

# Abhandlungen

der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Mathematisch-physikalische Klasse

XXV. Band, 4. Abhandlung

---

Über die singulären Lösungen einer Differentialgleichung  
erster Ordnung mit zwei Variablen, insbesondere über  
diejenigen, welche zugleich partikuläre Integrale sind

Walther von Dyck

Vorgelegt am 4. Dezember 1909

München 1910

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Abhandlungen

der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften  
Mathematisch-physikalische Klasse  
LXX. Band, 4. Abhandlung

Über die singulären Lösungen einer Differentialgleichung  
erster Ordnung mit zwei Variablen, insbesondere über  
diejenigen, welche zugleich partikuläre Integrale sind

von

Walther von Dyck

Vorgelegt am 4. Dezember 1900

München 1910

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften  
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (G. Nebe)

## Einleitung.

Die folgenden Betrachtungen beschäftigen sich mit dem Verhalten der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variablen

$$F(x, y, y') = 0$$

in der Umgebung einer singulären Lösung im allgemeinen und dann im besonderen für den Fall, daß die singuläre Lösung zugleich partikuläres Integral der Differentialgleichung ist.

Dabei knüpft die Darlegung einmal an die obige Differentialgleichung als Ausgangspunkt an (§ 1—3), dann an die Gleichung der einfach unendlichen Kurvenschar

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

(§ 4, 5) und es handelt sich neben einer genauen analytischen Formulierung, die zur Ergänzung der bisherigen Untersuchungen notwendig ist, vornehmlich um die gestaltliche Diskussion im reellen Gebiet.

Trotz der umfangreichen Literatur, welche über die Frage der singulären Lösungen seit Clairaut und Euler entstanden ist, scheint mir eine ausführliche Darlegung der Geometrie der singulären Lösungen noch immer nicht unangebracht. Es finden sich Unklarheiten und Ungenauigkeiten auch in der allgemeinen Theorie noch in neueren Abhandlungen wie in Lehrbüchern über diesen Gegenstand; besonders aber ist jener Fall der zugleich singulären und partikulären Lösungen seinem eigentlichen geometrischen Charakter nach noch nicht klargelegt worden, obwohl die analytischen Grundlagen der ganzen Frage seit Darboux's Betrachtungen und besonders seit den Untersuchungen von Fuchs und Hamburger vollständig gegeben sind.

Das Interesse hat sich aber in neuerer Zeit mehr der Theorie der durch eine Differentialgleichung (oder ein System von solchen) definierten analytischen Funktionen und ihrer festen und beweglichen singulären Stellen zu-

gewendet, für welche nach den Cauchyschen Existenzbeweisen der Aufsatz von Briot und Bouquet vom Jahre 1856 „Sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles“<sup>1)</sup> und dann der Aufsatz von Fuchs „Über die Differentialgleichungen, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen“<sup>2)</sup> die Grundlage bilden und an welche dann die neueren Arbeiten von Poincaré und Picard, weiterhin von Painlevé, Bendixson, Horn u. a. anschließen<sup>3)</sup>. Den hier entstandenen, für die Funktionentheorie prinzipiell wichtigen Arbeiten gegenüber ist die Frage der singulären Lösungen, die wir in den gegenwärtigen Untersuchungen besonders nach der geometrischen Seite weiterführen wollen, zurückgetreten.

Auf Grund der nachfolgenden Betrachtungen lassen sich die Hauptsätze über die singulären Lösungen folgendermaßen aussprechen:

Als singuläre Lösung der Differentialgleichung  $F(x, y, y') = 0$  soll jede die Differentialgleichung befriedigende Gleichung in  $x$  und  $y$  bezeichnet werden, welche ohne Bildung des allgemeinen Integrals derselben als Teilfaktor der Diskriminante  $D$  von  $F = 0$  und  $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$  gewonnen werden kann<sup>4)</sup>.

I. Der allgemeine Typus der singulären Lösungen einer Differentialgleichung erster Ordnung, der Fall der gemeinsamen Berührungskurve einer Schar von Zweigen von partikulären Integralkurven, in welchem die eigentlichen Umhüllungskurven (Enveloppen) enthalten sind, sei als Typus I der singulären Lösungen bezeichnet.

1) Journal de l'école polyt. cah. 36.

2) Sitzungsberichte der Berliner Akademie, Bd. 32, vom Jahre 1884.

3) Man vergleiche für eine zusammenhängende Darstellung etwa Picards „Traité d'analyse“, tom. III (Paris 1896), sowie (von weiteren Handbüchern, wie denen von Schlesinger und Forsyth abgesehen) besonders Painlevés „Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles“ (professées à Stockholm 1895, Paris 1897), endlich für die weitere Literatur das Referat von Painlevé über „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. II, S. 215 ff. (französische Ausgabe, tome II, vol. 3, fasc. 1).

Es sei gestattet, hier anzufügen, daß ein Teil der Darlegungen, die A. Wahlgren im Anschluß an Bendixson in der Abhandlung „Sur les points singuliers des équations différentielles du premier ordre et du second degré“ in den Abhandlungen der schwedischen Akademie der Wiss. (Bd. 28, 1902) gegeben hat, sich schon in meiner Arbeit „Über die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variablen definierten Kurvensysteme“ (in den Sitzungsberichten der Münchner Akademie der Wissenschaften v. J. 1891 und 1892) findet und dort für eine Charakteristik des Gesamtverlaufes des Systems der Integralkurven im Sinne der Analysis situs verwertet ist.

4) Vergleiche hierzu im folgenden die Ausführungen des § 7. Boole spricht in seinem „Treatise on differential equations“ in konsequenter Weise von „Singular solutions“ und von „Particular integrals“, eine richtige Unterscheidung, die später zumeist außer acht gelassen worden ist.

II. Diesen Berührungskurven treten die Grenzkurven an die Seite, welchen sich eine Schar von Zweigen der partikulären Integralkurven von einer oder von zwei Seiten annähert, ohne sie (singuläre Stellen ausgenommen) zu berühren oder zu durchsetzen — Typus II der singulären Lösungen. Es ist dies, wie wir zeigen werden, der allgemeine Fall der zugleich singulären und partikulären Lösungen der Differentialgleichung.

Diese Grenzkurven können einfach oder mehrfach zählend im System der partikulären Integralkurven auftreten.

III. Der in der Literatur in der Regel als Beispiel für die zugleich singulären und partikulären Lösungen einer Differentialgleichung angeführte Fall, in welchem eine partikuläre Integralkurve von einer Gruppe von Zweigen weiterer partikulärer Integralkurven berührt wird, ist ein ganz spezieller Fall solcher Lösungen.

IV. Der Ort singulärer Punkte von partikulären Integralkurven ist im allgemeinen weder partikuläre noch singuläre Lösung, kann aber im besonderen das eine oder andere oder auch beides sein.

Die analytische Unterscheidung der beiden Typen I und II liegt in der bekannten Arbeit von Hamburger „Über die singulären Lösungen der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung“<sup>1)</sup> vollständig vor, aber der geometrische Charakter des allgemeinen Falles II als einer singulären Lösung wird nicht erörtert, vielmehr nur seine Eigenschaft als partikuläres Integral hervorgehoben.

Als Typus der zugleich singulären und partikulären Integrale wird dort nur der obige besondere Fall III betrachtet<sup>2)</sup>. Für ihn gibt es ein klassisches Beispiel, das auf Cauchy<sup>3)</sup> zurückgeht, die Differentialgleichung

$$y'^3 - 4xy \cdot y' + 8y^2 = 0$$

<sup>1)</sup> Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 112, 1893.

<sup>2)</sup> Vgl. die Zusammenfassung auf S. 218 der ebengenannten Abhandlung von Hamburger. Ebenso die Darstellung der Hamburgerschen Untersuchungen in Forsyths „Theory of differential equations“, part II (Cambridge 1900), chap. VIII, No. 108 und in Schlesingers „Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen“ (Leipzig 1900), Kap. VIII, Nr. 63–66.

<sup>3)</sup> Cauchy, „Leçons sur le calcul différentiel et le calcul intégral“. Herausg. von Moigno, Paris 1844, Bd. 2, S. 377. Für die historische Entwicklung der Theorie der singulären Lösungen wie für die Literatur vergleiche man Painlevés schon genanntes Referat in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, sowie eine von Braunnühl veranlaßte Dissertation von Rothenberg (München 1908), abgedruckt in den Abhandlungen zur Geschichte der math. Wiss., Bd. XX.

mit dem allgemeinen Integral

$$y = C(x - C)^2,$$

welches für  $C = 0$  die zugleich singuläre und partikuläre Lösung  $y = 0$  ergibt<sup>1)</sup>. Dieses Beispiel ist weiter in dem mit einer großen Zahl instruktiver Beispiele ausgestatteten „Treatise on differential equations“ von Boole vom Jahre 1859 ausführlich besprochen und findet sich dann mit gleichartigen Beispielen in der größeren Zahl der Lehrbücher über Differentialgleichungen<sup>2)</sup>.

Booles Treatise enthält aber auch<sup>3)</sup> eine Differentialgleichung, welche eine zugleich singuläre und partikuläre Lösung von dem obenbezeichneten allgemeinen Typus II der Grenzkurve besitzt, freilich ohne daß sie diesem Charakter nach erkannt wäre. Es ist einfach die Differentialgleichung

$$y' = x^{-n}.$$

Boole hebt hervor, daß die Lösung  $x = 0$  für positive Zahlen  $n$  kleiner als 1 ein „singular solution“ darstellt (Typus I), für Zahlen  $n$  größer als 1 aber ein „particular integral“. Es ist hier der Fall  $n = \frac{3}{2}$  das einfachste Beispiel des Typus II der zugleich singulären und partikulären Lösung, der im übrigen für jeden rationalen gebrochenen Exponenten  $n > 1$  vorliegt. Auch Hamburger kommt auf dieselbe Gleichung am Schlusse der Erörterungen zu seinem dritten Beispiel<sup>4)</sup>

$$y'^2 X - Y = 0$$

$$X = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m),$$

$$Y = (y - \alpha_1)(y - \alpha_2) \dots (y - \alpha_n).$$

Hier findet sich die Bemerkung, daß, wenn  $\alpha_\lambda$  eine  $p$ -fache Wurzel von  $Y = 0$  ist (wo  $p \geq 2$ ),  $y = \alpha_\lambda$  ein „partikuläres Integral“ darstellt, der Entwicklung von  $y'$  in der Form

$$y' = g_0 y^{\frac{p}{2}} + \dots$$

entsprechend. Auch in Painlevés schon erwähntem Referat in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften ist bei Anführung dieses Beispiels nur von einer „vielfachen gewöhnlichen Lösung“ die Rede.

1) Wir kommen auf dieses Beispiel noch in den Bemerkungen des § 7 zurück.

2) Wir erwähnen Serrets Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. 3. deutsche Bearbeitung, herausgegeben von Scheffers. Bd. III, Leipzig 1909.

3) Vgl. S. 167 der 3. Ausgabe des Treatise vom Jahre 1872.

4) a. a. O. S. 243.

Die elementaren Darstellungen des Gegenstandes beschränken sich zu meist und vielfach ohne die nötigen Vorsichtsmaßregeln auf die Betrachtung des Falles der Umhüllungskurven. Ganz exakt habe ich hier nur in Picards „Traité d'analyse“<sup>1)</sup> die Bedingung hervorgehoben gefunden, welche alle weiteren Fälle ausschließt. Bei weiterem Eingehen wird die Unterscheidung der Umhüllungskurven (Typus I der obigen Formulierung) und des Ortes von singulären Punkten (IV. Fall) getroffen — so etwa im „Cours d'analyse mathématique“ von Goursat<sup>2)</sup> —, eine Unterscheidung, die ohne einschränkende Zusätze jedenfalls unvollständig ist.

Peano geht in seinen „Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale“<sup>3)</sup> von der einfach unendlichen Kurvenschar aus und charakterisiert die Bedingung für das Auftreten einer gewöhnlichen Umhüllungskurve durch das Nichtverschwinden einer gewissen Funktionaldeterminante<sup>4)</sup>. Von den Fällen, in denen diese verschwindet, wird gleichfalls nicht der allgemeine Typus II hervorgehoben, sondern nur das Eintreten von Berührungen höherer Ordnung (des Typus I) und das Auftreten von singulären Punkten der Kurvenschar. Auch die an Peano anknüpfenden, etwas allgemeineren Formulierungen von Lilienthal in seinen „Vorlesungen über Differentialgeometrie“<sup>5)</sup> gehen hier über die Erörterung der Berührungen verschiedener Ordnung nicht hinaus. Im „Cours d'analyse infinitésimale“ von Boussinesq<sup>6)</sup> findet sich eine Erörterung über asymptotische Annäherung der allgemeinen Integralkurven an eine Grenzkurve, in welcher (neben nicht hierhergehörigen) auch einige Beispiele des obigen Typus II angeführt sind. Aber die allgemeinen Betrachtungen sind mit der Frage nach der Dichtigkeitsverteilung der Integralkurven (nach dem sogenannten „Grat“ und „Thalweg“ im Beispiel der Falllinien einer Fläche) verquickt, welche wesentlich von der Art, wie die Integrationskonstante im allgemeinen Integral eingeführt ist, abhängt. Dadurch wird die Exaktheit der Darstellung erschwert, welche auch mit den angewandten, mehr rasonierenden als rechnerischen Mitteln nicht zu erreichen ist.

1) Paris 1896, tom. III, chap. III, S. 49, 50.

2) Paris 1902, tom. I, chap. X „Courbes enveloppes“.

3) Torino 1887, cap. VII, p. 2. Inviluppi di curve nel piano.

4) Vgl. die Darstellung in § 4 der gegenwärtigen Abhandlung.

5) Leipzig 1908, erster Teil, Kap. 2 „Einfach unendliche Schar ebener Kurven“.

6) Tome I, fasc. II (Compléments), Paris 1887; § 137\*—143\* und Tome II, fasc. II (Compléments), Paris 1890; § 362\*—369\*.

