

Abhandlungen
der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-naturwissenschaftliche Abteilung
XXX. Band, 1. Abhandlung

Strahlenablenkung und Farbenzerstreuung
genügend steiler Sichten durch die Luft

Von

M. Näbauer

Vorgelegt am 2. Februar 1924

München 1924

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franzschen Verlags (J. Roth)

Abhandlungen

der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Mathematisch-naturwissenschaftliche Abteilung

LXX. Band. I. Abhandlung

Strahlendruck und Farberzeugung
genügend starker Sichten durch die Luft

Von

M. Weber

Vorgelegt am 2. Februar 1924

München 1924

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Neumann'schen Verlags in Bonn

1. Rückblick. Allgemeiner Grundgedanke.

Es ist eine allbekannte Erscheinung, daß jeder von einem Punkte P_1 (Abb. 1) nach einem anderen Punkte P_m führende Strahl L infolge der ungleichartigen Beschaffenheit der durchsetzten Luftschichten eine streng genommen doppelt gekrümmte Lichtkurve beschreibt. Die Anfangstangente T_1 dieser Linie wird eine Richtung φ_1 , die Endtangente T_m eine davon abweichende Lage φ_m und die Sehne $P_1 P_m$ zwischen den Strahlenendpunkten wieder eine andere Richtung φ_{1m} besitzen. Der Winkel, welchen die im allge-

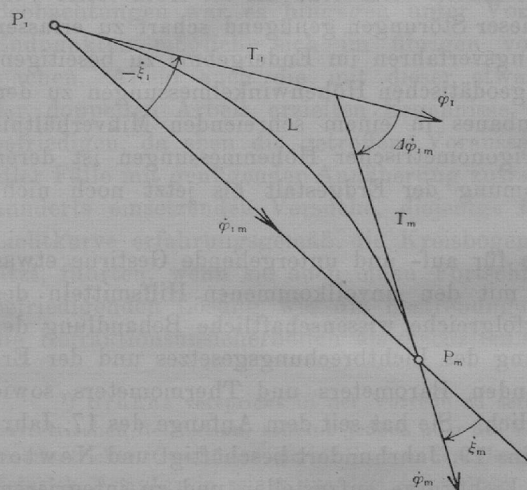


Abb. 1

meinen sich kreuzenden Geraden T_1 und T_m miteinander einschließen, ist die *Gesamtstrahlenbrechung* oder *Totalrefraktion* $\Delta \varphi_{1m}$; hingegen sind ξ_1 und ξ_m die auch als *Refraktionswinkel* bezeichneten Teilbeträge der Strahlenbrechung diejenigen Winkel, welche die Lichtkurve in ihren Endpunkten mit der Sehne $P_1 P_m$ einschließt.

Projiziert man die Lichtkurve einerseits auf die den Punkt P_1 enthaltende Lotebene¹⁾ in P_m und andererseits auf die Horizontalebene in diesem Punkte, so erhält man im Aufrißbild die *Höhenbrechung* oder *Vertikalrefraktion* $\Delta \varphi_{1m}$ sowie ihre Teilbeträge, die Höhenrefraktionswinkel ξ_1 und ξ_m , während das Grundrißbild die *seitliche Strahlenbrechung* oder *Lateralrefraktion* $\Delta \varphi_{1m}$ und ihre Teil-

beträge ξ_1 , ξ_m enthält. Alle diese Größen sollen im Laufe der folgenden Untersuchungen durchwegs im Uhrzeigersinne positiv gezählt werden.

Der Hauptgrund für die doppelte Krümmung der Lichtkurve liegt darin, daß die Begrenzungsflächen der Schichten gleicher optischer Brechungs-fähigkeit nicht genau die Form konzentrischer Kugelflächen besitzen. Diese Abweichungen rühren zum Teile davon her, daß die Niveauflächen selbst nur in grober Annäherung als Kugelflächen gelten können; größtenteils aber sind sie atmosphärischen Unregelmäßigkeiten zuzuschreiben. Immerhin halten sich diese Störungen im Durchschnitt doch in ziemlich engen Grenzen,

¹⁾ Diese Lotebene fällt mit der Zielebene des in P_m nach P_1 gerichteten Theodolit-Fernrohrs zusammen, wenn die Achsenfehler beseitigt sind und auch keine seitliche Strahlenbrechung vorhanden ist.

so daß die seitliche Krümmung der Lichtkurve gegen ihre Hauptkrümmung in der Schmiegungeebene oder auch im Vergleich zu ihrer vertikalen Krümmung als eine praktisch unendlich kleine Größe zu erwarten ist, welche Anschauung durch die Erfahrung vollauf bestätigt wird.

Je nachdem der angezielte Punkt der Erde oder einem Himmelskörper angehört, spricht man von einer *irdischen (terrestrischen)* bzw. von einer *astronomischen Strahlenbrechung*. Letztere kann für steile Sichten sehr genau, und zwar bis zu Höhenwinkeln von etwa 15° herab auf Bruchteile einer Bogensekunde bestimmt werden. Damit ist der Astronomie vielfach geholfen, denn auf schwächer geneigte Sichten, für welche mit der Annäherung an den Horizont allerdings auch die Refraktionsunsicherheiten rasch zunehmen, kann sie bei Höhenmessungen mit Rücksicht auf die zur Verfügung stehende große Zahl von höher gelegenen, gut bestimmten Sternen doch meist verzichten.

Viel schlimmer liegen die Verhältnisse für die Geodäsie, wo der Natur der Sache nach in erster Linie die irdische Strahlenbrechung in Frage kommt. Hier handelt es sich selbst bei den nach höchstgelegenen Zielpunkten wie Berggipfel führenden Sichten in der Regel um nur ganz schwach geneigte Strahlen, welche hauptsächlich in den unteren, Störungen besonders häufig ausgesetzten Luftschichten verlaufen. Es ist trotz vieler Versuche bis heute nicht gelungen, den Einfluß dieser Störungen genügend scharf zu erfassen oder ihn etwa durch ein geeignetes Beobachtungsverfahren im Endergebnis zu beseitigen. So steht denn heutzutage die Genauigkeit der geodätischen Höhenwinkelmessungen zu den Leistungen des hochentwickelten Instrumentenbaues in einem schreienden Mißverhältnis und wegen der relativ großen Unsicherheit trigonometrischer Höhenmessungen ist deren Ausnützung zu einer hypothesenfreien Bestimmung der Erdgestalt bis jetzt noch nicht möglich.¹⁾

Die *astronomische Höhenrefraktion*, welche für auf- und untergehende Gestirne etwas über $\frac{1}{2}^\circ$ beträgt, ist so groß, daß sie schon mit den unvollkommenen Hilfsmitteln des Altertums festgestellt werden konnte. Eine erfolgreiche wissenschaftliche Behandlung der Erscheinung war aber erst nach der Entdeckung des Lichtbrechungsgesetzes und der Erfindung des auf die Luftschichtung hinweisenden Barometers und Thermometers sowie nach Einführung der Infinitesimalrechnung möglich. Sie hat seit dem Anfange des 17. Jahrhunderts fast alle bedeutenden Astronomen bis ins 19. Jahrhundert beschäftigt und Newton gelang es zuerst, die Differentialgleichung der Lichtkurve aufzustellen und zu integrieren. Vor rund 100 Jahren hat Bessel auf Grund früherer fremder und eigener Arbeiten den theoretischen und praktischen Untersuchungen über die astronomische Strahlenbrechung einen formvollendeten Abschluß gegeben. Seine mustergültigen Refraktionstafeln²⁾ können durch neuere Tafelwerke, welche den inzwischen gemachten Fortschritten Rechnung tragen, nur langsam verdrängt werden.³⁾

¹⁾ Siehe hiezu Bruns H., *Die Figur der Erde*, Berlin 1878.

²⁾ Zunächst mitgeteilt in *Fundamenta astronomiae pro anno 1755*, Regiomonti 1818; später in verbesserter Form in *Tabulae Regiomontanae*, Regiomonti Pr. 1830.

³⁾ Ausführliche geschichtliche Angaben über die astronomische Strahlenbrechung findet man bei R. Wolf, *Handbuch der Astronomie*, 3. Halbband, Zürich 1892, S. 259–279, insbesondere aber bei Bruhns C., *Die astronomische Strahlenbrechung in ihrer geschichtlichen Entwicklung*, Leipzig 1861.

Die *irdische Strahlenbrechung*,¹⁾ welche im allgemeinen beträchtlich kleiner ist als die einem gleichen Höhenwinkel entsprechende astronomische Refraktion, wurde auch erst viel später bemerkt, zuerst wahrscheinlich von Picard 1669 gelegentlich seiner Gradmessungsarbeiten.²⁾ Lambert hat sie — nach Tralles³⁾ — zuerst bei trigonometrischen Messungen in Rechnung gebracht. Die terrestrische Lichtkurve verläuft — zum mindesten mit ihren Endstücken — in der Nähe der Erdoberfläche, d. h. in gestörten Luftschichten, so daß auch der Lichtweg besonders gegen die Enden zu Unregelmäßigkeiten zeigen wird; ein Umstand, den schon Tralles vor mehr als hundert Jahren scharf erfaßt hatte.³⁾ Die Unmöglichkeit, solche Störungen oder ihre Ursachen nach Maß und Zahl zu bestimmen, führte dazu, den Lichtstrahl zwischen zwei irdischen Punkten als einen *Kreisbogen* zu behandeln, was jedoch nur unter der Voraussetzung einer gleichartigen Luftschichtung der Wirklichkeit entspricht. Durch den sog. *Refraktionskoeffizienten*, welcher das Verhältnis des Halbmessers der Erde zu demjenigen der Lichtkurve bedeutet, ist diese als Kreisbogen offenbar bestimmt. Ein in Deutschland sehr gebräuchlicher Wert dieser Konstanten ist der von C. F. Gauß⁴⁾ angegebene Betrag $k = 0,13$, welcher aber um etwa 25% unsicher ist. Bei einseitigen Beobachtungen war man von vornherein an ein bestimmtes k und damit an einen ganz bestimmten Kreisbogen gebunden; bei gleichzeitigen gegenseitigen Beobachtungen war es hingegen unter Voraussetzung gleicher Refraktionswinkel in den Endpunkten möglich, sich im übrigen von der Form der Lichtkurve unabhängig zu machen. Allein auch die mit dieser etwas allgemeineren Annahme unter Aufwendung der doppelten Arbeit erzielten Ergebnisse konnten durchaus keine strengeren Ansprüche befriedigen, da eben die getroffene Voraussetzung niemals genau und nur in der Minderheit aller Fälle mit genügender Annäherung zutraf. Auch die etwa um die Mitte des 19. Jahrhunderts einsetzenden Versuche, diejenige Beobachtungszeit auszuwählen, zu welcher die Lichtkurve erfahrungsgemäß die Kreisbogenform oder doch gleiche Refraktionswinkel besitzt, führten, wenn sie auch einen Fortschritt bedeuten, ebensowenig zu einer vollständig befriedigenden Lösung wie die Bestrebungen, im Mittel aus durchlaufenden Tagesreihen die Refraktionsunsicherheiten auszuschalten.⁵⁾ Auch die Versuche Bauernfeinds,⁶⁾ unter

¹⁾ Bruhns verspricht in der Vorrede zu seiner eben genannten Schrift auch eine Geschichte der terrestrischen Refraktion, scheint jedoch über die Vorarbeiten nicht hinausgekommen zu sein. Eine nicht veröffentlichte Geschichte der irdischen Strahlenbrechung hat der schweizerische Ingenieurtopograph Heinrich Denzler in seiner aus dem Jahre 1843 stammenden Abhandlung „*Beiträge zur Kenntnis des Phänomens der terrestrischen Refraktion*“ geliefert. Den wesentlichen Inhalt dieser Schrift hat J. Maurer in der Meteorologischen Zeitschrift 1905 S. 262—265 mitgeteilt. Wertvolle kritisch-historische Betrachtungen über die terrestrische Refraktion enthält auch das 8. Kapitel von Helmerts *mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie*, II. Teil, Leipzig 1884.

²⁾ Siehe Picard M. J., *Mesure de la terre*, Paris 1671, S. 57/58 (Mémoires de l'academie royale des sciences, Tome 7).

³⁾ Tralles, *Beobachtungen über atmosphärische Refraktion der Lichtstrahlen irdischer Gegenstände* (Abhandl. d. mathem. Klasse d. K. Preuß. Akademie der Wiss. aus den Jahren 1804—1811), S. 86—146.

⁴⁾ Gauß C. F., Berliner Astronom. Jahrbuch für 1826, S. 91.

⁵⁾ Zur Erkenntnis, daß sich der terrestrische Refraktionskoeffizient nicht nur mit der Tageszeit sondern auch mit der Jahreszeit, hauptsächlich infolge der Temperaturschwankungen periodisch ändert, war schon 1806 Tralles (S. 132 seiner in Anmerkung 3 genannten Arbeit) auf Grund seiner Beobachtungen und Überlegungen gekommen. Später hat Baeyer (Astronomische Nachrichten, Bd. 14, 1837 S. 74) versucht, den Refraktionskoeffizienten als eine Funktion der vom wahren Mittag ab gezählten, in Teilen

Berücksichtigung der Temperatur und des Barometerstandes das Problem zu lösen, führten, soweit die irdische Strahlenbrechung in Frage kommt, nicht zum Ziele. Seine wichtigen Aufschlüsse über die durchschnittliche Konstitution der Atmosphäre sind wohl für die astronomische Refraktion von Bedeutung; sie kommen aber für die irdische Strahlenbrechung nur in geringem Maße in Betracht, weil diese eben in erster Linie eine Funktion des jeweiligen örtlichen Temperaturgefälles ist, dessen Verlauf in den unteren Luftschichten nach Ort und Zeit einem starken, schwer zu erfassenden Wechsel unterliegt. Trotzdem sind Bauernfeinds Untersuchungen sehr wertvoll und sein umfangreiches Beobachtungsmaterial findet noch heutigen Tages Verwendung.

Der im Laufe der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts von verschiedenen Seiten¹⁾ aufgestellte *physikalische Ausdruck des örtlichen Refraktionskoeffizienten* zeigte dessen außerordentlich starke Abhängigkeit vom Temperaturgefälle. Diesem Umstande versuchen auch die Entwicklungen von Jordan und Helmert Rechnung zu tragen, welche auf Lichtkurven führen, die im allgemeinen keine Kreisbögen sind. Die Brauchbarkeit der von diesen Forschern abgeleiteten Formeln hängt vor allem daran, daß die Änderung des Temperaturgefälles längs des ganzen Strahles eine möglichst gleichmäßige ist; dagegen üben geringe Abweichungen der Luftschichtung von der normalen Lage keinen großen Einfluß aus.

