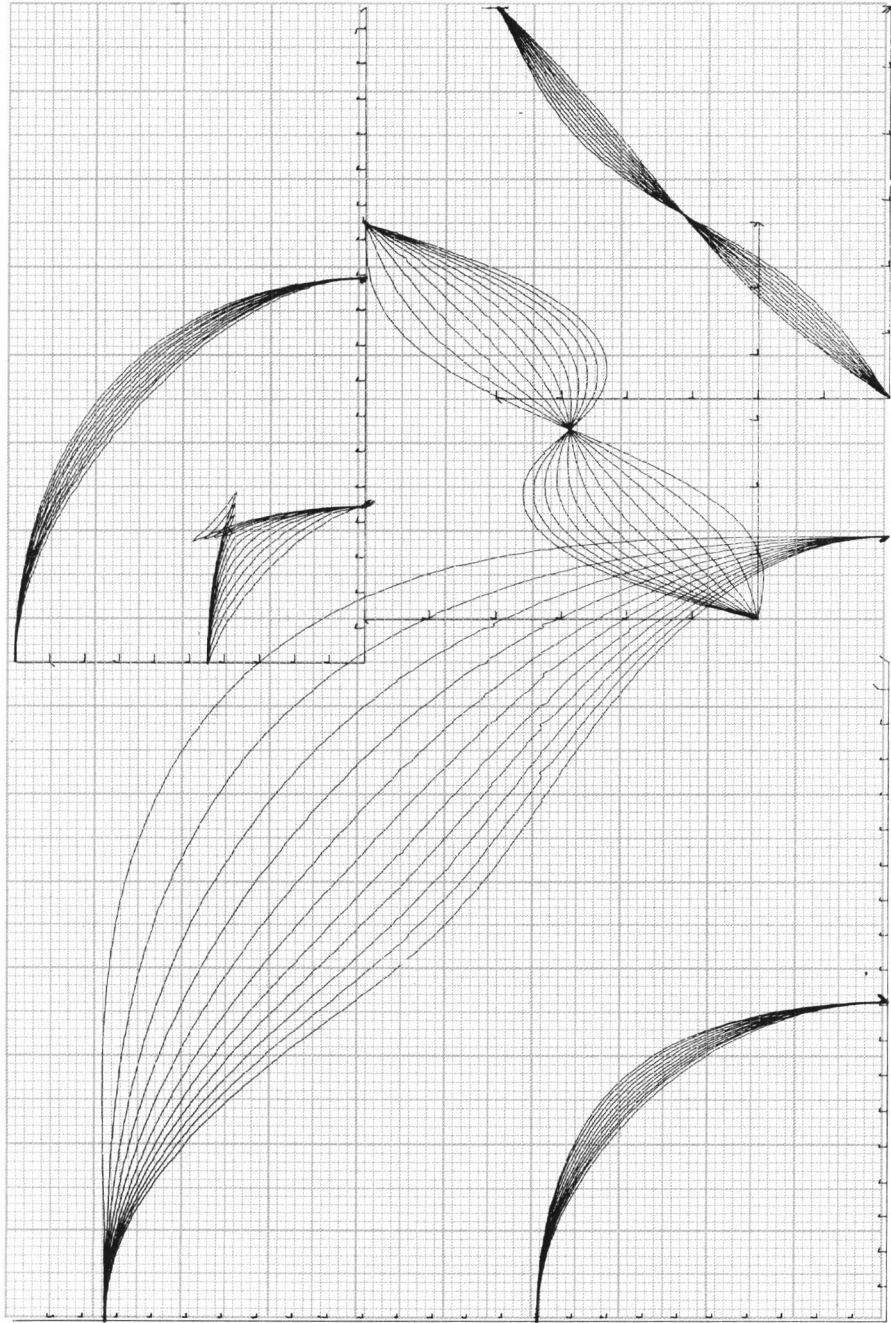


4
4

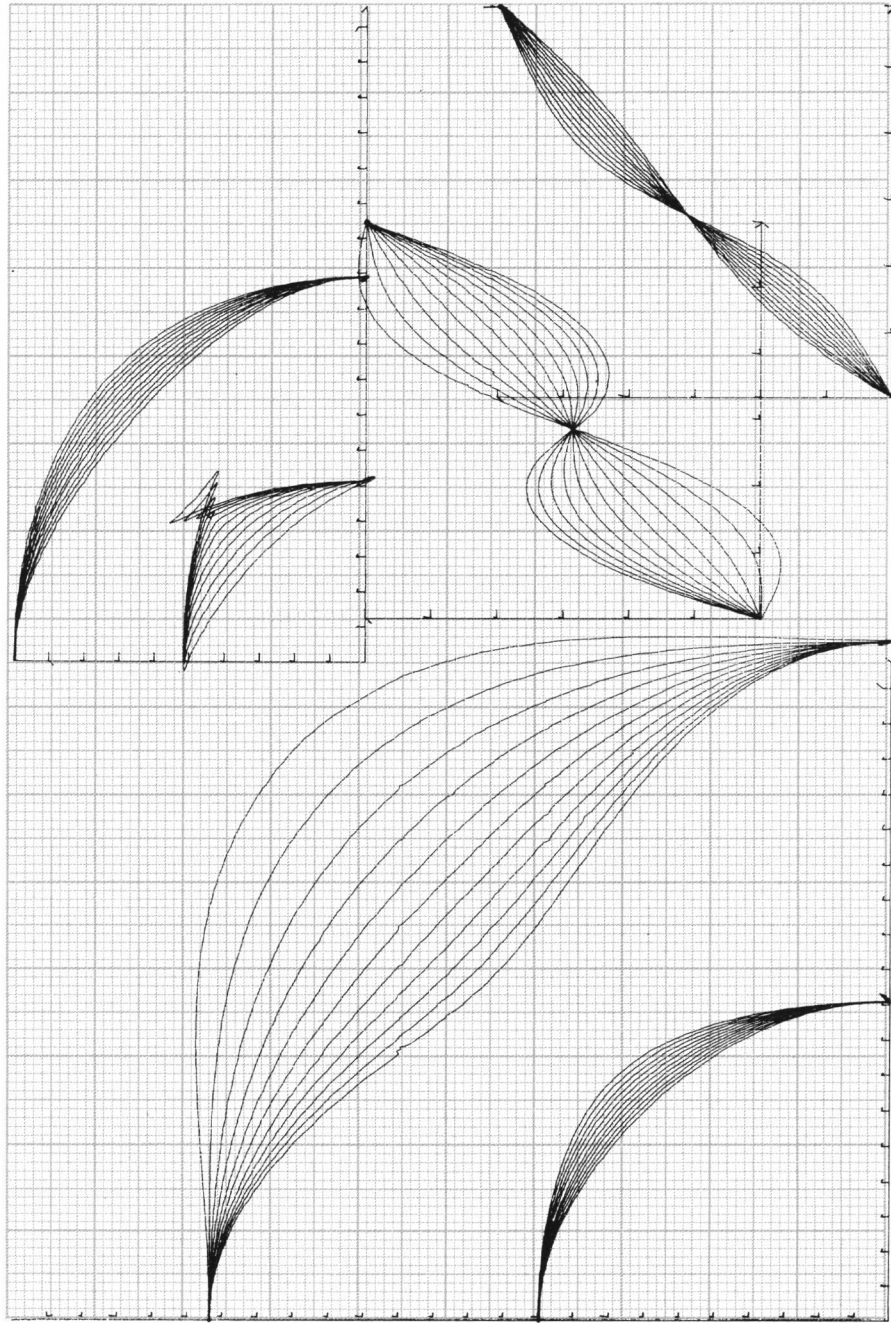


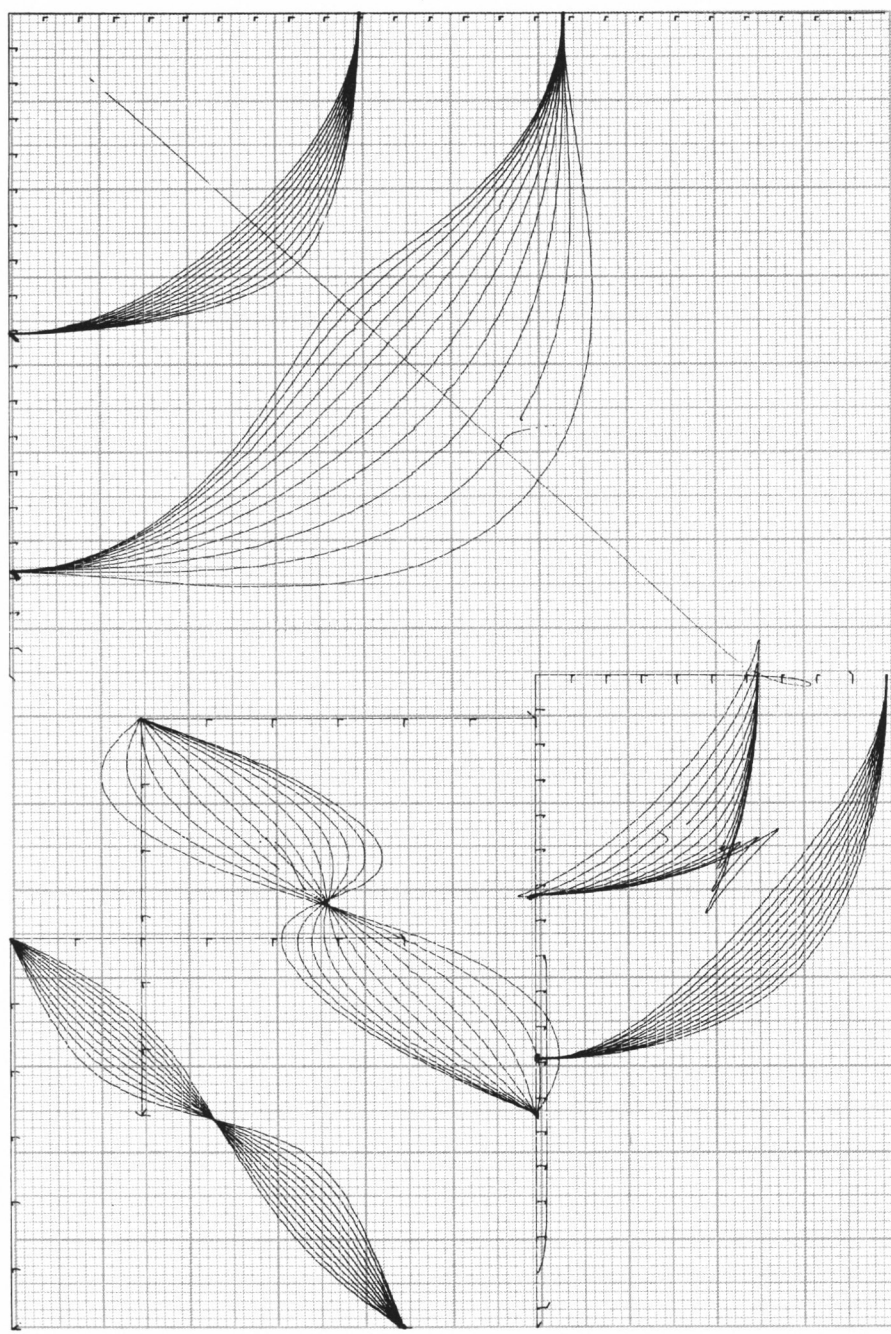
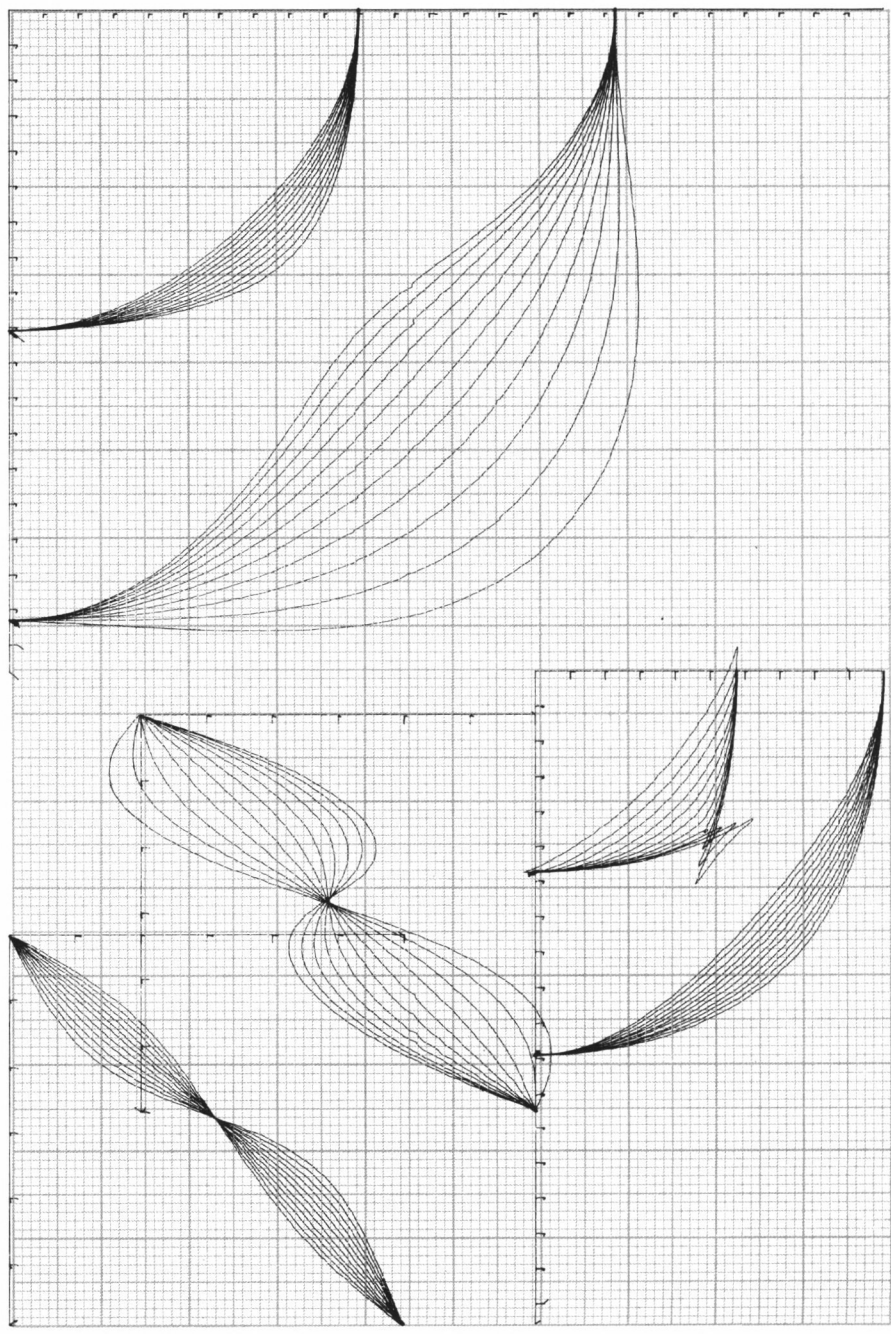