Im folgenden habe ich nun versucht, die Frage im besonderen des Auftretens zugleich singulärer und partikulärer Lösungen nach der analytischen wie der geometrischen Seite völlig klarzulegen (§ 1—6). Eine gewisse Ausführlichkeit der Darstellung, bei welcher auch der allgemeine Fall der singulären Lösung mit einbezogen ist, mag dabei gerechtfertigt erscheinen. Es lag mir daran, die auftretenden Möglichkeiten an einer größeren Zahl charakteristischer Beispiele anschaulich zu machen und sie durch graphische Darstellungen zu ergänzen. Dabei erscheint es von Interesse, nicht irgendwelche Beispiele heranzuziehen, sondern dieselben systematisch und jeweils so einfach als möglich auszuwählen. Dazu dienen aber die bei den allgemeinen Erörterungen zu Grunde gelegten Reihenentwickelungen (Gleichung 9 in § 1 und Gleichung 56 und 69 in § 4), die sich einmal auf die aus der Differentialgleichung  $F = 0$  herausgehobenen Zweige, das andere Mal auf die für die Gleichung  $\Phi = 0$  der Schar der Integralkurven aufzustellenden Entwickelungen beziehen. Über die so gebildeten einfachsten Beispiele hinaus ist dann noch in § 8 die Clairautsche Gleichung behandelt, für welche jede Wendetangente der Umhüllungskurve eine zugleich singuläre und partikuläre Lösung ist und in § 9 die Schar der Krümmungskreise einer ebenen Kurve, in welcher die vierpunktig berührenden Kreise eben diese Eigenschaft besitzen. In § 10 endlich sind die einfachsten festen singulären Stellen, welche auf den singulären Kurven auftreten können, gekennzeichnet.

Für die Herstellung der genauen Zeichnungen bin ich den Herren Assistenten Weigel und Deimler des mathematischen Institutes der hiesigen Technischen Hochschule zu besonderem Danke verpflichtet.

## § 1.

Darstellung der singulären Lösungen aus den Teilfaktoren der Diskriminante  $D$  der Differentialgleichung. Die beiden Haupttypen der singulären Integrale.

Wir gehen aus von der schon genannten Arbeit von Hamburger im Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 112 und legen die dort gegebene Reihenentwicklung für die partikulären Integrale in der Nähe einer singulären Lösung, die sich aus der Zerlegung der Diskriminante der Differentialgleichung in ihre linearen Teiler ergibt, zu Grunde. Die hier in Frage kommenden Sätze und Bezeichnungen seien in Kürze vorausgeschickt:

Wir setzen die Differentialgleichung voraus in der Form einer irreduziblen Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades in  $y'$ :

$$1) \quad F(x, y, y') \equiv A_0 y'^n + A_1 y'^{n-1} + \dots + A_n = 0,$$

in welcher die Koeffizienten  $A_0, A_1, \dots$  als ganze rationale Funktionen von  $x$  und  $y$  ohne gemeinsamen Teiler angenommen sind.

$$2) \quad D(x, y) = 0$$

sei die Diskriminantengleichung, als Resultat der Elimination von  $y'$  zwischen

$$3) \quad F(x, y, y') = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0.$$

Ferner sei:

$$4) \quad y - \eta(x) = 0$$

ein Zweig der Diskriminantenkurve, für welchen wir  $\eta(x)$  innerhalb eines Konvergenzbezirkes um einen Punkt  $x = a$  der  $x$ -Ebene durch eine nach positiven ganzen Potenzen von  $(x - a)$  fortschreitende Reihe darstellbar voraussetzen. Wir schließen dabei hier, wie auch in der Folge bei allen allgemeinen Formulierungen, den leicht zu ergänzenden, nur durch die besondere Lage des Koordinatensystems ausgezeichneten Fall aus, daß für diesen Zweig unendlich große Wurzeln  $y'$  auftreten.

Nehmen wir an, daß längs des Zweiges  $y - \eta(x) = 0$  der Diskriminantenkurve eine Gruppe von  $\alpha$  Zweigen der Funktion  $y'$  zusammenhängen, so gilt

für diese für die Umgebung des Punktes  $x = a$  der Diskriminantenkurve eine Entwicklung:

$$5) \quad \frac{d(y-\eta)}{dx} = \zeta - \frac{d\eta}{dx} + g_{\frac{\alpha}{\alpha}} (y-\eta)^{\frac{\alpha}{\alpha}} + g_{\frac{\alpha+1}{\alpha}} (y-\eta)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} + \dots,$$

in welcher  $\frac{d\eta}{dx}$  die Richtung der Diskriminantenkurve,  $\zeta$  die Richtung jener untereinander zusammenhängenden Zweige der Integralkurven bedeutet und die Koeffizienten  $g_{\frac{\alpha}{\alpha}}, g_{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \dots$  nach ganzen positiven Potenzen von  $(x-a)$  fortschreitende Reihen sind und  $g_{\frac{\alpha}{\alpha}}$  nicht identisch verschwindet.

„Im allgemeinen“ ist dann bekanntlich  $\frac{d\eta}{dx}$  von  $\zeta$  verschieden, der Zweig  $y-\eta(x)$  der Diskriminantenkurve **nicht** auch zugleich eine Lösung der Differentialgleichung 1), vielmehr nur ausgezeichnet als Ort von singulären Punkten der Integralkurven. (Vgl. den bekannten Aufsatz von Darboux „Sur les solutions singulières des équations aux dérivées ordinaires du premier ordre“<sup>1)</sup>.)

Für jene  $\alpha$  Zweige der Integralfunktion aber, welche in einem Punkte  $x = x_0$  der Diskriminantenkurve zusammenhängen, läßt sich in diesem allgemeinen Falle eine Reihenentwicklung herstellen von der Form:

$$6) \quad y - \eta(x) = \left( \zeta - \frac{d\eta}{dx} \right)_{x=x_0} \cdot (x-x_0) + \gamma_{\frac{\alpha+1}{\alpha}} (x-x_0)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} + \gamma_{\frac{\alpha+2}{\alpha}} (x-x_0)^{\frac{\alpha+2}{\alpha}} + \dots$$

Ist dagegen jener Zweig  $y-\eta(x) = 0$  der Diskriminantenkurve zugleich Lösung der Differentialgleichung, so bezeichnen wir ihn nach der in der Einleitung, S. 4 gegebenen Definition als eine **singuläre Lösung**. Es besteht für ihn neben den Gleichungen 3) noch die Gleichung:

$$7) \quad \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial x} + y' \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0$$

und in der obigen Reihenentwicklung 5) wird längs dieses Zweiges

$$8) \quad \zeta(x) = \frac{d\eta}{dx},$$

so daß die Entwicklung 5) übergeht in die Gleichung:

$$9) \quad \frac{d(y-\eta)}{dx} = g_{\frac{\alpha}{\alpha}} (y-\eta)^{\frac{\alpha}{\alpha}} + g_{\frac{\alpha+1}{\alpha}} (y-\eta)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} + \dots$$

<sup>1)</sup> Bulletin des sciences math., Bd. IV, 1873.

Diese Gleichung bildet den Ausgangspunkt für unsere Betrachtungen.

Vor allem sind die beiden von Hamburger aufgestellten Hauptfälle zu unterscheiden:

$$10) \quad \begin{cases} \text{Typus I:} & \alpha - z \geq 1 \\ \text{Typus II:} & \alpha - z < 1. \end{cases}$$

### Typus I.

Führen wir im ersten Falle durch die Substitution

$$11) \quad y - \eta(x) = u^\alpha$$

die Differentialgleichung 9) auf die Gleichung

$$12) \quad \frac{dx}{du} = \frac{\alpha \cdot u^{\alpha-z-1}}{\frac{g_z}{\alpha} + \frac{g_{z+1}}{\alpha} u + \frac{g_{z+2}}{\alpha} u^2 + \dots}$$

zurück, in welcher also der Exponent  $\alpha - z - 1$  eine positive ganze Zahl oder Null ist, so läßt sich deren Integral in Gestalt einer Potenzreihe nach steigenden Potenzen von  $u$ :

$$13) \quad x - x_0 = \beta_{\frac{\alpha-z}{\alpha}} u^{\alpha-z} + \beta_{\frac{\alpha-z+1}{\alpha}} u^{\alpha-z+1} + \dots$$

darstellen, wo

$$\beta_{\frac{\alpha-z}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\alpha-z} \cdot \left( \frac{1}{\frac{g_z}{\alpha}} \right)_{x=x_0},$$

und  $\frac{g_z}{\alpha}$  in unserem Bereich nicht identisch verschwindet. Es folgt also für die Umgebung einer allgemeinen Stelle  $x_0$  der Kurve  $y - \eta(x) = 0$  das Integral der Gleichung 9) in Form der Reihenentwicklung

$$14) \quad x - x_0 = \beta_{\frac{\alpha-z}{\alpha}} (y - \eta)^{\frac{\alpha-z}{\alpha}} + \beta_{\frac{\alpha-z+1}{\alpha}} u^{\frac{\alpha-z+1}{\alpha}} + \dots$$

oder ihrer Umkehrung:

$$15) \quad y - \eta(x) = \delta_{\frac{\alpha}{\alpha-z}} (x - x_0)^{\frac{\alpha}{\alpha-z}} + \delta_{\frac{\alpha+1}{\alpha-z}} (x - x_0)^{\frac{\alpha+1}{\alpha-z}} + \dots,$$

in welcher letzteren der Exponent der niedrigsten Potenz von  $(x - x_0)$  größer als Eins ist.

Typus I der singulären Lösungen ist also dadurch charakterisiert, daß der Zweig  $y - \eta(x) = 0$  der Diskriminantenkurve eine gemeinsame **Berührungskurve** für die durch Gleichung 15) gegebene Schar von partikulären Integralkurven darstellt.

Für den

Typus II:

$$\alpha - 1 < z$$

ergibt die Substitution

$$11) \quad y - \eta(x) = u^\alpha$$

in die Gleichung 9) eine Differentialgleichung

$$16) \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{\alpha} u^{\alpha-(\alpha-1)} \cdot \left( g_z + \frac{g_{z+1}}{\alpha} u + \frac{g_{z+2}}{\alpha} u^2 + \dots \right),$$

in welcher jetzt  $z - (\alpha - 1)$  eine von Null verschiedene, positive, ganze Zahl ist.

Diese Differentialgleichung aber besitzt nach einem bekannten, auf Briot-Bouquet zurückgehenden Satz außer  $u = 0$  kein für einen willkürlichen Wert  $x = x_0$  verschwindendes Integral.

$y - \eta(x) = 0$ , die singuläre Lösung, ist also zugleich das einzige, durch diesen Punkt der Diskriminantenkurve gehende Integral der Differentialgleichung 1). Es ist also

Typus II dadurch gekennzeichnet, daß der Zweig  $y - \eta(x) = 0$  der Diskriminantenkurve zugleich **singuläre Lösung** und **partikuläres Integral** ist.

Nehmen wir zunächst nur das Auftreten von Doppelwurzeln  $y'$  längs des Zweiges  $y - \eta(x) = 0$ , der Diskriminantenkurve an, so ist der einfachste Fall von Typus I charakterisiert durch  $\alpha = 2$ ,  $z = 1$ , also durch die für die partikulären Integralkurven gültige Entwicklung:

$$17) \quad \frac{d(y - \eta(x))}{dx} = g_{\frac{1}{2}} \cdot (y - \eta(x))^{\frac{1}{2}} + g_1 (y - \eta(x)) + g_{\frac{3}{2}} \cdot (y - \eta(x))^{\frac{3}{2}} + \dots,$$

wo  $g_{\frac{1}{2}}$  nicht identisch verschwindet.

Dagegen liegt der einfachste Fall von Typus II vor für  $\alpha = 2$ ,  $z = 2$ , also in der Entwicklung:

$$18) \quad \frac{d(y - \eta(x))}{dx} = g_1 (y - \eta(x)) + g_{\frac{3}{2}} (y - \eta(x))^{\frac{3}{2}} + \dots$$

Der Vergleich dieser beiden Gleichungen, von denen die erste mit der  $\frac{1}{2}$ ten, die zweite mit der  $\frac{3}{2}$ ten Potenz von  $y - \eta(x)$  beginnt, rechtfertigt es, den Typus I einer eigentlichen Umhüllungskurve der einfach berührenden Integralcurven (17) als den allgemeinen Fall des Auftretens von singulären Lösungen zu bezeichnen.

## § 2.

## Die singulären Lösungen vom Typus I (Berührungskurven).

Zunächst einige Bemerkungen über den Typus der Berührungskurve, die wir einer zusammenhängenden Darstellung des Ganzen wegen hier einschalten. Die Gleichung 15) für die partikulären Integralkurven

$$15) \quad y - \eta(x) = \delta_{\frac{\alpha}{\alpha-z}} (x - x_0)^{\frac{\alpha}{\alpha-z}} + \delta_{\frac{\alpha+1}{\alpha-z}} (x - x_0)^{\frac{\alpha+1}{\alpha-z}} + \dots$$

der Differentialgleichung

$$9) \quad \frac{d(y - \eta(x))}{dx} = g_{\frac{z}{\alpha}} (y - \eta)^{\frac{z}{\alpha}} + g_{\frac{z+1}{\alpha}} (y - \eta)^{\frac{z+1}{\alpha}} + \dots$$

läßt uns zunächst den Fall

$$19) \quad \alpha - z = 1$$

herausheben.

Die singuläre Lösung  $y - \eta(x) = 0$  wird von den Zweigen der partikulären Integralkurven in der Ordnung  $\alpha - 1$  berührt.

Wenn  $\alpha$  eine gerade Zahl ist, so wird nur die eine Seite der singulären Kurve von den Zweigen der Integralkurven überdeckt und zwar doppelt, und jene bildet eine eigentliche Umhüllungskurve für die Zweige der partikulären Integrale. Ist dagegen  $\alpha$  eine ungerade Zahl, so wird das Gebiet der  $xy$ -Ebene zu beiden Seiten der singulären Kurve je einfach überdeckt von den Zweigen der partikulären Integralkurven, welche jene berührend durchsetzen.

Die Figur 26 des folgenden § 9, welche die Krümmungskreise einer Parabel darstellt, mag diesen Fall der Berührung mit Durchsetzung veranschaulichen.

Ist

$$20) \quad \alpha - z > 1,$$

so haben die Integralkurven auf der Diskriminantenkurve singuläre Punkte (Ordnungssingularitäten).