Nach neueren Untersuchungen sollen unter Zugrundelegung der Kreisbogen-theorie Beobachtungen, welche um die Mittagszeit auf der Talstation ausgeführt werden, ebenso gute oder noch bessere Ergebnisse liefern wie gleichzeitige gegenseitige Beobachtungen aus durchlaufenden Tagesreihen.²⁾

Eine besondere Bedeutung besitzt die irdische Strahlenberechnung für die horizontalen Sichten im geometrischen Nivellement sowie für tachymetrische Messungen. Man spricht in diesem Sonderfall von einer *Refraktion im Nivellement* oder von einer *topographischen Refraktion*. Da sich hier die Sichten stets in ihrer ganzen, wenn auch geringen Ausdehnung in unmittelbarer Bodennähe, also meist in gestörten Schichten bewegen, so ist von vornherein nicht nur eine beträchtliche sondern auch eine von Fall zu Fall verschiedene Strahlenbrechung zu erwarten und die Erfahrung bestätigt diese Annahme. Man glaubte früher, den schädlichen Einfluß der Refraktion auf das geometrische Nivelle-

des halben Tagebogens der Sonne ausgedrückten Tageszeit anzugeben. H. Hartl zeigte aus Beobachtungen die Abnahme des Refraktionskoeffizienten mit der Meereshöhe (*Über mittlere Refraktionskoeffizienten* in Mitteilungen d. k. k. militärgeographischen Instituts, Wien 1884, S. 156—175).

⁶⁾ Bauernfeind C. M. v., *Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion*. Abhandlungen der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften. Erste Mitteilung: XIII. Band, 3. Abt., München 1880; Zweite Mitt.: XV. Bd., 1886, 1. Abt.; Dritte Mitt.: XVI. Bd., 1888, 3. Abt.; Nachtrag zur II. und III. Mitt. im XVII. Bd., 1892, 2. Abt.

¹⁾ Hier sind besonders zu nennen Baeyer (Astron. Nachr., Bd. 41, 1855, S. 320), Jordan (Astron. Nachr., Bd. 88, 1876, S. 99—108) und Helmert (Die mathem. u. physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, II. Teil, Leipzig 1884, S. 575 ff.). Eine einwandfreie Bestimmung des Temperaturgefälles durch Beobachtung von mehreren übereinander befindlichen Thermometern hat aber zu jener Zeit noch nicht stattgefunden. Jordan berechnete es aus dem Temperaturunterschiede in den Endpunkten der Lichtkurve unter der recht gewagten Annahme, daß die Temperaturänderung längs des ganzen Strahles eine gleichmäßige sei.

²⁾ Gülland, *Über den theoretischen Refraktionskoeffizienten*, Zeitschrift für Vermessungswesen, 1914, S. 369—385 u. 393—419.

ment durch Nivellieren aus der Mitte vollständig beseitigen zu können. Diese Ansicht kann man für alle Einwägungen, welche rein technischen Zwecken dienen, wohl gelten lassen. Für ein wissenschaftlichen Zwecken dienendes Feinnivellement aber ist sie nicht mehr zutreffend; hier erreichen die Refraktionsunterschiede¹⁾ zwischen Rückblick und Vorblick häufig Beträge, welche mit den an die Arbeit gestellten Genauigkeitsansprüchen nicht mehr recht in Einklang zu bringen sind.

Die Untersuchung der Refraktion im Nivellement ist erst in den letzten Jahrzehnten in Angriff genommen worden und noch lange nicht als abgeschlossen zu betrachten. Die erste wissenschaftliche Behandlung der Frage ist wohl Lallemand²⁾ zuzuschreiben, welcher unter der Annahme eines in Bezug auf die Höhe über dem Boden logarithmischen Temperatugesetzes für den Refraktionsfehler einen analytischen Ausdruck aufstellte. Jordan³⁾ gab demselben eine etwas einfachere Form, indem er eine von ihm schon früher für die terrestrische Strahlenbrechung in freier Luft aufgestellte Formel für das geometrische Nivellement umformte. In beiden Formeln spielt der Temperaturgradient oder das Temperaturgefälle eine sehr wichtige Rolle. Diese entscheidende Größe aber dachten sich beide Forscher in einer unzulänglichen Weise bestimmt, nämlich durch Messung der Temperatur in der Instrumentenmitte sowie im Endpunkt des Rückblicks und des Vorblicks. Eine schärfere Bestimmung des Temperaturgradienten hat zuerst Hegershoff⁴⁾ durchgeführt, indem er an verschiedenen Stellen der Lichtkurve jeweils an zwei lotrecht übereinander befindlichen Thermometern die Temperaturen bestimmte. Schließlich gelangte er unter der Annahme eines in Bezug auf die Höhe rein quadratischen Temperatugesetzes zu einem allgemeinen Ausdruck für den Refraktionsfehler, der durch ein Versuchsnivellement verprobt wurde. Sehr gründlich und anschaulich ist die ganze Frage in einer Dissertation von Kohlmüller⁵⁾ behandelt worden, welcher bei der Verarbeitung einer größeren Zahl von eigenen Beobachtungen, bei denen der Temperaturverlauf aus den Angaben von drei lotrecht übereinander befindlichen Thermometern bestimmt worden war, zu folgenden Schlüssen gelangt. Die Refraktion im Nivellement wächst annähernd mit dem Quadrat der Zielweite und ist im allgemeinen umgekehrt proportional zur Zielhöhe. Ihr Maximum fällt mit dem Temperaturmaximum zusammen. Sie ist daher mittags am größten, während sie in den Morgen- und Abendstunden nahezu verschwindet oder sogar negative Werte annimmt. Der Halbmesser der Lichtkurve ist im allgemeinen kleiner wie der Erdhalbmesser. Es besteht also ein wesentlicher Unterschied zwischen der Refraktion im Nivellement und der terrestrischen Refraktion. Diese ist nämlich um die Mittagszeit am kleinsten, am größten dagegen in den Morgen- und Abendstunden und der Halbmesser der terrestrischen Lichtkurve beträgt etwa das Achtfache des Erdhalbmessers.⁶⁾

¹⁾ Daß auch beim geometrischen Nivellement aus der Mitte die Refraktion für Rückblick und Vorblick nur ungefähr gleich ist, hat ebenfalls schon Tralles auf S. 98 der in Anmerkung 3 Seite 5 genannten Arbeit ausgesprochen.

²⁾ Lallemand, *Note sur l'erreur de refraction dans le nivellement géométrique*, Erdmessungsbericht (über die Konferenz in Lausanne 1896), Berlin 1897, Anhang B, III^d, S. 247—256.

³⁾ Jordan W., *Refraktion im Nivellement*, Zeitschrift für Vermessungswesen 1898, S. 97—103 und 201—202.

⁴⁾ Hegershoff R., *Der Zustand der Atmosphäre als Fehlerquelle im Nivellement*, Borna-Leipzig 1907.

⁵⁾ Kohlmüller Franz, *Zur Refraktion im Nivellement*, München 1912.

⁶⁾ Zum behandelten Gegenstand siehe auch Gramm, *Über „topographische Refraktion“ als Fehler-*

Die erste Erwähnung und Beschreibung der *seitlichen Strahlenbrechung* oder *Lateralrefraktion* ist nach S. Günther¹⁾ bei dem Nürnberger Astronomen Eimmart²⁾ zu Beginn des 18. Jahrhunderts zu finden. Er kam später auch hinter die wahre Ursache dieser Erscheinung, welche er anfänglich einer zitternden Bewegung der Erde zuschrieb. Um die Erforschung der seitlichen Strahlenbrechung, welche aus einem sehr geringen regelmäßigen und einem meist größeren unregelmäßigen Anteil zusammengesetzt ist, haben sich im vorigen Jahrhundert hauptsächlich Sabler,³⁾ Pfaff,⁴⁾ Sonderhof⁵⁾ und Bauernfeind⁶⁾ bemüht. Die Versuchsergebnisse gewähren jedoch keine sicheren Schlüsse. Der erwähnte systematische Beitrag rührt von der ellipsoidischen Erdgestalt her und ist das Produkt aus dem Refraktionskoeffizienten und dem kleinen Winkel, welcher die geodätische Linie mit dem entsprechenden Vertikalschnitt im Beobachtungsorte einschließt. Er kann leicht zahlenmäßig berechnet werden, kommt aber wegen seiner Geringfügigkeit selbst bei den feinsten geodätischen Horizontalwinkelmessungen heute noch nicht in Betracht. Schlimmer ist die andere, von Störungen der Luftschichtung herrührende Komponente. Dies gilt besonders dann, wenn der Strahl an einer Stelle unmittelbar über dem Boden, an einem Berg oder an einer Wand vorbeiführt. Im übrigen hängt dieser Anteil hauptsächlich vom seitlichen Gefälle der Temperatur, in geringerem Maße auch vom seitlichen Druckgefälle ab. Unter der Voraussetzung eines homogenen Refraktionsfeldes längs des ganzen Strahles ist nach Jordan⁷⁾ die *horizontale Gesamtkrümmung* der Lichtkurve in Bogensekunden $\Delta \varphi_{1m} = -0,22 \bar{\tau} \cdot x + 0,08 \bar{\pi} \cdot x$. Hierin ist $\bar{\tau}$ das seitliche Temperaturgefälle auf 1 km in Celsius-Graden, $\bar{\pi}$ ist das seitliche barometrische Gefälle auf 1° (111 km) in mm und x ist die Länge der Lichtlinie in km. Dieses Ergebnis wurde später durch Christiansen⁸⁾ bestätigt. In der letzten Zeit hat G. Förster⁹⁾ in einer hauptsächlich theoretischen Studie die bei der seitlichen Strahlenbrechung auftretenden Fragen gründlich untersucht und gezeigt, daß in einem homogenen Refraktionsfeld eine seitliche Strahlenbrechung aus den Triangulierungswidersprüchen in keiner Weise nachgewiesen werden kann, da sie weder die Winkel- noch die Seitenbedingungen eines Netzes beeinflusst. Trotzdem kann die Form des Netzes beträchtlich entstellt sein. Für große, nicht

quelle bei Präzisionshöhenmessungen, Allgemeine Vermessungsnachrichten, 1910, S. 394 ff., sowie Sarnetzky H., *Der Refraktionskoeffizient in unmittelbarer Erdnähe*, Gießen 1915.

¹⁾ Günther Dr., *Historische Notizen über die Lateralrefraktion*, Sitzungsberichte der physik.-medizinischen Sozietät zu Erlangen, 6. Heft, November 1873 bis August 1874, S. 138—147.

²⁾ Eimmart G. Chr., *Ichnographia nova contemplationum de Sole in desolatis antiquorum philosophorum rudibus*, Norimbergae MDCCI.

³⁾ Sabler, *Beobachtungen über die irdische Strahlenbrechung und über die Gesetze der Veränderung derselben*, Dorpat 1839.

⁴⁾ Pfaff F., *Beobachtungen über die Lateralrefraktion*, Sitzungsbericht der mathem.-physikalischen Klasse der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München, 1872, S. 147—162.

⁵⁾ Sonderhof, *Die geodätischen Korrekturen der auf dem Sphäroid beobachteten Horizontalwinkel*, Grunerts Archiv der Mathematik und Physik, 1869, Teil 51, S. 20—41.

⁶⁾ Siehe Anmerkung 6 zu S. 5 (auf S. 6).

⁷⁾ Jordan, *Handbuch der Vermessungskunde*, III. Bd., 3. Aufl., Stuttgart 1890, S. 156—159.

⁸⁾ Christiansen H. J., *Einige Bemerkungen über die terrestrische Refraktion*, Zeitschrift für Vermessungswesen, 1903, S. 305—315.

⁹⁾ Förster Gustav, *Beitrag zur Theorie der Seitenrefraktion*, Gerlands Beiträge zur Geophysik, XI. Bd., 1912, S. 414—469.

homogene Refraktionsfelder, welche nicht eine einfache, unregelmäßige Ansammlung von vielen kleinen Refraktionsfeldern sind, kommt er, wenn Temperatur-, Luftdruck- oder Feuchtigkeitsunterschiede allein als Ursachen der Strahlenbrechung angesehen werden, zu folgendem Ergebnis: „Die Teile der Seitenrefraktion, welche ein trigonometrisches Netz als Ganzes deformieren, sind klein von der ersten Ordnung, diejenigen, welche die Winkelbedingungsgleichungen beeinflussen, klein von der zweiten Ordnung und diejenigen, die in die Seitengleichungen eingehen, wenigstens klein von der dritten Ordnung. Unter Deformation des Netzes als Ganzes ist z. B. die Krümmung langer Dreiecksketten zu verstehen, die zum Ausdruck kommt, wenn die Kette zur Berechnung einer geodätischen Linie dient, deren Endazimute astronomisch bestimmt sind. Klein von der ersten Ordnung sind Größen, die den absoluten Betrag des mittleren Fehlers einer trigonometrischen Richtung wesentlich übersteigen; klein von der zweiten Ordnung sind solche, die den mittleren Richtungsfehler nicht erreichen, also etwa einige Zehntel Bogensekunden betragen, und klein von der dritten und höheren Ordnung sind alle diejenigen Größen, die in keiner Weise praktisch bestimmbare Werte erreichen.“

Die seitliche Strahlenbrechung blieb für die Horizontalwinkelmessung so lange bedeutungslos, als sie deren unvermeidliche Unsicherheiten nicht erreichte. Heute trifft dies in vielen Fällen nicht mehr zu; ihr Einfluß wird immer lästiger empfunden und es wird bald die Zeit kommen, wo es keinen Sinn mehr hat, die innere Genauigkeit der Horizontalwinkelmessung noch weiter zu steigern, wenn es nicht gleichzeitig gelingt, die Beobachtungen vom Einfluß der seitlichen Strahlenbrechung zu befreien.¹⁾

Nach alledem muß man zurzeit die atmosphärische Strahlenbrechung als den größten Hemmschuh in der Entwicklung der geodätischen Beobachtungskunst betrachten, dessen Beseitigung nach wie vor mit allen Mitteln anzustreben ist. Man könnte daran denken, das ausschlaggebende Temperaturgefälle durch empfindliche thermoelektrische Apparate schärfer zu bestimmen und die Strahlenbrechung aus meteorologischen Beobachtungen rechnerisch zu ermitteln. Allein dieser z. B. durch v. Brunn²⁾ vorgeschlagene Weg wird immer sehr umständlich bleiben und die Verhältnisse doch nur unvollkommen darstellen können, da es praktisch unmöglich ist, den atmosphärischen Zustand in genügend vielen Punkten einer Lichtkurve gleichzeitig zu bestimmen.