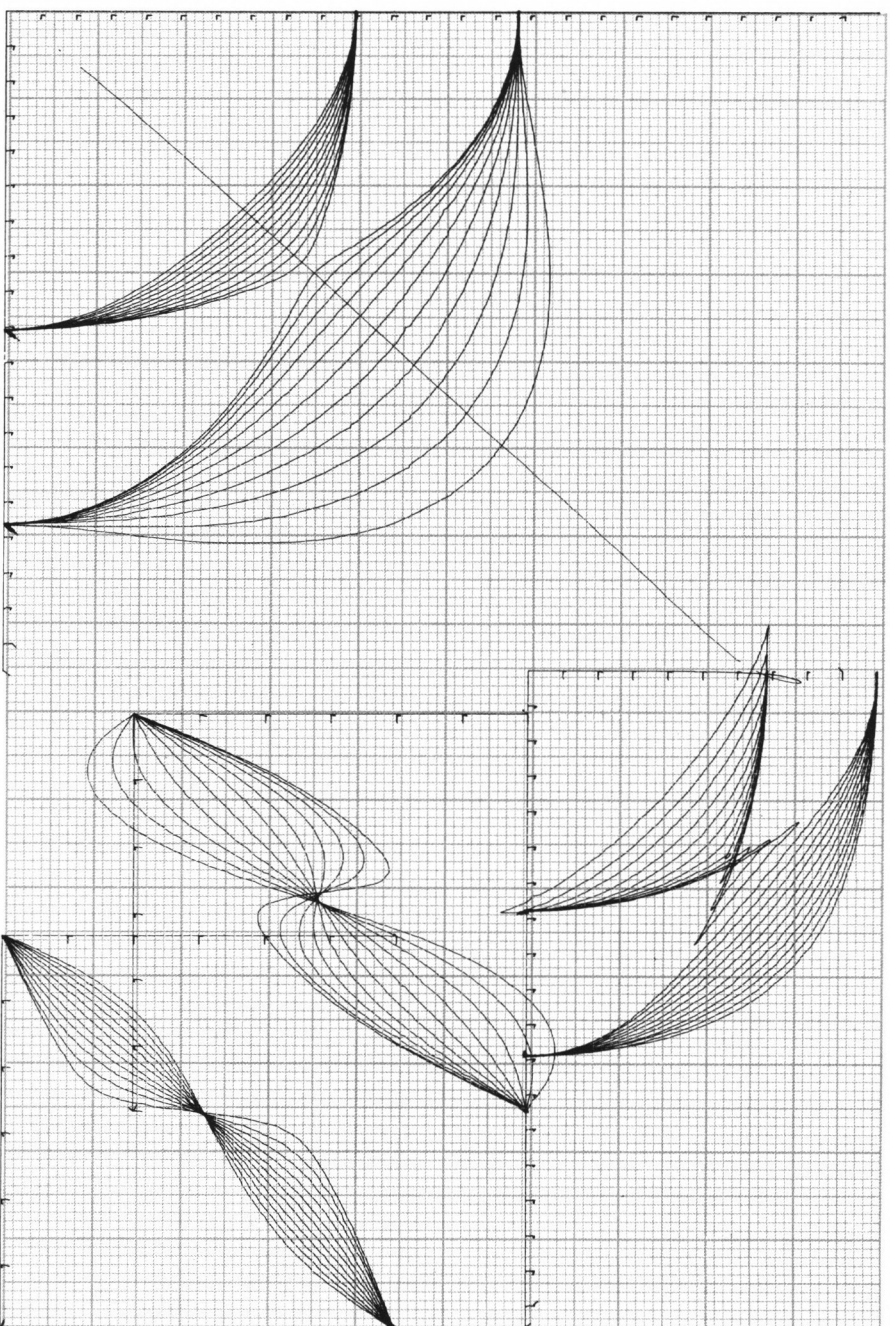
5 1



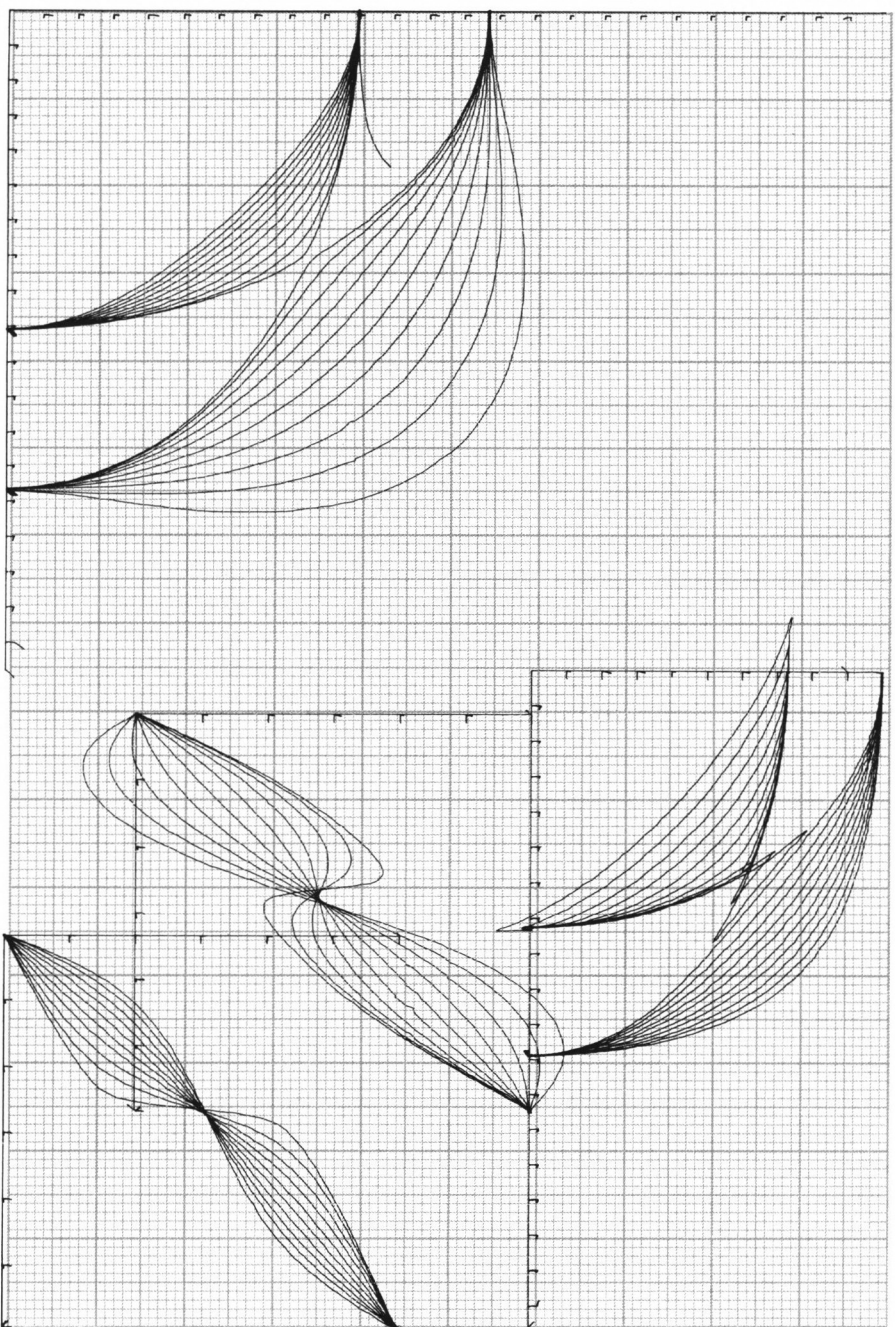
5 2



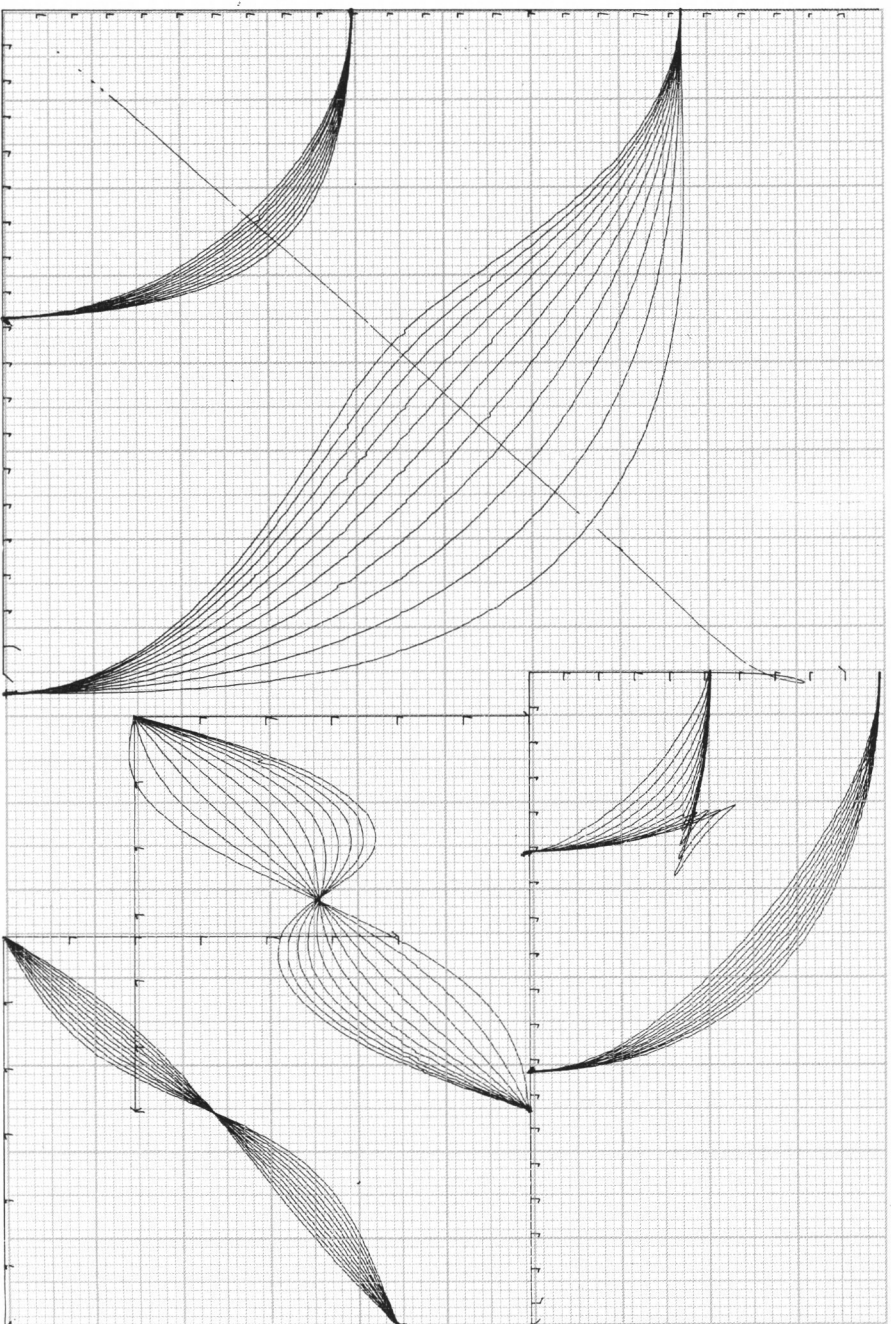
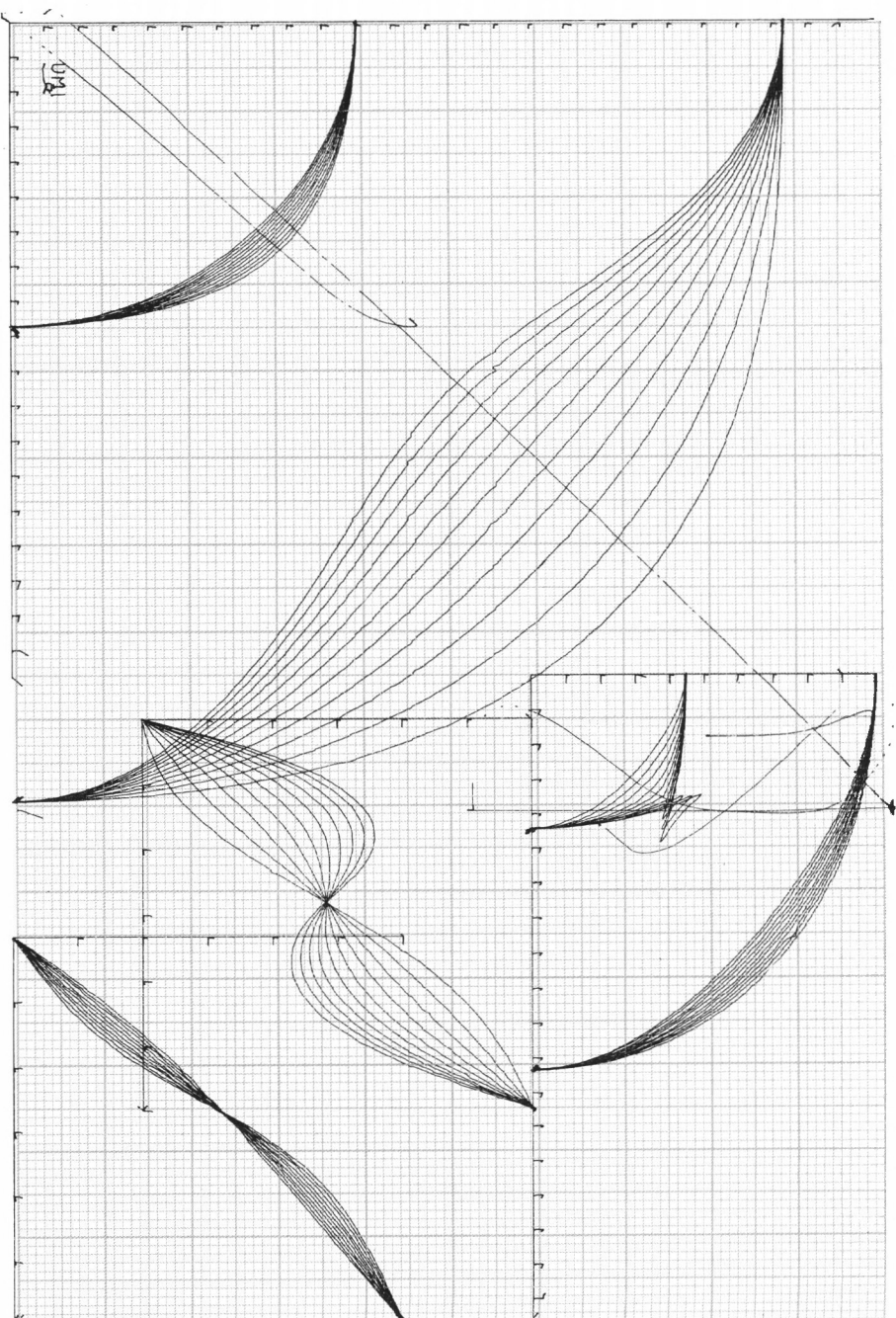




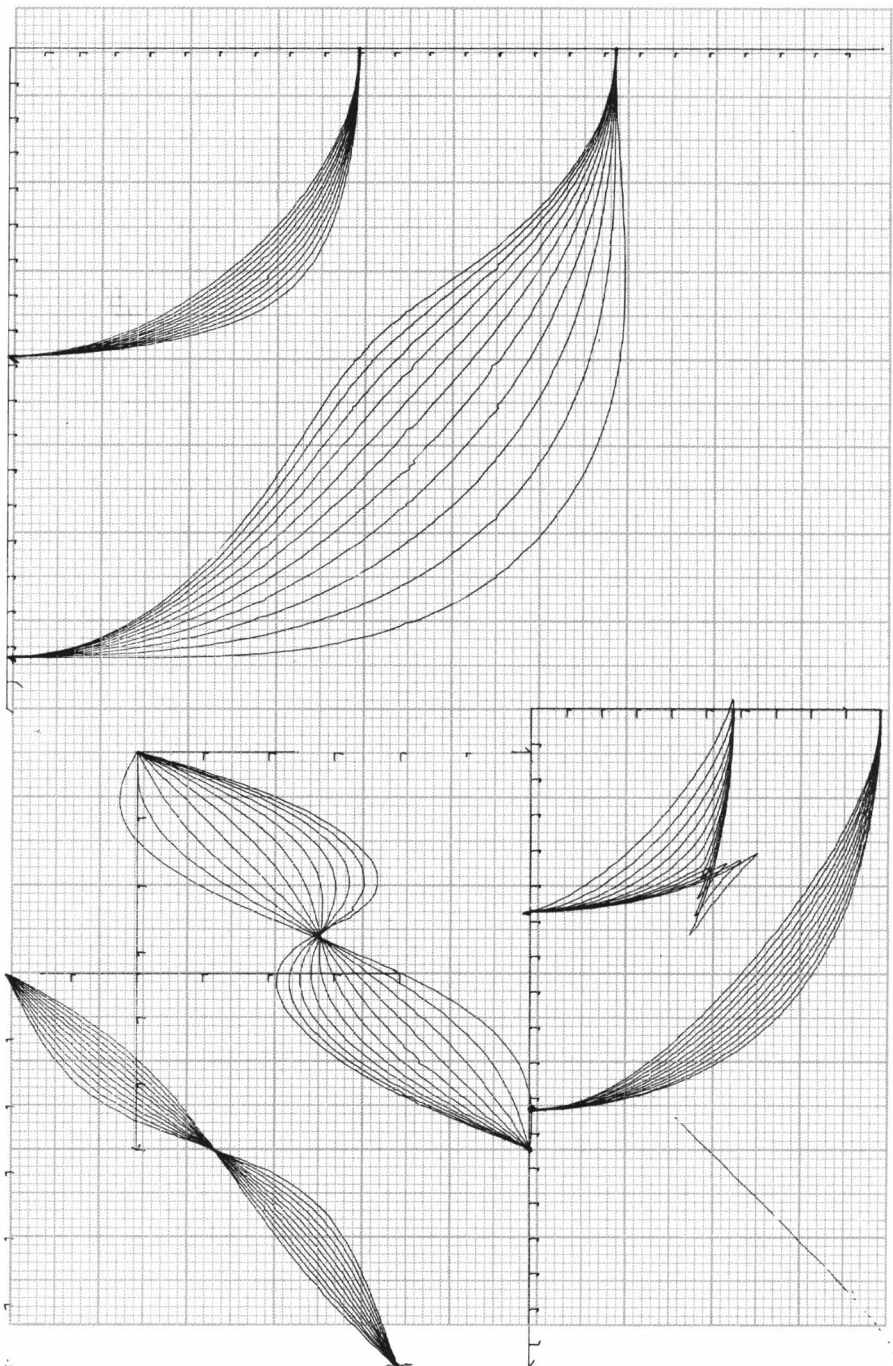
55



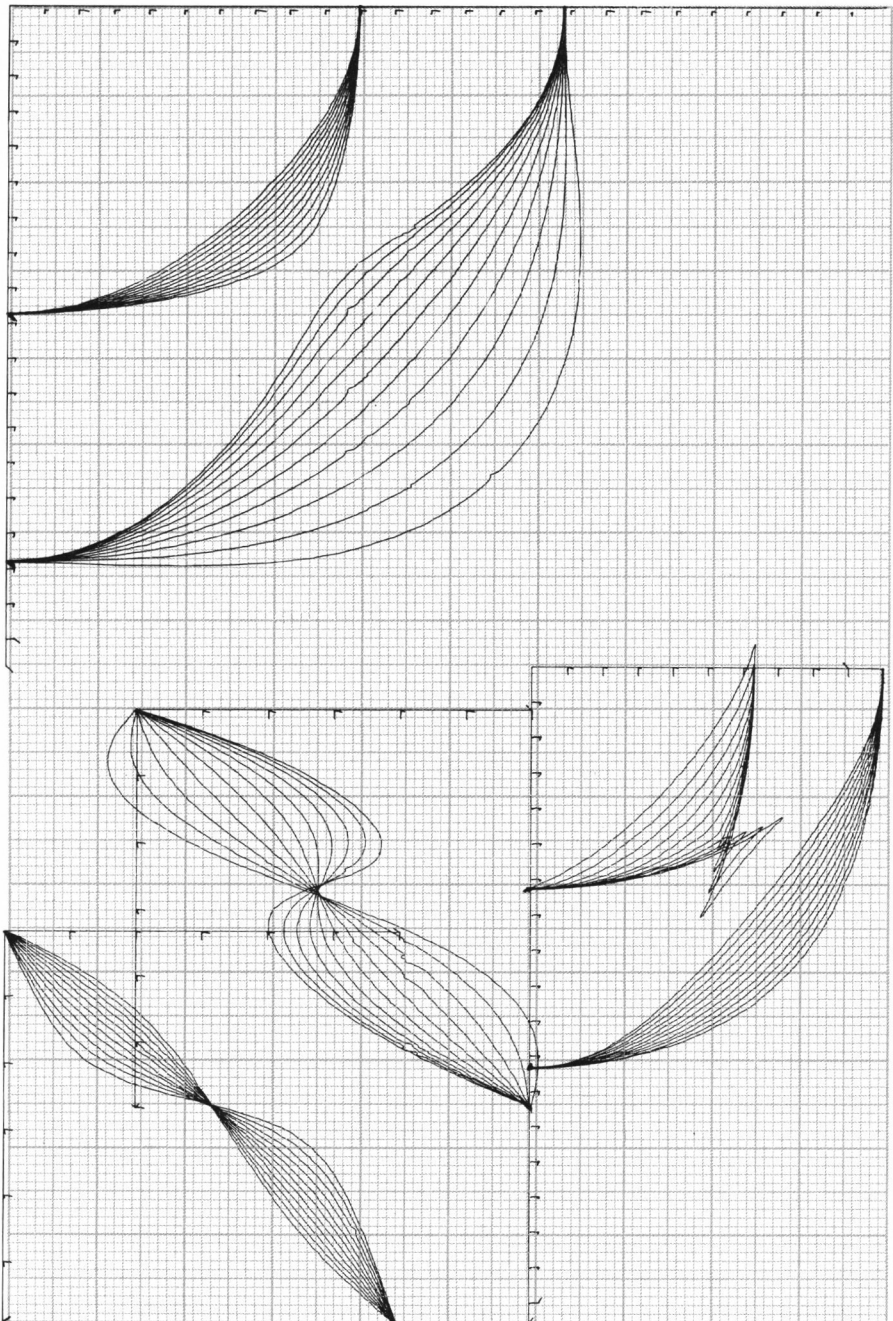
56

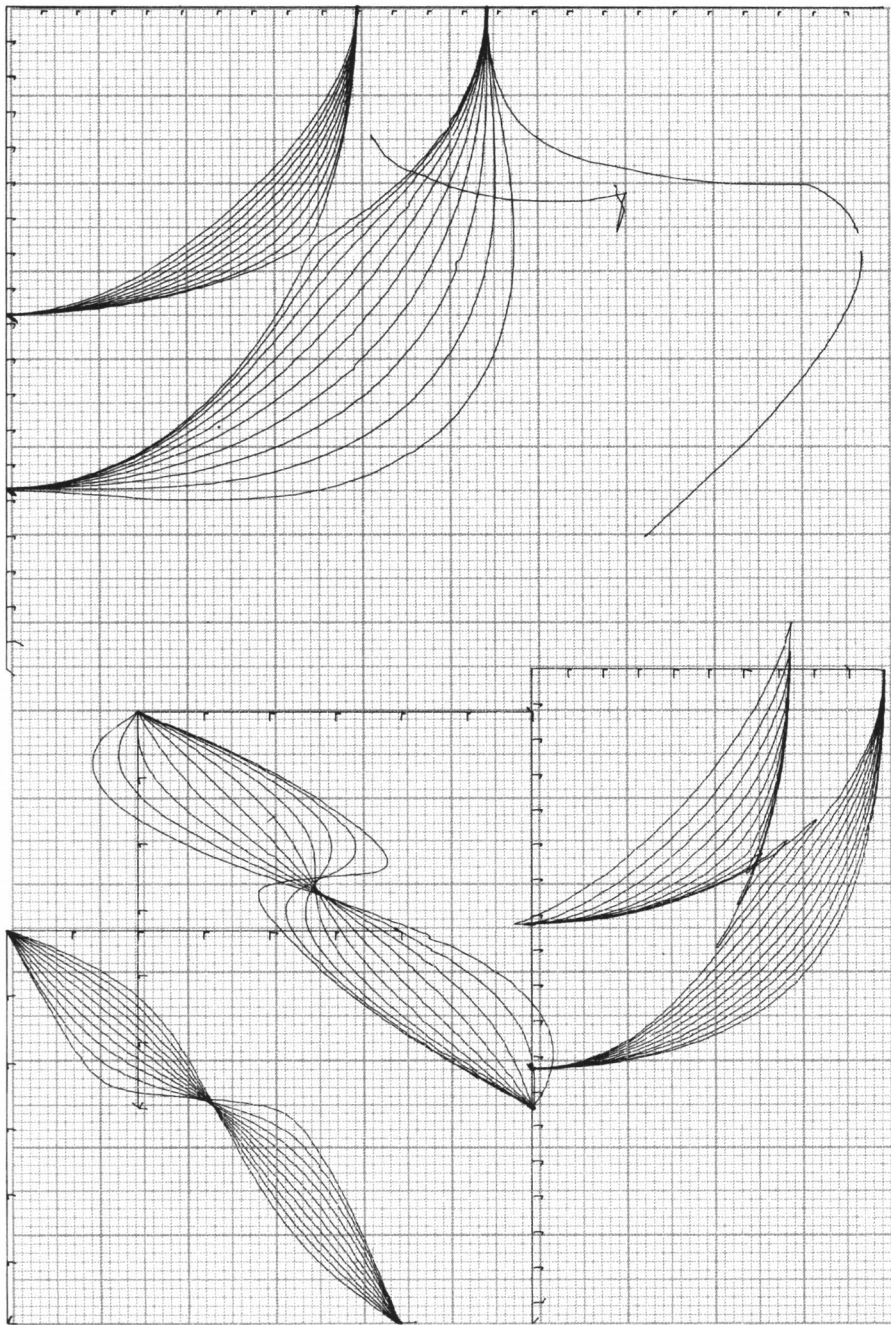
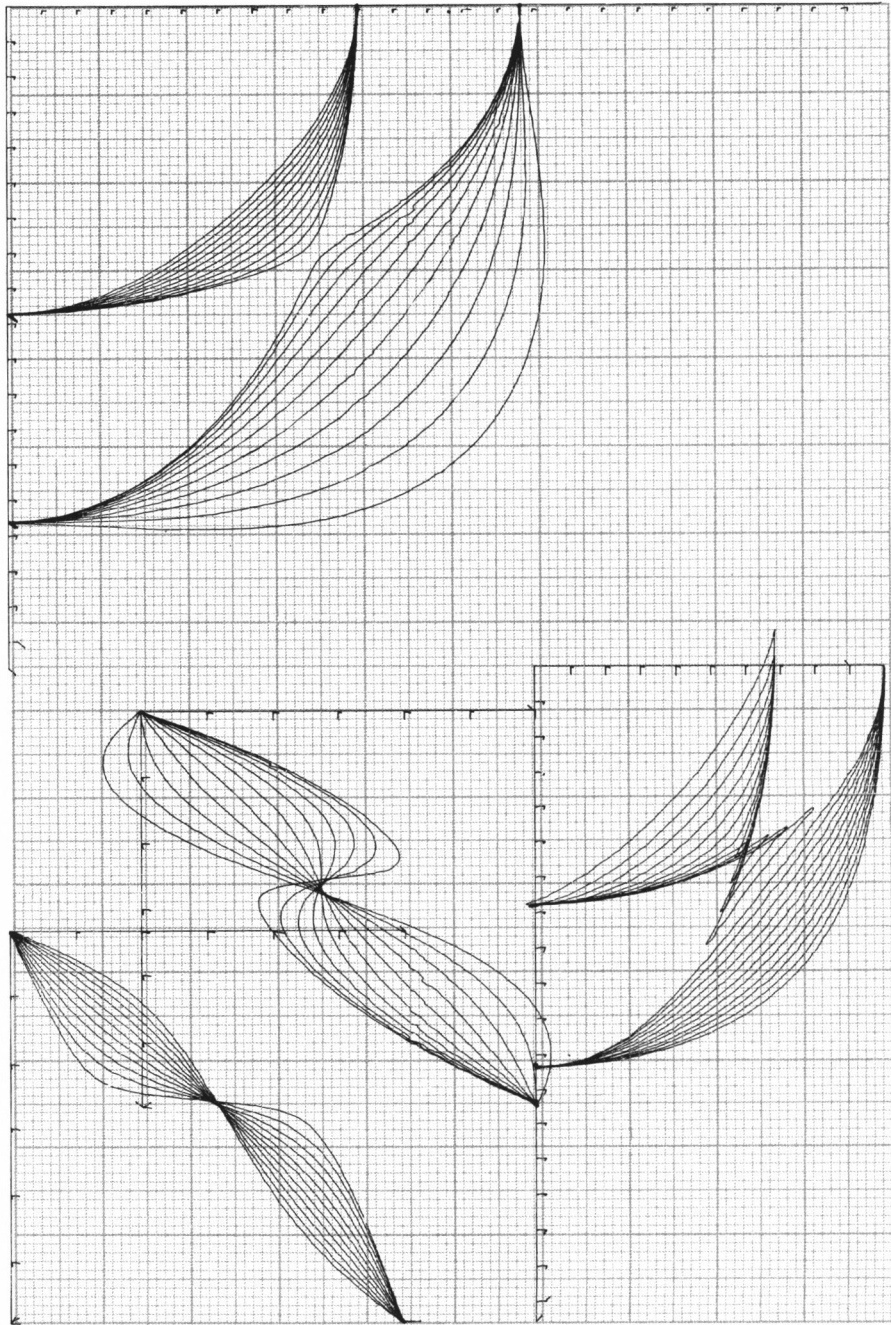