Bezeichnet man, wie üblich, als Ordnung  $\lambda$  der Berührung zweier Kurven die Anzahl der für beide an der Berührungsstelle übereinstimmenden Differentialquotienten, hier also der für das partikuläre Integral und die singuläre Lösung für  $x = x_0$  sich ergebenden gemeinsamen Werte von  $\eta, \eta' \dots \eta^\lambda$ , so ist sie definiert als die größte in  $\frac{\alpha}{\alpha - \lambda}$  enthaltene ganze Zahl und falls  $\frac{\alpha}{\alpha - \lambda}$  selbst ganzzahlig ist, als die Zahl  $\frac{\alpha}{\alpha - \lambda} - 1$ . (Hamburger, a. a. O., S. 217.)

Der Unterschied der Überdeckung nur einer oder der beiden Seiten der singulären Kurve durch die berührenden Kurvenzweige, also die Unterscheidung umhüllend berührender und durchsetzend berührender singulärer Kurven hängt jetzt nicht mehr von der ungeraden oder geraden Ordnung  $\lambda$  ab, ergibt sich aber in einfachster Weise aus den bekannten Formen der singulären Punkte, wenn man in Gleichung 15) noch die Abbildung

$$Y = y - \eta(x), \quad X = x$$

auf eine Ebene  $X, Y$  einfügt, in welcher die singuläre Kurve durch die Gerade  $Y = 0$  gebildet wird.

Um nur die einfachsten Fälle zu charakterisieren, seien hier die Figuren eingeschaltet, welche den Anfangswerten

Fig. 1.

$$\alpha = 3, \quad \lambda = 1$$

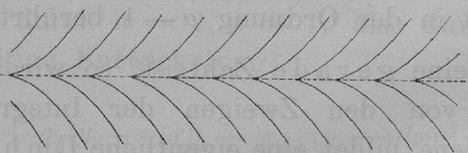


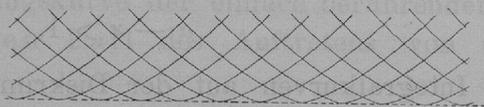
Fig. 2.

$$\alpha = 4, \quad \lambda = 2$$



Fig. 3.

$$\alpha = 4, \quad \lambda = 1$$



entsprechen, also den Entwicklungen:

$$y - \eta(x) = \delta_{\frac{1}{3}} (x - x_0)^{\frac{1}{3}} + \dots,$$

$$22) \quad y - \eta(x) = \delta_2 (x - x_0)^2 + \delta_{\frac{5}{3}} (x - x_0)^{\frac{5}{3}} + \dots$$

$$y - \eta(x) = \delta_{\frac{1}{4}} (x - x_0)^{\frac{1}{4}} + \dots$$

Die im allgemeinen irreduzible Gleichung

$$23) \quad (y - \eta(x))^2 = a_4 (x - x_0)^4 + a_5 (x - x_0)^5 + \dots$$

endlich kennzeichne den einfachsten Fall einer Selbstberührung je zweier Zweige der partikulären Integrale längs der singulären Kurve  $y = \eta(x)$ . Den beiden Zweigen entsprechen längs  $y - \eta(x) = 0$  die beiden Entwicklungen:

$$24) \quad y - \eta(x) = \pm \sqrt{a_4} (x - x_0)^2 \cdot (1 + \frac{a_5}{2a_4} (x - x_0) + \dots).$$

Ist  $a_4$  eine negative Zahl, so verläuft die singuläre Linie  $y = \eta(x)$  isoliert<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> In der von Scheffers bearbeiteten neuen dritten Auflage des Serret'schen Lehrbuches der Differential- und Integralrechnung findet sich auf Seite 109 für eine isoliert verlaufende singuläre Lösung einer Differentialgleichung das Beispiel

$$y'^2 + y^2 e^x = 0$$

angeführt. Hier handelt es sich aber nicht um eine singuläre Lösung, sondern die einzige der Differentialgleichung genügende reelle Kurve  $y = 0$  ist ein partikuläres Integral derselben. Die Differentialgleichung ist nämlich reduzibel und zerfällt in die beiden konjugierten Gleichungen

$$y' + iy \cdot e^{\frac{x}{2}} = 0 \quad \text{und} \quad y' - iy e^{\frac{x}{2}} = 0,$$

welche beide  $y = 0$  als partikuläre Lösung besitzen. Dieser Fall läßt sich natürlich auch allgemein auf die einfachste Weise herstellen. Wir setzen

$$\varphi(x, y, y') + i\psi(x, y, y') = 0,$$

wo  $\varphi$  und  $\psi$  reelle Funktionen von  $x, y, y'$  bedeuten. Dann hat diese Differentialgleichung isolierte reelle partikuläre Integrale, wenn die Differentialgleichungen

$$\varphi(x, y, y') = 0 \quad \text{und} \quad \psi(x, y, y') = 0$$

gemeinsame Integrale besitzen. Statt des Differentialausdruckes  $\psi(x, y, y')$  mag man auch ein partikuläres Integral der Differentialgleichung  $\varphi = 0$  setzen. Einfachstes Beispiel ist also etwa:

$$y' + iy = 0.$$

## § 3.

## Das Verhalten der Integralkurven in der Umgebung einer singulären Lösung vom Typus II (Grenzkurven).

Wir gehen aus von Gleichung 16)

$$16) \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{a} \cdot u^{z-(a-1)} \cdot \left( g_z + \frac{g_{z+1}}{a} u + \frac{g_{z+2}}{a} u^2 + \dots \right) = \frac{1}{a} u^{z-(a-1)} \cdot P(x, u),$$

wo, wie erwähnt,  $z-(a-1) \geq 1$  ist und die  $g_v$  Potenzreihen nach Potenzen von  $(x-a)$  bezeichnen. Die Doppelreihe  $P(x, u)$  konvergiere innerhalb eines vierfach ausgedehnten Gebietes, welches durch einen Kreis vom Radius  $r$  um den Punkt  $x=a$  in der Ebene der komplexen Zahlen  $x$  und durch einen Kreis vom Radius  $R$  um den Punkt  $u=0$  in der Ebene der komplexen Zahlen  $u$  gegeben ist. Ist nun weiter  $P(x, u)$  so beschaffen, daß für alle  $(x-a)$  und  $u$  des Bereiches

$$|x-a| \leq r - \varepsilon$$

25)

$$\text{und} \quad |u| \leq R - \varepsilon,$$

wie klein auch die positive Zahl  $\varepsilon$  genommen werde, der absolute Betrag von  $P(x, u)$  unter einer endlichen (von  $\varepsilon$  abhängigen) Schranke bleibt, also

$$26) \quad |P(x, u)| < G_\varepsilon$$

ist, so folgt aus bekannten Sätzen der Reihenlehre (vgl. einen Aufsatz von P. Stäckel „Über Potenzreihen von mehreren Veränderlichen“<sup>1)</sup>), daß die Reihe  $P(x, u)$  als Doppelreihe absolut konvergiert und somit konvergent bleibt, wenn man in den  $g_v$  alle Koeffizienten durch ihre Absolutwerte und ebenso  $(x-a)$  und  $u$  durch ihre absoluten Beträge ersetzt. Ersetzen wir aber in den  $g_v$  alle Koeffizienten durch ihre absoluten Beträge und weiter noch den Wert  $(x-a)$  überall durch  $(r-\varepsilon)$  — es mögen die so aus den  $g_v$  resultierenden Werte mit  $\bar{g}_v$  bezeichnet werden: Dann ist durchweg für alle  $x$  des Bereiches  $|x-a| \leq r - \varepsilon$

$$27) \quad |g_v| \leq \bar{g}_v$$

<sup>1)</sup> Jahresberichte der deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 15 (1906), S. 585.

und die Reihe

$$28) \quad \bar{P}(x, u) \equiv \frac{\bar{g}_x}{a} + \frac{\bar{g}_{x+1}}{a} u + \frac{\bar{g}_{x+2}}{a} u^2 + \dots$$

absolut konvergent für  $|u| \leq R - \varepsilon$ .

Jetzt vergleichen wir, und zwar mit Rücksicht auf unsere geometrische Frage im Gebiet der reellen Variablen  $x$  und  $u$ , die Differentialgleichung 16) für positive reelle Werte von  $u$  mit der Differentialgleichung

$$29) \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{a} \cdot u^{x-(a-1)} \cdot \left( \frac{\bar{g}_x}{a} + \frac{\bar{g}_{x+1}}{a} u + \frac{\bar{g}_{x+2}}{a} u^2 + \dots \right),$$

für negative reelle Werte von  $u$  mit der Differentialgleichung

$$30) \quad \frac{d(-u)}{dx} = \frac{1}{a} \cdot (-u)^{x-(a-1)} \left( \frac{\bar{g}_x}{a} - \frac{\bar{g}_{x+1}}{a} u + \frac{\bar{g}_{x+2}}{a} u^2 - \dots \right).$$

Diese Gleichungen definieren, in der Ebene der reellen Zahlen  $(x, u)$  gedeutet, an jeder Stelle  $x = x_0$ ,  $u = u_0$  einen Richtungswinkel gegen die  $x$ -Achse, welcher, wenn  $u$  von 0 bis  $|R - \varepsilon|$  zunimmt, stetig von 0 bis zu einem Höchstwerte ansteigt bzw. wenn  $u$  von 0 bis  $-|R - \varepsilon|$  abnimmt, stetig von 0 bis zu einem Minimalwert abfällt. Die durch die Gleichung 30) gegebenen, für negative  $u$  geltenden Richtungen sind dabei mit Bezug auf die  $x$ -Achse symmetrisch zu den durch die Gleichung 29) gegebenen Richtungen. Weiter aber sind diese Neigungen gegen die  $x$ -Achse an jeder Stelle größer, höchstens gleich den durch die Gleichung 16) gegebenen. Folgen wir also vom Punkte  $x = x_0$ ,  $u = u_0$  aus der durch diesen Punkt hindurchlaufenden Integralkurve von 16) mit wachsendem  $x$ , so liegt dieselbe von da ab innerhalb des Gültigkeitsbereiches dieser Gleichung stets der  $x$ -Achse näher als die durch eben diesen Punkt  $x_0, u_0$  gehende Integralkurve der Gleichung 29) bzw. 30).

Um nun noch zu zeigen, daß die zueinander symmetrischen Integralkurven der Gleichungen 29) und 30) sich der Integralkurve  $u = 0$  in unserem Bereich flacher und flacher werdend unbegrenzt annähern, wenn wir den Ausgangspunkt  $x = x_0$ ,  $u = u_0$  mit abnehmendem  $u_0$  an die  $x$ -Achse heranrücken, ziehen wir zwei weitere, aus 29) und 30) zu gewinnende, einfachste Differentialgleichungen zum Vergleiche heran, die gleichfalls wieder für positive und negative Werte von  $u$  je zur  $x$ -Achse symmetrische Richtungen definieren.

Wir ändern zunächst den Maßstab in der Richtung  $u$  so, daß der neue Konvergenzradius gleich 1 wird (eine Transformation, die natürlich nur nötig ist, falls nicht von vornherein  $(R - \varepsilon) \geq 1$  ist), und setzen zu dem Ende

$$31) \quad u = v \cdot (R - \varepsilon), \quad (R - \varepsilon) < 1.$$

Dann geht (29) über in

$$32) \quad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{a} \cdot (R - \varepsilon)^{z-a} \cdot v^{z-(a-1)} \cdot \left( \frac{g_z}{a} + \frac{g_{z+1}}{a} (R - \varepsilon) \cdot v + \frac{g_{z+2}}{a} (R - \varepsilon)^2 \cdot v^2 + \dots \right),$$

wo die Reihe rechts konvergiert von  $v$  gleich Null bis Eins einschließlich. Die Größen  $\bar{g}_v \cdot (R - \varepsilon)^r$  müssen daher sämtlich kleiner, höchstens gleich einem endlichen Werte  $\bar{m}$  sein. Ersetzen wir sie sämtlich durch ebendiesen Wert, so ergibt sich eine neue Differentialgleichung:

$$33) \quad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{a} \cdot (R - \varepsilon)^{z-a} \cdot v^{z-(a-1)} \cdot \frac{\bar{m}}{1-v},$$

die wir an Stelle von Gleichung 29) treten lassen, und ebenso folgt die (symmetrische) Gleichung

$$34) \quad \frac{d(-v)}{dx} = \frac{1}{a} (R - \varepsilon)^{z-a} \cdot (-v)^{z-(a-1)} \cdot \frac{\bar{m}}{1+v}$$

an Stelle von Gleichung 30).

Für die Vergleichung dieser beiden Differentialgleichungen mit der aus der ursprünglichen Gleichung 16) gewonnenen Gleichung

$$35) \quad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{a} \cdot (R - \varepsilon)^{z-a} \cdot v^{z-(a-1)} \cdot \left( \frac{g_z}{a} + \frac{g_{z+1}}{a} (R - \varepsilon) \cdot v + \frac{g_{z+2}}{a} (R - \varepsilon)^2 \cdot v^2 + \dots \right)$$

gilt dann ebenso wie oben für die Gleichungen 16), 29) und 30), daß die von einem Punkte  $x_0, u_0$  mit wachsenden  $x$  auslaufende Integralkurve der Gleichung 35) in unserem Konvergenzgebiete durchweg der  $x$ -Achse näher liegt als die von ebendiesem Punkte ausgehende, der Gleichung 33) bzw. 34) genügende Integralkurve.