Die Wichtigkeit des Gegenstandes mag den im folgenden unternommenen Versuch, dem Problem von einer anderen Seite her beizukommen, rechtfertigen, selbst wenn die praktische Ausführung zunächst etwa auf instrumentelle Schwierigkeiten stoßen sollte. Das zu entwickelnde Verfahren stützt sich auf folgenden *Grundgedanken*. — *Mit jeder Strahlenbrechung wird — vom einfarbigen Licht abgesehen — infolge der verschiedenen Brechbarkeit verschiedenfarbigen Lichtes auch eine Farbenzerstreuung verbunden sein, welche umso größer ausfallen wird, je größer die Ablenkung eines bestimmten, beliebig ausgewählten Strahles, des Grundstrahles L (Abb. 2) ist.* Man kann also wohl hoffen, aus dem Unter-

¹⁾ Für die nächste Zeit kann man sich vielleicht noch durch die Einführung von Nachtbeobachtungen an Stelle der Tagbeobachtungen helfen. Während der Nacht herrschen im allgemeinen gleichmäßigere atmosphärische Verhältnisse und die bei Nacht stärker gekrümmte Lichtkurve meidet die so gefährliche unmittelbare Bodennähe.

²⁾ v. Brunn A., *Zur Berechnung der terrestrischen Refraktion*, Zeitschrift für Vermessungswesen, 1920, S. 2—18.

schiede ε'_m der Richtungen, unter welchen zwei oder mehrere vom Zielpunkt P_1 ausgehende einfarbige Strahlen L, L' von verschiedener Wellenlänge λ, λ' im Beobachtungsorte P_m eintreffen, eine der Teilrefraktionen ξ oder im Falle gegenseitiger gleichzeitiger Beobachtungen die gesamte Strahlenbrechung $\Delta\varphi_{1m}$ ermitteln zu können.¹⁾ Unsere Aufgabe ist es, den Zusammenhang zwischen den gesuchten Refraktionsbeträgen $\xi_1, \xi_m, \Delta\varphi_{1m}$ einerseits und den der Beobachtung zugänglichen Winkeln $\varepsilon'_1, \varepsilon'_m$ andererseits in einer hinreichend einfachen Form darzustellen.

In dieser Abhandlung soll zunächst nur die *Höhenbrechung für etwas steilere Sichten* behandelt werden. Zwar ist dies nicht der für die Geodäsie wichtigere Fall. Er soll aber trotzdem zuerst ins Auge gefaßt werden, weil bei ihm zur Ermittlung des Hauptgliedes der Strahlenbrechung keine weiteren Voraussetzungen notwendig sind, als von vorneherein feststehen. Erst für die Berücksichtigung der kleinen Glieder zweiter Ordnung wird eine ziemlich allgemein gehaltene Hypothese notwendig. Es mag aber schon jetzt bemerkt werden, daß sich unter wenig Voraussetzungen, gegen welche praktisch nicht viel einzuwenden sein dürfte, derselbe Zusammenhang zwischen Farbenzerstreuung und Strahlenbrechung auch für ganz schwach geneigte und für horizontale Sichten aufstellen läßt.

2. Brechungsverhältnisse. Differentialausdruck der Strahlenbrechung.

Wir denken uns die zwischen den Punkten P_1 und P_m (Abb. 2) befindliche Luft durch unendlich viele Trennungsf lächen $f_1, f_2, \dots$ derart in Schichten $s_1, s_2, \dots$ zerlegt, daß in jedem Punkte ein und derselben Schicht gleiche Dichte herrscht. Über

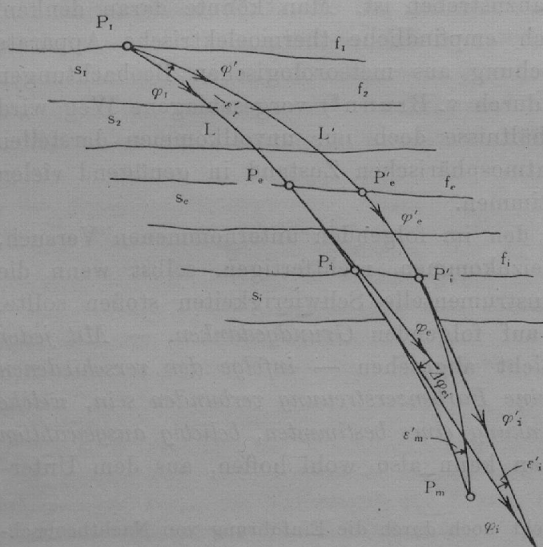


Abb. 2

das vorerst unbestimmt gelassene Dickenverhältnis der einzelnen, ungefähr horizontalen Schichten soll erst später zweckmäßig verfügt werden. In diesem Medium führen zwei Strahlen L, L' mit den Wellenlängen λ, λ' vom Zielpunkt P_1 nach dem Beobachtungsorte P_m . Irgend eine Trennungsf läche f_i wird von diesen Strahlen in den beiden Punkten P_i, P'_i durchstoßen, welche stets als *entsprechende Punkte* bezeichnet werden sollen. Die zum Strahl L gehörigen absoluten Brechungsexponenten vom leeren Raum in die Nachbarschichten s_i, s_{i+1} seien n_i, n_{i+1} während ν_i den relativen Brechungsexponenten desselben Strahles von s_i nach s_{i+1} bedeutet. Sind n'_i, n'_{i+1} und ν'_i die entsprechenden Werte für den Strahl L' , so gelten die strengen Beziehungen

$$\nu_i = n_{i+1} : n_i, \quad \nu'_i = n'_{i+1} : n'_i. \quad (1)$$

¹⁾ Man könnte natürlich auch die lineare Farbenzerstreuung (Spektrum) ins Auge fassen, welche ein einziger vom Zielpunkt ausgehender mehrfarbiger Strahl bis zum Beobachtungsorte erfahren hat.

Mit Rücksicht auf die unendlich kleinen Schichtdicken werden sich die Exponenten n_i und n_{i+1} bzw. n'_i und n'_{i+1} nur um verschwindend kleine Größen dn_i bzw. dn'_i unterscheiden.

Wir setzen daher

$$n_{i+1} = n_i + dn_i, \quad n'_{i+1} = n'_i + dn'_i \quad (2)$$

und erhalten damit aus (1)

$$v_i = 1 + \frac{dn_i}{n_i}, \quad v'_i = 1 + \frac{dn'_i}{n'_i} \quad (3)$$

$$\text{bzw.} \quad v_i - 1 = \frac{dn_i}{n_i}, \quad v'_i - 1 = \frac{dn'_i}{n'_i}. \quad (4)$$

Nun ist der als *spezifisches Brechungsvermögen* bezeichnete Quotient

$$b = (n_i - 1) : \vartheta_i, \quad (5)$$

worin ϑ_i die Dichte des Mediums in P_i bedeutet, für alle Punkte ein und desselben Strahles praktisch eine unveränderliche Größe.¹⁾

Es gelten also für die beiden Strahlen L, L' , zu denen die Festwerte b, b' gehören, für beliebige entsprechende Punktpaare P_e, P_i und P'_e, P'_i die Beziehungen

$$b = \frac{n_e - 1}{\vartheta_e} = \frac{n_i - 1}{\vartheta_i}, \quad b' = \frac{n'_e - 1}{\vartheta'_e} = \frac{n'_i - 1}{\vartheta'_i}. \quad (6)$$

Hieraus erhält man durch Division

$$\frac{n'_e - 1}{n_e - 1} = \frac{n'_i - 1}{n_i - 1} = \frac{b'}{b} = C'. \quad (7)$$

Diese wichtige Gleichung zeigt, daß das Verhältnis der um 1 verminderten absoluten Brechungsexponenten für jedes Paar entsprechender Punkte zweier Strahlen ein Festwert $C' = b' : b$ ist.

Das vorstehende Ergebnis, welches für ein einfaches Gas gefunden wurde, läßt sich auch auf die Luft übertragen, solange diese als ein homogenes Gasgemische betrachtet werden darf. In Wirklichkeit trifft diese Voraussetzung für die ganze Länge eines Strahles nicht genau zu und man wird daher, um streng zu sein, die Abgrenzung der unendlich dünnen Schichten s so bemessen, daß von vorneherein der Bedingung (7) genügt wird. Es ist dies immer möglich und auch hier kann zunächst das Dickenverhältnis der einzelnen Schichten noch unbestimmt bleiben. Die so gewonnenen Schichten werden übrigens von denjenigen gleicher Dichte nur sehr wenig abweichen können, da innerhalb einer einzelnen Schicht zwischen den nahe an einander liegenden entsprechenden Punkten P_i, P'_i die Homogenität der Luft nur ganz geringe Störungen aufweisen kann. Die geringe Unsicherheit in C' , welche durch eine von der normalen etwas abweichende Luftzusammensetzung verursacht wird, kann ertragen werden.

¹⁾ Nach neueren Untersuchungen von H. G. Gale (*Beziehungen zwischen der Dichte und dem Brechungsverhältnis der Luft*, Phys. Rev. Bd. XIV, 1902, S. 1—16), über welche in der Zeitschrift für Instrumentenkunde, XXIV. Bd., 1904, S. 88 berichtet ist, bleibt b bis zu Drucken von 20 Atmosphären bis auf etwa 0,1% konstant.

Die Anwendung von (7) auf die beiden Nachbarschichten s_i, s_{i+1} ergibt

$$\frac{n'_{i+1} - 1}{n_{i+1} - 1} = \frac{n'_i - 1}{n_i - 1} = C' \quad (8)$$

bzw.

$$(n'_{i+1} - 1) : (n'_i - 1) = (n_{i+1} - 1) : (n_i - 1).$$

Durch entsprechende Subtraktion findet man hieraus

$$\frac{n'_{i+1} - n'_i}{n_{i+1} - n_i} = \frac{dn'_i}{dn_i} = \frac{n'_i - 1}{n_i - 1} = C' \quad (9)$$

und unter Beachtung von (4) erhält man

$$\frac{dn'_i}{dn_i} = \frac{n'_i}{n_i} \cdot \frac{v'_i - 1}{v_i - 1} = C'$$

bzw.

$$\frac{v'_i - 1}{v_i - 1} = \frac{n_i}{n'_i} \cdot C' = C' \frac{1 + (n_i - 1)}{1 + (n'_i - 1)} = C' \left\{ 1 + (n_i - 1) - (n'_i - 1) + \dots \right\}. \quad (10)$$

Die in der geschweiften Klammer unterdrückten kleinen Glieder höherer Ordnung kann man ohne jeden praktischen Schaden weglassen, da schon die linearen Glieder $n_i - 1$ und $n'_i - 1$ immer sehr kleine, in der Nähe von 10^{-4} liegende Größen sind. Ersetzt man in (10) die Differenz $n'_i - 1$ durch das aus (8) folgende Produkt $C' (n_i - 1)$, so ergibt sich (10) in der Form

$$\frac{v'_i - 1}{v_i - 1} = C' \left\{ 1 - (C' - 1)(n_i - 1) \right\}. \quad (11)$$

Es wird sich praktisch kaum ermöglichen lassen, für $C' - 1$ einen größeren Wert als etwa 0,1 zu erzielen, so daß der Ausdruck $(C' - 1)(n_i - 1)$ den Wert $3 \cdot 10^{-5}$ wohl niemals erreichen dürfte und neben der Einheit ohne jeden praktischen Schaden vernachlässigt werden darf. Damit folgt aber

$$(v'_i - 1) : (v_i - 1) = C' = (v'_e - 1) : (v_e - 1). \quad (12)$$

Nach dieser grundlegenden Beziehung gilt das mit den absoluten Brechungsexponenten unter (7) aufgestellte konstante Verhältnis C' auch für die relativen Exponenten mit einer praktisch stets ausreichenden Schärfe.

Wenn wir uns zunächst auf solche Luftschichten beschränken, in welchen $v_i - 1$ stets dasselbe Vorzeichen besitzt, so können wir, ohne die Allgemeinheit der Betrachtungen im geringsten einzuschränken, das Dickenverhältnis der einzelnen unendlich dünnen Schichten stets so bemessen, daß der in (4) enthaltene Quotient einen unveränderlichen Wert

$$\frac{dn_i}{n_i} = dn \quad (13)$$

längs des ganzen Grundstrahles L besitzt. Dann erhält man aus (4) und (12) die Beziehungen

$$v_i - 1 = dn, \quad v'_i - 1 = \frac{dn'_i}{n'_i} = C' (v_i - 1) = C' \cdot dn = dn', \quad (14)$$

wonach bei konstantem dn auch der dem laufenden Strahl L' entsprechende Quotient $dn'_i : n'_i$ einen unveränderlichen Wert dn' besitzt. Die relativen Brechungsexponenten werden Festwerte, nämlich

$$v_i = v = 1 + dn, \quad v'_i = v' = 1 + C' \cdot dn = 1 + dn'. \quad (15)$$

Auch der Unterschied

$$\delta v'_i = v'_i - v_i \quad (16)$$

der entsprechenden relativen Brechungsexponenten läßt sich durch dn ausdrücken und nimmt einen konstanten Wert $\delta v'$ an. Es ist nämlich mit Rücksicht auf (16) und (14)

$$\delta v'_i = (v'_i - 1) - (v_i - 1) = C' \cdot dn - dn = (C' - 1) dn = \delta v'. \quad (17)$$

An der Hand von Abb. 3, in welcher der Linienzug $P_{i-1} P_i P_{i+1}$ den in den Schichten s_{i-1} und s_i verlaufenden Teil des Strahles L vorstellt, kann der Differentialausdruck $d\varphi_i$ der Strahlenablenkung leicht aufgestellt werden. Wenn α_i und β_i den Einfallswinkel in P_i bedeuten, so ist nach dem Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \alpha_i}{\sin \beta_i} = v = 1 + dn. \quad (18)$$

Die Strahlenelemente dL_{i-1} , dL_i besitzen die von einer beliebigen festen Nullrichtung aus im Uhrzeigersinn positiv gezählten Richtungen φ_{i-1} , φ_i , deren Differenz

$$d\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1} = \alpha_i - \beta_i \quad (19)$$

ist. Setzt man den hieraus folgenden Ausdruck

$$\beta_i = \alpha_i - d\varphi_i \quad (20)$$

in (18) ein, so erhält man leicht den *Differentialausdruck der Richtungsablenkung* des Strahles L , nämlich

$$d\varphi_i = dn \cdot \operatorname{tg} \alpha_i = t_i \cdot dn, \quad (21)$$

wenn von der Abkürzung $t_i = \operatorname{tg} \alpha_i$ Gebrauch gemacht wird.