6 3

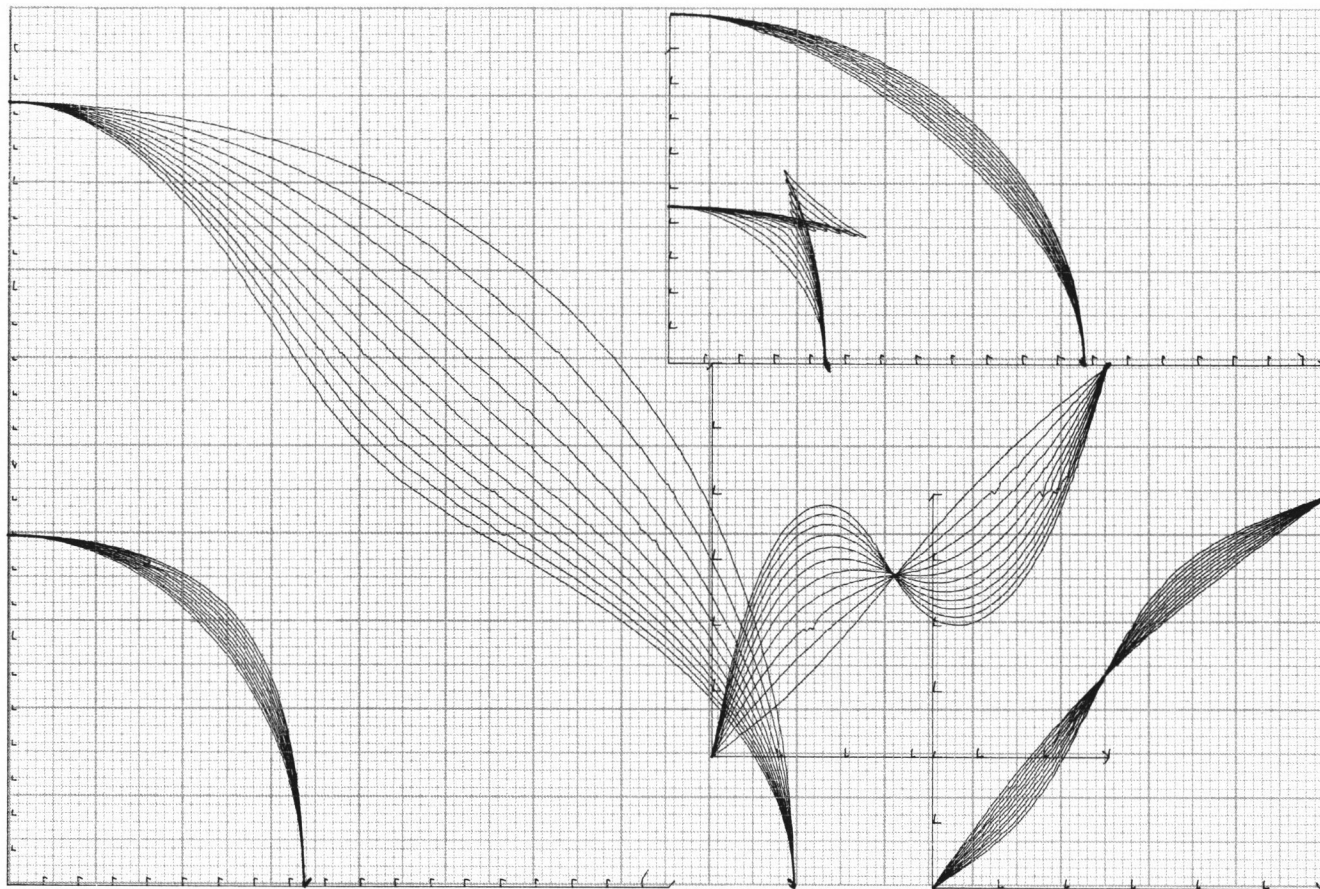


6 4

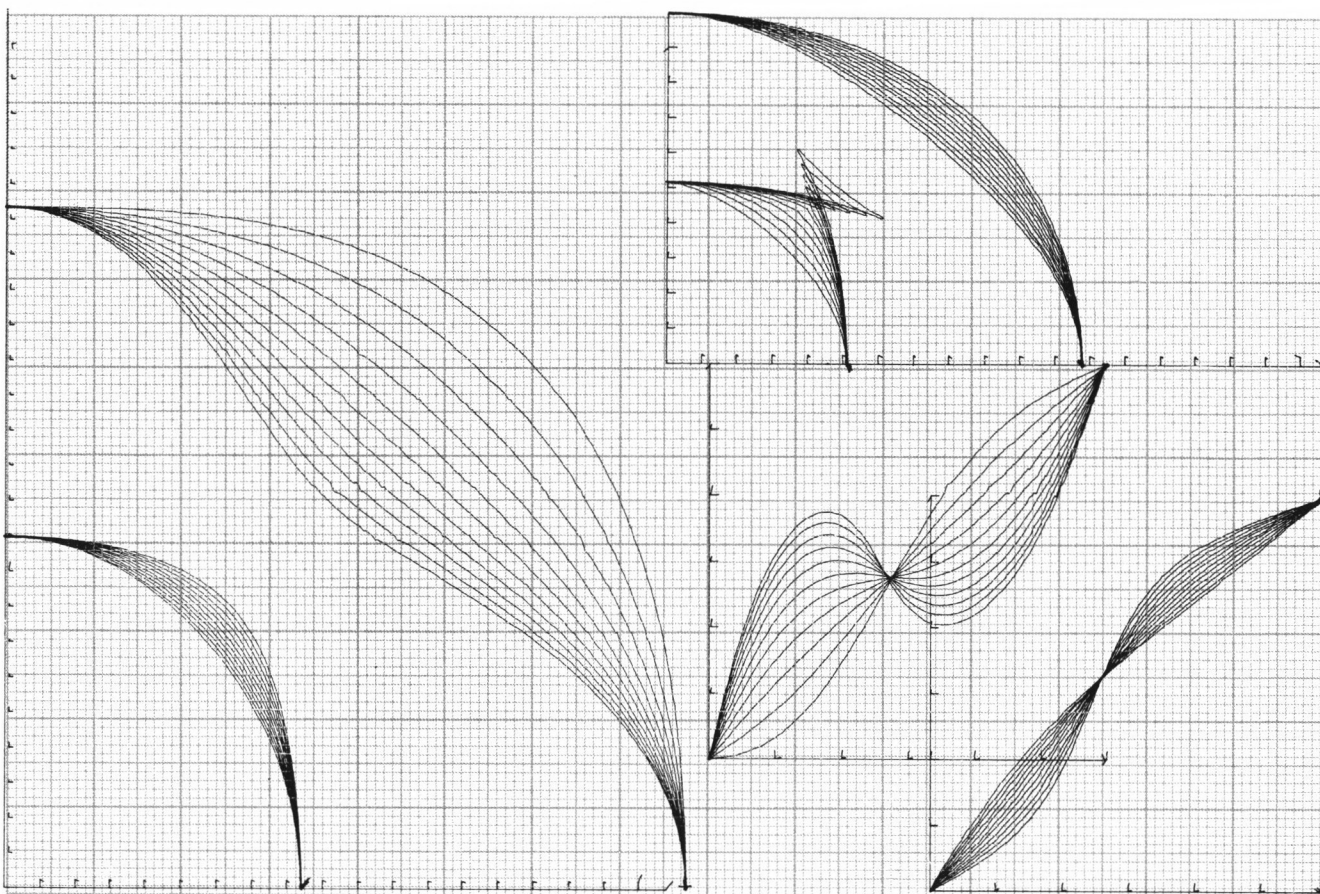


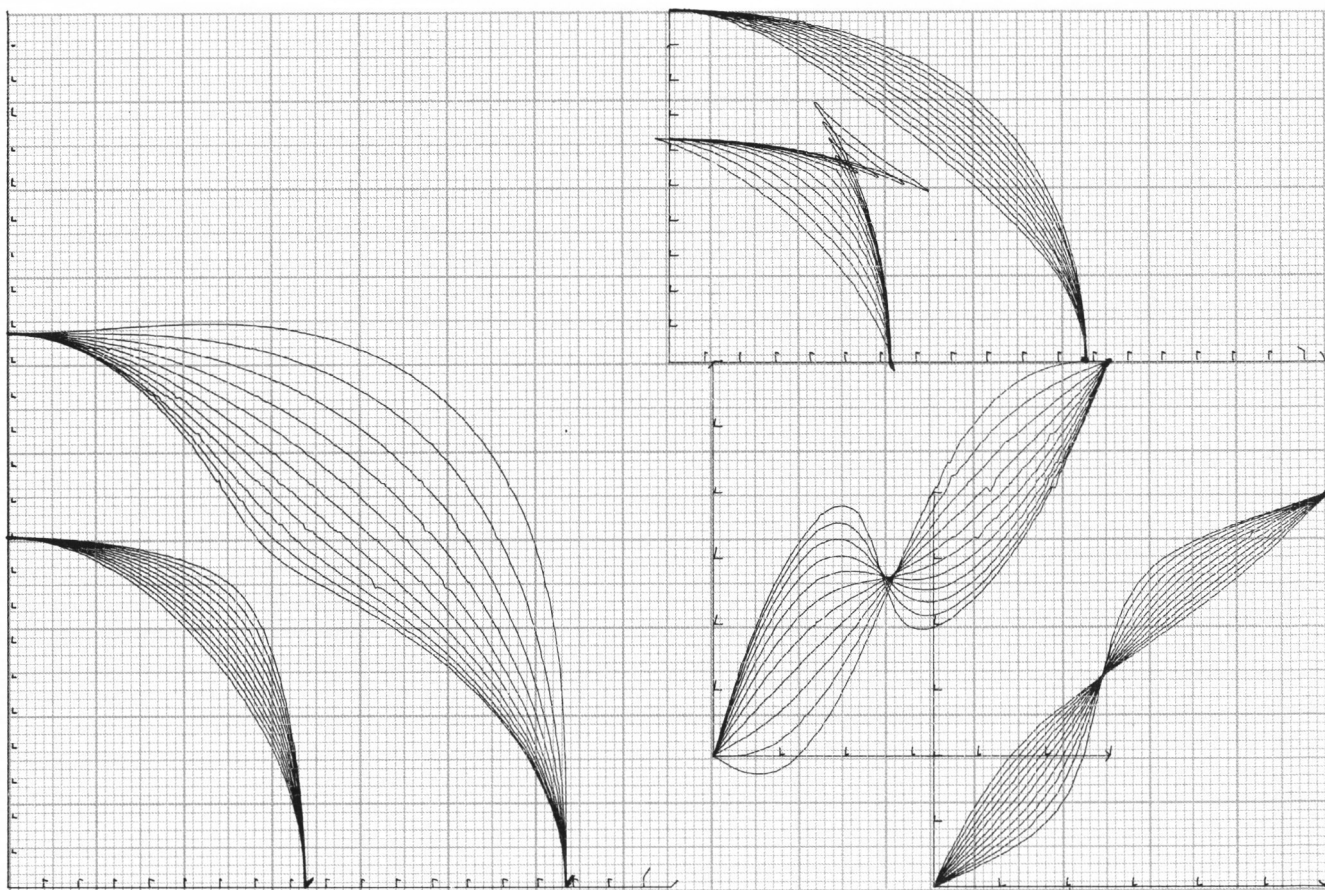
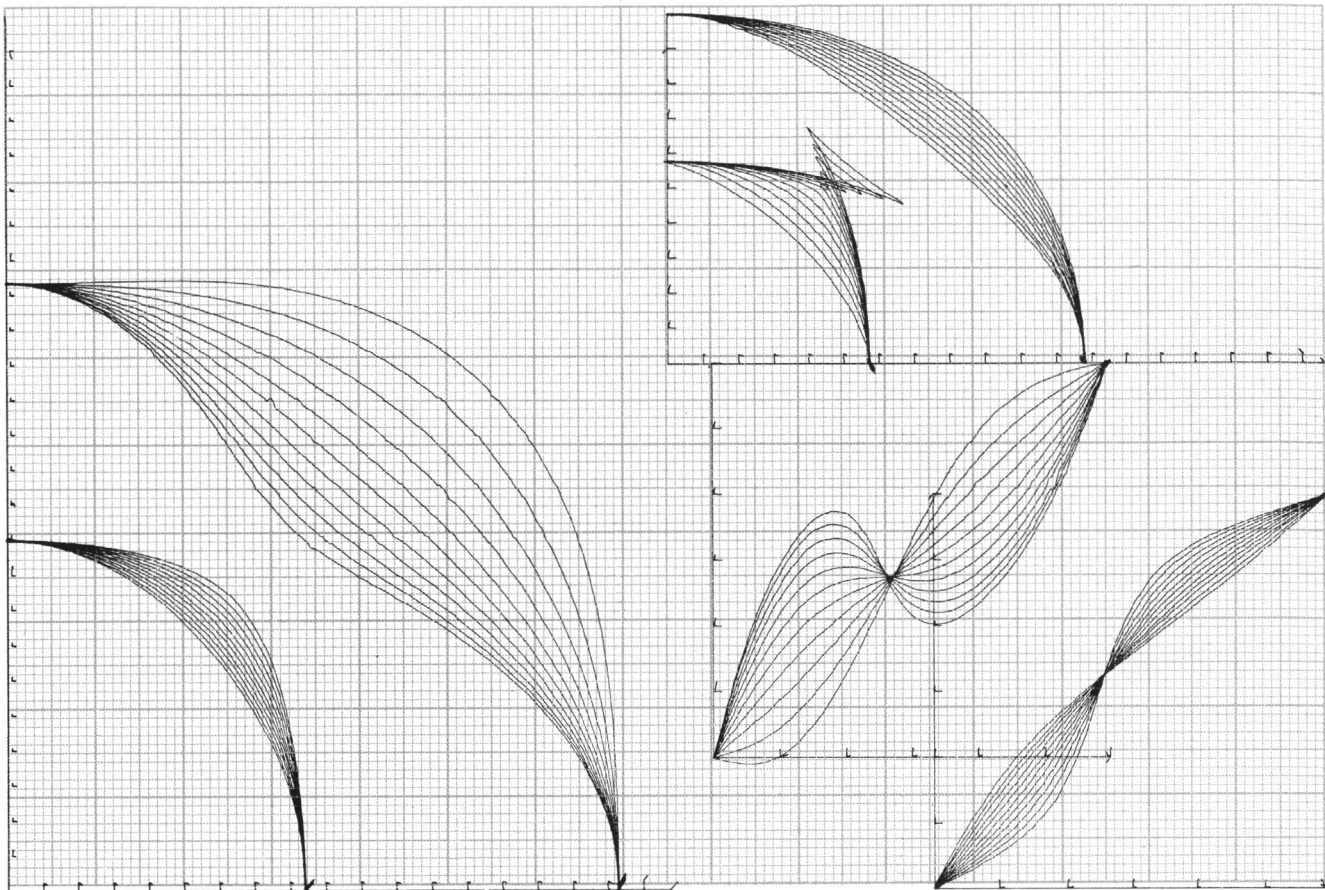