Diese letzteren ergeben sich aber direkt durch Integration. Beschränken wir uns auf positive Werte von  $u$  bzw. von  $v$ , so ergibt die Integration der Gleichung 33), wenn wir zur Abkürzung

$$36) \quad \frac{1}{a} (R - \varepsilon)^{z-a} \cdot \bar{m} = M$$

setzen:

a) wenn  $z - a = 0$  ist, aus

$$37) \quad \frac{dv}{dx} = M \cdot \frac{v}{1-v}$$

das Integral:

$$38) \quad M \cdot (x + C) = \log v - v,$$

b) wenn  $z - \alpha = 1$  ist, aus

$$39) \quad \frac{dv}{dx} = M \cdot \frac{v^2}{1-v}$$

das Integral:

$$40) \quad M(x + C) = -\log v - \frac{1}{v};$$

und endlich,

c) wenn  $z - \alpha > 1$  ist, aus

$$41) \quad \frac{dv}{dx} = M \cdot \frac{v^{z-\alpha+1}}{1-v}$$

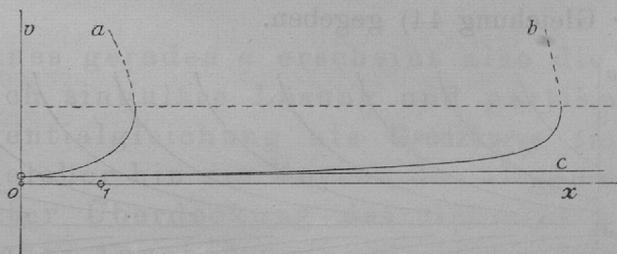
das Integral:

$$42) \quad M \cdot (x + C) = \frac{1}{z-\alpha-1} \cdot \frac{1}{v^{z-\alpha-1}} - \frac{1}{z-\alpha} \cdot \frac{1}{v^{z-\alpha}}.$$

Diese Integrale stellen im Intervall  $0 < v < 1$  obere Grenzen für den Verlauf der durch die Differentialgleichung 35) bestimmten Integrale dar und charakterisieren zugleich die stetige Annäherung der Integralkurven an die  $x$ -Achse als Grenze: Dadurch nämlich, daß wir  $v = v_0$  genügend klein wählen, können wir an jeder Stelle  $x = x_0$  erreichen, daß sich die Vergleichskurve und damit auch innerhalb des endlichen Gültigkeitsbereiches unserer Näherung die durch  $x_0, v_0$  laufende Integralkurve der Gleichung 35) vorgeschrieben nahe an der  $x$ -Achse hin erstreckt. Für das Intervall  $0 > v > -1$  tritt analog die Gleichung 34) ein, welche die zu den eben betrachteten symmetrischen Kurven in der  $(xv)$ -Ebene gibt.

In der nebenstehenden Figur 4 ist der Verlauf der drei den Fällen a, b und c entsprechenden Vergleichskurven, die durch die Gleichungen 38), 40) und 42) gegeben sind, dargestellt. Es ist dabei  $M = 1$  angenommen und die Gleichung 42) für den Fall  $z - \alpha = 2$  aufgetragen. Die Konstante  $C$  ist dabei jeweils so bestimmt, daß die drei Vergleichskurven durch den Punkt  $x_0 = 0, v_0 = 0,1$  hindurchgehen.

Fig. 4.



In Figur 5 sind die durch die Punkte  $x_0 = 0$ ,  $v_0 = 0,1$  und  $x_0 = 0$ ,  $v_0 = -0,1$  laufenden Integralkurven

$$43) \quad x - x_0 = (\log v - \log v_0) - (\log(1+v) - \log(1+v_0))$$

der Differentialgleichung

$$44) \quad \frac{dv}{dx} = v + v^2$$

dargestellt und daneben, um das Verhalten der Näherung an einem einfachsten Beispiel zu zeigen, die entsprechenden Vergleichskurven (Fall a,  $x - \alpha = 0$ )

$$38 a) \quad x - x_0 = (\log v - \log v_0) - (v - v_0)$$

(durch  $x_0 = 0$ ,  $v_0 = +0,1$ ) bzw.

$$38 b) \quad x - x_0 = (\log v - \log v_0) + (v - v_0)$$

(durch  $x_0 = 0$ ,  $v_0 = -0,1$ ), die den Differentialgleichungen

$$37 a) \quad \frac{dv}{dx} = \frac{v}{1-v}$$

und

$$37 b) \quad \frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+v}$$

entsprechen und für jene beiden eine obere bzw. untere Grenze bilden.

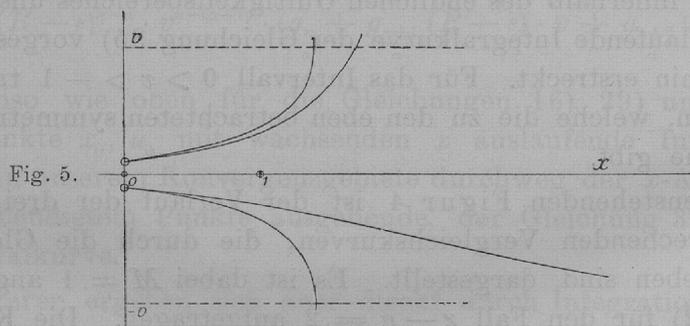


Fig. 5.

In Figur 6 endlich ist das charakteristische Bild für die Annäherung der Gesamtheit der einer Differentialgleichung 32) (und allgemeiner 35)) entsprechenden Integralkurven an die  $x$ -Achse durch die Darstellung einer Serie von Integralen der Gleichung 44) gegeben.

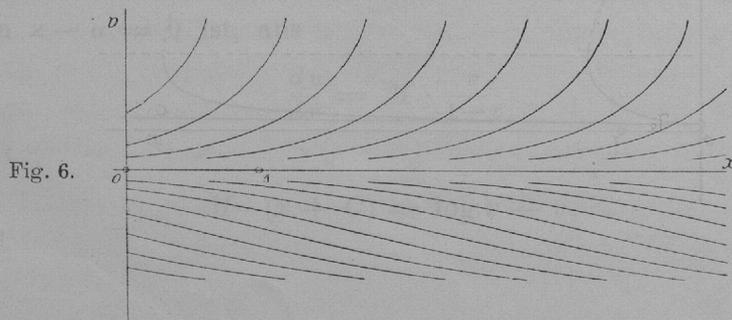


Fig. 6.

Die gleiche Art der Annäherung der Integralkurven an die  $x$ -Achse gilt nunmehr auch, wenn wir durch die Substitution

$$31) \quad u = v \cdot (R - \varepsilon)$$

von 35) auf die durch die Differentialgleichung 16)

$$16) \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{\alpha} u^{\alpha-1} \cdot (g_{\frac{x}{\alpha}} + g_{\frac{x+1}{\alpha}} u + g_{\frac{x+2}{\alpha}} u^2 + \dots)$$

in der  $(xu)$ -Ebene definierten Kurven zurückgehen. Von diesen aber kommen wir zu dem System der durch die ursprüngliche Differentialgleichung 9)

$$9) \quad \frac{d(y-\eta)}{dx} = g_{\frac{x}{\alpha}} (y-\eta)^{\frac{x}{\alpha}} + g_{\frac{x+1}{\alpha}} (y-\eta)^{\frac{x+1}{\alpha}} + g_{\frac{x+2}{\alpha}} (y-\eta)^{\frac{x+2}{\alpha}} + \dots$$

gegebenen Kurven in der  $(xy)$ -Ebene durch die Abbildung der  $(xu)$ -Ebene in die  $(xy)$ -Ebene, welche durch die Gleichung

$$11) \quad y - \eta = u^{\alpha}$$

vermittelt wird. Für diese Abbildung haben wir die beiden Fälle  $\alpha$  gerade und  $\alpha$  ungerade zu unterscheiden:

Im ersteren Falle erscheinen für den Gültigkeitsbereich unserer Entwicklungen die beiden Teile der  $(xu)$ -Ebene längs der  $x$ -Achse für positive und negative Werte von  $u$  auf die eine Seite  $y - \eta(x) > 0$  der Kurve  $y - \eta(x) = 0$  in der  $(xy)$ -Ebene abgebildet und ist dieses Gebiet von den Bildkurven von 16) doppelt überdeckt; wie umgekehrt den positiven reellen Werten der Funktion  $y - \eta(x)$  zwei reelle Wurzeln  $u$  der Gleichung 11) entsprechen.

Im zweiten Falle wird für den Gültigkeitsbereich die positive Halbebene  $(x, u)$  (für  $u > 0$ ) auf das Gebiet  $y - \eta(x) > 0$ , die negative Halbebene  $u < 0$  auf das Gebiet  $y - \eta(x) < 0$  abgebildet und beide Gebiete je von den Bildkurven von 16) einfach überdeckt, wie umgekehrt die Gleichung 11) für jeden reellen Wert der Funktion  $y - \eta(x)$  eine und nur eine reelle Wurzel  $u$  besitzt.

Im Falle eines geraden  $\alpha$  erscheint also die Kurve  $y - \eta(x) = 0$  als zugleich singuläre Lösung und partikuläres Integral unserer Differentialgleichung als **Grenzkurve** im eigentlichen Sinne, bis zu welcher hin die Kurven des allgemeinen Integrals sich in doppelter Überdeckung des Gebietes  $y - \eta(x) > 0$  und mit asymptotischer Annäherung an die Grenzkurve (wenn es ge-

stattet ist, diesen Ausdruck den obigen Erläuterungen entsprechend zu gebrauchen) erstrecken.

Im Falle eines ungeraden  $\alpha$  bildet die Kurve  $y - \eta(x) = 0$  nicht eigentlich eine Grenzkurve im gewöhnlichen Sinne des Wortes, hat aber gleichwohl wegen des Zusammenrückens imaginärer Gebiete der Integralkurven die Bedeutung einer zugleich singulären und partikulären Lösung.

Die beiden Fälle mögen als **Grenzkurven erster Art** (eigentliche Grenzkurven) und **Grenzkurven zweiter Art** unterschieden sein.

### Beispiele.

Wir fügen zur Veranschaulichung noch einige graphische Darstellungen an, für welche wir die möglichst einfachen Fälle wählen.

Setzen wir in Gleichung 44) (für  $v = u$ )

$$44) \quad \frac{du}{dx} = u + u^2$$

einerseits

$$45) \quad u = y^{\frac{1}{2}},$$

andererseits

$$46) \quad u = y^{\frac{1}{3}},$$

so ergeben sich in den Differentialgleichungen

$$47) \quad \frac{dy}{dx} = 2y + 2y^{\frac{3}{2}}$$

beziehungsweise

$$48) \quad \frac{dy}{dx} = 3y + 3y^{\frac{4}{3}}$$

die einfachsten Beispiele von Differentialgleichungen vom Typus II, für welche längs der  $x$ -Achse zwei beziehungsweise drei Zweige der Funktion  $y'$  zusammenhängen, also von Grenzkurven erster und zweiter Art.

Die Figuren 7 und 8, welche durch Vermittlung der in den Gleichungen 45) und 46) vorliegenden Abbildung der  $(x, u)$ -Ebene auf die  $(x, y)$ -Ebene aus Figur 6 erhalten sind, stellen diese beiden Fälle dar.

Fig. 7.

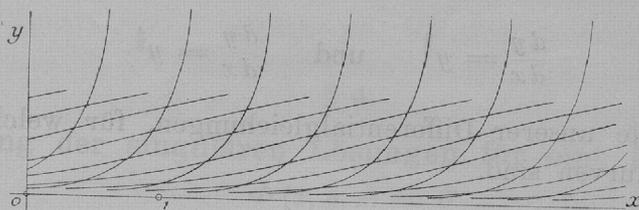
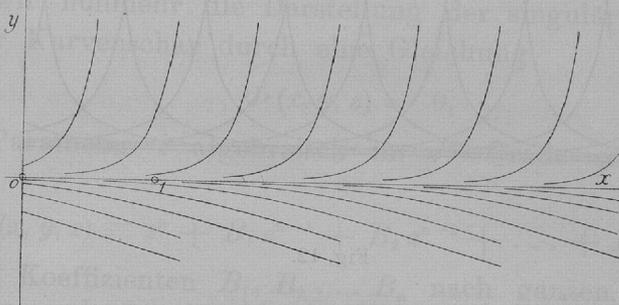


Fig. 8.



Wählt man aber statt dieser Abbildungen die nächst einfachen

49)

$$u = (y - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

beziehungsweise

50)

$$u = (y - x^2)^{\frac{1}{3}},$$

so ergeben sich aus Fig. 6 die gestaltlich allgemeineren Figuren Fig. 9 und 10, mit  $y - x^2 = 0$  als zugleich singularer und partikulärer Lösung.

Fig. 9.

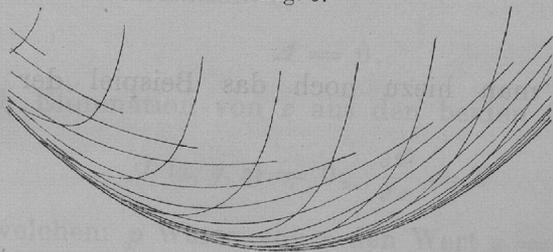
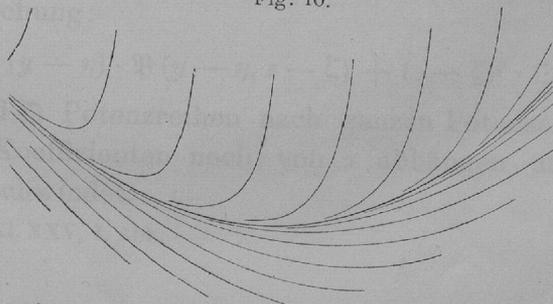


Fig. 10.



Die Figuren 11 und 12 endlich beziehen sich auf die Differentialgleichungen

$$51) \quad \frac{dy}{dx} = y^{\frac{3}{2}} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = y^{\frac{4}{3}}$$

als einfachste Fälle unserer Differentialgleichungen, für welche die Integrale algebraische Kurven sind.

Fig. 11.

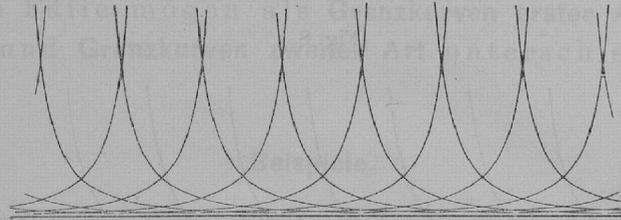
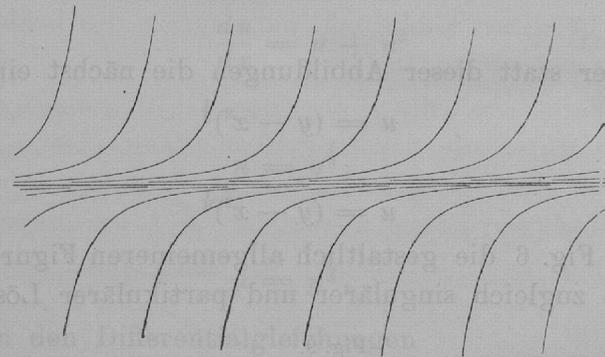


Fig. 12.