In ganz entsprechender Weise ergibt sich für den laufenden Strahl L' , für welchen an Stelle von α_i der Wert α'_i tritt, die unendlich kleine Richtungsablenkung

$$d\varphi'_i = dn' \cdot \operatorname{tg} \alpha'_i = C' \cdot t_i \cdot dn. \quad (22)$$

3. Allgemeiner Ausdruck für die Strahlenablenkung $\Delta\varphi_{ei}$ zwischen zwei beliebigen Punkten P_e , P_i eines Strahles und für den Richtungsunterschied ε_i zweier Strahlen L , L' in entsprechenden Punkten P_i , P'_i .

Durch die Integration der Gleichung (21) zwischen den Punkten P_e und P_i gewinnen wir die *Strahlenbrechung* $\Delta\varphi_{ei}$ (Abb. 2) für den inzwischen liegenden Teil des Grundstrahles L . Es ist

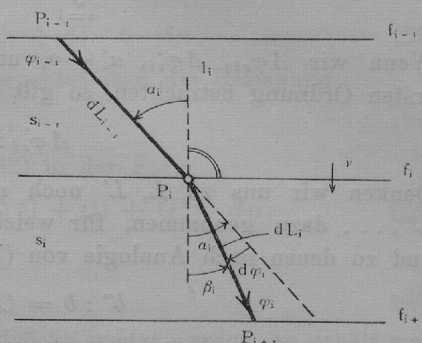


Abb. 3

ab. Es wird also, da auch die Differenz $\varepsilon'_{i-1} - \lambda_i$ eine kleine Größe erster Ordnung ist,

$$\operatorname{tg} \alpha'_i = \operatorname{tg} \alpha_i - (\varepsilon'_{i-1} - \lambda_i) (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_i) + G^2, \quad (30)$$

wo G^2 kleine Glieder von der 2. Ordnung bedeutet, die neben $\operatorname{tg} \alpha_i$ unterdrückt werden dürfen. Unter Verwendung der Abkürzungen t, t' lautet die letzte Gleichung

$$t'_i = t_i - (\varepsilon'_{i-1} - \lambda_i) (1 + t_i^2) + G^2. \quad (31)$$

Der durch das erste vernachlässigte Glied in t'_i verursachte relative Fehler ist der Ausdruck $(\varepsilon'_{i-1} - \lambda_i) (c_i + t_i)$, wenn c_i die Abkürzung für $\operatorname{ctg} \alpha_i$ bedeutet.

Nun ist

$$\varphi_i = \varphi_{i-1} + d\varphi_i \quad \text{und} \quad \varphi'_i = \varphi'_{i-1} + d\varphi'_i \quad (32)$$

oder mit Rücksicht auf (21) und (22)

$$\varphi_i = \varphi_{i-1} + t_i \cdot dn, \quad \varphi'_i = \varphi'_{i-1} + C' \cdot t'_i \cdot dn. \quad (33)$$

Ersetzt man hierin t'_i durch den Ausdruck (31) und beachtet man die Beziehung

$$\varphi'_{i-1} = \varphi_{i-1} + \varepsilon'_{i-1}, \quad (34)$$

so ergibt sich die Richtung des Elementes dL_i aus (33) in der Form

$$\varphi'_i = \varphi_{i-1} + \varepsilon'_{i-1} + C' \cdot [t_i - (\varepsilon'_{i-1} - \lambda_i) (1 + t_i^2) + G^2] \cdot dn. \quad (35)$$

Wenn in der aus (34) folgenden Beziehung

$$\varepsilon'_i = \varphi'_i - \varphi_i \quad (36)$$

φ_i und φ'_i durch die unter (33) und (35) stehenden Ausdrücke ersetzt werden, so erhält man

$$\varepsilon'_i = \varepsilon'_{i-1} + (C' - 1) t_i \cdot dn - C' (1 + t_i^2) (\varepsilon'_{i-1} - \lambda_i) dn + G^2 \cdot dn. \quad (37)$$

Daraus findet man endlich den allgemeinen Ausdruck für das Differential $d\varepsilon'_i$ des Richtungsunterschiedes entsprechender Strahlenelemente dL_i, dL'_i , nämlich

$$d\varepsilon'_i = \varepsilon'_i - \varepsilon'_{i-1} = (C' - 1) t_i \cdot dn - C' (1 + t_i^2) (\varepsilon'_{i-1} - \lambda_i) dn + G^2 \cdot dn. \quad (38)$$

4. Beziehung zwischen der Zunahme $\Delta \varepsilon'_{ei}$ des Richtungsunterschiedes zweier Strahlen und der entsprechenden Strahlenablenkung $\Delta \varphi_{ei}$ für die einseitig gekrümmte Lichtkurve.

Um den Zusammenhang zwischen der von P_e bis P_i stattfindenden Zunahme

$$\Delta \varepsilon'_{ei} = \varepsilon'_i - \varepsilon'_e \quad (39)$$

des Richtungsunterschiedes ε' und dem Zuwachs $\Delta \varphi_{ei}$ der Strahlenbrechung von L aufzudecken, integrieren wir die Differentialgleichung (38) und erhalten

$$\Delta \varepsilon'_{ei} = \int_{\varepsilon'_e}^{\varepsilon'_i} d\varepsilon'_i = (C' - 1) \int_e^i t_i \cdot dn - C' \int_e^i (1 + t_i^2) \varepsilon'_i dn + C' \int_e^i (1 + t_i^2) \lambda_i \cdot dn + G^2 \int_e^i dn. \quad (40)$$

Das erste Glied rechts ist wegen der Beziehung (23) in aller Strenge $(C' - 1) \Delta \varphi_{ei}$; das zweite, zweckmäßiger Weise auch das dritte Glied sind noch umzuformen. Um zunächst dn durch $d\varepsilon'_i$ ausdrücken zu können, lösen wir die Gleichung (38) nach dn auf und finden

$$dn = \frac{1 + G^1}{(C' - 1)t_i} d\varepsilon'_i, \quad (41)$$

so daß Gleichung (40) die Form

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon'_{ei} = (C' - 1) \Delta \varphi_{ei} - \frac{C'}{C' - 1} \int_e^i (c_i + t_i) \varepsilon'_i d\varepsilon'_i - \frac{C'}{C' - 1} G_1^1 \int_e^i (c_i + t_i) \varepsilon'_i d\varepsilon'_i \\ + C' \int_e^i (c_i + t_i) t_i \cdot \lambda'_i dn + \frac{1}{t} G^2 \int_e^i t \cdot dn \end{aligned} \quad (42)$$

annimmt.

Wir bezeichnen den unbekannten Durchschnittswert aller Einfallswinkel α zwischen P_e und P_i mit

$$\alpha_{e..i} = \frac{1}{i-e} \sum_{i=e}^i \alpha_i \quad (43)$$

und setzen den den Grenzen P_1 , P_m entsprechenden Sonderwert $\alpha_{1..m} = \alpha$; (43a)

ferner sei

$$\operatorname{tg} \alpha_{e..i} = t_{e..i}, \quad \operatorname{ctg} \alpha_{e..i} = c_{e..i}, \quad \operatorname{tg} \alpha = t, \quad \operatorname{ctg} \alpha = c. \quad (44)$$

Dann wird durch eine Vertauschung von α_i mit $\alpha_{e..i}$, von t_i mit $t_{e..i}$ und von c_i mit $c_{e..i}$ bzw. mit α , t und c sowie durch die umgekehrten Vorgänge jeweils ein relativer Fehler gleich einer kleinen Größe 1. Ordnung begangen. Durch die angedeutete Vertauschung erhält man aus (42)

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon'_{ei} = (C' - 1) \Delta \varphi_{ei} - \frac{C'}{C' - 1} (c + t) \int_e^i \varepsilon'_i d\varepsilon'_i - \frac{C'}{C' - 1} (c + t) \left[G_2^1 \int_e^i \varepsilon'_i d\varepsilon'_i + G_1^1 \int_e^i \varepsilon'_i d\varepsilon'_i \right] \\ + C' (c + t) t \cdot dn (i - e) \int_{i=e}^i \frac{\lambda'_r}{r - e} + C' (c + t) t \cdot G_3^1 \cdot dn (i - e) \int_{i=e}^i \frac{\lambda'_r}{r - e} + \frac{1}{t} G^2 \cdot \int_e^i t_i dn. \end{aligned} \quad (45)$$

Gebrauchen wir die Abkürzung

$$\lambda'_{e..i} = \frac{1}{i-e} \int_{i=e}^i \lambda'_r, \quad (46)$$

welche den Durchschnittswert aller Richtungsunterschiede entsprechender Einfallslotte l , l' zwischen P_e und P_i angibt und integrieren wir den Ausdruck (45) unter Beachtung des Umstandes, daß

$$t(i-e) dn = \int_e^i t \cdot dn = (1 + G_4^1) \int_e^i t_i \cdot dn = (1 + G_4^1) \Delta \varphi_{ei} \quad (47)$$

ist, so ergibt sich

$$\Delta \varepsilon'_{ei} = (C' - 1) \Delta \varphi_{ei} - \frac{C'}{C' - 1} (c + t) \frac{1}{2} (\varepsilon_i'^2 - \varepsilon_e'^2) + C' (c + t) \Delta \varphi_{ei} \lambda'_{e..i} + G^3. \quad (48)$$

Dabei sind die 4 Integrale, welche sich als kleine Größen von der 3. Ordnung entpuppen, im Gliede G^3 zusammengefaßt.

Durch Auflösung von (48) nach $\Delta\varphi_{ei}$ folgt

$$\Delta\varphi_{ei} = \frac{1}{C'-1} \left\{ \Delta\varepsilon'_{ei} + \frac{C'}{C'-1} (c+t) \Delta\varepsilon'_{ei} \frac{\varepsilon'_e + \varepsilon'_i}{2} - C' (c+t) \lambda'_{e.i} \Delta\varphi_{ei} + G^3 \right\} \quad (49)$$

bzw.

$$\Delta\varphi_{ei} \left\{ 1 + \frac{C'}{C'-1} (c+t) \lambda'_{e.i} \right\} = \frac{\Delta\varepsilon'_{ei}}{C'-1} \left\{ 1 + \frac{C'}{C'-1} (c+t) \frac{\varepsilon'_e + \varepsilon'_i}{2} + G^2 \right\}. \quad (50)$$

Ersetzt man in der geschweiften Klammer von (49) $\Delta\varphi_{ei}$ durch die Näherungsauflösung

$$\Delta\varphi_{ei} = \frac{\Delta\varepsilon_{ei}}{C'-1} + G^2, \quad (51)$$

so wird die *Richtungsablenkung der einseitig gekrümmten Lichtkurve L* (Grundstrahl) zwischen den Punkten P_e und P_i

$$\Delta\varphi_{ei} = \frac{\Delta\varepsilon'_{ei}}{C'-1} \left\{ 1 + \frac{C'}{C'-1} (c+t) \left[\frac{1}{2} (\varepsilon'_e + \varepsilon'_i) - \lambda'_{e.i} \right] + G^2 \right\}. \quad (52)$$

Durch Umkehrung ergibt sich

$$\Delta\varepsilon'_{ei} = (C'-1) \Delta\varphi_{ei} \left\{ 1 - \frac{C'}{C'-1} (c+t) \left[\frac{1}{2} (\varepsilon'_e + \varepsilon'_i) - \lambda'_{e.i} \right] + G^2 \right\}. \quad (53)$$

Nach (49) und (50) ist die dem ganzen Lichtweg des Grundstrahls von P_1 bis nach P_m zukommende *Gesamtstrahlenbrechung* $\Delta\varphi_{1m}$ durch die Beziehungen

$$\Delta\varphi_{1m} \left\{ 1 + \frac{C'}{C'-1} (c+t) \lambda'_{1.m} \right\} = \frac{\Delta\varepsilon'_{1m}}{C'-1} \left\{ 1 + \frac{C'}{C'-1} (c+t) \frac{\varepsilon'_1 + \varepsilon'_m}{2} + G^2 \right\}, \quad (54)$$

$$\Delta\varphi_{1m} = \frac{\Delta\varepsilon'_{1m}}{C'-1} \left\{ 1 + \frac{C'}{C'-1} (c+t) \left[\frac{1}{2} (\varepsilon'_1 + \varepsilon'_m) - \lambda'_{1.m} \right] + G^2 \right\} \quad (55)$$

festgelegt, worin

$$\Delta\varepsilon'_{1m} = \varepsilon'_m - \varepsilon'_1$$

ist.

Zur Bestimmung der Gesamtkrümmung $\Delta\varphi_{1m}$ von L sind also gegenseitige gleichzeitige Beobachtungen in beiden Endpunkten der Lichtkurve notwendig, die zunächst ε'_1 und ε'_m ergeben. Damit erhält man bei Beschränkung auf das Hauptglied die gesuchte Größe unmittelbar aus (51) zu $\Delta\varphi_{1m} = \Delta\varepsilon'_{1m} : (C'-1)$. Das in (52) enthaltene Korrektionsglied zerfällt in zwei Teile, welche sich in den Faktoren $\frac{1}{2} (\varepsilon'_1 + \varepsilon'_m)$ und $-\lambda'_{1.m}$ unterscheiden. Der erste Teil kann, wenn man an Stelle des unbekannten Argumentes $a = a_{1.m}$ in c und t den beobachteten Zenitabstand verwendet, aus gegenseitigen gleichzeitigen Beobachtungen von L und L' ohne weiteres berechnet werden. Zur Abschätzung dieses Teiles setzen wir $C' = 1,05$ und den Absolutwert von $\varepsilon' \approx 10''$ ($L \approx 40$ km). Unter einigermassen normalen Verhältnissen sind ε'_1 und ε'_m nahezu entgegengesetzt gleich, also wird der Faktor $\frac{1}{2} (\varepsilon'_1 + \varepsilon'_m)$ in der Nähe von Null liegen, auf jeden Fall aber kleiner wie $\frac{1}{2} \varepsilon'$, d. h.