7
1

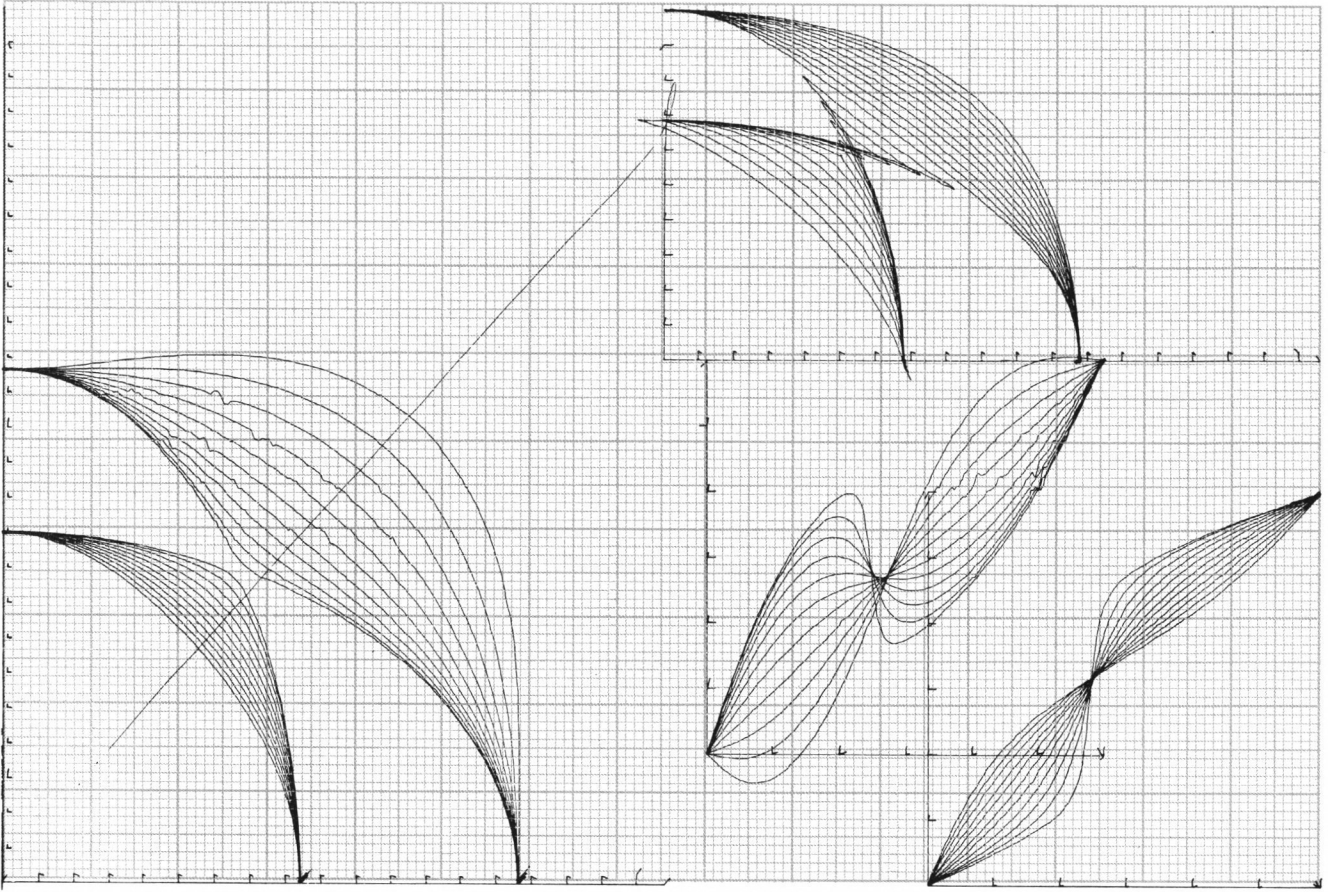


7
2

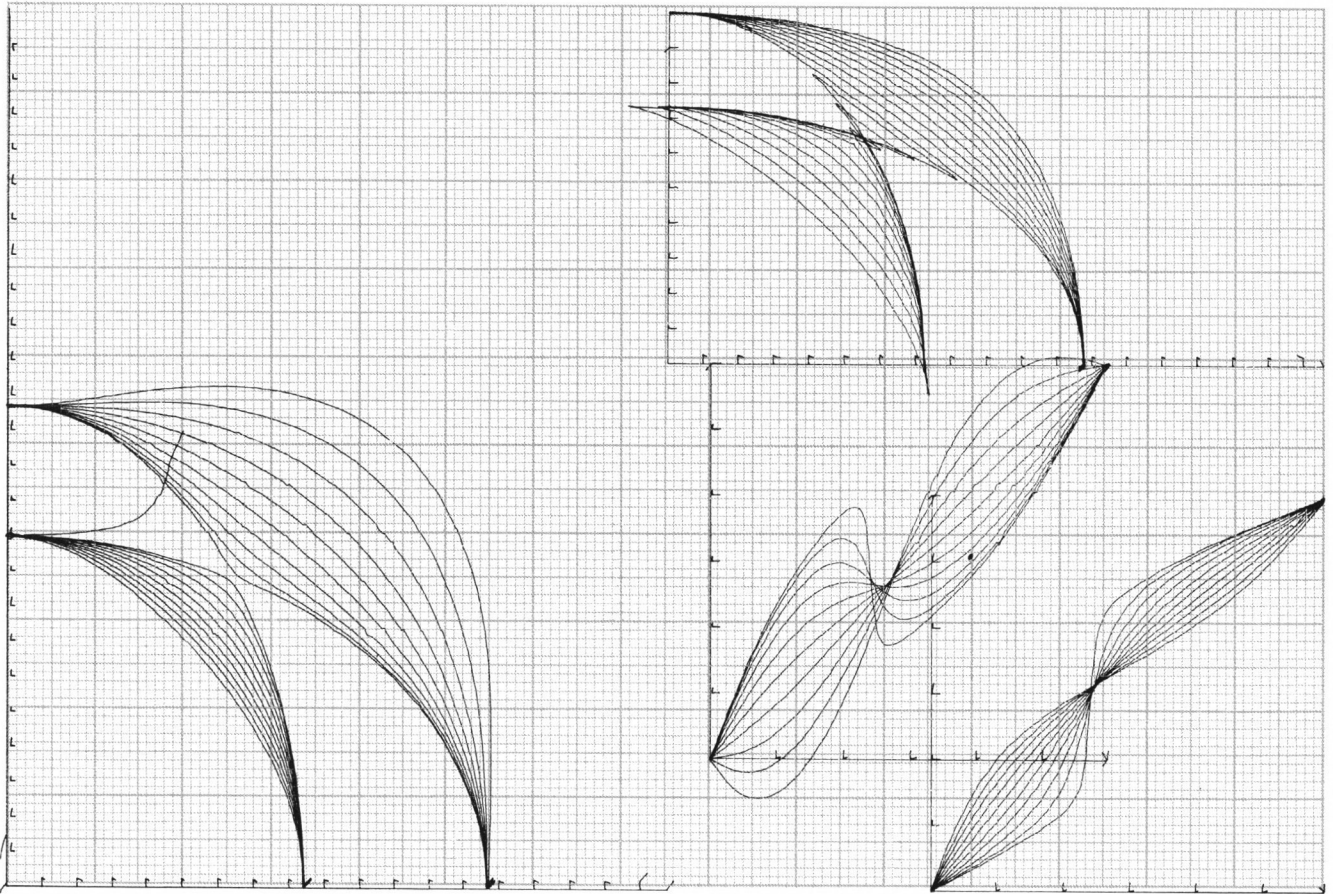


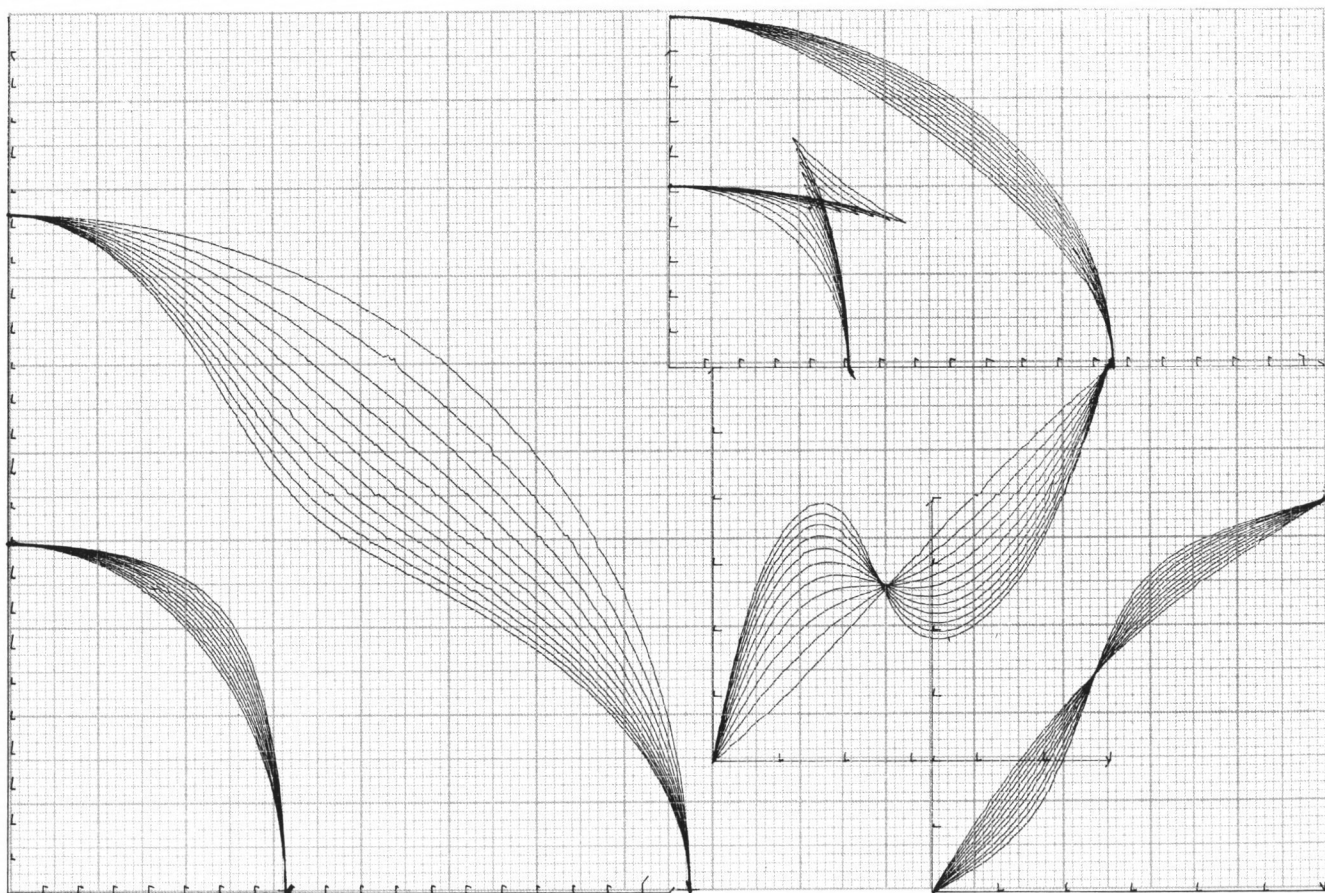
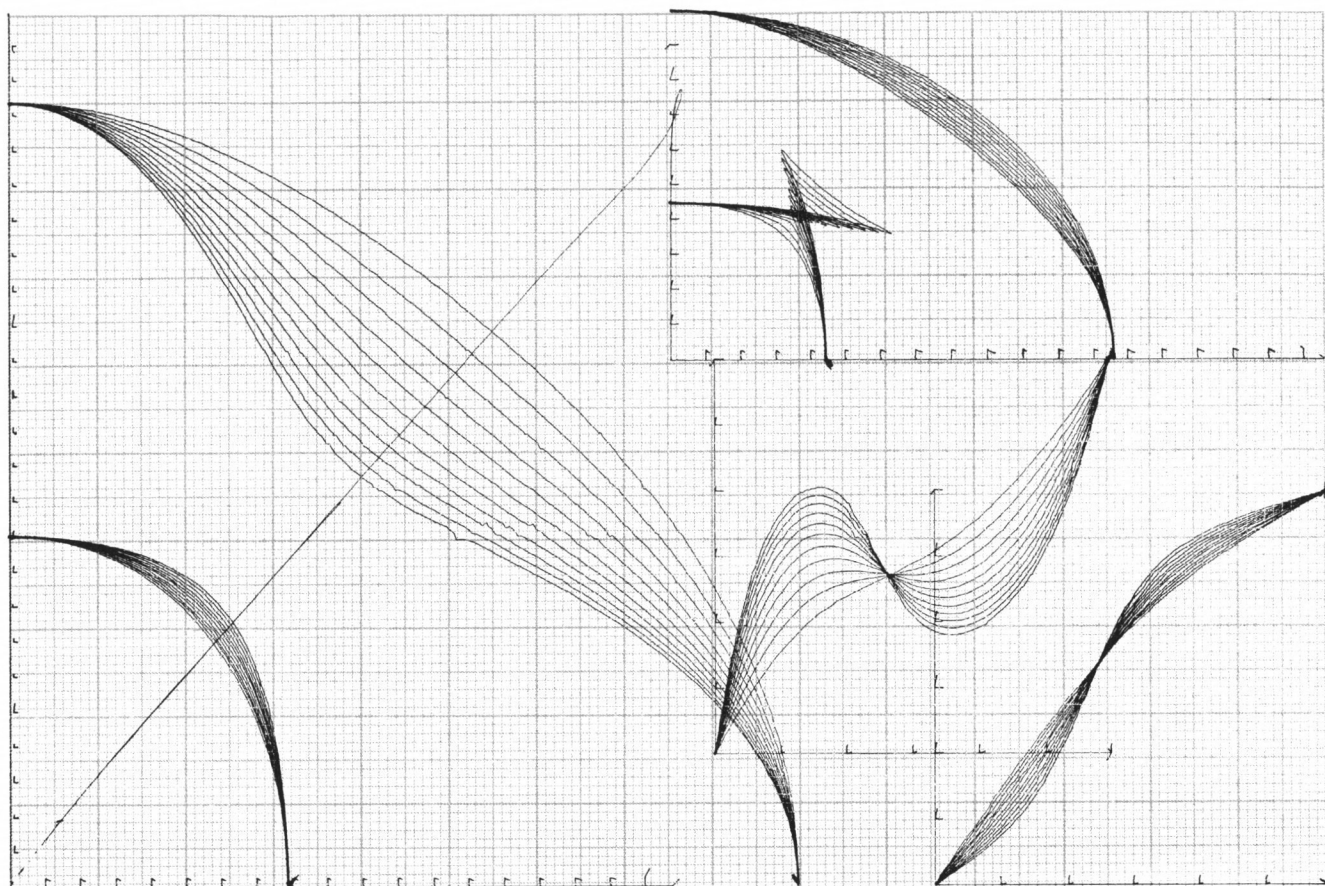