Übrigens sehe man hierzu noch das Beispiel der Kurven zweiten Grades in § 6, S. 32.

## § 4.

Darstellung der singulären Lösungen für eine Kurvenschar

$$\Phi(x, y, z) = 0$$

aus den Teilfaktoren der Diskriminante  $\Delta$  dieser Gleichung.

Knüpfen wir nunmehr die Darstellung der singulären Lösungen an die Darstellung der Kurvenschar durch eine Gleichung

$$\Phi(x, y, z) = 0,$$

welche einen Parameter  $z$  algebraisch im  $n^{\text{ten}}$  Grade enthält, also an eine Gleichung:

$$52) \quad \Phi(x, y, z) \equiv z^n + B_1 z^{n-1} + B_2 z^{n-2} + \dots + B_n = 0,$$

in welcher die Koeffizienten  $B_1, B_2 \dots B_n$  nach ganzen, positiven Potenzen von  $(x-a)$  und  $(y-b)$  fortschreitende, in der Umgebung des Wertepaares  $x = a, y = b$  konvergente Reihen bezeichnen.

Hamburger hat a. a. O. (S. 227 u. ff.) gezeigt, daß sich in dieser Form mit  $z$  als Integrationskonstante das allgemeine Integral unserer Differentialgleichung 1) für die Umgebung eines Punktes  $(a, b)$  darstellen läßt.

Sei nun

$$53) \quad y - \eta(x) = 0$$

ein Zweig der Diskriminantenkurve

$$54) \quad \Delta = 0,$$

welche wir durch Elimination von  $z$  aus den beiden Gleichungen

$$55) \quad \Phi(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$$

erhalten und in welchem  $p$  Werte von  $z$  den Wert  $z = \zeta(x)$  annehmen mögen, so gilt, wenn wir die Funktion  $\Phi$  nach Potenzen von  $y - \eta(x), z - \zeta(x)$  entwickeln, die Gleichung:

$$56) \quad \Phi(x, y, z) \equiv (y - \eta) \cdot \mathfrak{P}(y - \eta, z - \zeta) + (z - \zeta)^p \cdot \mathfrak{Q}(y - \eta, z - \zeta) = 0,$$

in welcher  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{Q}$  Potenzreihen nach ganzen Potenzen von  $y - \eta, z - \zeta$  bezeichnen, deren Koeffizienten noch von  $x$  abhängen und wobei  $\mathfrak{Q}$  für  $y - \eta, z - \zeta$  nicht verschwindet.

Schließen wir zunächst den Fall aus, daß sich die Funktion  $\zeta(x)$  längs  $y = \eta(x)$  auf eine Konstante reduziert, so ergibt sich (vgl. Hamburger, a. a. O.) für je  $\alpha$  Zweige der partikulären Integralkurven ( $\alpha \leq p$ ) eine Entwicklung von  $z - \zeta(x)$  nach Potenzen von  $y - \eta(x)$  in der Form

$$57) \quad z - \zeta(x) = \gamma_{\frac{z}{\alpha}} (y - \eta)^{\frac{z}{\alpha}} + \gamma_{\frac{z+1}{\alpha}} (y - \eta)^{\frac{z+1}{\alpha}} + \dots$$

Ist dann

$$58) \quad \frac{z}{\alpha} \geq 1,$$

so ist der Zweig  $y = \eta(x)$  der Diskriminantenkurve kein Integral der Differentialgleichung, sondern Ort von singulären Punkten der partikulären Integralkurven (für welche  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$  und  $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$  verschwinden), deren einzelne Zweige die Kurve  $y = \eta(x)$  nicht berühren.

#### Typus I der singulären Lösungen.

Für

$$59) \quad \frac{z}{\alpha} < 1$$

berühren die Zweige der partikulären Integralkurven den Zweig der Diskriminantenkurve und dieser ist daher eine singuläre Lösung vom Typus I.

Dabei tritt als einfachster Fall hervor, daß in Gleichung 56) mit  $y = \eta(x)$ ,  $z = \zeta(x)$  die Potenzreihe  $\mathfrak{B}$  nicht zugleich verschwindet. Es haben dann die partikulären Integrale  $\Phi = 0$  im allgemeinen längs jenes Zweiges der Diskriminantenkurve keine singulären Punkte, ihre Zweige gehen vielmehr mit ihr eine Berührung von der Ordnung  $p-1$  ein.

Dabei verschwinden längs jenes Zweiges der Diskriminantenkurve mit  $\Phi = 0$  einmal die Ableitungen

$$60) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \dots, \frac{\partial^{p-1} \Phi}{\partial z^{p-1}}$$

und ferner die sämtlichen Unterdeterminanten der  $p-1$ -reihigen Matrix:

$$61) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \cdot \partial z} & \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \cdot \partial z^2} & \dots & \frac{\partial^{p-1} \Phi}{\partial x \cdot \partial z^{p-2}} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \cdot \partial z} & \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \cdot \partial z^2} & \dots & \frac{\partial^{p-1} \Phi}{\partial y \cdot \partial z^{p-2}} \end{vmatrix}$$

welche sich für  $y = \eta(x)$ ,  $z = \zeta(x)$  auf

$$62) \quad \begin{vmatrix} -\frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \bar{\mathfrak{P}} & -\frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{\mathfrak{P}}}{\partial z} & -\frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\mathfrak{P}}}{\partial z^2} & \dots & -\frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial^{p-2} \bar{\mathfrak{P}}}{\partial z^{p-2}} \\ \bar{\mathfrak{P}} & \frac{\partial \bar{\mathfrak{P}}}{\partial z} & \frac{\partial^2 \bar{\mathfrak{P}}}{\partial z^2} & \dots & \frac{\partial^{p-2} \bar{\mathfrak{P}}}{\partial z^{p-2}} \end{vmatrix}$$

reduziert.

Die erste nicht verschwindende Determinante

$$63) \quad H_p = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial^p \Phi}{\partial x \cdot \partial z^{p-1}} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial^p \Phi}{\partial y \cdot \partial z^{p-1}} \end{vmatrix}$$

erhält dabei den Wert

$$64) \quad \bar{H}_p = \begin{vmatrix} -\frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \bar{\mathfrak{P}} & -\frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial^{p-1} \bar{\mathfrak{P}}}{\partial z^{p-1}} & -p! \frac{\partial \zeta}{\partial x} \cdot \bar{\Omega} \\ \bar{\mathfrak{P}} & \frac{\partial^{p-1} \bar{\mathfrak{P}}}{\partial z^{p-1}} & \bar{\Omega} \end{vmatrix} = p! \frac{\partial \zeta}{\partial x} \bar{\mathfrak{P}} \cdot \bar{\Omega}.$$

Der Fall der Umhüllungskurve mit einfacher Berührung ergibt sich für  $p = 2$ . Hier ist

$$65) \quad \Phi(x, y, z) \equiv (y - \eta) \cdot \bar{\mathfrak{P}} + (z - \zeta)^2 \cdot \bar{\Omega} = 0,$$

wo  $\bar{\mathfrak{P}}$  und  $\bar{\Omega}$  für  $y = \eta$ ,  $z = \zeta$  nicht verschwinden. Es gelten daher in diesem Falle, wie bekannt, längs des Zweiges der Diskriminantenkurve die Beziehungen<sup>1)</sup>:

$$66) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad H_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \cdot \partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \cdot \partial z} \end{vmatrix} = 2 \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} \bar{\mathfrak{P}} \cdot \bar{\Omega} \neq 0.$$

Im Falle einer singulären Kurve mit Berührung zweiter Ordnung ist  $p = 3$  und es bestehen längs  $y = \eta(x)$ ,  $z = \zeta(x)$  die Gleichungen:

$$67) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{und} \quad H_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \cdot \partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \cdot \partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

<sup>1)</sup> Vgl. Peano in den schon genannten „Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale“, cap. VII, § 2.

Ist dagegen der Zweig  $y = \eta(x)$  der Diskriminantenkurve der Ort singulärer Punkte der Kurvenschar, so verschwindet in der Entwicklung 56) längs  $y = \eta(x)$ ,  $z = \zeta(x)$  die Potenzreihe  $\mathfrak{P}$  und man hat damit zugleich auch

$$68) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0,$$

wo dann die Untersuchung der höheren Differentialquotienten die singulären Vorkommnisse im einzelnen ergibt.

### Typus II der singulären Lösungen.

Ist längs des Zweiges  $y = \eta(x)$  der Diskriminantenkurve  $z = \zeta(x)$  konstant gleich  $z_0$ , so ist  $y = \eta(x)$  zugleich partikuläres Integral der Differentialgleichung und es liegt Typus II einer singulären Lösung vor.

Für die Entwicklung von  $\Phi$  gilt jetzt die der Gleichung 56) analoge Gleichung

$$69) \quad \Phi(x, y, z) \equiv (y - \eta) \cdot \mathfrak{P}(y - \eta, z - z_0) + (z - z_0)^p \cdot \Omega(y - \eta, z - z_0) = 0,$$

welche die der singulären Lösung  $z = z_0$  benachbarten Kurven darstellt und wobei (wie oben) jedenfalls  $\Omega$  für  $y = \eta$ ,  $z = z_0$  nicht verschwindet. Dabei verschwinden analog wie im allgemeinen Fall auch hier die Ableitungen  $\frac{\partial^x \Phi}{\partial z^x}$  bis zur  $(p-1)$ ten und erweitert sich wegen  $\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0$  die in 61) gegebene Matrix der verschwindenden Determinanten noch um eine Vertikale.

Die erste im allgemeinen nicht verschwindende Determinante ist

$$70) \quad H_{p+1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial^{p+1} \Phi}{\partial x \cdot \partial z^p} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial^{p+1} \Phi}{\partial y \cdot \partial z^p} \end{vmatrix}.$$

Sie erhält längs  $y = \eta(x)$ ,  $z = z_0$  den Wert

$$71) \quad \bar{H}_{p+1} = -p! \mathfrak{P} \cdot \left( \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right).$$

Im einfachsten Falle von Typus II für  $p = 2$

$$72) \quad \Phi(x, y, z) \equiv (y - \eta) \cdot \mathfrak{P} + (z - z_0)^2 \cdot \Omega = 0$$

ergeben sich also längs  $y = \eta$ ,  $z = z_0$  die Bedingungsgleichungen:

$$73) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad H_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Im allgemeinen verschwinden dabei auch hier  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$  und  $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$  längs unserer singulären Kurve nicht. Dies tritt vielmehr wieder nur ein, wenn dort noch  $\mathfrak{F}(y - \eta, z - z_0)$  verschwindet. Dabei handelt es sich aber nicht um einen Ort singulärer Punkte wie im Falle des Typus I, sondern die Lösung  $y = \eta(x)$  tritt in diesem Falle nur, wie sogleich noch näher gezeigt werden soll, im gewissen Sinne mehrfach zählend als zugleich singuläre und partikuläre Lösung auf.

### § 5.

#### Geometrische Deutung auf der Fläche $\Phi(x, y, z) = 0$ .

Die verschiedenen Fälle der singulären Lösungen von Typus I und II (wie auch das Auftreten eines Ortes singulärer Punkte im Kurvensystem) lassen sich besonders anschaulich überblicken, wenn wir in der bekannten Weise die Gleichung

$$\Phi(x, y, z) = 0$$

in einem rechtwinkligen Koordinatensystem  $x, y, z$  als Fläche über der  $(x, y)$ -Ebene deuten. Die Kurvenschar (der partikulären Integrale) wird von der Projektion der Horizontalschnitte  $z = \text{const.}$  dieser Fläche auf die  $(x, y)$ -Ebene gebildet.

Die Diskriminantengleichung

$$54) \quad \Delta = 0$$

bezeichnet dann „im allgemeinen“ einen Zylinder, welcher die Fläche  $\Phi = 0$  längs des in der Richtung der  $z$ -Achse genommenen „Umrisses“ berührt. Die Umrißkurve auf  $\Phi = 0$  wird von den Horizontalschnitten  $z = \text{const.}$  in den Punkten  $y = \eta(x)$ ,  $z = \zeta(x)$  geschnitten, in der Projektion einfach oder von höherer Ordnung berührt (Typus I der singulären Lösung). Ist aber längs eines Zweiges  $y = \eta(x)$  der Umrißkurve überall  $z = z_0$ , so bildet dieser Zweig eine zugleich partikuläre und singuläre Lösung (Typus II).

Weiter liegen auf  $\Delta = 0$  alle singulären Linien der Fläche, längs welcher zugleich die Gleichungen

$$74) \quad \Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$$

erfüllt sind. Nach unseren Voraussetzungen über  $\Phi$  erscheint hier als die zunächst sich darbietende Singularität die Doppelkurve, dann die Rückkehrkurve. Solange längs eines solchen Zweiges  $y = \eta(x)$  der Diskriminantenkurve, der im allgemeinen keine singuläre Lösung ist, sich  $z = \zeta(x)$  nicht auf eine Konstante reduziert, besitzen die Horizontalschnitte der Fläche, also die partikulären Integrale, Doppel- bzw. Rückkehrpunkte. Dabei ist für den Vergleich des allgemeinen Integrals  $\Phi = 0$  und der Differentialgleichung  $F = 0$  noch zu beachten, daß diese Doppelpunkte der partikulären Integralkurven erst bei Betrachtung des Gesamtverlaufes der einzelnen Kurven in die Erscheinung treten, also wohl aus der Diskriminante  $\Delta = 0$  von  $\Phi$ , nicht aber aus der Diskriminante  $D = 0$  von  $F$  erhalten werden. Dagegen bezieht sich das Auftreten von Rückkehrpunkten nicht bloß auf den Gesamtverlauf der einzelnen Integralkurven, sondern bildet eine differentielle Eigenschaft derselben, so daß die Kurve der Rückkehrpunkte sowohl aus  $\Delta = 0$  wie auch aus  $D = 0$  erhalten wird<sup>1)</sup>.

Wir betrachten in unserer räumlichen Deutung noch den vorhin erwähnten einfachsten Fall von Typus II (für  $p = 2$ ), also die Gleichung:

$$72) \quad \Phi(x, y, z) = (y - \eta) \cdot \mathfrak{P} + (z - z_0)^2 \cdot \mathfrak{Q},$$

wo

$$\mathfrak{P} = p_0 + p_1(y - \eta) + p_2(z - z_0) + \dots$$

$$\mathfrak{Q} = q_0 + q_1(y - \eta) + q_2(z - z_0) + \dots$$

und die  $p, q$  Potenzreihen nach  $(x - x_0)$  bedeuten.