$< 2,5 \cdot 10^{-5}$ anzusetzen sein. Da $C' : (C' - 1) \approx 20$ wird, so dürfte, wenn man fordert, daß der erste Anteil am Korrektionsglied den Betrag 0,1 nicht überschreitet, $c + t$ immerhin den Wert 200 erreichen, d. h. es wären bei horizontaler Schichtung noch Sichten bis zu etwa $\frac{1}{4}^\circ$ Höhenwinkel herab zulässig. Nicht so einfach liegen die Verhältnisse beim zweiten, den Faktor $-\lambda'_{1.m}$ enthaltenden Teil des Korrektionsgliedes. Dieser Faktor ist unbekannt, so daß der zweite Teil des Zusatzgliedes nach (52) zunächst jedenfalls nicht ermittelt werden kann. Im übrigen wird $\lambda'_{1.m}$ als Durchschnittswert der Richtungsunterschiede aller entsprechenden Lote l, l' ein recht kleiner Betrag, vielleicht von der Größenordnung $1'$ sein. Für diese Annahme würden Sichten bis zu etwa 4° Höhenwinkel herab zulässig sein, wenn auch der zweite Anteil des Korrektionsgliedes $\frac{1}{10}$ des Hauptgliedes nicht überschreiten soll. Sicheres über die Größenordnung von $\lambda'_{1.m}$ kann aber nur durch Versuche festgestellt werden. Es könnte die genügende Kleinheit von $\lambda'_{1.m}$ etwa dann als erwiesen gelten, wenn Beobachtungen unter allen möglichen atmosphärischen Verhältnissen nach Berücksichtigung des errechneten Refraktionswinkels stets auf den gleichen Wert des Höhenwinkels führen.

5. Strahlenablenkung und Richtungsunterschiede bei Lichtkurven mit Wendepunkten.

Im allgemeinsten Fall kann die vom Strahl $P_1 P_m$ (Abb. 5) durchheilte Luft insofern ungleichartig beschaffen sein, als in den Räumen $P_1 P_i, P_i P_o, P_o P_r, P_r P_m$ *wechselweise die Dichte wächst und abnimmt*. Die Lichtkurve wird dann in den Stellen P_i, P_o, P_r Wendepunkte besitzen. Auch jetzt noch läßt sich die Schichteneinteilung so durchführen, daß jeder Elementarschicht derselbe absolute Wert dn in jedem der Räume I bis IV zukommt; das Vorzeichen von dn aber wird abwechselnd positiv und negativ ausfallen.

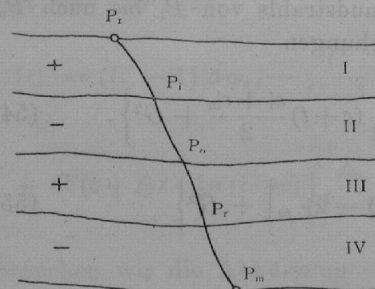


Abb. 5

Werden die auf die ganze Länge $P_1 P_m$ treffende Strahlenablenkung, die Richtungsunterschiede in den Endpunkten und die Zunahme des Richtungsunterschiedes auf die ganzen Strahlenlängen L, L' wie bisher mit

$$\Delta \varphi_{1m}, \quad \varepsilon_i, \quad \varepsilon'_m, \quad \Delta \varepsilon'_{1m} \quad (56)$$

bezeichnet und sind die entsprechenden Werte für die Teilräume

$P_1 P_i$	$\Delta \varphi_{1i}, \quad \varepsilon_i, \quad \varepsilon'_i, \quad \Delta \varepsilon'_{1i},$
$P_i P_o$	$\Delta \varphi_{io}, \quad \varepsilon_i, \quad \varepsilon'_o, \quad \Delta \varepsilon'_{io},$
$P_o P_r$	$\Delta \varphi_{or}, \quad \varepsilon_o, \quad \varepsilon'_r, \quad \Delta \varepsilon'_{or},$
$P_r P_m$	$\Delta \varphi_{rm}, \quad \varepsilon_r, \quad \varepsilon'_m, \quad \Delta \varepsilon'_{rm},$

(57)

so findet man durch Anwendung von (52) auf die einzelnen Strahlenabschnitte die *Teilablenkungen*

$$\begin{aligned}
\Delta \varphi_{1i} &= \frac{\Delta \varepsilon_{1i}}{C'-1} \left\{ 1 + \frac{C'}{C'-1} (c+t)_{1..i} \left[\frac{\varepsilon'_1 + \varepsilon_i}{2} - \lambda'_{1..i} \right] + G^2 \right\}, \\
\Delta \varphi_{io} &= \frac{\Delta \varepsilon'_{io}}{C'-1} \left\{ 1 + \frac{C'}{C'-1} (c+t)_{i..o} \left[\frac{\varepsilon'_i + \varepsilon_o}{2} - \lambda'_{i..o} \right] + G^2 \right\}, \\
\Delta \varphi_{or} &= \frac{\Delta \varepsilon'_{or}}{C'-1} \left\{ 1 + \frac{C'}{C'-1} (c+t)_{o..r} \left[\frac{\varepsilon'_o + \varepsilon'_r}{2} - \lambda'_{o..r} \right] + G^2 \right\}, \\
\Delta \varphi_{rm} &= \frac{\Delta \varepsilon'_{rm}}{C'-1} \left\{ 1 + \frac{C'}{C'-1} (c+t)_{r..m} \left[\frac{\varepsilon'_r + \varepsilon'_m}{2} - \lambda'_{r..m} \right] + G^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{58}$$

Die in (58) enthaltenen $(c+t)_{1..i}$, $(c+t)_{i..o}$, ..., $\lambda'_{1..i}$, $\lambda'_{i..o}$, ... beziehen sich auf die Teilstrecken $P_1 P_i$, $P_i P_o$, Führt man auch hier wieder den der Gesamtstrecke $P_1 P_m$ entsprechenden Durchschnittswert $\alpha_{1..m} = \alpha$ und das zugehörige $c+t$ ein, so ändern sich die beiden letzten Glieder in den geschweiften Klammern je um eine kleine Größe 2. Ordnung, die wie auch bisher neben 1 vernachlässigt werden soll.

Nun ist die gesamte Strahlenablenkung die Summe aller Teilablenkungen, also

$$\Delta \varphi_{1m} = \Delta \varphi_{1i} + \Delta \varphi_{io} + \Delta \varphi_{or} + \Delta \varphi_{rm} \tag{59}$$

oder wegen (58)

$$\begin{aligned}
\Delta \varphi_{1m} &= \frac{\varepsilon_i - \varepsilon'_1}{C'-1} \left\{ 1 + \frac{C'}{C'-1} (c+t) \frac{\varepsilon'_1 + \varepsilon_i}{2} - \frac{C'}{C'-1} (c+t) \lambda'_{1..i} \right\} \\
&+ \frac{\varepsilon'_o - \varepsilon'_i}{C'-1} \left\{ 1 + \frac{C'}{C'-1} (c+t) \frac{\varepsilon'_i + \varepsilon'_o}{2} - \frac{C'}{C'-1} (c+t) \lambda'_{i..o} \right\} \\
&+ \frac{\varepsilon'_r - \varepsilon'_o}{C'-1} \left\{ 1 + \frac{C'}{C'-1} (c+t) \frac{\varepsilon'_o + \varepsilon'_r}{2} - \frac{C'}{C'-1} (c+t) \lambda'_{o..r} \right\} \\
&+ \frac{\varepsilon'_m - \varepsilon'_r}{C'-1} \left\{ 1 + \frac{C'}{C'-1} (c+t) \frac{\varepsilon'_r + \varepsilon'_m}{2} - \frac{C'}{C'-1} (c+t) \lambda'_{r..m} \right\} + G^3.
\end{aligned} \tag{60}$$

Durch Ausmultiplizieren dieses Ausdrucks und Zusammenfassen gleichartiger Glieder findet man

$$\begin{aligned}
\Delta \varphi_{1m} &= \frac{1}{C'-1} (\Delta \varepsilon'_{1i} + \Delta \varepsilon'_{io} + \Delta \varepsilon'_{or} + \Delta \varepsilon'_{rm}) + \frac{C'}{(C'-1)^2} (c+t) \frac{1}{2} (\varepsilon'_m{}^2 - \varepsilon'_1{}^2) \\
&- \frac{C'}{(C'-1)^2} (c+t) (\Delta \varepsilon'_{1i} \lambda'_{1..i} + \Delta \varepsilon'_{io} \lambda'_{i..o} + \Delta \varepsilon'_{or} \lambda'_{o..r} + \Delta \varepsilon'_{rm} \lambda'_{r..m}) + G^3.
\end{aligned} \tag{61}$$

Es ist aber

$$\Delta \varepsilon'_{1i} + \Delta \varepsilon'_{io} + \Delta \varepsilon'_{or} + \Delta \varepsilon'_{rm} = \Delta \varepsilon'_{1m} = \varepsilon'_m - \varepsilon'_1, \tag{62}$$

so daß (61) die einfachere Form

$$\begin{aligned}
\Delta \varphi_{1m} &= \\
&\frac{\Delta \varepsilon'_{1m}}{C'-1} \left\{ 1 + \frac{C'}{C'-1} (c+t) \left[\frac{\varepsilon'_1 + \varepsilon'_m}{2} - \left(\frac{\Delta \varepsilon'_{1i}}{\Delta \varepsilon'_{1m}} \lambda'_{1..i} + \frac{\Delta \varepsilon'_{io}}{\Delta \varepsilon'_{1m}} \lambda'_{i..o} + \frac{\Delta \varepsilon'_{or}}{\Delta \varepsilon'_{1m}} \lambda'_{o..r} + \frac{\Delta \varepsilon'_{rm}}{\Delta \varepsilon'_{1m}} \lambda'_{r..m} \right) \right] + G^2 \right\}
\end{aligned} \tag{63}$$

annimmt.

Nun gilt, wie ein Vergleich von (49) mit (63) zeigt, bis auf kleine Glieder von der 1. Ordnung

$$\frac{\Delta \varepsilon'_{1i}}{\Delta \varepsilon'_{1m}} = \frac{\Delta \varphi_{1i}}{\Delta \varphi_{1m}} = v_{1i}, \quad \frac{\Delta \varepsilon'_{io}}{\Delta \varepsilon'_{1m}} = \frac{\Delta \varphi_{io}}{\Delta \varphi_{1m}} = v_{io}, \quad \frac{\Delta \varepsilon'_{or}}{\Delta \varepsilon'_{1m}} = \frac{\Delta \varphi_{or}}{\Delta \varphi_{1m}} = v_{or}, \quad \frac{\Delta \varepsilon'_{rm}}{\Delta \varepsilon'_{1m}} = \frac{\Delta \varphi_{rm}}{\Delta \varphi_{1m}} = v_{rm}, \quad (64)$$

so daß man für die gesamte Strahlenablenkung einer Lichtkurve mit Wendepunkten das vorläufige Ergebnis

$$\Delta \varphi_{1m} = \frac{\Delta \varepsilon'_{1m}}{C'-1} \left\{ 1 + \frac{C'}{C'-1} (c+t) \left[\frac{\varepsilon'_1 + \varepsilon'_m}{2} - \overbrace{\sum_1^m (v_{1i} \lambda'_{1i} + v_{io} \lambda'_{io} + v_{or} \lambda'_{or} + v_{rm} \lambda'_{rm})} \right] + G^2 \right\} \quad (65)$$

erhält. Daraus ergibt sich für $i=m$, d. h. für eine Lichtkurve ohne Wendepunkte der unten (55) für einen einseitig gekrümmten Strahl aufgestellte Refraktionsausdruck.

In erster Näherung gilt auch für den betrachteten allgemeinen Fall die dem Ausdruck (51) vollkommen entsprechende Beziehung

$$\Delta \varphi_{1m} = \frac{\Delta \varepsilon'_{1m}}{C'-1} + G^2 = \frac{\varepsilon'_m - \varepsilon'_1}{C'-1} + G^2. \quad (66)$$

Der schärfere Ausdruck (65) kann aber vorläufig noch nicht berechnet werden, da die Summe

$$\sum_1^m = v_{1i} \cdot \lambda'_{1i} + v_{io} \cdot \lambda'_{io} + v_{or} \cdot \lambda'_{or} + v_{rm} \cdot \lambda'_{rm} \quad (67)$$

unbekannt ist. Es kann aber, wie später gezeigt werden soll, $\sum_1^m$ durch die Hinzunahme eines dritten Strahles L'' zu L und L' näherungsweise bestimmt werden.

Durch Umkehrung der Gleichung (65) erhält man

$$\Delta \varepsilon'_{1m} = (C'-1) \Delta \varphi_{1m} \left\{ 1 - \frac{C'}{(C'-1)} (c+t) \left[\frac{\varepsilon'_1 + \varepsilon'_m}{2} - \sum_1^m \right] + G^2 \right\}. \quad (68)$$

6. Verhältnis der Abstände entsprechender Strahlenpunkte von den zugehörigen Anfangstangenten.

Ehe wir daran gehen, die Hilfsgröße $\sum_1^m$ zu bestimmen, müssen wir den Abstand y_i (Abb. 6) eines Punktes P_i des Grundstrahles L von seiner Anfangstangente T_1 aufstellen. In der Abbildung sind y_i, y_{i+1} diese Abstände für die beiden Nachbarnpunkte P_i, P_{i+1} . Zieht man $P_i E_{i+1} \parallel T_1$, so ist das Stück $E_{i+1} P_{i+1}$ der Ordinatenzuwachs

$$dy_i = y_{i+1} - y_i = dL_i \sin \Delta \varphi_{1i}. \quad (69)$$

Ferner ist nach der Figur

$$dL_i = da_i \frac{\cos d\eta_i}{\cos (a_i + d\eta_i - d\varphi_i)}, \quad (70)$$

wenn da_i die im Einfallslot l_i gemessene Dicke die Schicht s_i bedeutet und $d\eta_i$ den

Richtungszuwachs des Einfallslotes l_{i+1} gegen l_i angibt. Beim Übergang zur Grenze verschwindet mit $d\varphi_i$ auch $d\eta_i$ und die Länge des Strahlenelementes wird

$$dL_i = \frac{da_i}{\cos \alpha_i}, \quad (71)$$

so daß sich durch Einsetzen dieses Ausdrucks in (69) der unendlich kleine Ordinatenzuwachs

$$dy_i = da_i \frac{\sin \Delta\varphi_{1i}}{\cos \alpha_i} = \frac{da_i}{\cos \alpha_i} \cdot \Delta\varphi_{1i} (1 + G^2) \quad (72)$$

ergibt. Also wird die Ordinate

$$y_i = \int_{e=1}^i dy_e = (1 + G^2) \int_{e=1}^i \frac{\Delta\varphi_{1e}}{\cos \alpha_e} da_e. \quad (73)$$

Es mag darauf hingewiesen werden, daß hier das die Schichtdicke bedeutende Differential da für jedes Ordinatendifferential im allgemeinen einen etwas anderen Wert besitzen wird, solange wir an der Bedingung $dn = \text{const.}$ festhalten wollen.