7
5

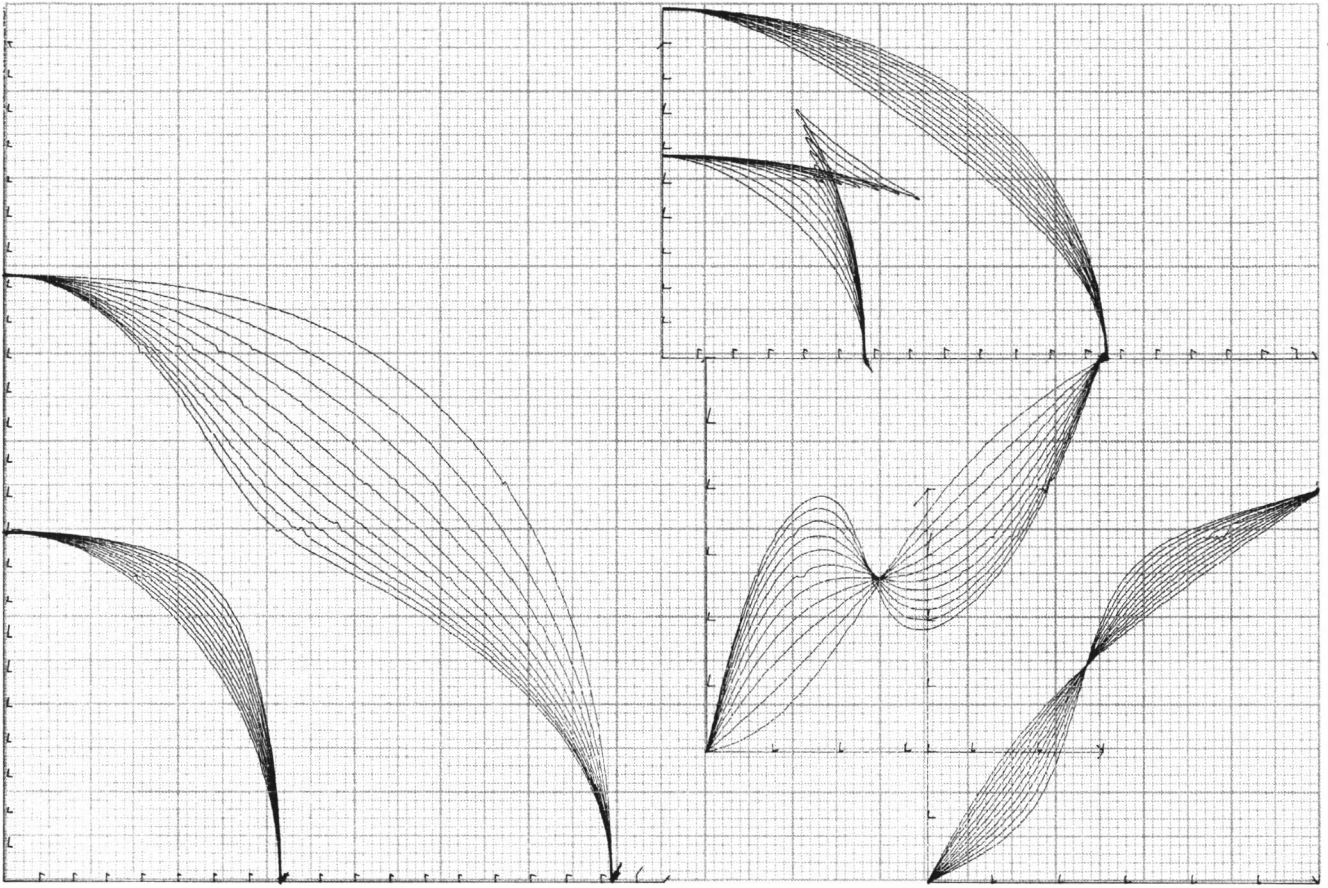


7
6

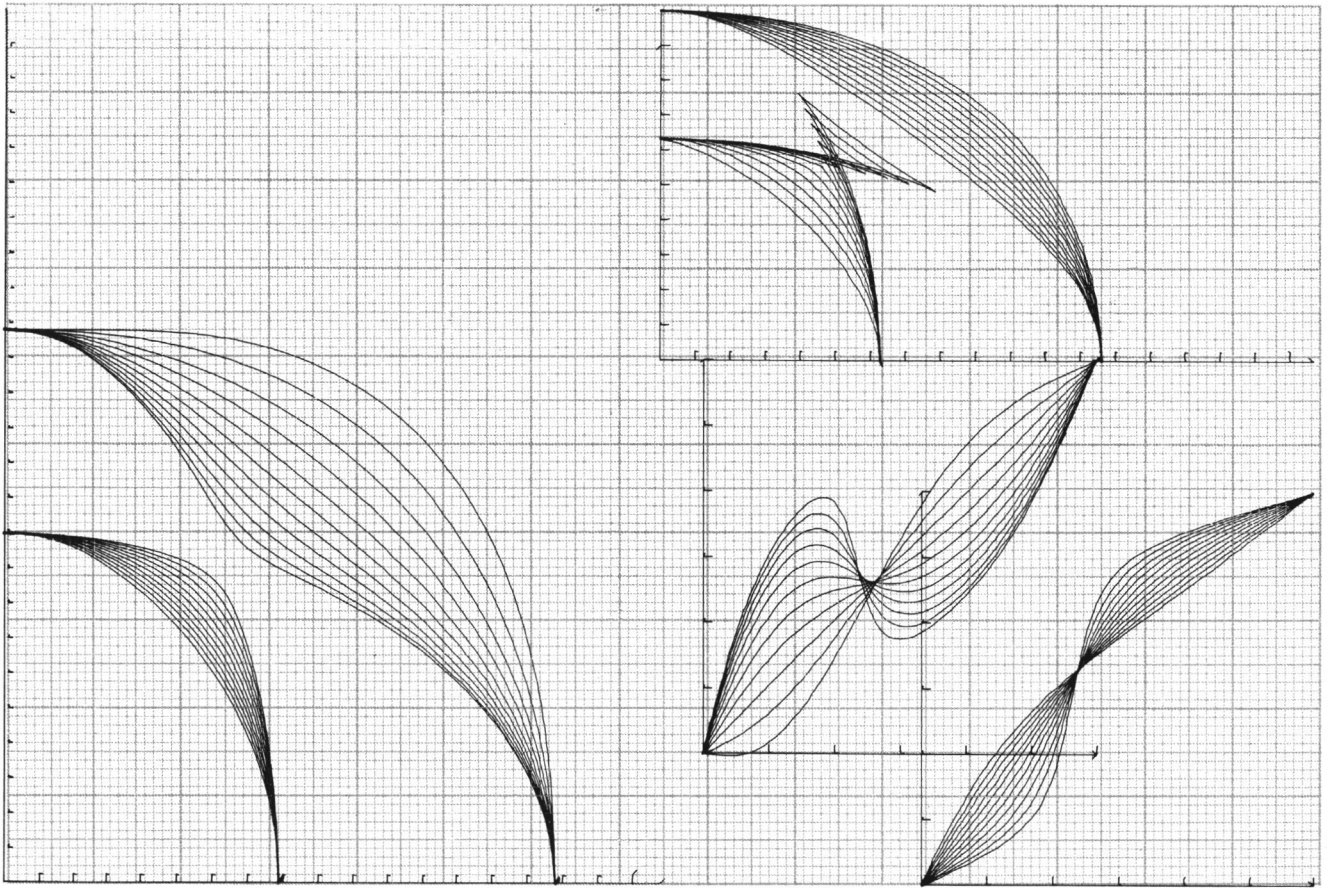


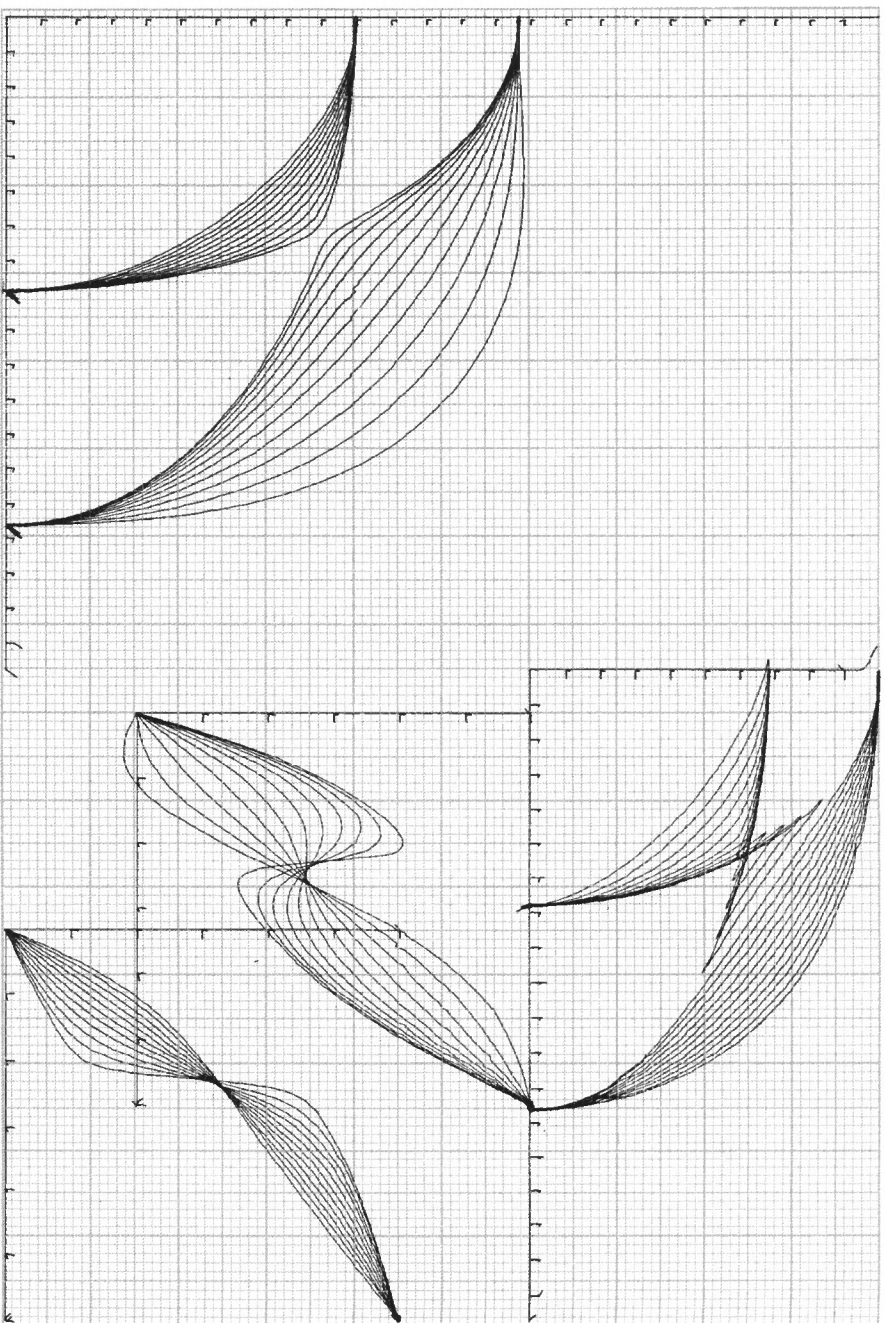


8
3

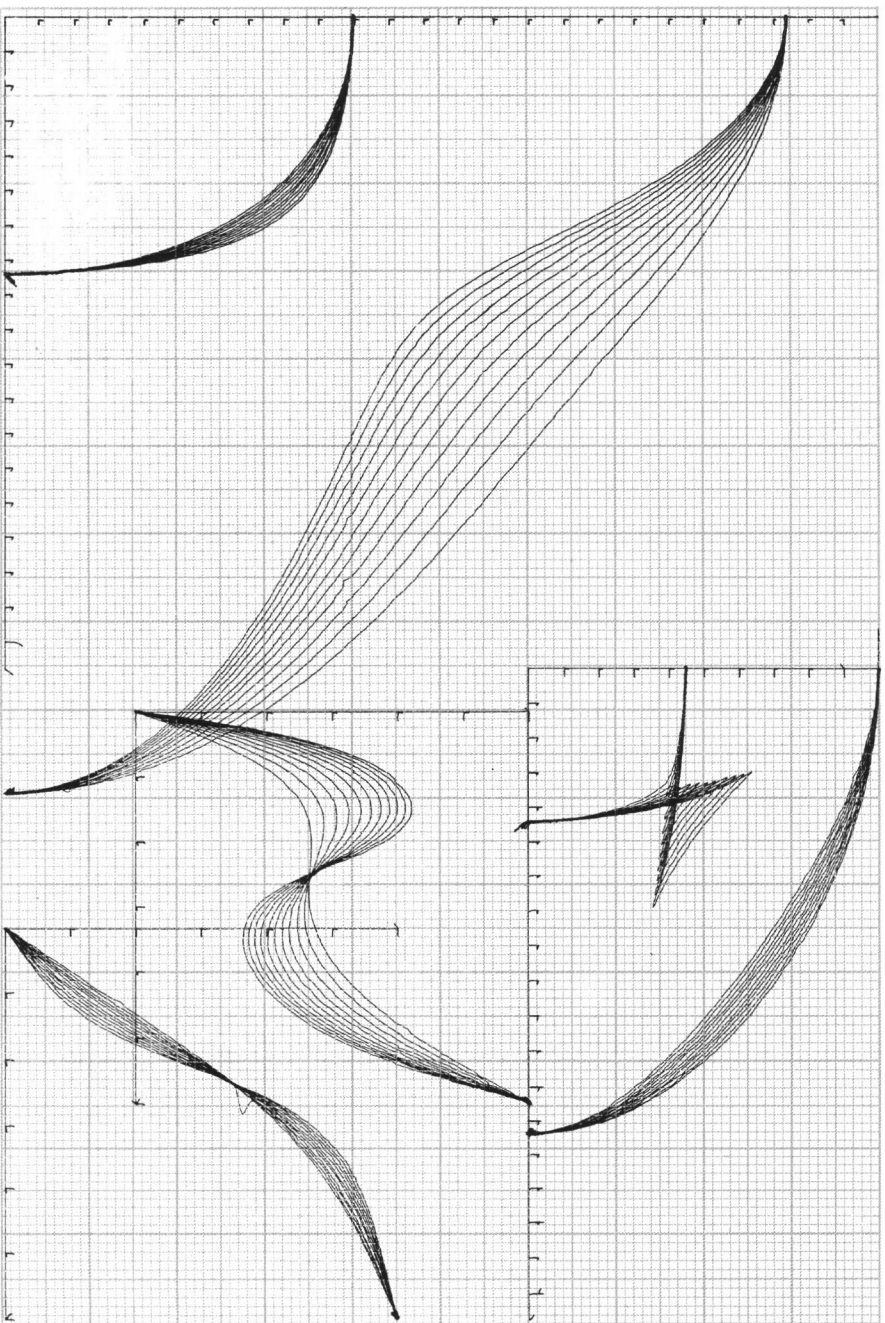


8
4

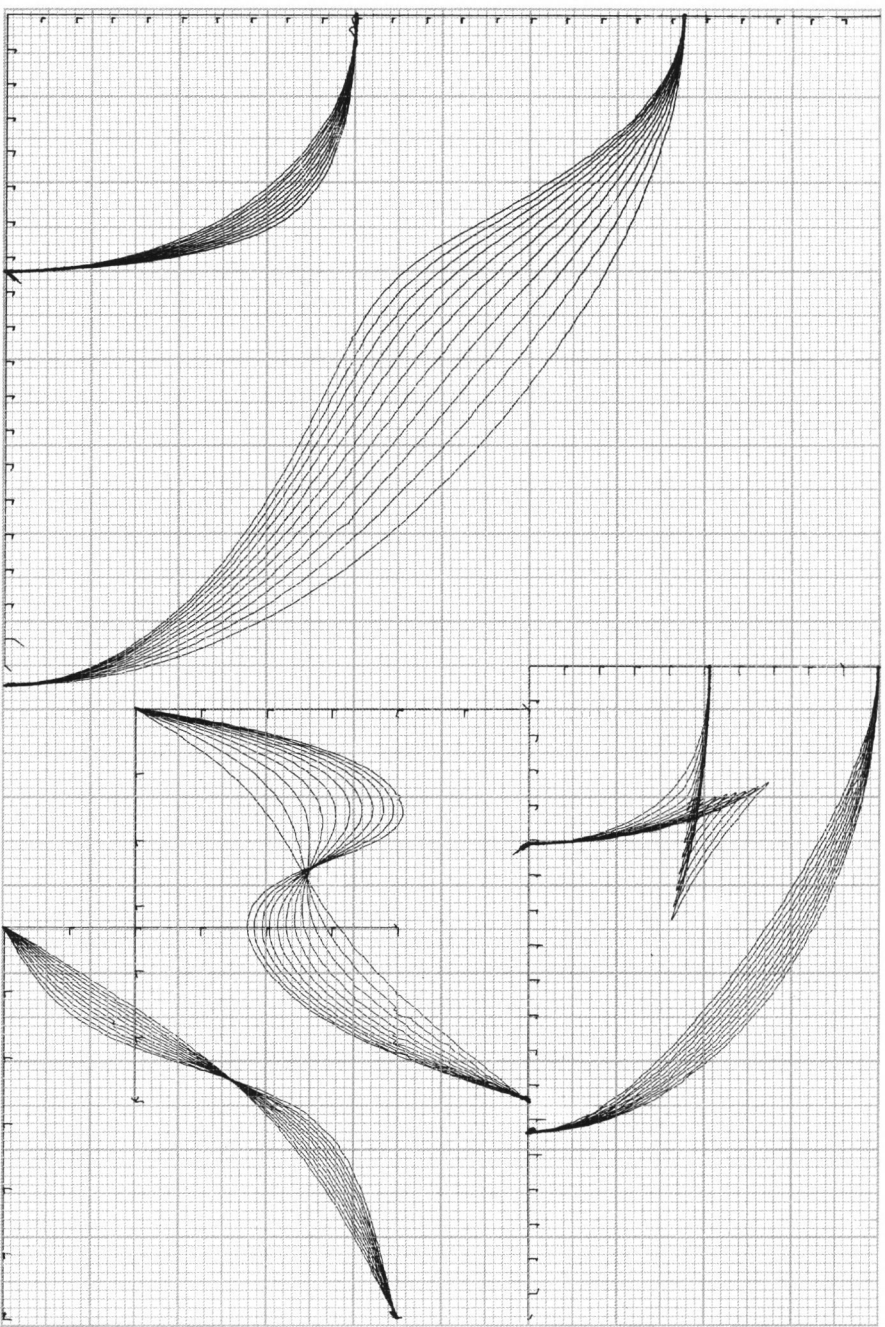




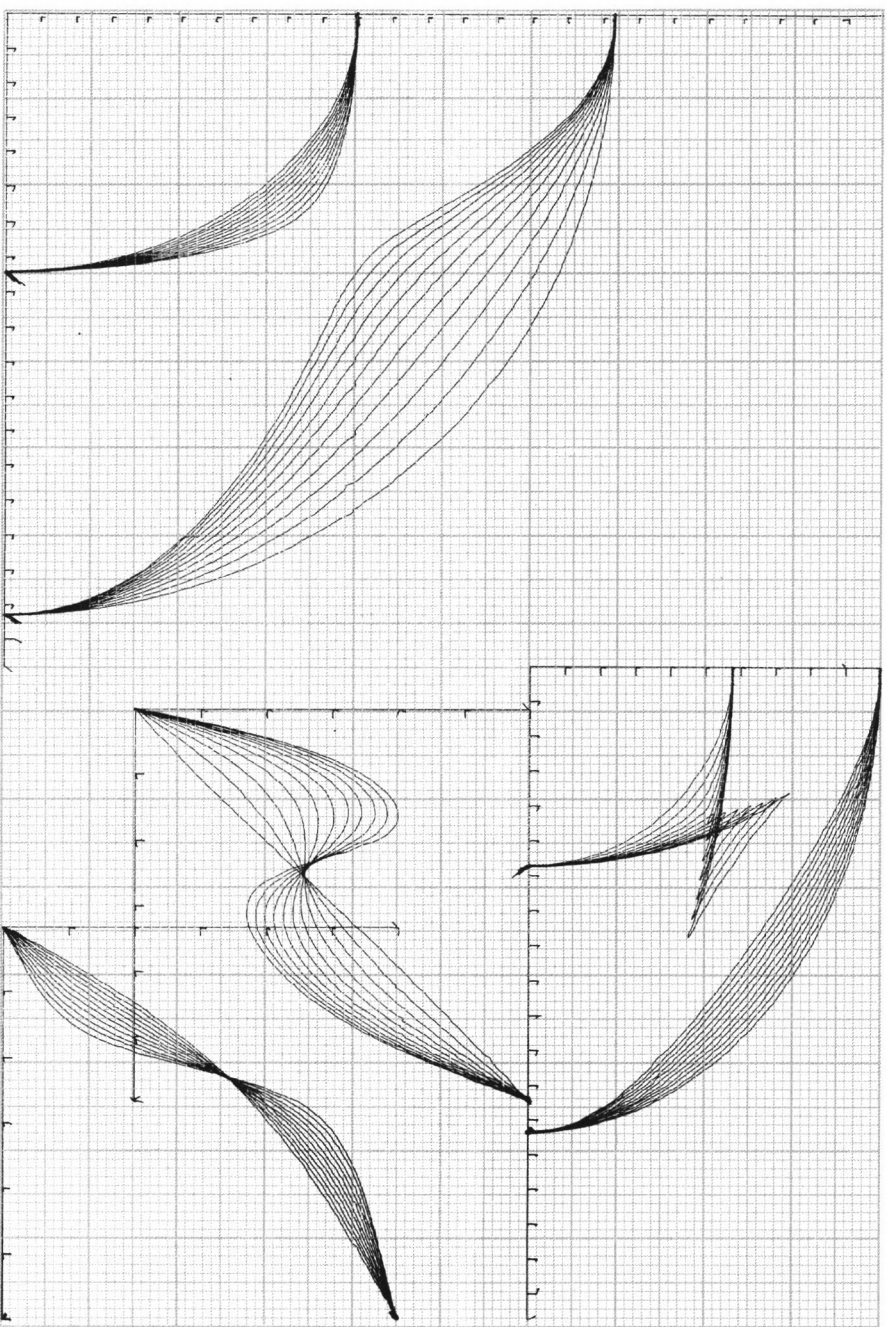