<sup>1)</sup> Auch umgekehrt können bekanntlich Eigenschaften des durch  $F = 0$  gegebenen Feldes in Richtungen, welche im Verschwinden der zugehörigen Diskriminante  $D$  ihren Ausdruck finden, verloren gehen bei Betrachtung des Verlaufes der einzelnen partikulären Integralkurven in  $\Phi = 0$ . So verschwindet, wenn sich längs einer Kurve  $y = \eta(x)$  getrennte Zweige der Integralkurven  $\Phi = 0$  berühren, wohl die Diskriminante  $D$ , nicht aber auch die Diskriminante  $\Delta$ . Darboux ist am Schlusse seiner Abhandlung von 1873 nur auf den „allgemeinen“ Fall der Beziehung der Determinanten  $D$  und  $\Delta$  zu einander eingegangen, während Cayley (insbesondere in den Arbeiten „On the theory of the singular solutions of differential equations“ im Messenger of Mathem. vom Jahre 1872 und 77) und Casorati (vgl. die in Darboux's Bulletin des sciences math. vom Jahre 1879 und 81 abgedruckten Aufsätze Casorati's aus den Jahren 1874–81) im besonderen die Bedeutung der einzelnen in verschiedener Multiplizität auftretenden Faktoren der Diskriminanten  $D$  und  $\Delta$  untersucht haben. Für die umfangreiche anschließende Literatur vergleiche man den schon genannten Aufsatz von Rothenberg. Es erscheinen bei diesen Formulierungen neben den eigentlichen Enveloppen auch die zugleich singulären und partikulären Lösungen als gemeinsame Faktoren von  $D$  und  $\Delta$ , ohne daß auf sie genauer eingegangen würde. Vielmehr ist das Hauptinteresse aller dieser speziellen Untersuchungen auf die Charakterisierung der Örter singulärer Punkte (Doppelpunkte, Spitzen, Berührungspunkte getrennter Integralkurven u. s. f.) gerichtet.

Ist  $p_0$  längs  $y = \eta(x)$  von Null verschieden, so liegt der allgemeine Typus II der zugleich singulären und partikulären Lösungen vor. Ist dagegen längs  $y = \eta(x)$ ,  $z = z_0$  für alle Werte  $x_0$  die Reihe

$$75) \quad p_0 = 0,$$

so bildet diese Kurve eine horizontale Doppelkurve, ist noch überall

$$76) \quad p_2^2 - 4p_1q_0 = 0,$$

eine horizontale Rückkehrkurve der Fläche  $\Phi = 0$ .

Beim allgemeinen Typus II nähert sich, in der  $xy$ -Ebene betrachtet, ein Zweig eines partikulären Integrals von einer Seite her der singulären Kurve, mit welcher er für  $z = z_0$  zusammenfällt, um dann sich nach derselben Seite hin von ihm wieder loszulösen, so daß die singuläre Linie als Grenzlage eines Zweiges der partikulären Integrale erscheint. Im Falle der Doppelkurve und der Rückkehrkurve dagegen erscheint die singuläre Linie als Grenzlage zweier Zweige der partikulären Integrale. Im Falle der Doppelkurve rücken, wenn wir den Übergang auf der Fläche  $\Phi = 0$  verfolgen, zwei (auf den beiden in der Doppelkurve sich durchsetzenden Flächenmänteln verlaufende) zusammengehörige Kurvenzweige in jenen singulären Zweig zusammen, um sich nachher wieder zu trennen. Es ist also in der  $xy$ -Ebene das Gebiet längs der singulären Linie zu beiden Seiten doppelt von den Nachbarkurven überdeckt. (Einer isolierten Doppelkurve  $y = \eta(x)$ ,  $z = z_0$  von  $\Phi = 0$  entspricht natürlich eine isolierte singuläre Lösung.) Im Falle der Rückkehrkurve nähern sich mit änderndem Parameter  $z$  zwei Zweige eines partikulären Integrals von derselben Seite her der singulären Kurve, um dort mit ihr zusammenzufallen und dann imaginär zu werden. Das Bild in der  $xy$ -Ebene ist also in diesem letzteren Falle nicht wesentlich von dem des allgemeinen Falles verschieden. Die folgenden Figuren 13, 14 und 15 zeigen schematisch den Übergang in den drei Fällen auf der Fläche  $\Phi = 0$ . Die anschließenden drei Beispiele geben genauer die Übergänge für die Kurvensysteme in der  $xy$ -Ebene.

Fig. 13.

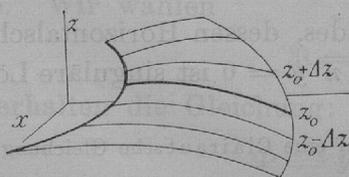


Fig. 14.

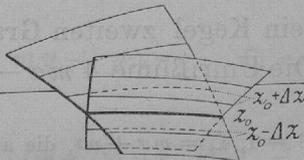
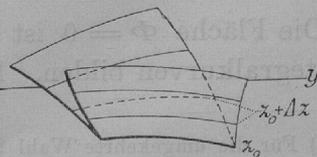


Fig. 15.



## § 6.

## Beispiele.

## 1. Beispiel für den allgemeinen Typus II.

Im Anschluß an die in § 3 gegebene Reihenentwicklung für die Differentialgleichung  $F = 0$  ergeben sich unmittelbar Beispiele für den Typus II, für welche die zugehörige Differentialgleichung möglichst einfach gestaltet ist — so die dort besprochenen Gleichungen 47), 49) und 51). Für die einfachsten Fälle der Gleichung  $\Phi = 0$ , welche diesen Typus darstellen, greifen wir auf die Gleichung 72) zurück:

$$72) \quad \Phi(x, y, z) \equiv (y - \eta) \cdot \mathfrak{P} + (z - z_0)^2 \cdot \mathfrak{Q} = 0.$$

Wir setzen zunächst  $\eta(x) \equiv 0$ , so daß also die  $x$ -Achse zugleich singuläre und partikuläre Lösung wird. Ferner setzen wir  $z_0 = 0$ . Wählen wir nun weiter die Funktionen  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{Q}$  auf die einfachste Weise so, daß sie für  $y = 0$ ,  $z = z_0 = 0$  nicht verschwinden, also etwa

$$77) \quad \mathfrak{P} = mx + nz, \quad \mathfrak{Q} = 1^1),$$

so ergibt sich als einfachstes Beispiel für eine Kurvenschar, welche den allgemeinen Typus II darstellt, die Gleichung

$$78) \quad \Phi \equiv y \cdot (mx + nz) + z^2 = 0.$$

Die zugehörige Differentialgleichung lautet:

$$79) \quad F \equiv mx^2 \cdot y'^2 + y(2mx - n^2y) \cdot y' + my^2 = 0.$$

Die Diskriminanten sind (wir sehen hier wie in den folgenden Beispielen von Zahlenfaktoren ab):

$$80) \quad A = y \cdot (4mx - n^2y)$$

und

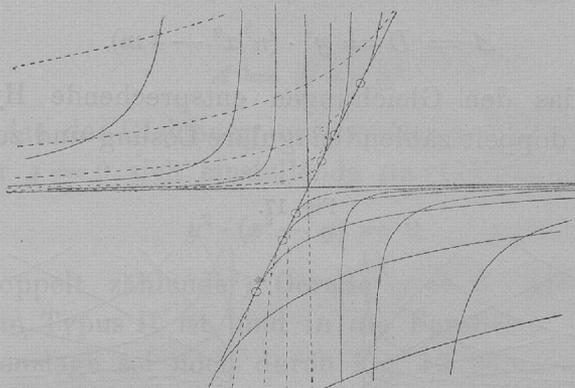
$$D = y^3 \cdot (4mx - n^2y).$$

Die Fläche  $\Phi = 0$  ist ein Kegel zweiten Grades, dessen Horizontalschnitte die Integralkurven bilden. Die Umrißlinie  $4mx - n^2y = 0$  ist singuläre Lösung

<sup>1)</sup> Für die umgekehrte Wahl  $\mathfrak{P} = 1$ ,  $\mathfrak{Q} = mx + nz$ , die auf eine Clairautsche Gleichung führt, vgl. § 8, Formel 104.

vom Typus I (Envelope), dagegen die Umrißlinie  $y = 0$  (für  $z = 0$ ) zugleich singuläre und partikuläre Lösung vom allgemeinen Typus II. (Vgl. Fig. 16.)

Fig. 16.



Man erkennt an diesem Beispiel am einfachsten, daß es nicht richtig ist, von einer solchen allgemeinen zugleich singulären und partikulären Lösung als von einem „mehrfach zählenden“ partikulären Integral zu sprechen. Die Achse  $y = 0$  erscheint als Grenzlage der Integralkurven, zählt aber jedenfalls nur einfach in der Kurvenschar (der Schnitt  $z = 0$  des Kegels ist das Geradenpaar  $x \cdot y = 0$ ). Davon ist aber zu unterscheiden, daß in  $y = 0$  jedesmal zwei durch die Differentialgleichung gegebene Richtungen zusammenfallen.

Die Reihenentwicklung für die Differentialgleichung in der Umgebung eines Punktes  $y = 0$ ,  $x = x_0$  der singulären Linie ergibt sich in der Form

$$81) \quad \frac{dy}{dx} = \left[ -\frac{1}{x_0} + \frac{x - x_0}{x_0^2} + \dots \right] y + \left[ \frac{n}{\sqrt{m}} \cdot \frac{1}{(-x_0)^{\frac{3}{2}}} + \dots \right] y^{\frac{3}{2}} + \dots$$

entsprechend der in Gleichung 18) allgemein aufgestellten Formel.

## 2. Beispiel für den Typus II mit horizontaler Doppelkurve auf $\Phi = 0$ .

Hier ist für  $y = r_1(x) = 0$ ,  $z = z_0 = 0$  die Gleichung 74)  $p_0 = 0$  zu erfüllen. Wir wählen

$$82) \quad \mathfrak{P} = my + nx \cdot z, \quad \mathfrak{Q} = 1$$

und erhalten die Gleichung:

$$\Phi = y \cdot (my + nx \cdot z) + z^2 = 0,$$

und als zugehörige Differentialgleichung

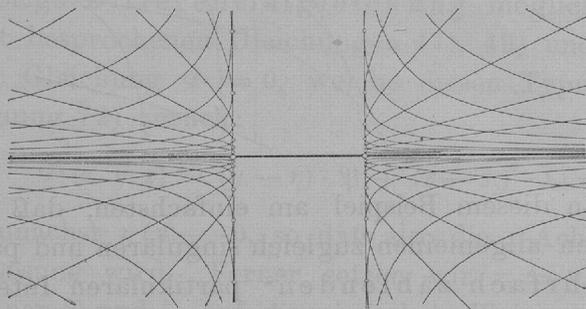
$$84) \quad (n^2 x^2 - 4m) y'^2 - n^2 y^2 = 0.$$

Ferner ist (bis auf Zahlenfaktoren)

$$85) \quad \Delta = D = y^2 \cdot (n^2 x^2 - 4m).$$

Fig. 17 stellt das den Gleichungen entsprechende Hyperbelsystem dar. Die Achse  $y = 0$  ist doppelt zählend singuläre Lösung und zugleich partikuläres Integral.

Fig. 17.



Für die der Gleichung 18) entsprechende Reihenentwicklung von  $y'$  ergibt sich hier einfach:

$$86) \quad y' = \frac{n}{\sqrt{n^2 x^2 - 4m}} \cdot y = g_1 \cdot y,$$

wobei sich  $g_1$ , den beiden Blättern  $y'$  entsprechend an jeder Stelle  $x = x_0$  (ausgenommen bei  $x = \pm \frac{2}{n} \sqrt{m}$ ) nach ganzen positiven Potenzen von  $x - x_0$  entwickeln läßt.

Diesem Falle einer doppelt zählenden singulären Lösung entspricht auch das kompliziertere Beispiel 5 in der Hamburgerschen Abhandlung (S. 246).

### 3. Beispiel für den Typus II mit horizontaler Rückkehrkurve auf $\Phi = 0$ .

Hier sind längs  $y = \eta(x) = 0$ ,  $z = z_0 = 0$  die Gleichungen 75)  $p_0 = 0$  und 76)  $p_2^2 - 4p_1 q_0 = 0$  zu erfüllen. Wir setzen:

$$87) \quad \mathfrak{B} = x^2 \cdot y - 2x \cdot z - y^2; \quad \Omega = 1$$

und erhalten die Gleichung:

$$88) \quad \Phi = (z - xy)^2 - y^3 = 0.$$

Sie entspricht der Differentialgleichung

$$89) \quad \left(\frac{9}{4}y - x^2\right)y'' - 2xy' - y^2 = 0$$

und es ist

$$90) \quad \Delta = D = y^3.$$

Fig. 18 gibt das der Gleichung entsprechende System von Kurven vierter Ordnung. Das für  $z = 0$  sich einstellende partikuläre Integral

$$91) \quad y^2 \cdot (x^2 - y) = 0$$

zerfällt in die doppelt zählende<sup>1)</sup> Gerade  $y = 0$ , die zugleich singuläre Lösung vom Typus II ist, und in die Parabel  $x^2 - y = 0$ . Der Übergang zu dieser Grenzlage sei noch durch Fig. 19 näher erläutert, welche drei benachbarte Kurven, für  $z = \Delta C$ ,  $z = 0$  und  $z = -\Delta C$  darstellt. Man vergleiche damit den Grenzübergang in dem in § 10 gegebenen Beispiel Figur 30 und 31 (Seite 48, 49).

Fig. 18.