Für den Abstand y_i eines Punktes P_i der Lichtkurve L' von deren Anfangstangente T_1 erhalten wir den der Gleichung (73) entsprechenden Ausdruck

$$y_i = (1 + G^2) \int_1^i \frac{\Delta\varphi'_{1e}}{\cos \alpha'_e} da'_e, \quad (74)$$

in welchem $\Delta\varphi'_{1e}$, α'_e und da'_e durch die auch in (73) enthaltenen Werte $\Delta\varphi_{1e}$, α_e und da_e auszudrücken sind.

Wir setzen die zum Element dL_e gehörige Schichtdicke

$$da'_e = da_e + \delta'a_e, \quad (75)$$

worin $\delta'a_e$ im Vergleich zu da_e wenn nicht in jedem Einzelfall, so doch durchschnittlich ein kleiner Betrag sein wird. α' ist durch (29) auszudrücken. Weiterhin ist

$$\Delta\varphi'_{1e} = \varphi'_e - \varphi'_1 = (\varphi_e + \varepsilon'_e) - (\varphi_1 + \varepsilon'_1) = (\varphi_e - \varphi_1) + (\varepsilon'_e - \varepsilon'_1) = \Delta\varphi_{1e} + \Delta\varepsilon'_{1e}. \quad (76)$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke (75), (29) und (76) in Gleichung (73) erhält man

$$\begin{aligned} y_i &= (1 + G^2) \int_{e=1}^i \frac{\Delta\varphi_{1e} + \Delta\varepsilon'_{1e}}{\cos [\alpha_e - (\varepsilon'_{e-1} - \lambda'_e)]} (da_e + \delta'a_e) \\ &= (1 + G^2) \int_1^i \frac{\Delta\varphi_{1e} + \Delta\varepsilon'_{1e}}{\cos \alpha_e} [1 - (\varepsilon'_{e-1} - \lambda'_e) t_e] (1 + \frac{\delta'a_e}{da_e}) da_e. \end{aligned} \quad (77)$$

Hierin darf man ε'_{e-1} durch das nur um $d\varepsilon'_e$ größere ε'_e ersetzen. Beachtet man ferner, daß nach (68)

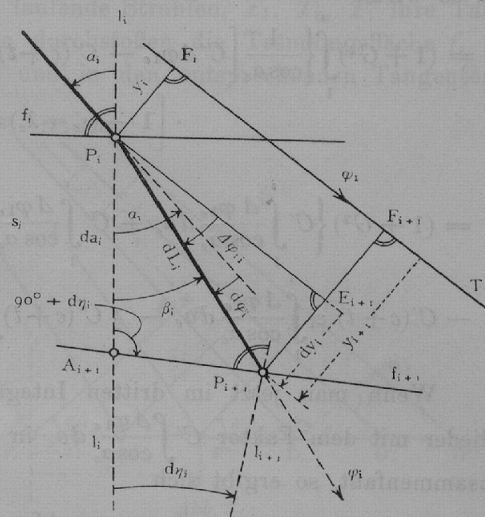


Abb. 6

$$\Delta \varepsilon'_e = (C' - 1) \Delta \varphi_{1e} \left\{ 1 - \frac{C'}{C' - 1} (c + t) \frac{\varepsilon'_1 + \varepsilon'_e}{2} + \frac{C'}{C' - 1} (c + t) \sum_1^e \varepsilon'_i + G^2 \right\} \quad (78)$$

ist, so wird

$$y'_i = (1 + G^2) \int_1^i \left\{ \frac{1}{\cos \alpha_e} \left[C' \Delta \varphi_{1e} - C'(c + t) (\varepsilon'_1 + \frac{1}{2} \Delta \varepsilon'_{1e}) \Delta \varphi_{1e} + C'(c + t) \Delta \varphi_{1e} \cdot \sum_1^e \varepsilon'_i + G^3 \right] \right. \\ \left. \cdot \left[1 - (\varepsilon'_e - \lambda'_e) t_e \right] \left(1 + \frac{\delta' a_e}{d a_e} \right) \right\} d a_e \quad (79)$$

$$= (1 + G^2) \left\{ C' \int_1^i \frac{\Delta \varphi_{1e}}{\cos \alpha_e} d a_e + C' \int_1^i \frac{\Delta \varphi_{1e}}{\cos \alpha_e} \delta' a_e - C' \int_1^i \frac{\varepsilon'_e - \lambda'_e}{\cos \alpha_e} t_e \Delta \varphi_{1e} d a_e \right. \\ \left. - C'(c + t) \varepsilon'_1 \int_1^i \frac{\Delta \varphi_{1e}}{\cos \alpha_e} d a_e - \frac{1}{2} C'(c + t) \int_1^i \Delta \varepsilon'_{1e} \frac{\Delta \varphi_{1e}}{\cos \alpha_e} \delta' a_e + C'(c + t) \int_1^i \frac{\Delta \varphi_{1e}}{\cos \alpha_e} \cdot \sum_1^e \varepsilon'_i \cdot d a_e \right\}. \quad (80)$$

Wenn man jetzt im dritten Integral ε'_e durch $\varepsilon'_1 + \Delta \varepsilon'_{1e}$ ersetzt und hierauf alle Glieder mit dem Faktor $C' \int_1^i \frac{\Delta \varphi_{1e}}{\cos \alpha_e} d a_e$ in eine erste, alle übrigen in eine zweite Gruppe zusammenfaßt, so ergibt sich

$$y'_i = C'(1 + G^2) \left\{ \left[1 - t \cdot \varepsilon'_1 - (c + t) \varepsilon'_1 \right] \int_1^i \frac{\Delta \varphi_{1e}}{\cos \alpha_e} d a_e \right. \\ \left. + y_i \int_1^i \frac{1}{y_i} \left[\frac{\delta' a_e}{d a_e} - t_e (\Delta \varepsilon'_{1e} - \lambda'_e) - (c + t) \left(\frac{1}{2} \Delta \varepsilon'_{1e} - \sum_1^e \varepsilon'_i \right) \right] \frac{\Delta \varphi_{1e}}{\cos \alpha_e} d a_e \right\}. \quad (81)$$

Mit der Abkürzung

$$R'_e = \frac{1}{y_i} \left[\frac{\delta' a}{d a} - \frac{1}{2} (c + 3t) \Delta \varepsilon'_{1e} + t_e \lambda'_e + (c + t) \sum_1^e \varepsilon'_i \right] \quad (82)$$

und unter Beachtung von (73) für den ersten Teil von (81) folgt hieraus der etwas einfachere Ausdruck

$$y'_i = C' \cdot y_i \left\{ 1 - (c + 2t) \varepsilon'_1 + \int_1^i R'_e \frac{\Delta \varphi_{1e}}{\cos \alpha_e} d a_e + G^2 \right\}. \quad (83)$$

Das in (83) noch enthaltene unbekannte Integral ist wie auch das vorhergehende Glied eine kleine Größe 1. Ordnung. In erster Näherung gilt also zwischen den beiden entsprechenden Ordinaten y_i, y'_i die wichtige Beziehung

$$y'_i = C' \cdot y_i, \quad (84)$$

nach welcher die auf die Anfangstangenten $T_1, T'_1, T''_1, T'''_1, \dots$ bezogenen Abstände von entsprechenden Punkten $P_i, P'_i, P''_i, \dots$ mehrerer Lichtkurven $L, L', L'', \dots$ zu den Werten $1, C', C'', C''', \dots$ proportional sind. Es gilt also für die Ordinaten entsprechender Punkte die fortlaufende Verhältnisgleichung

$$y_i : y'_i : y''_i : y'''_i : \dots = 1 : C' : C'' : C''' : \dots \quad (85)$$

mit der Einschränkung, daß die auf 1 folgenden Glieder der rechten Seite um kleine Größen 1. Ordnung zu verbessern sind.

7. Weitere Hilfsbeziehungen.

In Abb. 7 sind L, L', L'' Grundstrahl und laufende Strahlen, T_1, T'_1, T''_1 ihre Tangenten im gemeinsamen Anfangspunkte P_1 . Sie durchstoßen die Trennungsfläche f_i in den entsprechenden Strahlenpunkten P_i, P'_i, P''_i und in den entsprechenden Tangentenpunkten D_i, D'_i, D''_i , welche näherungsweise auf einer Geraden liegen werden. Die zu den entsprechenden Punkten P_i, P'_i, P''_i gehörigen Ordinaten y_i, y'_i, y''_i schließen mit f_i Winkel ein, welche bis auf kleine Größen 1. Ordnung mit den Einfallswinkeln $\alpha_i, \alpha'_i, \alpha''_i$ übereinstimmen. Ähnliches gilt für die in D_i zu T_1 errichtete Senkrechte, welche die übrigen Anfangstangenten T'_1, T''_1 in den Punkten H_i, H'_i schneidet. Ihr Winkel (α_i) mit f_i kann bis auf eine kleine Größe 1. Ordnung α_i gleichgesetzt werden.

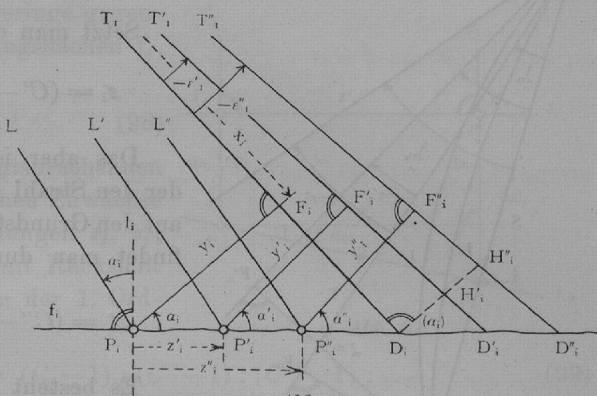


Abb. 7

Nunmehr ist zunächst das Verhältnis der Entfernungen z_i, z'_i der Punkte P'_i, P''_i vom entsprechenden Punkte P_i des Grundstrahles aufzustellen.

Nach dem Anblick der Figur ist

$$z'_i = P_i P'_i = (P_i D_i + D_i D'_i - P'_i D'_i) (1 + G^1). \quad (86)$$

Hierin trägt das kleine Glied G^1 dem Umstande Rechnung, daß die in der ersten Klammer enthaltenen Teilstrecken im allgemeinen nicht genau auf einer Geraden liegen.

Da T'_1 mit T_1 den für die getroffene Annahme negativen Winkel ε'_1 einschließt, so wird

$$D_i H_i = P_1 D_i (-\varepsilon'_1) (1 + G^2) = -\varepsilon'_1 (P_1 F_i + F_i D_i) (1 + G^2) \quad (87)$$

$$= -\varepsilon'_1 (x_i + y_i \operatorname{tg} \alpha_i) (1 + G^1), \quad (88)$$

wenn $P_1 F_i = x_i$ gesetzt wird.

Somit ist

$$\begin{aligned} z'_i &= \left(\frac{y_i}{\cos \alpha_i} - \frac{y'_i}{\cos \alpha_i} - \varepsilon'_1 \frac{x_i + y_i t_i}{\cos \alpha_i} \right) (1 + G^1) \\ &= \frac{1}{\cos \alpha_i} \left[y_i - y'_i - \varepsilon'_1 (x_i + y_i \cdot t_i) \right] (1 + G^1). \end{aligned} \quad (89)$$

Für ε'_1 erhalten wir aus Abb. 8

$$-\varepsilon'_1 = \frac{y'_m - y_m}{x_m} (1 + G^2). \quad (90)$$

Durch Einsetzen dieses Ausdrucks in (89) ergibt sich

$$z'_i = \frac{y'_m - y_m}{\cos \alpha_i} \left(\frac{x_i + t_i \cdot y_i}{x_m} - \frac{y'_i - y_i}{y'_m - y_m} \right) (1 + G^1). \quad (91)$$

Nun ist nach (83)

$$y'_i = C' \cdot y_i (1 + G^1), \quad y'_m = C' \cdot y_m (1 + G^1), \quad (92)$$

also

$$y_m - y_m = (C' - 1) y_m (1 + G^1), \quad y'_i - y_i = (C' - 1) y_i (1 + G^1). \quad (93)$$

Setzt man diese Ausdrücke in (91) ein, so ergibt sich

$$z'_i = (C' - 1) \frac{y_m}{\cos \alpha_i} \left(\frac{x_i + t_i y_i}{x_m} - \frac{y_i}{y_m} \right) (1 + G^1). \quad (94)$$

Das aber ist ein Ausdruck, welcher mit Ausnahme der den Strahl L' charakterisierenden Größe C' nur noch auf den Grundstrahl L bezügliche Größen enthält. Daher findet man durch Vertauschung von L' mit L'' ebenso

$$z''_i = (C'' - 1) \frac{y_m}{\cos \alpha_i} \left(\frac{x_i + t_i y_i}{x_m} - \frac{y_i}{y_m} \right) (1 + G^1). \quad (95)$$

Es besteht daher die *Näherungsbeziehung*

$$z'_i : z''_i : z'''_i : \dots = (C' - 1) : (C'' - 1) : (C''' - 1) : \dots, \quad (96)$$

deren relative Fehler kleine Größen von der 1. Ordnung sind.