5



9

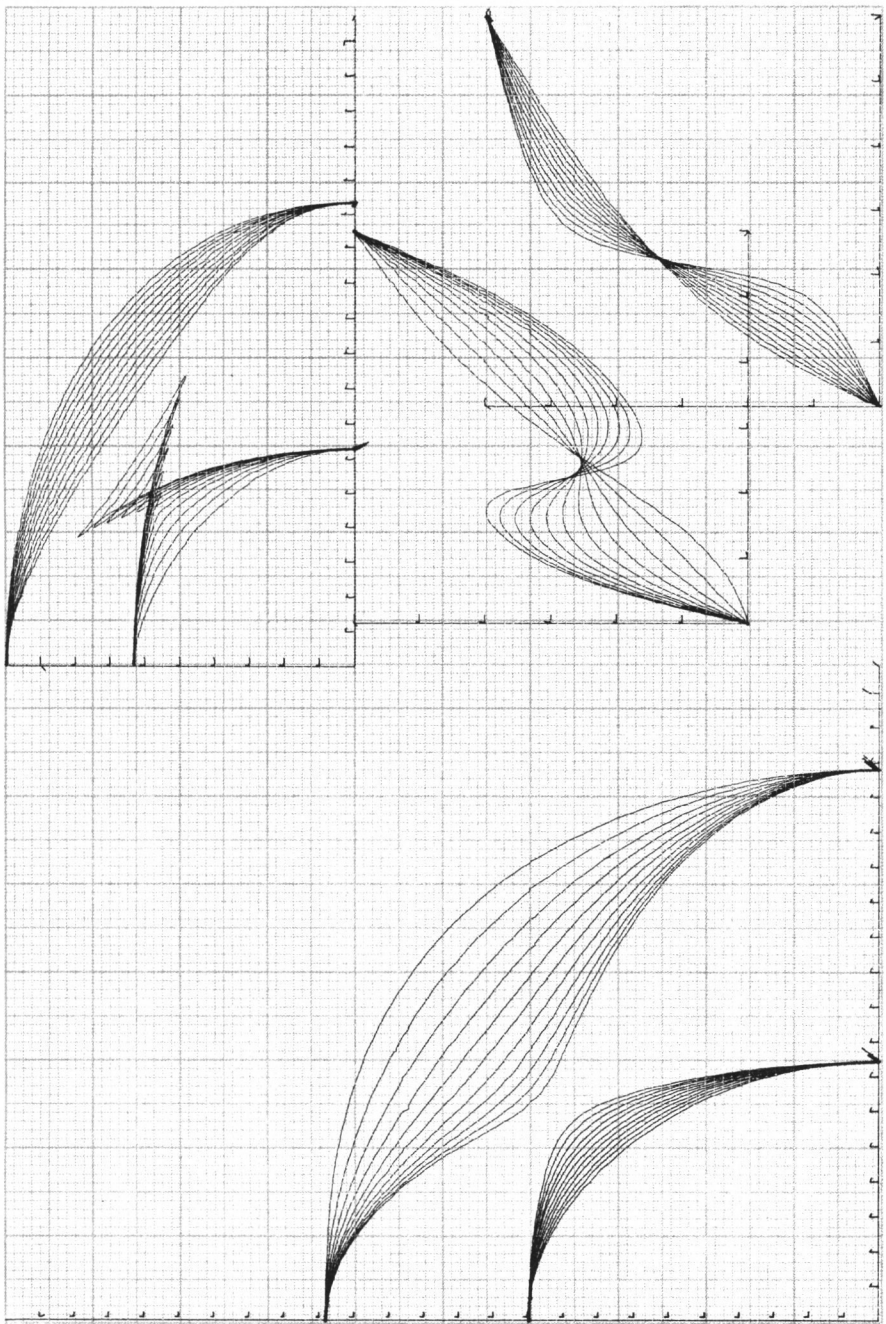


92

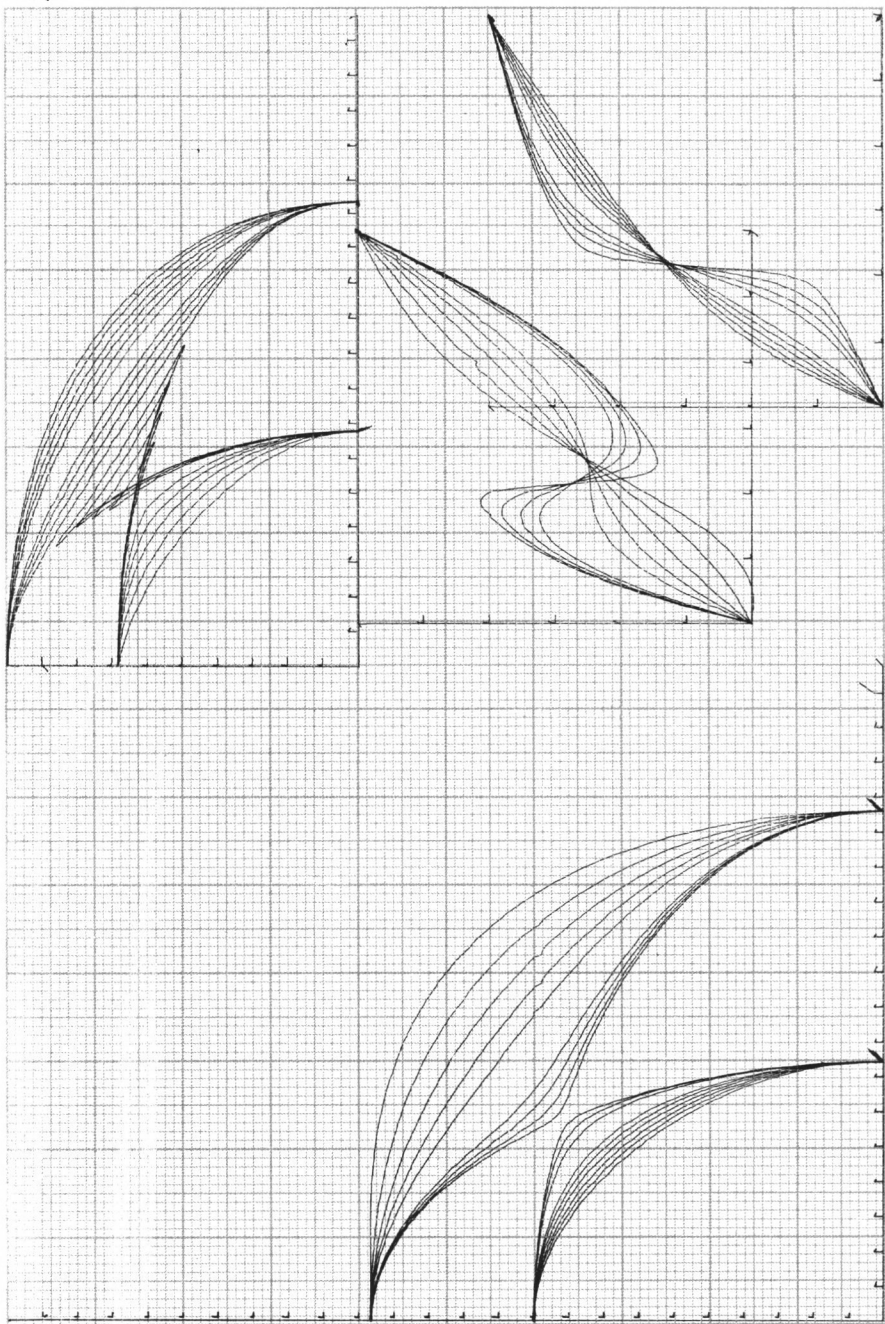


93

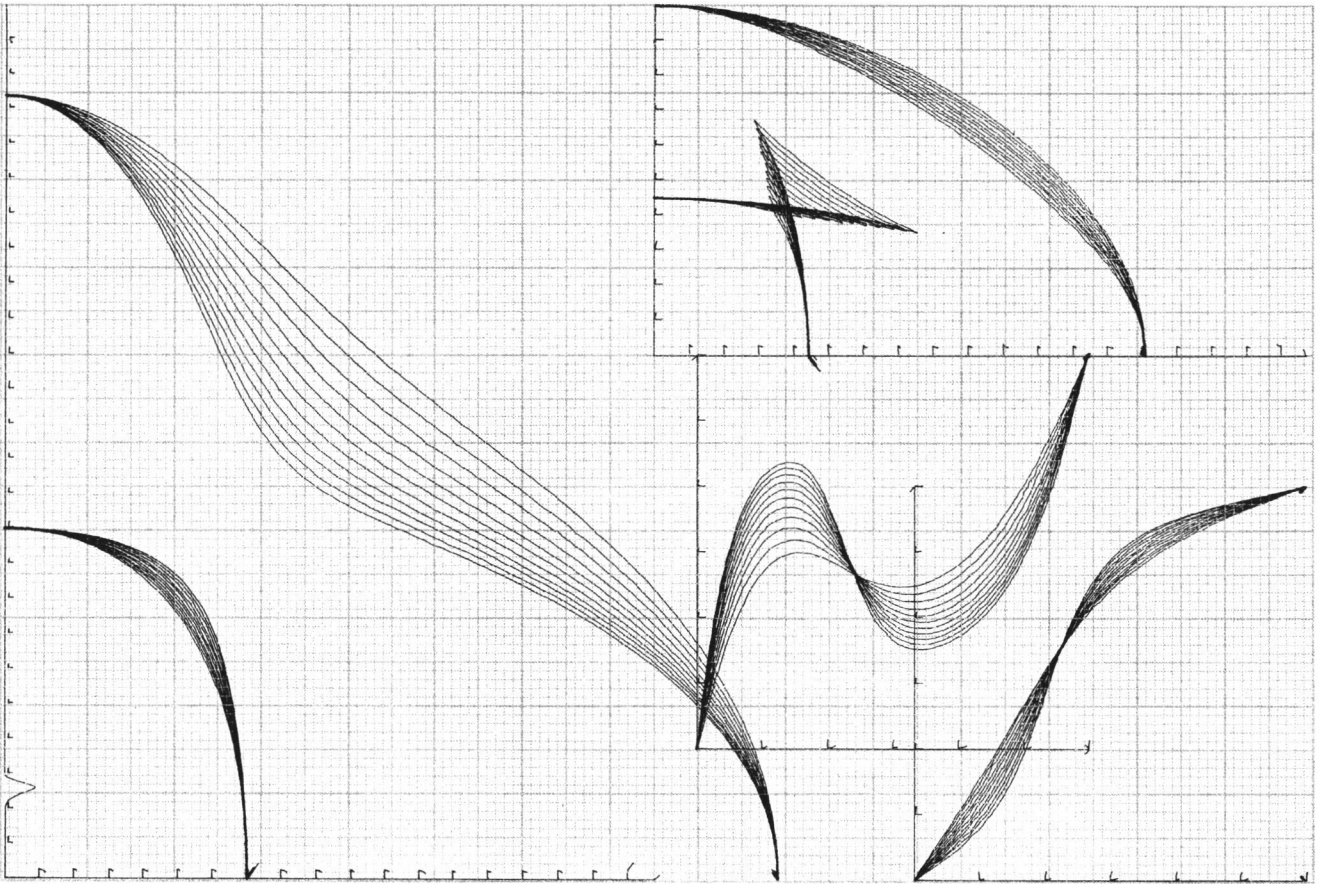
67



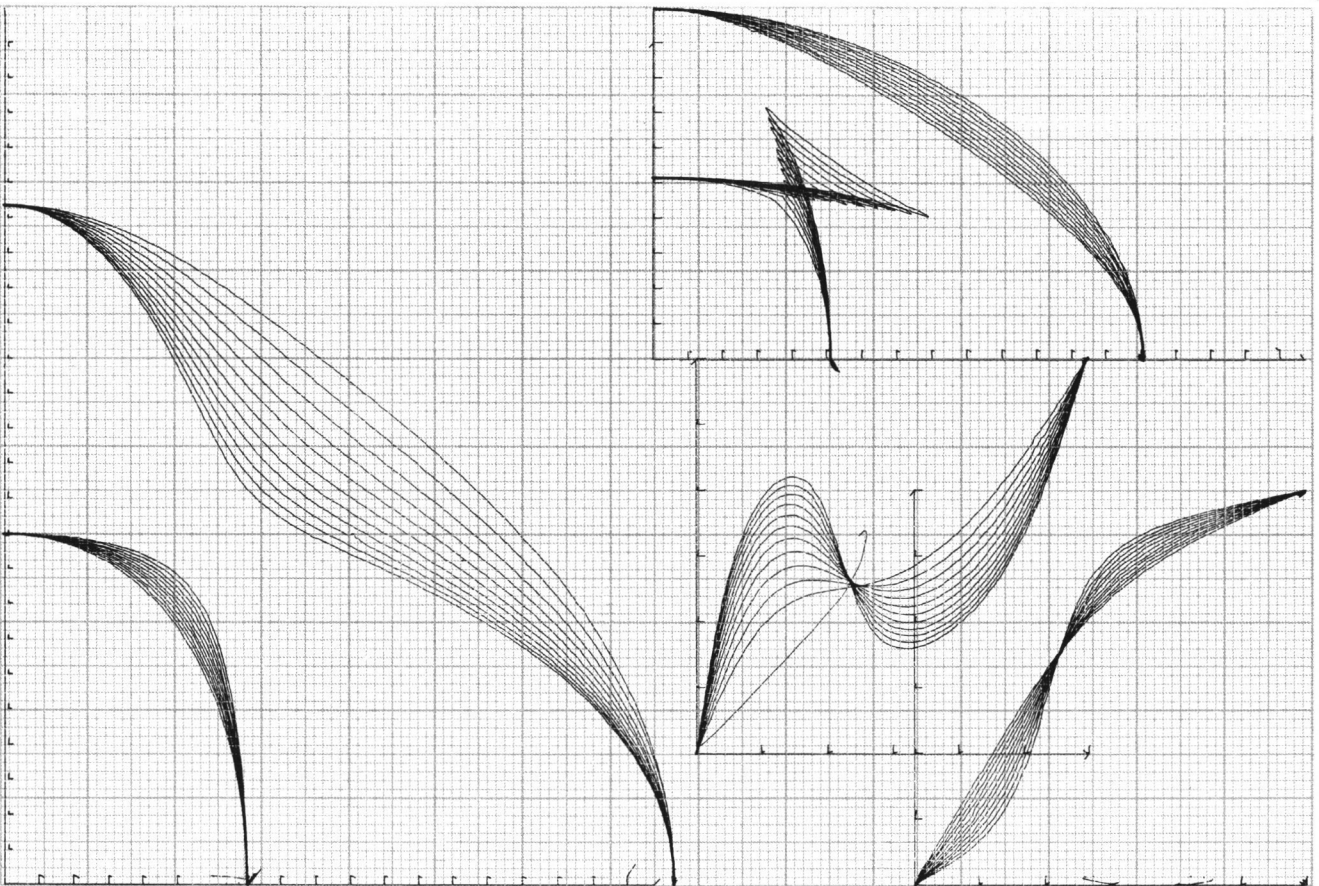
95

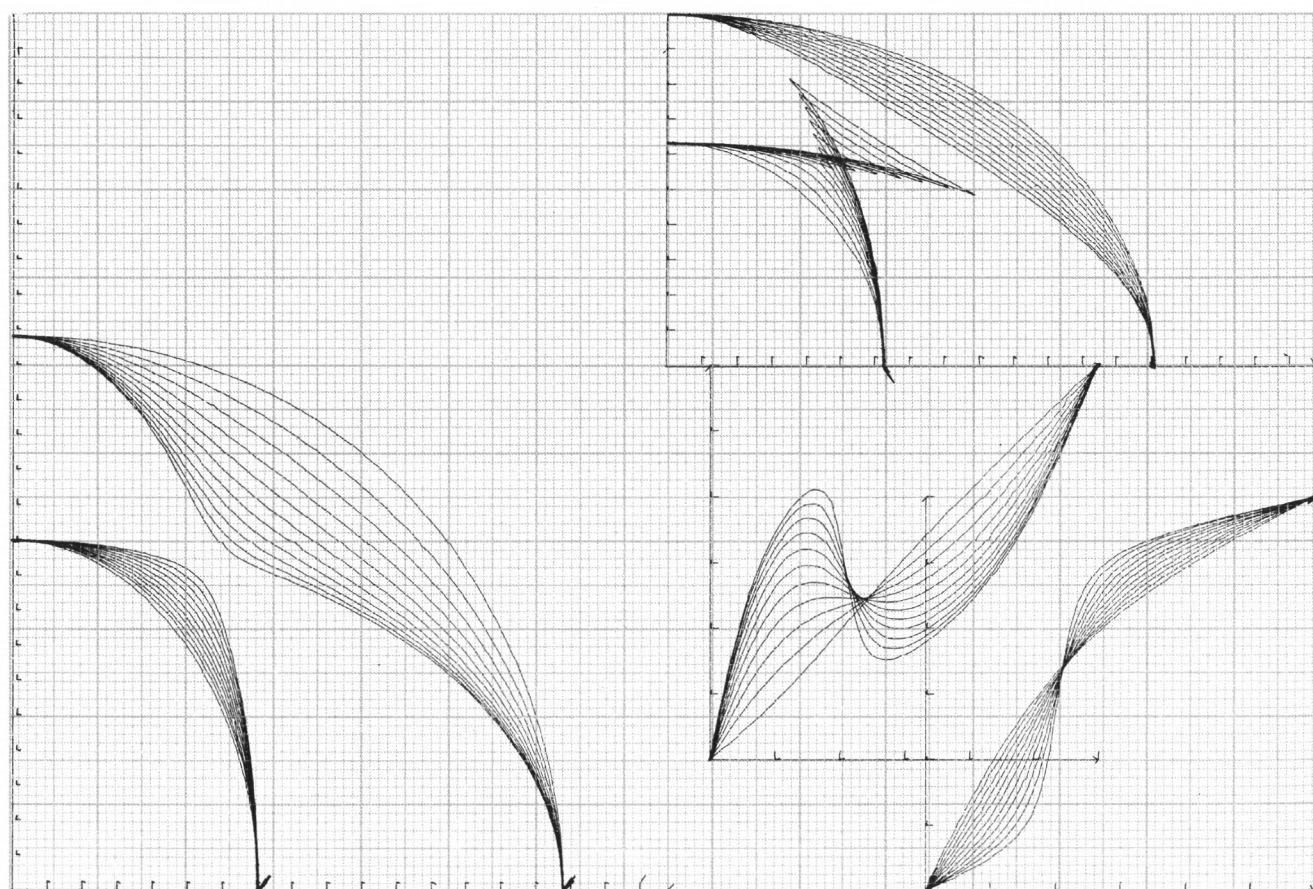
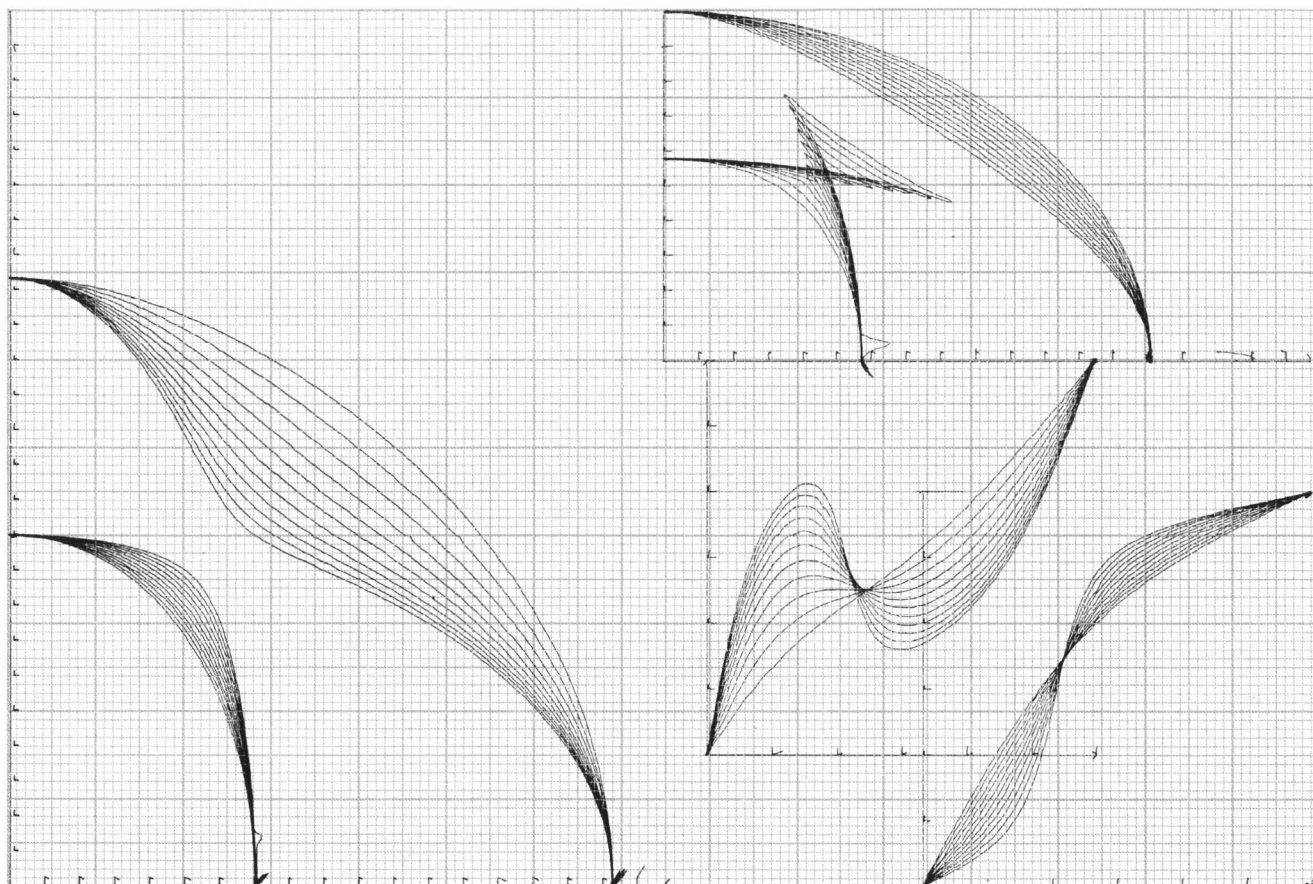