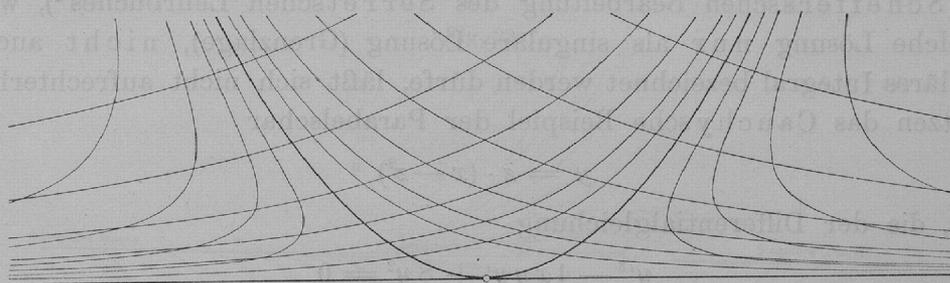
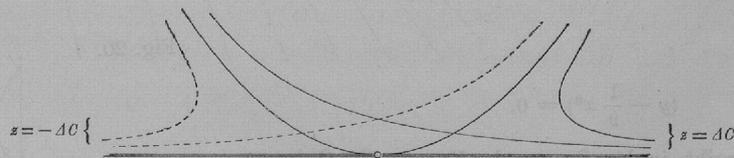


Fig. 19.



<sup>1)</sup> Es sei hierbei erwähnt, daß das Zusammenfallen mehrerer Zweige einer Integralkurve zu einem einzigen — wie es in den eben betrachteten Fällen des Auftretens von horizontalen Doppel- bzw. Rückkehrkurven der Fläche  $\Phi = 0$  auftritt — keineswegs notwendig einer zugleich singulären und partikulären Lösung, wie dort, entspricht. Es kann sich auch lediglich um eine mehrfach zählende partikuläre Integralkurve handeln. So ist für die Differentialgleichung

$$y'^2 - xy = 0$$

mit dem Integral

$$z^2 - 2z \cdot \left(y + \frac{1}{9}x^3\right) + \left(y - \frac{1}{9}x^3\right)^2 = 0$$

## Anschliessende Bemerkungen.

1. In der räumlichen Darstellung der Gleichung  $\Phi(x, y, z) = 0$  lassen sich nun auch am besten jene besonderen Beispiele zugleich partikulärer und singularer Lösungen kennzeichnen, bei welchen eine partikuläre Integralkurve von einer Gruppe von Zweigen anderer partikulärer Integralkurven berührt wird: Die Projektion eines Zweiges  $y = \eta(x)$ ,  $z = \zeta(x)$  der Umrißkurve der Fläche  $\Phi = 0$  auf die  $xy$ -Ebene fällt zusammen mit der Projektion eines Horizontalschnittes  $z = C_0$ .

Damit ist auch unmittelbar ersichtlich, daß jene Kurve  $y = \eta(x)$  für das Gebiet der Horizontalschnitte längs der Umrißkurve  $y = \eta(x)$ ,  $z = \zeta(x)$  als singuläre Lösung, dagegen für das Gebiet  $y = \eta(x)$ ,  $z = z_0$  längs des einen Horizontalschnittes als partikuläres Integral anzusehen ist. Die Bemerkung in der Scheffersschen Bearbeitung des Serretschen Lehrbuches<sup>1)</sup>, wonach eine solche Lösung nur als singuläre Lösung (Grenzlage), nicht auch als partikuläres Integral bezeichnet werden dürfe, läßt sich nicht aufrechterhalten. Wir setzen das Cauchysche Beispiel der Parabelschar

$$92) \quad y = z \cdot (x - z^2)$$

hierher, die der Differentialgleichung

$$93) \quad y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$$

entspricht. (Fig. 21). Die von den Parabeln einfach bzw. dreifach bedeckten Gebiete sind dann, wenn wir jedesmal den Zusammenhang der einzelnen Blätter

die Kurve

$$(y - \frac{1}{9}x^3) = 0,$$

die sich für  $z = 0$  ergibt, in dem System der Kurven 6<sup>ter</sup> Ordnung, welches die Gesamtheit darstellt, eine doppelt zu zählende partikuläre Integralkurve. Es fallen in ihr, wie Fig. 20 zeigt, je zwei Zweige der Nachbarkurven (für  $z = +\Delta C$  oberhalb, für  $z = -\Delta C$  unterhalb der  $x$ -Achse) zusammen. Dagegen ergibt sich für die Diskriminanten lediglich:

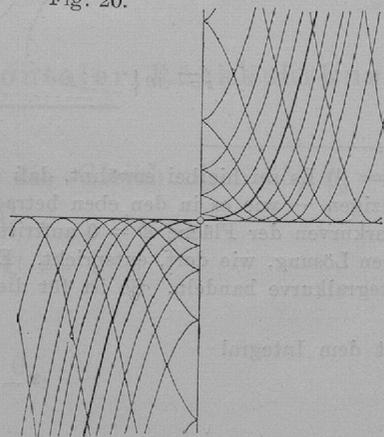
$$D = x \cdot y,$$

$$\Delta = x^3 \cdot y.$$

Die  $x$ -Achse ist singuläre Lösung (Envelope), während die  $y$ -Achse einen Ort von Rückkehrpunkten darstellt.

<sup>1)</sup> Band III § 712.

Fig. 20.



längs der beiden Umrißkurven  $y = 0$  und  $y = \frac{4}{27}x^3$  beachten, in der aus Fig. 22 a, b, c, d unmittelbar ersichtlichen Reihenfolge aneinanderzuschließen.

Fig. 21.

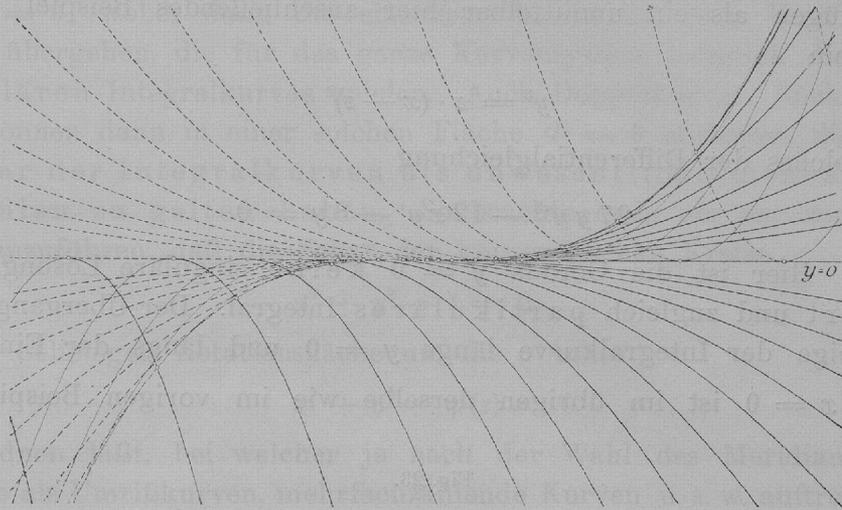
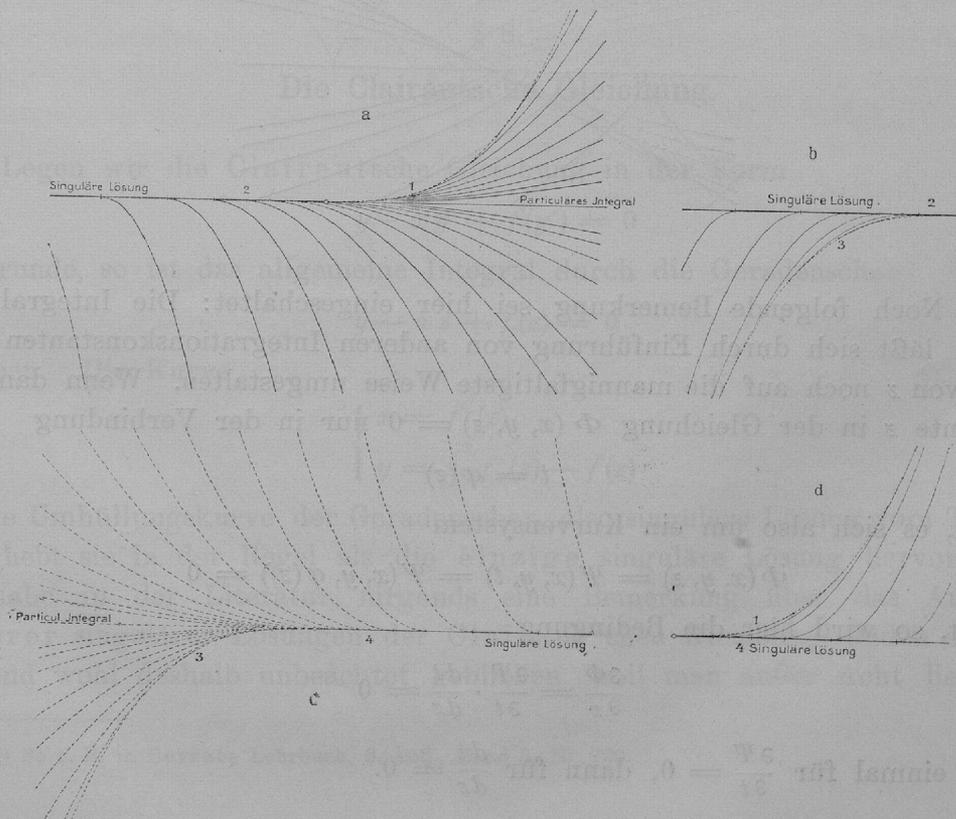


Fig. 22.



Für die in a) dargestellten Zweige der Integralkurven ist dann  $y = 0, x > 0$  partikuläres Integral,  $y = 0, x < 0$  dagegen singuläre Lösung, umgekehrt für das Blatt c.

Wir fügen als ein unmittelbar hier anschließendes Beispiel noch das Kurvensystem

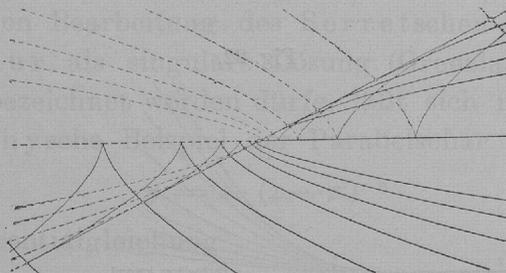
$$94) \quad y^3 = z \cdot (x - z)^2$$

hier an, welches der Differentialgleichung

$$95) \quad 27 y y'^3 - 12 x y' - 8 y = 0$$

entspricht. Hier ist die Gerade  $y = 0$  keine singuläre Lösung, sondern Spitzenort und zugleich partikuläres Integral. Der Übergang der einzelnen Zweige der Integralkurve längs  $y = 0$  und längs der Einhüllenden  $y - \frac{1}{3} \sqrt[3]{4 \cdot x} = 0$  ist im übrigen derselbe wie im vorigen Beispiel. (Vgl. Fig. 23.)

Fig. 23.



2. Noch folgende Bemerkung sei hier eingeschaltet: Die Integralfäche  $\Phi = 0$  läßt sich durch Einführung von anderen Integrationskonstanten  $t$  an Stelle von  $z$  noch auf die mannigfaltigste Weise umgestalten. Wenn dann die Konstante  $z$  in der Gleichung  $\Phi(x, y, z) = 0$  nur in der Verbindung

$$96) \quad t = \varphi(z)$$

auftritt, es sich also um ein Kurvensystem

$$97) \quad \Phi(x, y, z) = \Psi(x, y, t) = \Psi(x, y, \varphi(z)) = 0$$

handelt, so wird hier die Bedingung

$$98) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dz} = 0$$

erfüllt einmal für  $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0$ , dann für  $\frac{dt}{dz} = 0$ .

Die letztere Bedingung liefert aber offenbar keine singulären Kurven. Sie besagt nur, daß das Kurvensystem  $\Phi = 0$  mit änderndem  $z$  in einzelnen Abschnitten mehrfach durchlaufen wird und also die Fläche  $\Phi(x, y, z) = 0$  abschnittsweise aus den gleichen Horizontalschnitten aufgebaut ist, wie  $\Psi(x, y, t) = 0$ , wobei dann die einzelnen Abschnitte längs Umrißkurven in einander übergehen, die für das ganze Kurvensystem lediglich die Rolle von partikulären Integralkurven spielen. Auch Doppelkurven, Rückkehrkurven u. s. w. können dann in einer solchen Fläche  $\Phi = 0$  auftreten, die doch für die Schar der Integralkurven als unwesentliche (hebbare) singuläre Linien zu gelten haben. So beachte man, um nur das einfachste Beispiel anzuführen, daß die Schar der konzentrischen Kreise

$$x^2 + y^2 - t = 0$$

auf jeder beliebigen Rotationsfläche um die  $z$  Achse

$$x^2 + y^2 - \varphi(z) = 0$$

sich anordnen läßt, bei welcher je nach der Wahl des Meridians beliebige der Kreise als Umrißkurven, mehrfachzählende Kurven u. s. w. auftreten können.

### § 8.

#### Die Clairautsche Gleichung.

Legen wir die Clairautsche Gleichung in der Form

$$99) \quad y - xy' + f(y') = 0$$

zu Grunde, so ist das allgemeine Integral durch die Geradenschar

$$100) \quad y - xz + f(z) = 0$$

gegeben. Die Kurve

$$101) \quad \begin{cases} x = f'(z) \\ y = z \cdot f'(z) - f(z) \end{cases}$$

ist die Umhüllungskurve der Geradenschar, also singuläre Lösung vom Typus I. Man hebt sie in der Regel als die einzige singuläre Lösung hervor<sup>1)</sup> und ich habe in der Literatur nirgends eine Bemerkung über das Auftreten anderer singulärer Lösungen der Clairautschen Gleichung finden können. Sie sind wohl deshalb unbeachtet geblieben, weil man außer Acht ließ, daß

<sup>1)</sup> So z. B. in Serrets Lehrbuch, 3. Aufl., Band 3, Nr. 720.

die in der Form 97) vorliegende Gleichung nach  $y - xy'$  aufgelöst ist,  $f(y')$  also im allgemeinen keineswegs vom Charakter einer rationalen ganzen Funktion in  $y'$  angenommen werden darf, auch wenn man die allgemeinere Form

$$102) \quad F(y - xy', y') = 0$$

der Gleichung als ganze Funktion in  $y - xy'$  und  $y'$  voraussetzt.

Es gilt aber der Satz:

Jede Wendetangente der Umhüllungskurve 99) — wenn wir von höheren Klassensingularitäten absehen — stellt eine zugleich singuläre und partikuläre Lösung der Clairautschen Gleichung dar.