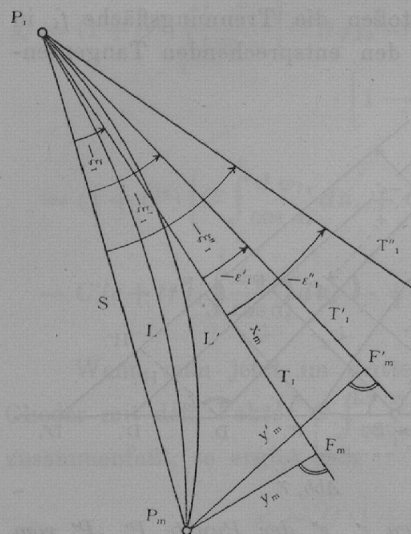


Abb. 8

Nun können wir auch für den Zusammenhang zwischen den *Richtungsänderungen* $\lambda_i, \lambda'_i, \dots$ (Abb. 9) *entsprechender Einfallsloten* $l_i, l'_i, \dots$ gegen l_i einen Näherungsausdruck gewinnen. Solange die Punkte $P_i, P'_i, P''_i, \dots$ nicht allzu weit voneinander abstehen,

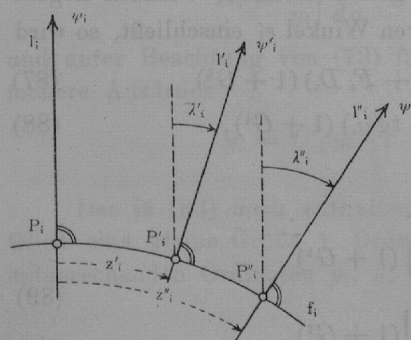


Abb. 9

wird man die etwaige systematische Abweichung des Linienzuges $P_i, P'_i, P''_i, \dots$ von einer Geraden dadurch berücksichtigen können, daß man ihn als Kreisbogen auffaßt. Unter der getroffenen Voraussetzung sind aber die $\lambda'_i, \lambda''_i, \dots$ offenbar zu den Entfernungen $z'_i, z''_i, \dots$

proportional. Der Ausdruck $\sum_1^m$ in (67) ist ein für den Strahl L' gültiger Durchschnittswert der einzelnen λ' während den Strahlen L'', L''' die Werte λ'', λ''' und deren Durchschnittswerte $\sum_1^m, \sum_1^m$ entsprechen. Nun

verhalten sich alle Elemente des ersten Mittelwertes

$\sum_1^m$ zu denen von $\sum_1^m, \sum_1^m, \dots$ wie die Abstände $z'_i, z''_i, z'''_i, \dots$, so daß auch für die Mittelwerte selbst das gleiche Verhältnis besteht; dies um so mehr, als sich in den Mittelwerten rein zufällige Abweichungen des Linienzuges von der Kreisbogenform in ihrer Wirkung ziemlich aufheben werden. Bezeichnen wir die der systematischen Krümmung der Trennungsfläche f_i entsprechenden Anteile der optischen Lotabweichungen $\lambda', \lambda'', \lambda''', \dots$ mit $\lambda'_\sigma, \lambda''_\sigma, \lambda'''_\sigma$, so gilt mit Rücksicht auf (96) die fortlaufende Verhältnisgleichung

$$\lambda_{\sigma i} : \lambda_{\sigma' i} : \lambda_{\sigma'' i} : \dots = \sum_1^m : \sum_1^m : \sum_1^m : \dots = (C' - 1) : (C'' - 1) : (C''' - 1) : \dots \quad (97)$$

bis auf relative kleine Fehler von der 1. Ordnung.

Auch der Zuwachs δa_i (Abb. 10) der Schichtdicke da_i von P_i bis P'_i ist noch ins Auge zu fassen. Soweit es sich um systematische Dickenänderungen $\delta a_{\sigma i}$ handelt, wird man sie in erster Annäherung durch eine geringe gegenseitige Neigung $d\eta_i$ der beiden Begrenzungsflächen f_i, f_{i+1} erklären können und

$$\delta a_{\sigma i} = z'_i d\eta_i (1 + G^1) \quad (98)$$

setzen dürfen. Es sind also die zu den entsprechenden Punkten P_i, P'_i, P''_i gehörigen systematischen Zuwächse der Schichtdicke da_i in P_i zu den Entfernungen z'_i, z''_i, z'''_i näherungsweise proportional, so daß mit Rücksicht auf (96) bis auf relative kleine Fehler von der 1. Ordnung die Beziehung

$$\delta a_{\sigma i} : \delta a_{\sigma' i} : \delta a_{\sigma'' i} : \dots = (C' - 1) : (C'' - 1) : (C''' - 1) : \dots \quad (99)$$

gilt. Daß rein zufällige Abweichungen der Dickenzunahme von der Beziehung (98) auf die weitere Entwicklung keinen sehr schlimmen Einfluß ausüben können, soll später noch gezeigt werden.

Stellen wir alle gefundenen Hilfsbeziehungen übersichtlich zusammen, so erhalten wir folgende Näherungsgleichungen

$$\Delta \varphi_{1m} : \Delta \varphi'_{1m} : \Delta \varphi''_{1m} : \dots = y_i : y'_i : y''_i : \dots = 1 : C' : C'' : \dots, \quad (100)$$

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon'_{1m} : \Delta \varepsilon''_{1m} : \Delta \varepsilon'''_{1m} : \dots &= \lambda_{\sigma i} : \lambda_{\sigma' i} : \lambda_{\sigma'' i} : \dots = \sum_1^m : \sum_1^m : \sum_1^m : \dots \\ &= \delta a_{\sigma i} : \delta a_{\sigma' i} : \delta a_{\sigma'' i} : \dots = z'_i : z''_i : z'''_i : \dots = (C' - 1) : (C'' - 1) : (C''' - 1) : \dots, \end{aligned} \quad (101)$$

deren Glieder mit kleinen relativen Fehlern von der 1. Ordnung behaftet sind.

Mit diesen Verhältnissgleichungen sind endlich die notwendigen Unterlagen für die schärfere Ermittlung der Gesamtstrahlenbrechung $\Delta \varphi_{1m}$ und ihrer Teilbeträge ξ_1, ξ_m gegeben.

8. Ermittlung der gesamten Strahlenbrechung $\Delta \varphi_{1m}$ einschließlich der kleinen Glieder zweiter Ordnung aus gegenseitigen Beobachtungen mittels der an drei Strahlen beobachteten Richtungsunterschiede.

Denken wir uns einerseits L , andererseits L'' mit dem Grundstrahl L verbunden, so bestehen nach (65) die Gleichungen

$$\Delta \varphi_{1m} = \frac{\varepsilon'_m - \varepsilon'_1}{C' - 1} \left\{ 1 + \frac{C'}{C' - 1} (c + t) \left[\frac{\varepsilon'_1 + \varepsilon'_m}{2} - \sum_1^m \right] + G^2 \right\}, \quad (102)$$

$$\Delta \varphi_{1m} = \frac{\varepsilon''_m - \varepsilon''_1}{C'' - 1} \left\{ 1 + \frac{C''}{C'' - 1} (c + t) \left[\frac{\varepsilon''_1 + \varepsilon''_m}{2} - \sum_1^m \right] + G^2 \right\}, \quad (103)$$

in welchen außer $\Delta\varphi_{1m}$ noch $\sum_1^m$ und $\sum_1^{m''}$ unbekannt sind, während $\varepsilon_1', \varepsilon_m', \varepsilon_1'', \varepsilon_m''$ aus gleichzeitigen gegenseitigen Beobachtungen in beiden Strahlenendpunkten sich ergeben und als Argument von c und t der Zenitabstand des Grundstrahles verwendet werden kann.

Nach der Hilfsbeziehung (101) gilt aber

$$\sum_1^{m''} = (1 + G^1) \frac{C'' - 1}{C' - 1} \cdot \sum_1^m, \quad (104)$$

so daß (103) die Form

$$\Delta\varphi_{1m} = \frac{\varepsilon_m'' - \varepsilon_1''}{C'' - 1} \left\{ 1 + \frac{C''}{C'' - 1} (c + t) \left[\frac{\varepsilon_1'' + \varepsilon_m''}{2} - \frac{C'' - 1}{C' - 1} \cdot \sum_1^m \right] + G^2 \right\} \quad (105)$$

annimmt. Aus (102) und (105) folgt das Gleichungspaar

$$(C' - 1) \Delta\varphi_{1m} + \frac{C'}{C' - 1} (c + t) (\varepsilon_m' - \varepsilon_1') \cdot \sum_1^m = (\varepsilon_m' - \varepsilon_1') + \frac{C'}{C' - 1} (c + t) \frac{\varepsilon_m'^2 - \varepsilon_1'^2}{2} + G^3, \quad (106)$$

$$(C'' - 1) \Delta\varphi_{1m} + \frac{C''}{C'' - 1} (c + t) (\varepsilon_m'' - \varepsilon_1'') \cdot \sum_1^{m''} = (\varepsilon_m'' - \varepsilon_1'') + \frac{C''}{C'' - 1} (c + t) \frac{\varepsilon_m''^2 - \varepsilon_1''^2}{2} + G^3, \quad (107)$$

woraus die Unbekannte $\Delta\varphi_{1m}$ und wenn erwünscht, auch $\sum_1^m$ zahlenmäßig ermittelt werden können.

Die Auflösung dieser Gleichungen führt auf den *Refraktionsausdruck*

$$\Delta\varphi_{1m} = \frac{1}{C'' - C'} \left\{ \frac{C''}{C' - 1} (\varepsilon_m' - \varepsilon_1') - \frac{C'}{C'' - 1} (\varepsilon_m'' - \varepsilon_1'') \right\} (1 + G^2). \quad (108)$$

Will man nicht wie vorhin angegeben, das Argument von c und t dem bekannten Zenitabstand der Strahlen gleichsetzen, so ist zu (106) und (107) noch die der Hinzunahme eines Strahles L'' entsprechende Gleichung

$$(C''' - 1) \Delta\varphi_{1m} + \frac{C'''}{C''' - 1} (c + t) (\varepsilon_m''' - \varepsilon_1''') \cdot \sum_1^{m'''} = (\varepsilon_m''' - \varepsilon_1''') + \frac{C'''}{C''' - 1} (c + t) \frac{\varepsilon_m'''^2 - \varepsilon_1'''^2}{2} + G^3 \quad (109)$$

beizufügen. Im System (106), (107), (109) treten die drei Unbekannten $\Delta\varphi_{1m}$, $(c + t) \sum_1^m$ und $(c + t)$ in linearer Form auf und können ohne formelle Schwierigkeiten berechnet werden. Doch ist die Hinzunahme von (109) nur dann erforderlich, wenn auch $\sum_1^{m''}$, dessen Kenntnis im allgemeinen nicht notwendig ist, berechnet werden soll. Für die Ermittlung von $\Delta\varphi_{1m}$ selbst ist nach (108) der Einfallswinkel α ganz entbehrlich.

9. Ermittlung der Tangentenwinkel ξ (Teilbeträge der Strahlenbrechung) aus einseitigen Beobachtungen.

Um aus der Richtung der Anfangstangente T_1 (Abb. 8) die Richtung der allen Strahlen gemeinsamen Sehne $P_1 P_m = S$ abzuleiten, brauchen wir den zwischen den beiden Richtungen liegenden Tangentenwinkel ξ_1 , welcher für die in Abb. 8 getroffene Annahme negativ ausfällt. Dasselbe gilt für die Winkel $\xi_1', \xi_1'', \dots$, welche die übrigen Anfangstangenten $T_1, T_1', \dots$ mit S einschließen. Auch die von T_1 aus gezählten Richtungen $\varepsilon_1', \varepsilon_1'', \dots$ der $T_1', T_1'', \dots$ fallen negativ aus.

Nach Abb. 8 ist streng

$$-\sin \xi_1 = \frac{y_m}{S}, \quad -\sin \xi'_1 = \frac{y'_m}{S}. \quad (110)$$

Die Division dieser Ausdrücke gibt

$$\frac{\sin \xi'_1}{\sin \xi_1} = \frac{y'_m}{y_m} = \frac{\xi'_1}{\xi} (1 + G^2) \quad (111)$$

oder auch

$$1 + \frac{\xi'_1}{\xi} = \frac{y'_m}{y_m} (1 + G^2), \quad (112)$$

da

$$\xi_1 = \xi + \xi'_1 \quad (113)$$

ist. Aus (112) findet man

$$\left(\frac{y'_m}{y_m} - 1\right) \xi_1 = \xi'_1 (1 + G^2), \quad (114)$$

worin der Quotient $y'_m : y_m$ mittels (83) auszudrücken ist. Es wird

$$\frac{y'_m}{y_m} = C' \left\{ 1 - (c + 2t) \varepsilon_1 \right\} + C' \int_{e=1}^m R_e \frac{\Delta \varphi_{1e}}{\cos \alpha_e} \cdot da_e + G^2 \quad (115)$$

und aus (114) folgt damit

$$\{C' [1 - (c + 2t) \varepsilon_1] - 1\} \xi_1 + C' \cdot \xi_1 \int_{e=1}^m R_e \frac{\Delta \varphi_{1e}}{\cos \alpha_e} da_e = \xi'_1 (1 + G^2). \quad (116)$$

Dieser Ausdruck gilt für das Strahlenpaar L, L' . Tritt an Stelle von L der Strahl L'' , so erhält man ganz entsprechend

$$\{C'' [1 - (c + 2t) \varepsilon'_1] - 1\} \xi_1 + C'' \cdot \xi_1 \int_{e=1}^m R_e'' \frac{\Delta \varphi_{1e}}{\cos \alpha_e} \cdot da_e = \varepsilon'_1 (1 + G^2). \quad (117)$$

Für das hierin enthaltene R_e'' ergibt sich nach (82)

$$R_e'' = \frac{1}{y_m} \left[\frac{\delta \alpha_e''}{da_e} - \frac{1}{2} (c + 3t) \Delta \varepsilon_{1e}'' + t_e \lambda_e'' + (c + t) \sum_1^e \right], \quad (118)$$

während

$$R_e = \frac{1}{y_m} \left[\frac{\delta \alpha_e'}{da_e} - \frac{1}{2} (c + 3t) \Delta \varepsilon_{1e}' + t_e \lambda_e' + (c + t) \sum_1^e \right] \quad (119)$$

der Ausdruck für die entsprechende Größe im Integral von (116) ist. Dieses selbst wird also

$$\begin{aligned} & \int_{e=1}^m R_e \frac{\Delta \varphi_{1e}}{\cos \alpha_e} da_e \\ &= \frac{1}{y_m} \left\{ \int_1^m \frac{\Delta \varphi_{1e}}{\cos \alpha_e} \delta \alpha_e - \frac{1}{2} (c + 3t) \int_1^m \frac{\Delta \varphi_{1e}}{\cos \alpha_e} \Delta \varepsilon_{1e}' \cdot da_e + \int_1^m \frac{\Delta \varphi_{1e}}{\cos \alpha_e} \cdot t_e \cdot \lambda_e' \cdot da_e + (c + t) \int_1^m \frac{\Delta \varphi_{1e}}{\cos \alpha_e} \cdot \sum_1^e \cdot da_e \right\} \quad (120) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{y_m} \left\{ J_1 - J_2 + J_3 + J_4 \right\} \quad (121)$$

und das (117) enthaltene Integral ist

$$\begin{aligned} & \int_1^m R_e'' \frac{\Delta \varphi_{1e}}{\cos a_e} da_e \\ &= \frac{1}{y_m} \left\{ \int_1^m \frac{\Delta \varphi_{1e}}{\cos a_e} \delta'' a_e - \frac{1}{2}(c+3t) \int_1^m \frac{\Delta \varphi_{1e}}{\cos a_e} \Delta \varepsilon_{e1}' da_e + \int_1^m \frac{\Delta \varphi_{1e}}{\cos a_e} t_e \cdot \lambda_e'' da_e + (c+t) \int_1^m \frac{\Delta \varphi_{1e}}{\cos a_e} \sum_1^e da_e \right\} \quad (122) \\ &= \frac{1}{y_m} \left\{ J_1'' - J_2'' + J_3'' + J_4'' \right\} \quad (123) \end{aligned}$$

Nun ist nach (101)

$$\Delta \varepsilon_{e1}' = \frac{C''-1}{C'-1} \cdot \Delta \varepsilon_{e1}' (1+G^1), \quad \sum_1^e = \frac{C''-1}{C'-1} \cdot \sum_1^e (1+G^1), \quad (124)$$

so daß sich für den Zusammenhang von J_2'' , J_2'' bzw. J_4'' , J_4'' die einfache Beziehung

$$J_2'' = \frac{C''-1}{C'-1} \cdot J_2 (1+G^1), \quad J_4'' = \frac{C''-1}{C'-1} \cdot J_4 (1+G^1) \quad (125)$$

ergibt.