10
1

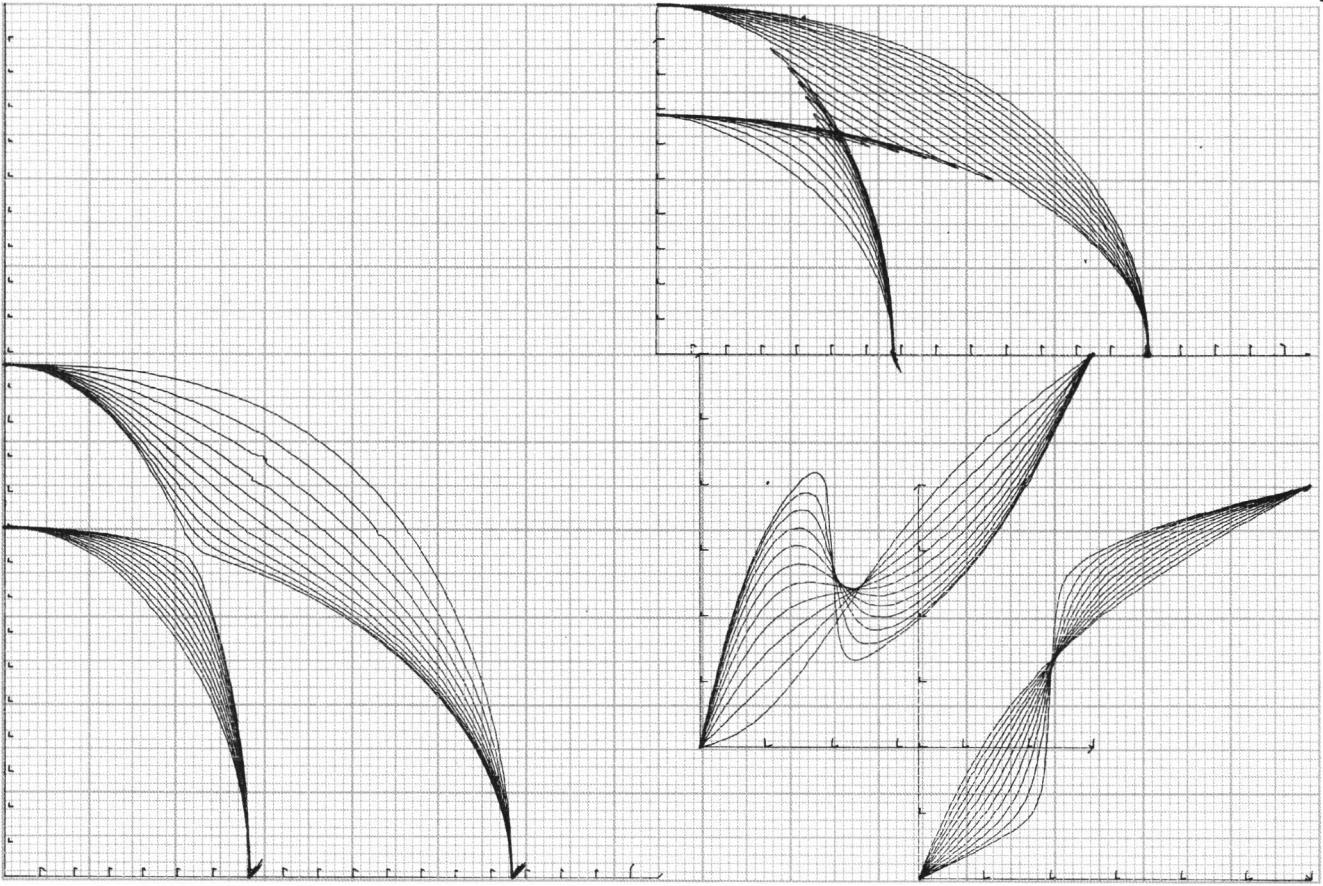


10
2

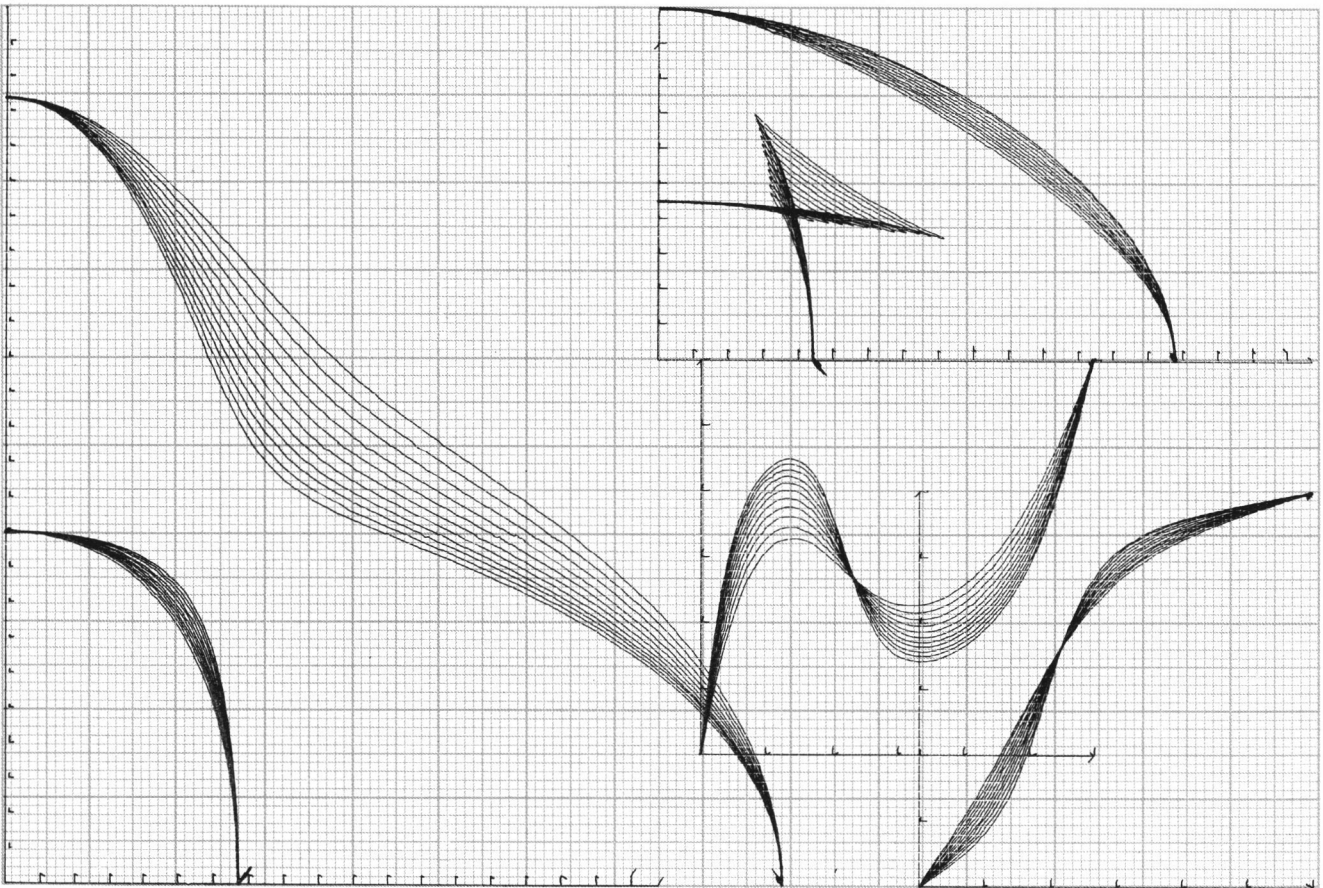


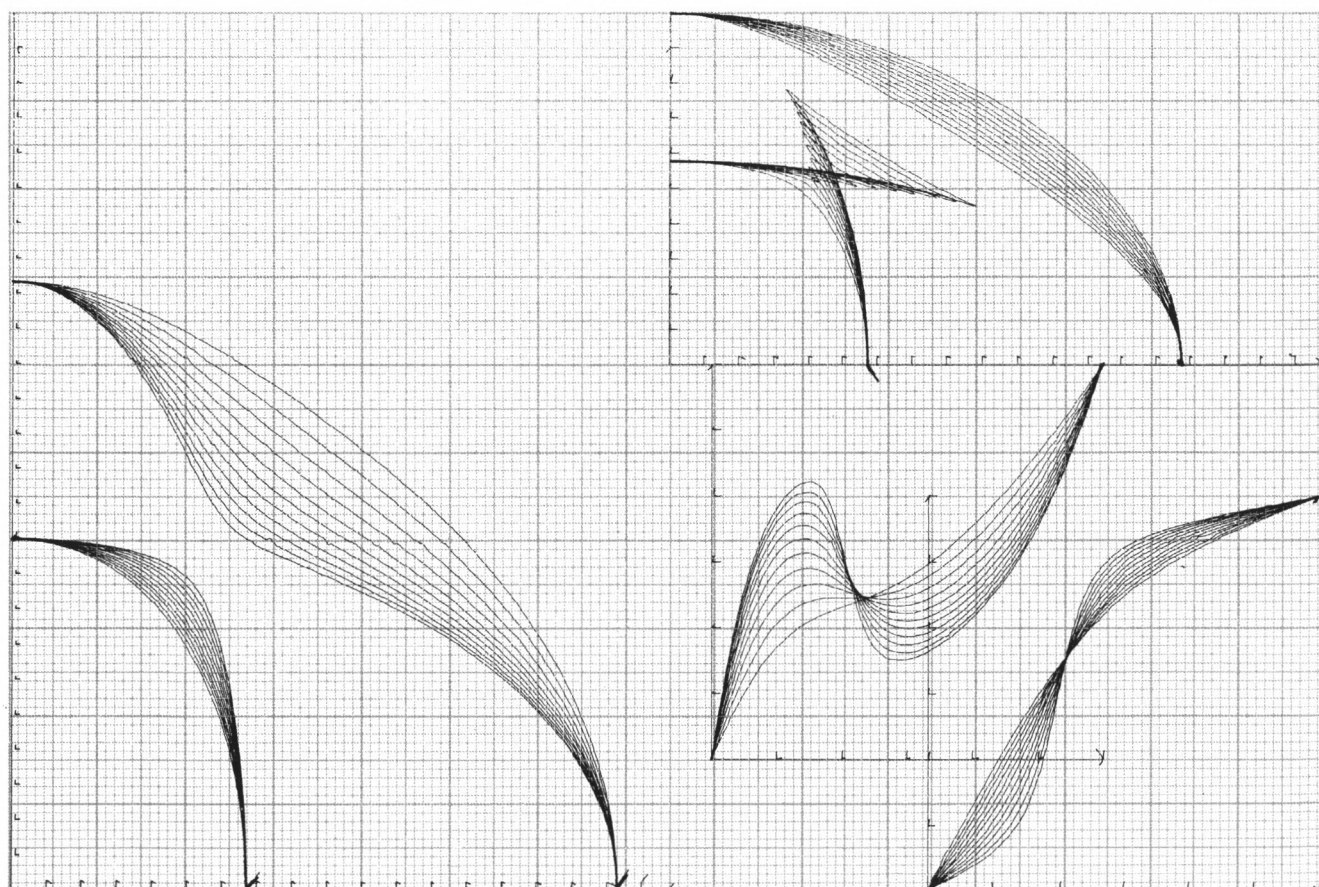
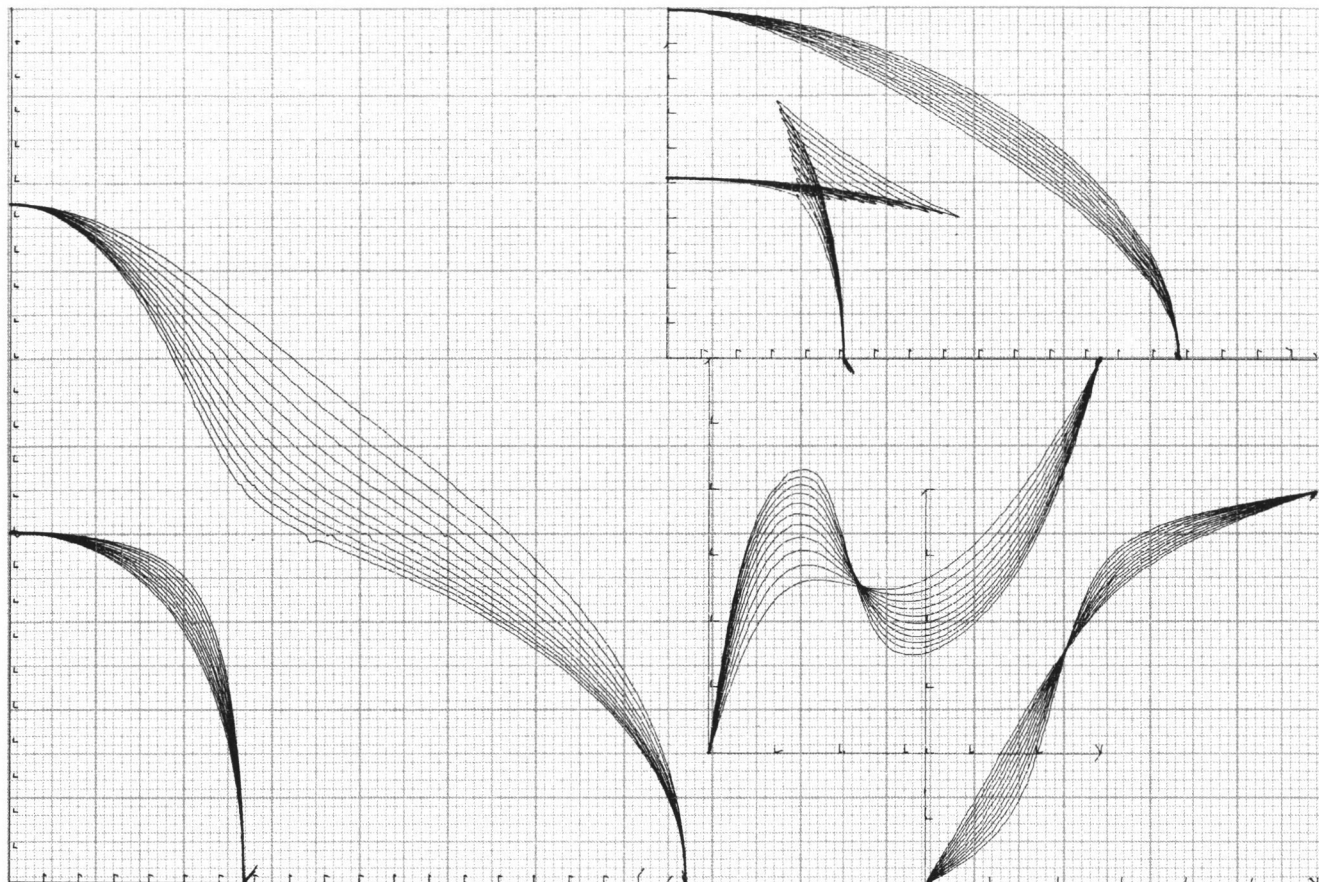


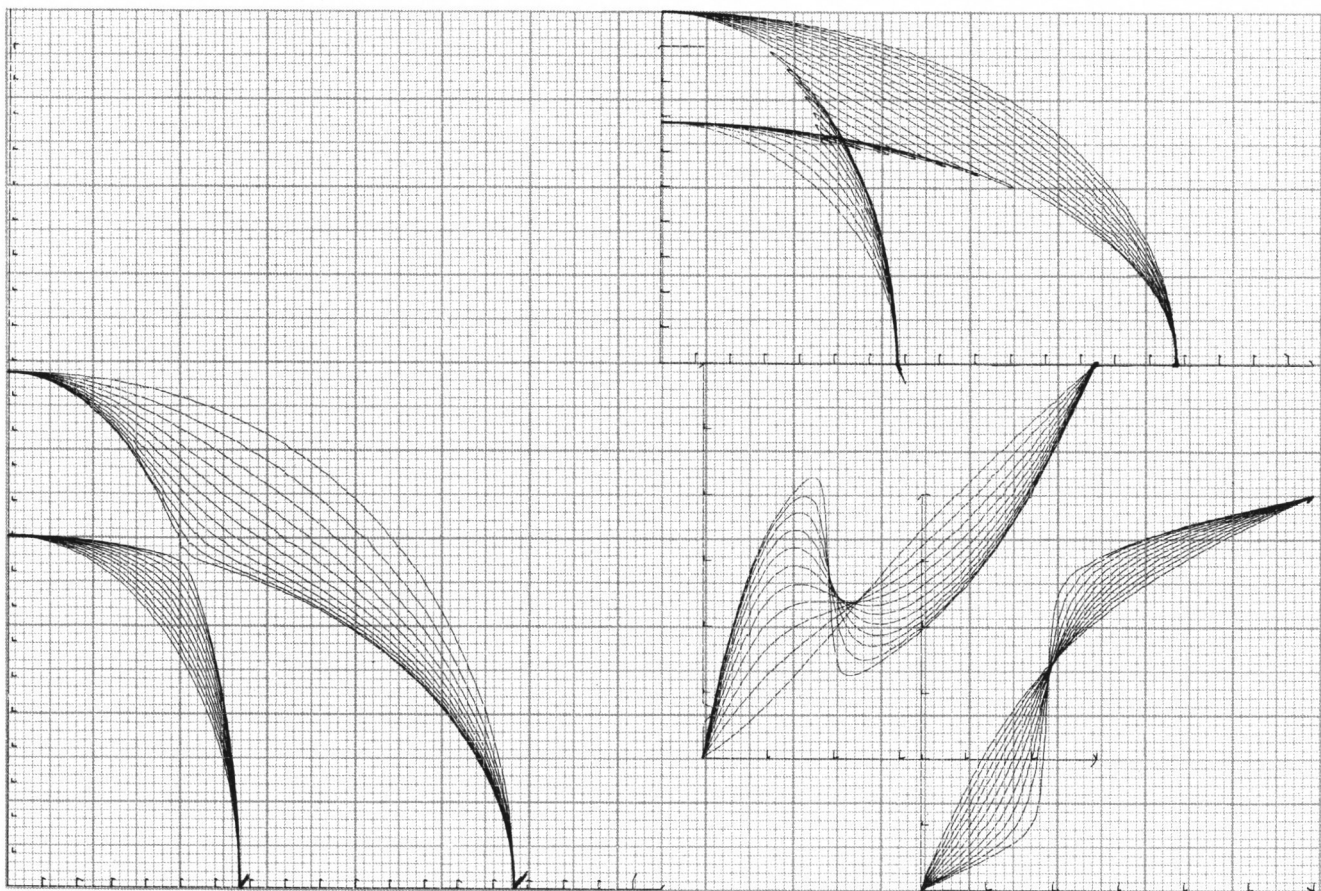
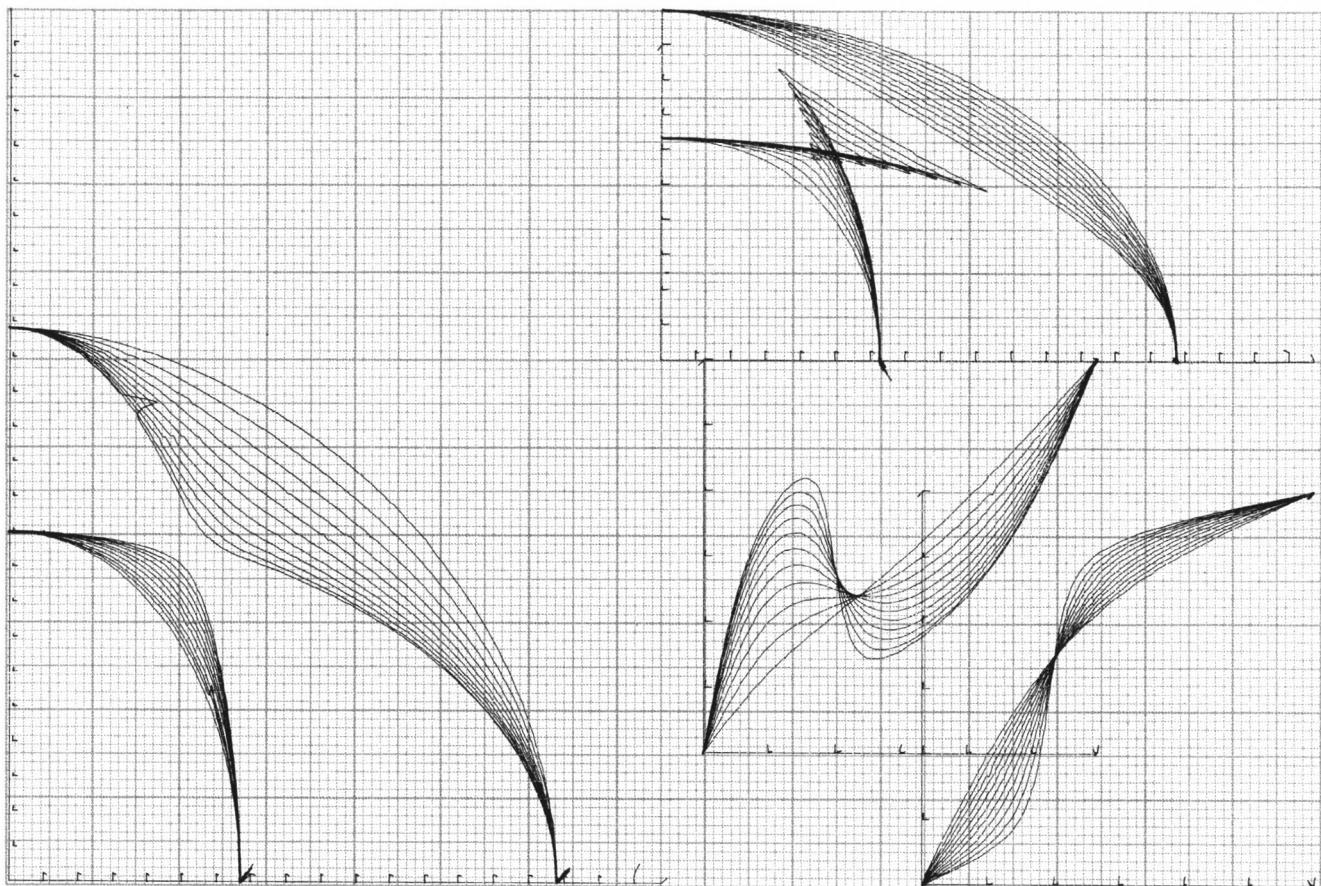
10
5

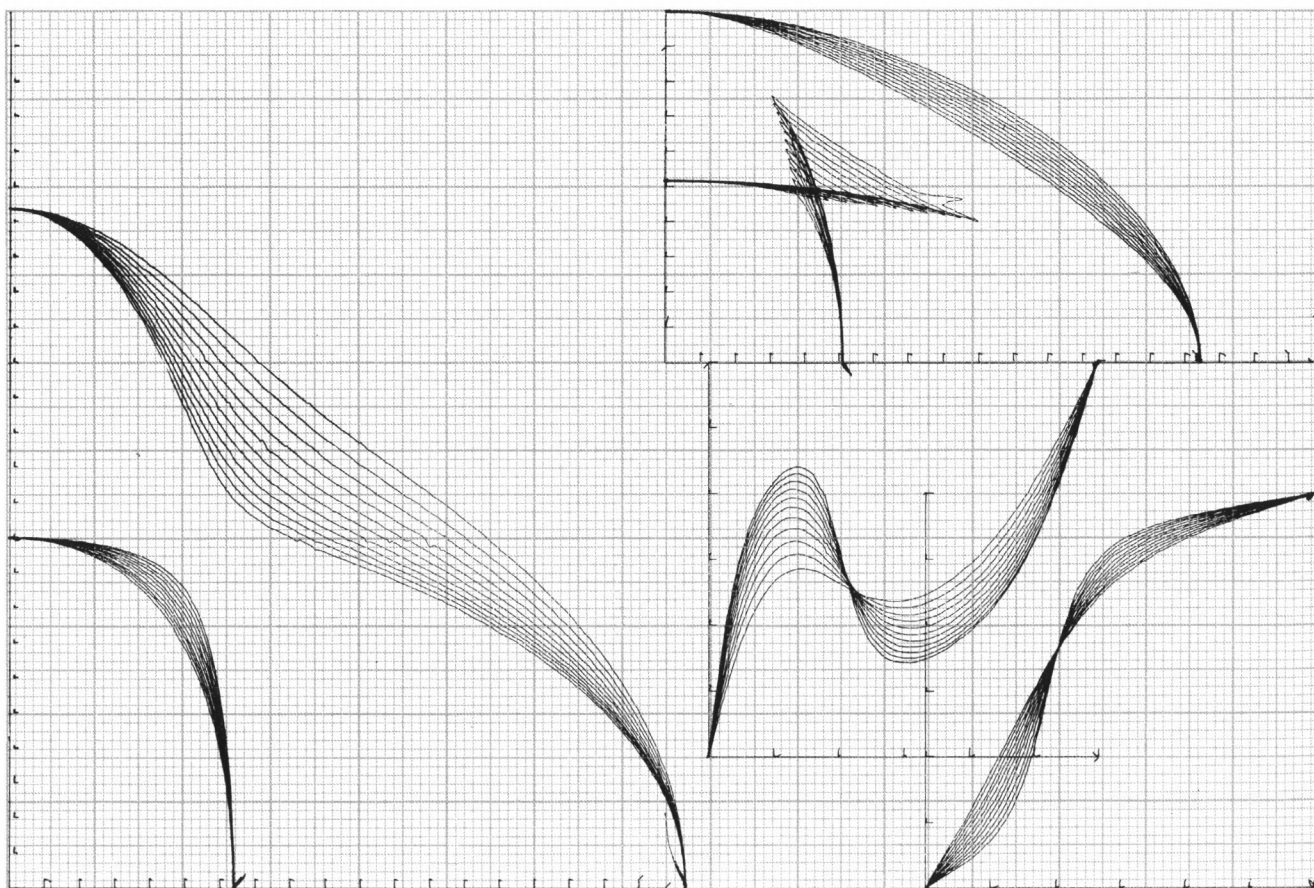
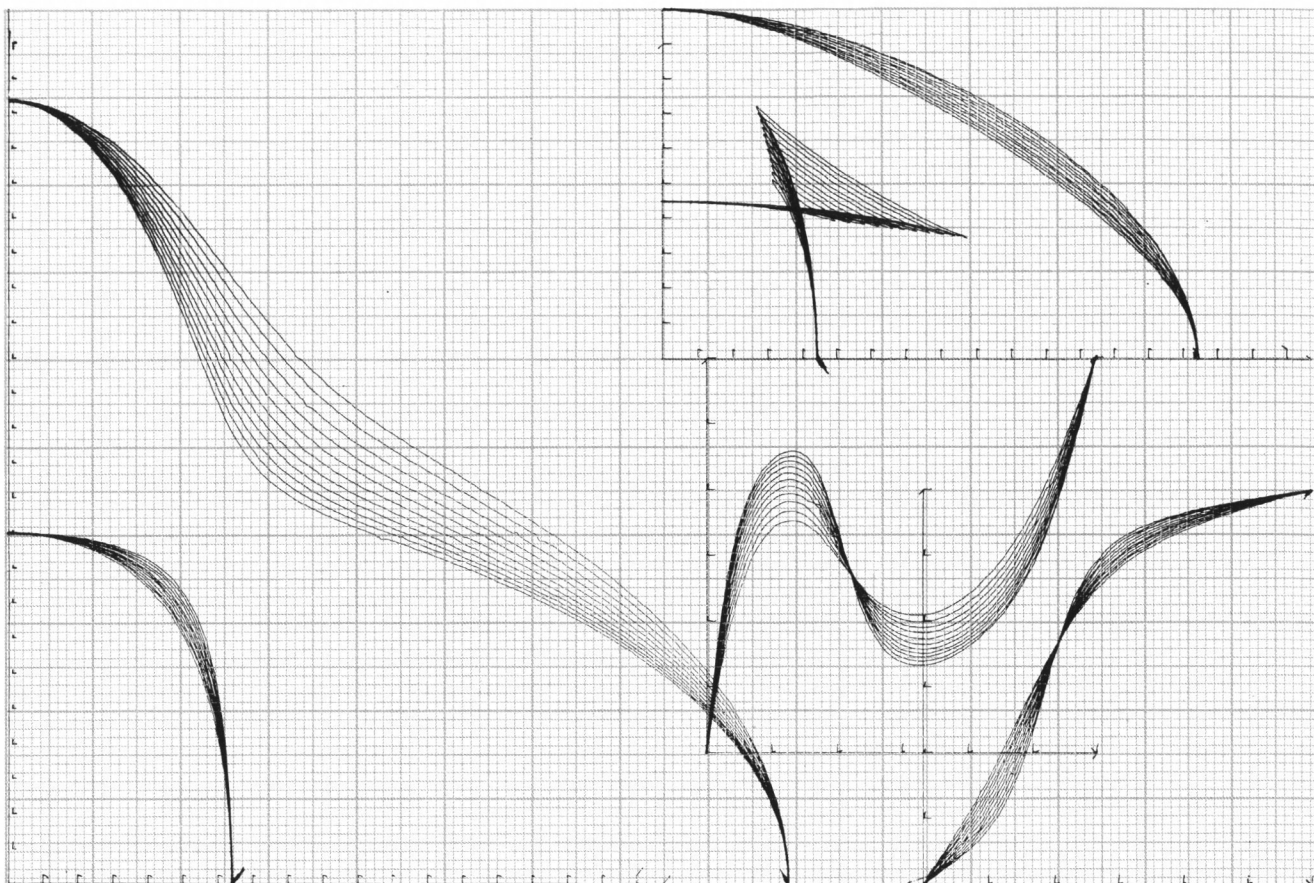