Um J_1 zu untersuchen, machen wir zunächst von der Beziehung $a_e = a(1+G^1)$ Gebrauch, woraus unmittelbar

$$J_1 = \frac{1+G^1}{\cos a} \int_1^m \Delta \varphi_{1e} \cdot \delta' a_e \quad (126)$$

folgt. Nun denken wir uns die Lichtkurve L durch Punkte P_i , P_k , ... so in einzelne Abschnitte zerlegt, daß innerhalb derselben $\Delta \varphi_{1e}$ bis auf kleine relative Fehler von der 1. Ordnung jeweils als konstant betrachtet und daher vor das betreffende Teilintegral gesetzt werden darf. Nach dem Gesagten wird also

$$J_1 = (1+G^1) \frac{1}{\cos a} \left\{ \Delta \varphi_{1i} \int_1^i \delta' a_e + \Delta \varphi_{1k} \int_1^k \delta' a_e + \dots \right\}. \quad (127)$$

In den Zuwächsen $\delta' a_e$ der Schichtdicke steckt neben dem systematischen Teile $\delta' a_{\sigma e}$ auch ein rein zufälliger, im Vorzeichen wechselnder Anteil, welcher in den Summen $\int_1^i \delta' a_e$, $\int_1^k \delta' a_e$, ... nahezu verschwinden wird, so daß die Beziehungen

$$\int_1^i \delta' a_e = (1+G^1) \int_1^i \delta' a_{\sigma e}, \quad \int_1^k \delta' a_e = (1+G^1) \int_1^k \delta' a_{\sigma k}, \dots \quad (128)$$

gelten. Damit wird aber

$$J_1 = \frac{1}{\cos a} \left\{ \Delta \varphi_{1i} \int_1^i \delta' a_{\sigma e} + \Delta \varphi_{1k} \int_1^k \delta' a_{\sigma k} + \dots \right\} (1+G^1) \quad (129)$$

und entsprechend

$$J_i'' = \frac{1}{\cos a} \left\{ \Delta \varphi_{1i} \int_1^i \delta'' a_{\sigma e} + \Delta \varphi_{1k} \int_1^k \delta'' a_{\sigma k} + \dots \right\} (1+G^1). \quad (130)$$

Nach der Näherungsbeziehung (99) ist

$$\delta' a_{\sigma e} = (1 + G^1) \frac{C'' - 1}{C' - 1} \delta a_{\sigma e}, \quad (131)$$

womit

$$J_1 = \frac{C'' - 1}{C' - 1} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \left\{ \Delta \varphi_{1i} \int_1^i \delta' a_{\sigma e} + \Delta \varphi_{1k} \int_1^k \delta' a_{\sigma e} + \dots \right\} (1 + G^1) = \frac{C'' - 1}{C' - 1} \cdot J_1 (1 + G^1) \quad (132)$$

folgt.

Auf ganz entsprechende Weise findet man auch

$$J_3 = \frac{C'' - 1}{C' - 1} J_3 (1 + G^1). \quad (133)$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke (125), (132) und (133) in die rechte Seite von Gleichung (123) wird diese

$$\frac{1}{y_m} (J_1' - J_2' + J_3' + J_4') = \frac{C'' - 1}{C' - 1} \cdot \frac{1}{y_m} (J_1' - J_2' + J_3' + J_4') (1 + G^1) \quad (134)$$

und daraus endlich folgt mit Rücksicht auf die linken Seiten von (123) und (121) die Hilfsbeziehung

$$\int_{e=1}^m R_e' \frac{\Delta \varphi_{1e}}{\cos \alpha_e} da_e = (1 + G^1) \frac{C'' - 1}{C' - 1} \int_{e=1}^m R_e' \frac{\Delta \varphi_{1e}}{\cos \alpha_e} da_e. \quad (135)$$

Mit der Abkürzung

$$U' = \xi_1 \int_1^m R_e' \frac{\Delta \varphi_{1e}}{\cos \alpha_e} da_e = G^2 \quad (136)$$

ergibt sich nunmehr unter Berücksichtigung von (135) aus (116) und (117) das Gleichungspaar

$$\{C' [1 - (c + 2t) \varepsilon_1'] - 1\} \xi_1 + C' \cdot U' = \varepsilon_1' (1 + G^2), \quad (137)$$

$$\{C'' [1 - (c + 2t) \varepsilon_1''] - 1\} \xi_1 + C'' \frac{C'' - 1}{C' - 1} \cdot U' = \varepsilon_1'' (1 + G^2), \quad (138)$$

in dem $\xi_1 = G^1$ und $U' = G^2$ als Unbekannte auftreten.

Die Auflösung dieser linearen Gleichungen führt für die erste Unbekannte auf den Ausdruck

$$\xi_1 = \frac{1}{C'' - C'} \left\{ \frac{C''}{C' - 1} \varepsilon_1' - \frac{C'}{C'' - 1} \varepsilon_1'' \right\} (1 + G^2). \quad (139)$$

Ganz entsprechend wird der *Refraktionswinkel im Endpunkt P_m des Grundstrahles*

$$\xi_m = \frac{1}{C'' - C'} \left\{ \frac{C''}{C' - 1} \varepsilon_m' - \frac{C'}{C'' - 1} \varepsilon_m'' \right\} (1 + G^2). \quad (140)$$

Da in dem Ausdruck für ξ_m außer den Festwerten C' , C'' nur noch die im Strahlenendpunkt P_m beobachteten Richtungsunterschiede ε_m' , ε_m'' auftreten, so kann ξ_m lediglich auf Grund *einseitiger* Beobachtungen dreier Strahlen L , L' , L'' gefunden werden. Entsprechendes gilt natürlich auch für ξ_1 . Bemerkenswert ist auch hier, daß in den Ausdrücken für ξ_1 und ξ_m der Strahleneinfallswinkel α nicht mehr enthalten ist.

Unter Beschränkung auf das Hauptglied ergeben sich aus (137) und (138) für die Tangentenwinkel die einfachen *Näherungen*

$$\xi_1 = \frac{\varepsilon'_1}{C'-1} (1+G^1), \quad \xi_m = \frac{\varepsilon'_m}{C'-1} (1+G^1). \quad (141)$$

10. Überprüfung der abgeleiteten Ergebnisse. Zusammenstellung der Voraussetzungen.

Nach den vorstehenden Entwicklungen lassen sich die Gesamtstrahlenbrechung $\Delta\varphi_{1m}$ sowie die beiden Refraktionswinkel ξ_1 , ξ_m in erster Annäherung durch die einfachen Ausdrücke (66) und (141) wiedergeben, welche nur die Beobachtung zweier Strahlen erfordern. Zur schärferen Ermittlung aber, welche die Beobachtung dreier Strahlen voraussetzt, dienen die Beziehungen (108), (139) und (140).

Bei den langwierigen Untersuchungen, welche zu den strengeren Ausdrücken für $\Delta\varphi_{1m}$, ξ_1 und ξ_m geführt haben, ist eine *Probe für die Richtigkeit der analytischen Entwicklungen* sehr erwünscht. Die Möglichkeit dazu bietet die leicht aus Abb. 1 abzulesende Beziehung

$$\Delta\varphi_{1m} = \xi_m - \xi_1. \quad (142)$$

Ersetzt man hierin ξ_1 und ξ_m durch die Ausdrücke (139) und (140), so wird

$$\Delta\varphi_{1m} = \frac{1}{C''-C'} \left\{ \frac{C''}{C'-1} \varepsilon'_m - \frac{C'}{C''-1} \varepsilon''_m \right\} (1+G^2) - \frac{1}{C''-C'} \left\{ \frac{C''}{C'-1} \varepsilon'_1 - \frac{C'}{C''-1} \varepsilon''_1 \right\} (1+G^2) \quad (143)$$

$$= \frac{1}{C''-C'} \left\{ \frac{C''}{C'-1} (\varepsilon'_m - \varepsilon'_1) - \frac{C'}{C''-1} (\varepsilon''_m - \varepsilon''_1) \right\} (1+G^2). \quad (144)$$

Dieser aus ξ_1 und ξ_m für $\Delta\varphi_{1m}$ ermittelte Ausdruck stimmt aber vollständig mit dem auf ganz anderem Wege gefundenen Ausdruck (108) für $\Delta\varphi_{1m}$ überein.

Die *Grundlage der ganzen Entwicklungen* bildet das durch Gl. (5) ausgedrückte Gesetz von Arago, nach welchem der um 1 verminderte Brechungsexponent zur Dichte proportional ist. Die Luft wurde so in unendlich dünne Schichten zerlegt gedacht, daß allen Punkten ein und derselben Schicht gleiche Dichte zukommt. Im Falle verschiedenartiger Zusammensetzung der Luft innerhalb einer Schicht ist die Schichtbegrenzung so durchgeführt zu denken, daß der abgeleiteten Eigenschaft (7) von vornherein Genüge geleistet wird. Über das noch nicht feststehende Verhältnis der Schichtdicken wurde hierauf so verfügt, daß der Absolutwert des Verhältnisses $dn_i : n_i$ der Exponentenänderung bis zur Nachbarschicht zum absoluten Brechungsexponenten dieser Schicht ein Festwert dn bleibt. Wie groß der Einfallswinkel α , praktisch genommen wie klein der Höhenwinkel der Sicht werden darf (S. 17 u. 18), hängt vom Durchschnittswert $\lambda'_{1..m}$ aller optischen Lotabweichungen des laufenden Strahles L' gegen den Grundstrahl L , also von der Luftbeschaffenheit ab.

Jedenfalls muß der Strahl so steil sein, daß das in (55) enthaltene Glied $\frac{C'}{C'-1} (c+t) \lambda'_{1..m}$ eine im Verhältnis zu 1 kleine Größe bleibt. Ferner ist vorausgesetzt, daß die Refraktionsbeträge, alle zwischen den verschiedenen Strahlentangenten liegenden Winkel sowie die

Abweichungen der Einfallswinkel von einem Mittelwert α kleine Größen von der 1. Ordnung nicht überschreiten. Diese Voraussetzungen genügen, um aus den an zwei Strahlen ausgeführten Beobachtungen je das Hauptglied der Refraktionsbeträge aufzustellen.

Sollen auch die Korrektionsglieder, welche selbst kleine Größen zweiter Ordnung sind, volle Berücksichtigung finden, so ist noch über die Schichtkrümmung und über die Dickenänderung der gleichen Schicht vom Grundstrahl bis zu den laufenden Strahlen eine Annahme zu treffen. Es wurde die für geringe Entfernungen entsprechender Punkte sehr wahrscheinliche Hypothese benützt, daß der systematische Anteil der optischen Lotabweichung und der Schichtdickenzunahme in ein und derselben Schicht zur Entfernung der Punkte vom zugehörigen Punkt des Grundstrahles proportional sei (S. 24 u. 25) und daß die zweifellos vorhandenen unregelmäßigen Anteile an der optischen Lotabweichung und der Schichtdickenzunahme für beide Vorzeichen gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen.

Ohne auf die praktische Durchführung des vorgeschlagenen Verfahrens hier näher eingehen zu können, sei doch eine unerläßliche praktische Voraussetzung erwähnt. Die beobachteten Größen ε_1 , ε'_m werden beträchtlich kleiner sein wie die gesuchten Werte $\Delta\varphi_{1m}$, ξ_1 , ξ_m . Zur sicheren Ermittlung der Refraktionsbeträge aus ε_1 , ε'_m muß es also möglich sein, diese sehr kleinen Winkelgrößen mit einer über die gewöhnlichen Anforderungen beträchtlich hinausgehenden Schärfe zu beobachten.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
1. Rückblick. Allgemeiner Grundgedanke	3
2. Brechungsverhältnisse. Differentialausdruck der Strahlenbrechung	10
3. Allgemeiner Ausdruck für die Strahlenablenkung $\Delta\varphi_{ei}$ zwischen zwei beliebigen Punkten P_e, P_i eines Strahles und für den Richtungsunterschied ε'_i zweier Strahlen L, L' in entsprechenden Punkten P_i, P'_i	13
4. Beziehung zwischen der Zunahme $\Delta\varepsilon'_i$ des Richtungsunterschiedes zweier Strahlen und der entsprechenden Strahlenablenkung $\Delta\varphi_{ei}$ für die einseitig gekrümmte Lichtkurve	15
5. Strahlenablenkung und Richtungsunterschiede bei Lichtkurven mit Wendepunkten	18
6. Verhältnis der Abstände entsprechender Strahlenpunkte von den zugehörigen Anfangstangenten	20
7. Weitere Hilfsbeziehungen	23
8. Ermittlung der gesamten Strahlenbrechung $\Delta\varphi_{im}$ einschließlich der kleinen Glieder zweiter Ordnung aus gegenseitigen Beobachtungen mittels der an drei Strahlen beobachteten Richtungsunterschiede	25
9. Ermittlung der Tangentenwinkel ξ (Teilbeträge der Strahlenbrechung) aus einseitigen Beobachtungen	26
10. Überprüfung der abgeleiteten Ergebnisse. Zusammenstellung der Voraussetzungen	30