11
1

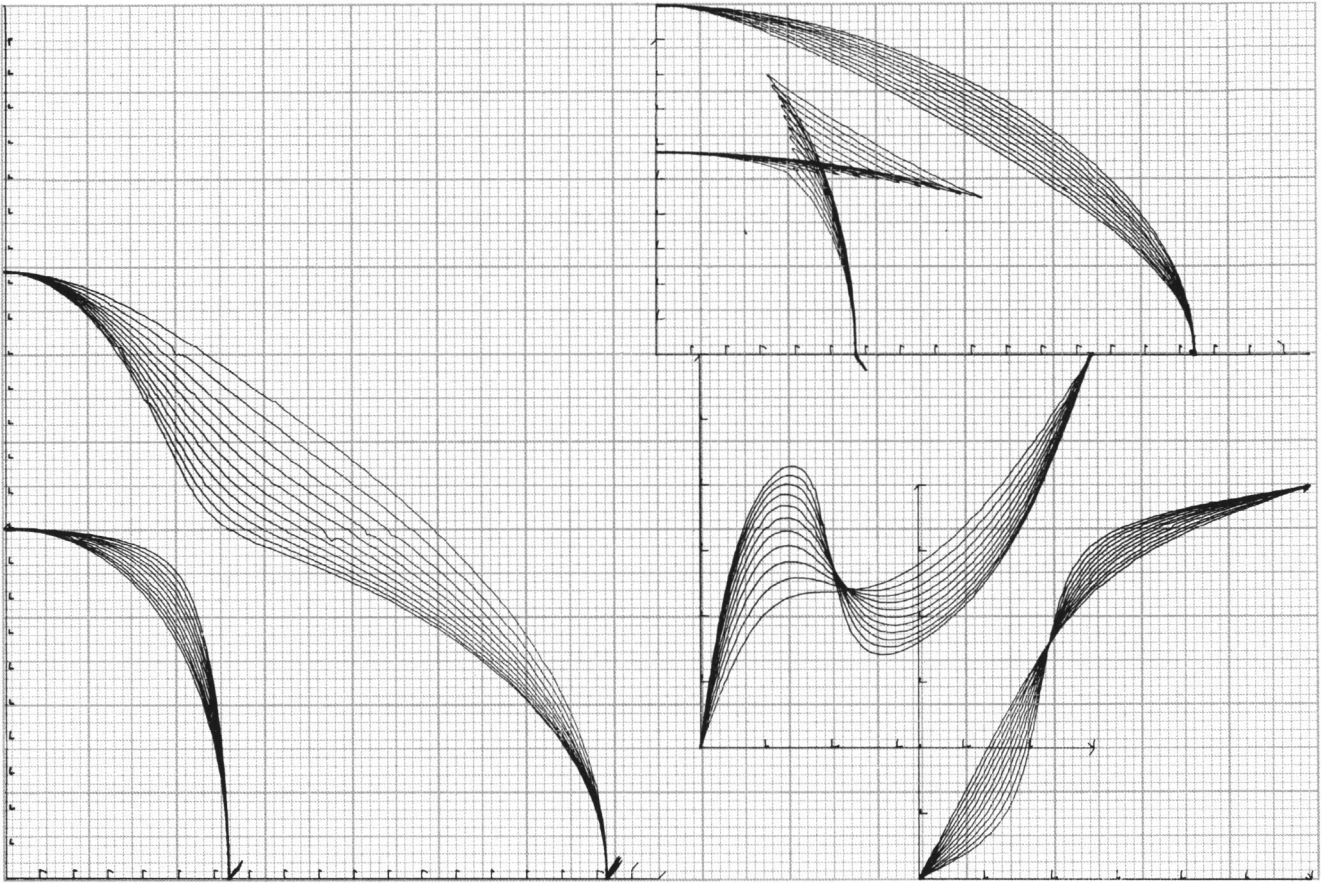




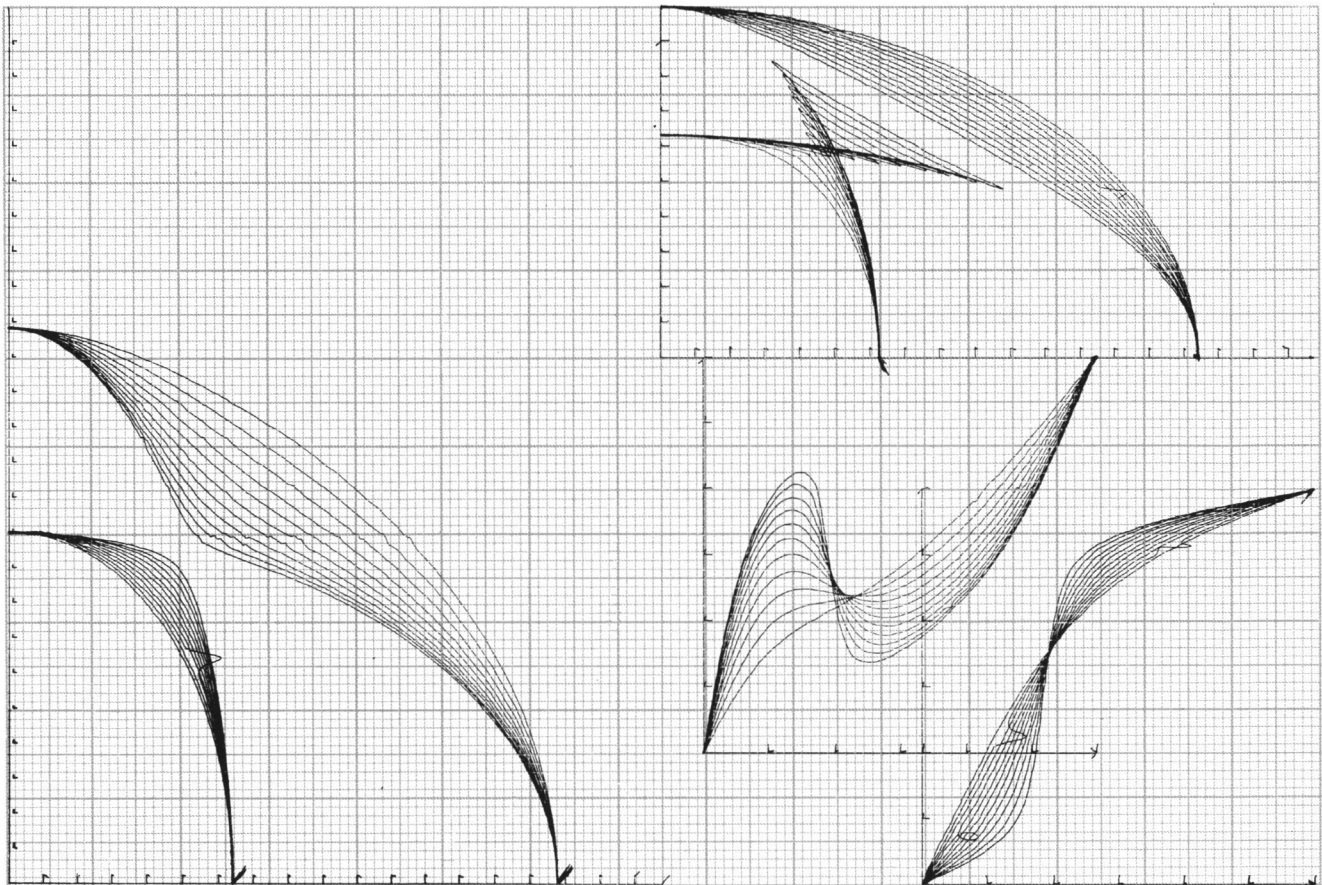


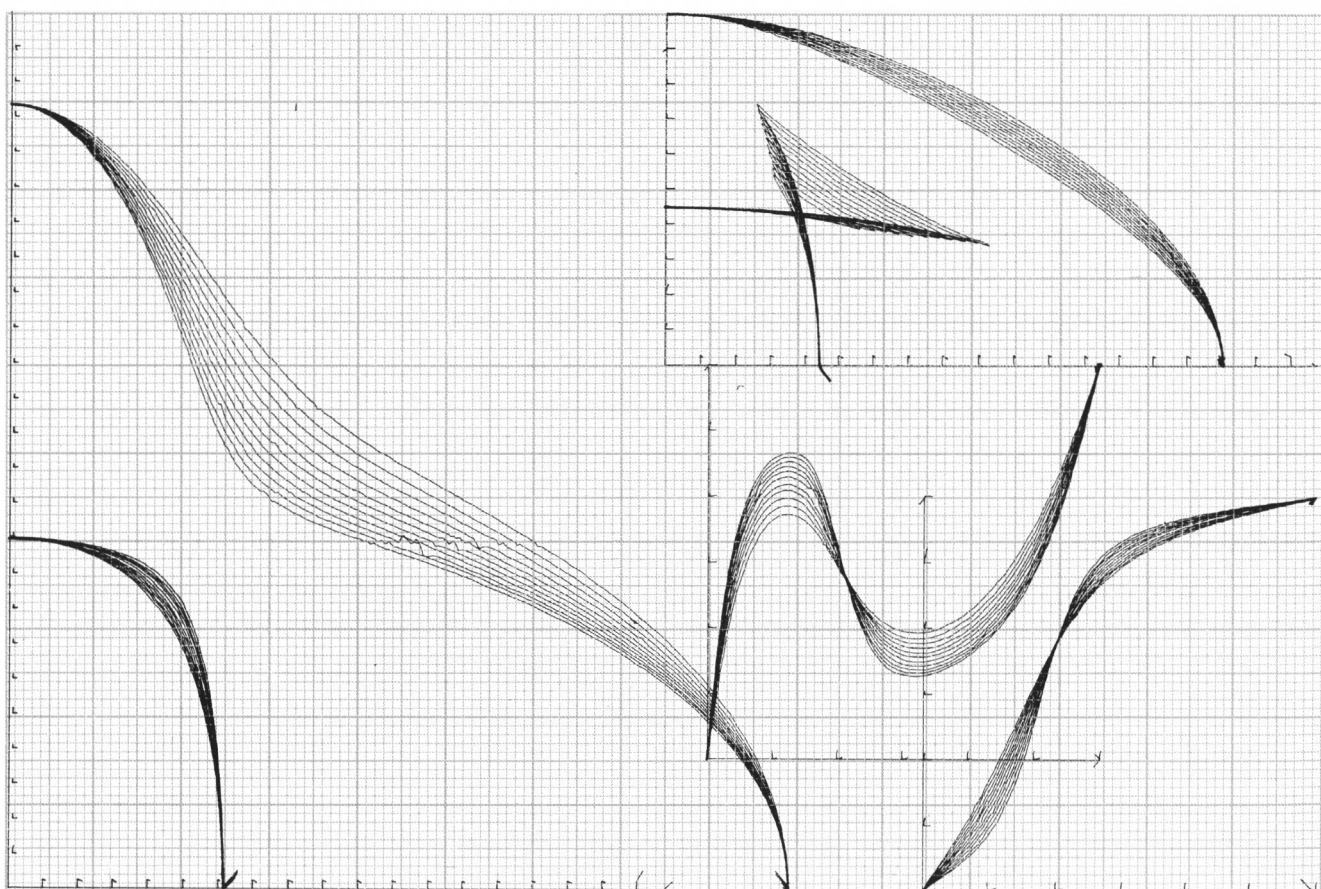
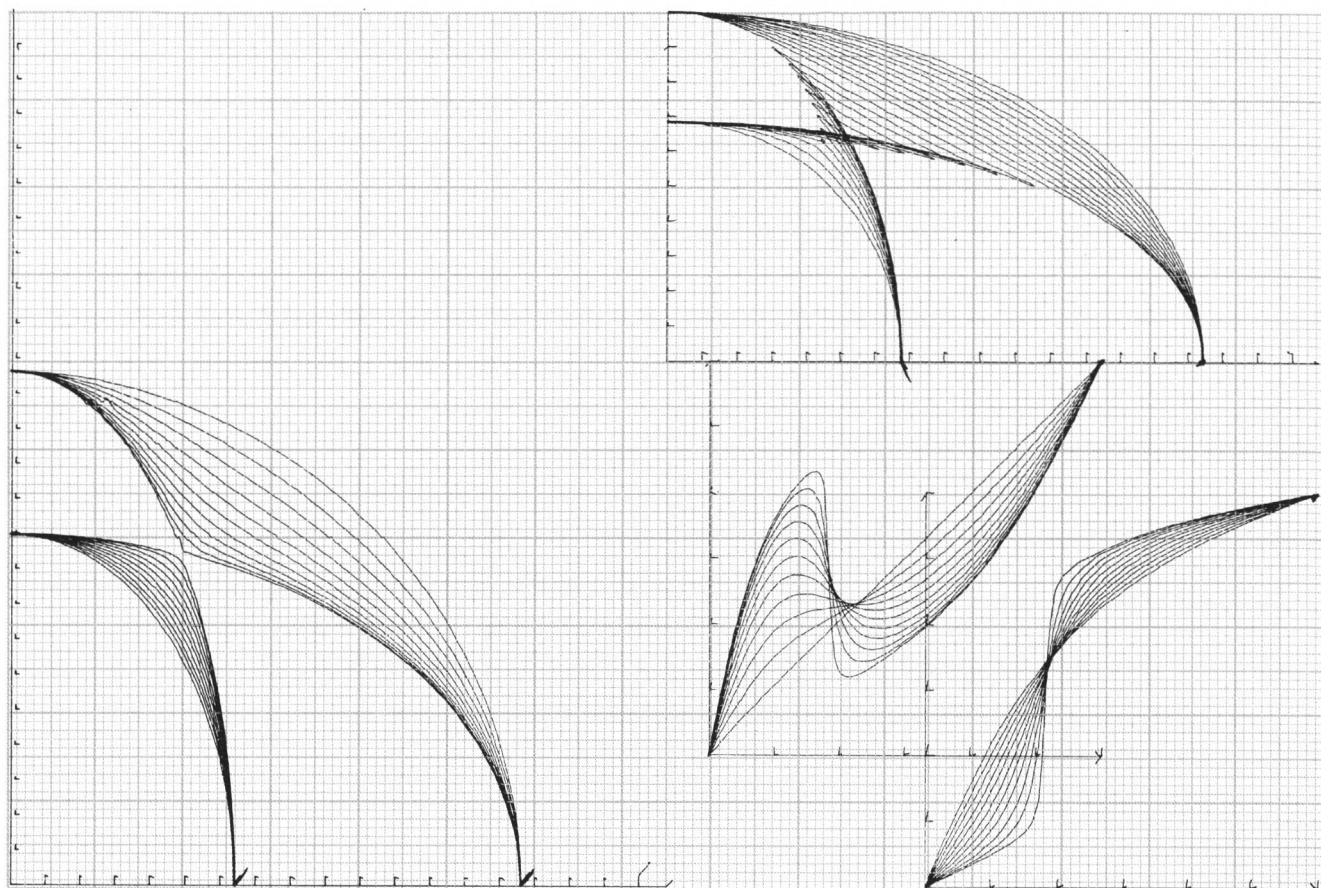


12
3

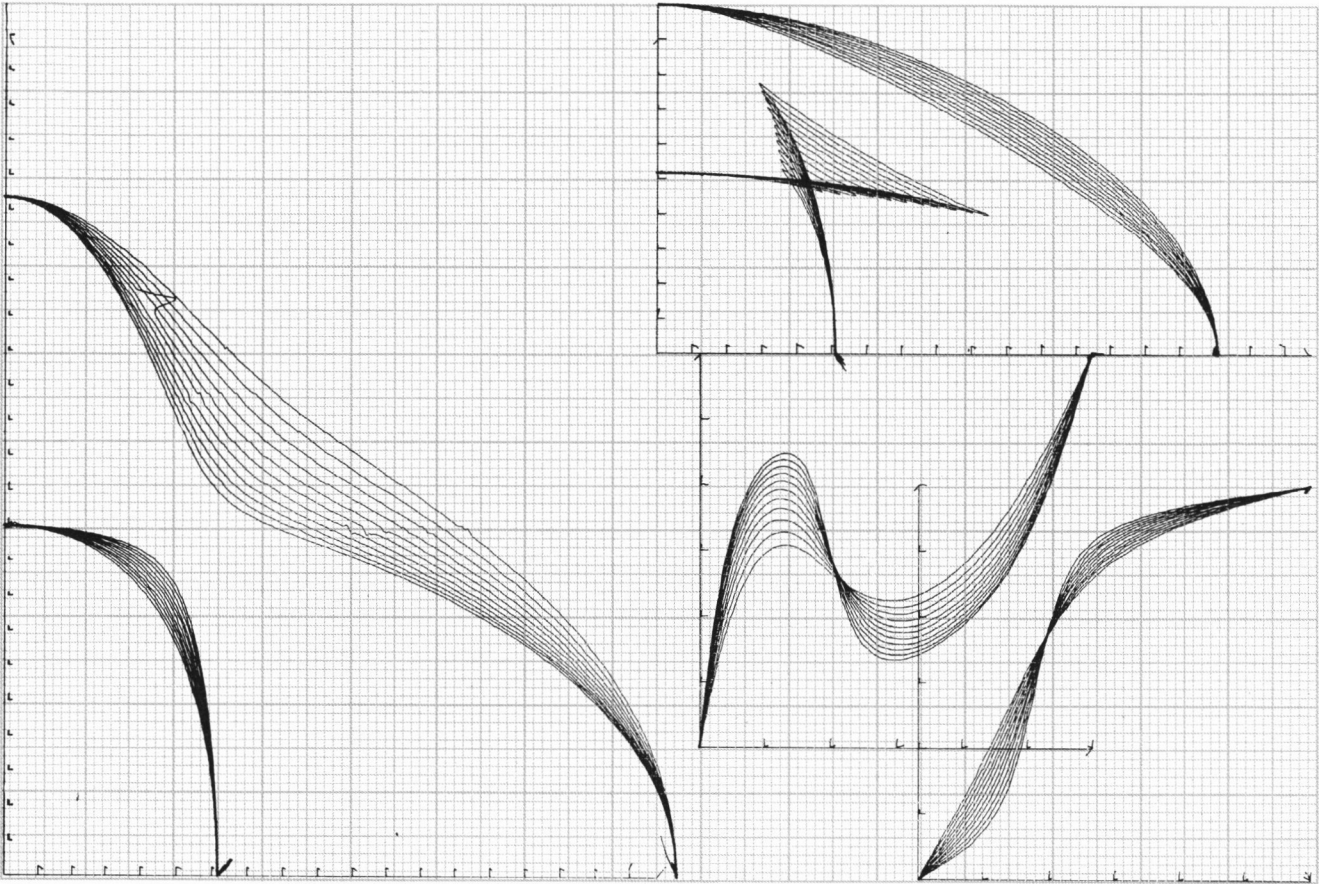


12
4





13
2



13
3