Die Bedingung für das Auftreten eines Wendepunktes in der Umhüllungskurve ist  $f''(z) = \infty$ . Legen wir den Wendepunkt nach  $x = 0$ ,  $y = 0$  und machen die Gerade  $y = 0$  zur Wendetangente, so läßt sich für die Umgebung dieser Wendetangente die Funktion  $f(y')$  in eine nach positiven Potenzen von  $y'^{\frac{1}{3}}$  fortschreitende Reihe entwickeln, deren erstes Glied  $a \cdot y'^{\frac{1}{3}}$  ist. In erster Annäherung wird also das Verhalten der Integralkurven in der Umgebung der Wendetangente bezeichnet durch die Differentialgleichung

$$103) \quad y - xy' + ay'^{\frac{1}{3}} = 0$$

oder, in rationaler Form geschrieben, durch

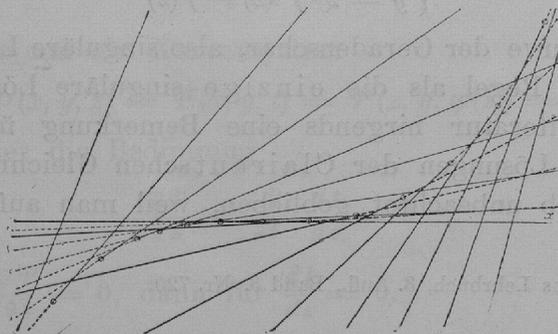
$$(y - xy')^2 - a^2 y'^3 = 0.$$

Die Umhüllungskurve

$$104) \quad y - \frac{4}{27} \frac{1}{a^2} x^3 = 0$$

und die zugleich singuläre und partikuläre Lösung  $y = 0$  teilen die Ebene (vgl. Fig. 24) in vier Gebiete, die dreifach, bzw. einfach von den Geraden der Schar bedeckt werden.

Fig. 24.



Setzen wir für das Integral  $y' = z$  und schreiben dasselbe analog der Gleichung 72 — wobei  $\eta(x) = 0$  und  $z_0 = 0$  ist — so kommt:

$$105) \quad \Phi(x, y, z) \equiv y(y - 2x \cdot z) + z^2 \cdot (x^2 - a^2 \cdot z) = 0,$$

wo  $\Omega = x^2 - a^2 \cdot z$  längs der singulären Geraden  $y = 0$ ,  $z = 0$  nicht verschwindet.

Man bemerkt, daß bei der vorliegenden Einführung der Integrationskonstanten  $z$  die Fläche  $\Phi(x, y, z) = 0$  in der singulären Geraden eine horizontale Rückkehrkante besitzt, also scheinbar eine Singularität höherer Art in dieser zugleich singulären und partikulären Lösung vorliegt. Indes ist diese Rückkehrkante eine „hebbare“ Unstetigkeit für unser Integralsystem im Sinne der Bemerkung 2 des vorigen Paragraphen (vgl. S. 39). In der Tat, ersetzt man die Integrationskonstante  $z$  durch eine neue  $t$ , für welche

$$z = t^2,$$

so ergibt sich das Integral in der einfacheren Form

$$106) \quad \Psi(x, y, t) \equiv y - t^2 \cdot (x + at) = 0,$$

welche zeigt, daß in der singulären Geraden  $y = 0$ ,  $t = 0$  der einfachste Fall des Typus II einer zugleich singulären und partikulären Lösung vorliegt.<sup>1)</sup>

Übersichtlicher wird die geometrische Darstellung noch, wenn wir den Wendepunkt der Umhüllungskurve ins Unendliche legen. Es kommt dann die untenstehende Fig. 25, welche die Integrale der Differentialgleichung

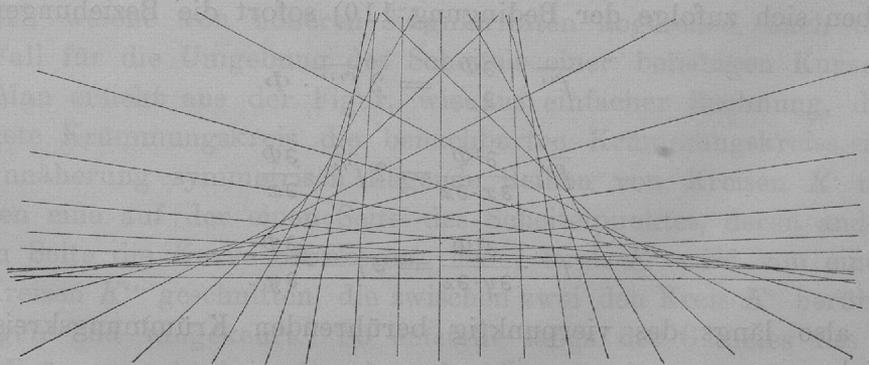
$$107) \quad y - xy' - ay'^3 = 0$$

mit

$$x^2 y - \frac{4}{27} a^3 = 0$$

als Umhüllungskurve und  $y = 0$  als zugleich singulärer und partikulärer Lösung darstellt.

Fig. 25.



<sup>1)</sup> Vgl. oben § 6, S. 32 Anmerkung.  
Abh. d. math.-phys. Kl. XXV, 4. Abh.

## § 9.

## Die Krümmungskreise einer ebenen Kurve.

Es gilt der Satz:

In der Gesamtheit der Krümmungskreise einer ebenen Kurve bilden die vierpunktig berührenden Krümmungskreise zugleich singuläre und partikuläre Lösungen vom allgemeinen Typus II.

Es sei

$$108) \quad Y = f(X)$$

die Gleichung der gegebenen Kurve, ferner bezeichne  $x, y$  die Koordinaten eines Punktes auf einem beliebigen Krümmungskreis. Führen wir dann die  $X$ -Koordinate des Berührungspunktes von Kurve und Krümmungskreis als Parameter  $X = z$  ein, so ist

$$109) \quad \begin{aligned} \Phi(x, y, z) &\equiv \\ &= [f''(z) \cdot (x - z) + (1 + f'^2(z)) \cdot f'(z)]^2 + \\ &+ [f''(z) \cdot (y - f(z)) - (1 + f'^2(z))]^2 - [1 + f'^2(z)]^3 = 0 \end{aligned}$$

die Gleichung für das System der Krümmungskreise. Ist  $X_0 = z_0, Y_0 = f(z_0)$  ein Punkt mit vierpunktig berührenden Krümmungskreise, so ist bekanntlich (für  $z = z_0$ )

$$110) \quad 3 \bar{f}' \cdot \bar{f}'^2 - (1 + \bar{f}'^2) \cdot \bar{f}'^3 = 0.$$

Entwickeln wir nun für die Umgebung eines beliebigen auf diesem vierpunktig berührenden Kreis gelegenen Punktes  $x_0, y_0, z_0$  die Fläche  $\Phi(x, y, z) = 0$ , so ergeben sich zufolge der Bedingung 110) sofort die Beziehungen

$$111) \quad \begin{aligned} \bar{f}'' \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= 2 \bar{f}''' \cdot \Phi \\ \bar{f}'' \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \cdot \partial z} &= 2 \bar{f}'''' \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \bar{f}'' \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \cdot \partial z} &= 2 \bar{f}'''' \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{aligned}$$

so daß also längs des vierpunktig berührenden Krümmungskreises  $z = z_0$  die Gleichungen

$$112) \quad \Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} \end{vmatrix} = 0$$

gelten, in Übereinstimmung mit den in Gleichung (73) gegebenen Bedingungen. Da keine weiteren Ableitungen von  $\Phi$  nach  $z$  und keine weiteren Determinanten der Matrix 61 verschwinden, ergibt sich der Kreis als zugleich singuläre und partikuläre Lösung vom allgemeinen Typus II.

Wir legen, um noch für  $\Phi(x, y, z)$  die Reihenentwicklung in einfachster Form aufzustellen, für die gegebene Kurve die Gleichung:

$$113) \quad Y = f(X) = \frac{1}{2} a_2 X^2 + \frac{1}{24} a_4 X^4 + \dots$$

zu Grunde (wo die vierpunktige Berührung in  $X_0 = 0$ ,  $Y_0 = 0$  statthat und die Bedingung 110) sich auf  $a_3 = 0$  reduziert). Dann ist

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{a_2} y = 0$$

der vierpunktig berührende Krümmungskreis, oder ein Zweig desselben

$$114) \quad y - \eta(x) = y - \frac{1 \pm \sqrt{1 - a_2^2 x^2}}{a_2} = 0.$$

Dann wird längs  $y - \eta(x) = 0$  der Parameter  $z_0 = 0$  und man findet, in Übereinstimmung mit Formel 72:

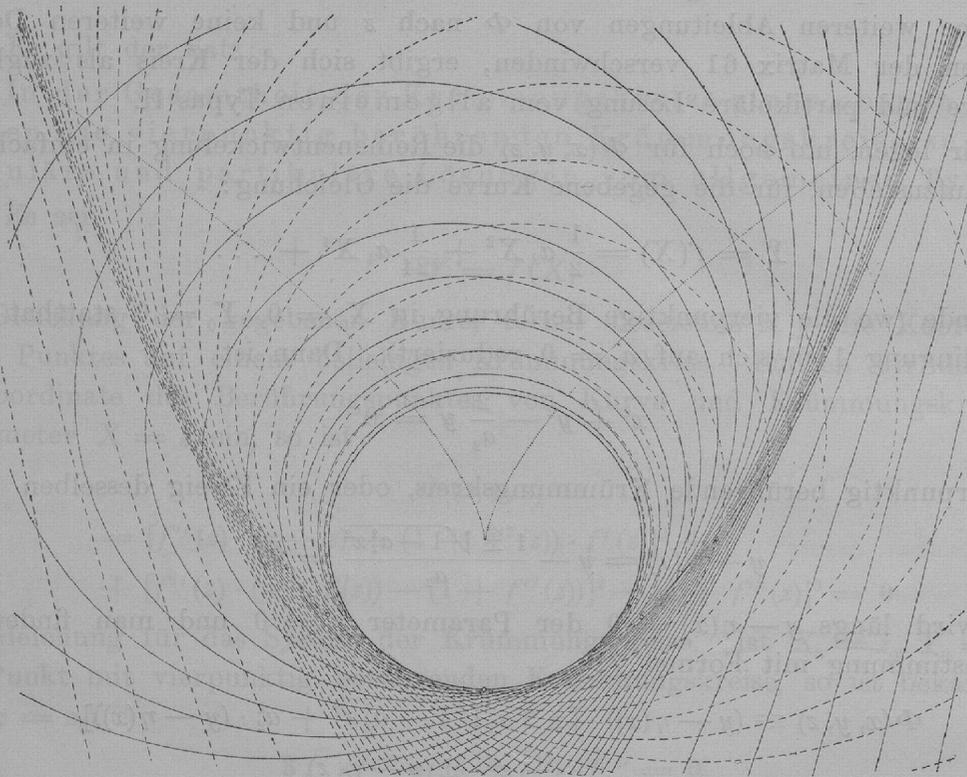
$$115) \quad \Phi(x, y, z) \equiv (y - \eta(x)) \cdot [\pm 2 a_2 \sqrt{1 - a_2^2 x^2} + a_2^2 \cdot (y - \eta(x))] \\ + z^2 \cdot \Omega(y - \eta, z)$$

wo  $\mathfrak{P}$  und  $\Omega$  für  $y = \eta(x)$ ,  $z = 0$  nicht verschwinden.

Figur 26 gibt die Darstellung der Krümmungskreise für die Parabel  $Y^2 = \frac{1}{2} a_2 X^2$ , welche von höheren Singularitäten abgesehen, auch den allgemeinen Fall für die Umgebung des Scheitels einer beliebigen Kurve kennzeichnet. Man ersieht aus der Figur, wie aus einfacher Rechnung, daß der ausgezeichnete Krümmungskreis die benachbarten Krümmungskreise in zwei in erster Annäherung symmetrisch liegende Reihen von Kreisen  $K'$  und  $K''$  trennt, deren eine auf der einen Seite des Scheitelpunktes, deren andere auf der anderen Seite die Kurve oskulieren. Jeder Kreis  $K'$  wird von einer Teilreihe von Kreisen  $K''$  geschnitten, die zwischen zwei den Kreis  $K'$  berührenden Kreisen liegen und umgekehrt. So entsteht längs des Gebietes des ausgezeichneten Krümmungskreises die doppelte Überdeckung der Ebene durch

Kreise der beiden Reihen (und zwar außerhalb bzw. innerhalb jenes Grenzkreises, je nachdem dieser ein kleinster bzw. größter Krümmungskreis ist). Der Grenzkreis selbst trägt keinen singulären Punkt, weil er von keinem benachbarten Krümmungskreis geschnitten wird.

Fig. 26.



An diesem Beispiel tritt besonders anschaulich ein Unterschied hervor, welcher das Zustandekommen der singulären Lösung als einer Grenzkurve jeweils im allgemeinen Falle des Typus I bzw. des Typus II einer singulären Lösung kennzeichnet.

Bei Typus I werden die beiden längs der singulären Kurve aneinanderstoßenden Blätter von den Integralkurven derart überdeckt, daß jede Integralkurve an der Berührungsstelle mit der singulären Kurve von dem einen Blatt in das andere übertritt. Es schneiden sich also in kontinuierlicher Aufeinanderfolge je zwei verschiedene Zweige der einzelnen Integralkurven.

Bei Typus II trennt die singuläre Lösung die Integralkurven in zwei Gruppen, deren eine das eine, deren andere das andere Blatt bedeckt. Der

kontinuierliche Übergang von der einen Gruppe zur anderen findet nur statt durch die singuläre Kurve selbst als partikulärem Integral. Zwischen einer Integralkurve des einen Blattes und einer sie schneidenden des anderen Blattes liegen stets unendlich viele Integralkurven, welche die erstere gar nicht schneiden (wie im vorliegenden Beispiel) oder nur in einzelnen, allen diesen Integralkurven gemeinsamen, singulären Punkten auf der singulären Kurve.

Die einfachsten Typen der auf der singulären Kurve möglichen singulären Stellen seien noch hier anschließend besprochen.

### § 10.

#### Singuläre Stellen.

In den schon Eingangs erwähnten beiden Aufsätzen<sup>1)</sup> habe ich die „im allgemeinen“ auftretenden singulären Stellen einer Differentialgleichung  $F(x, y, y') = 0$  gestaltlich auf Grund der Briot-Bouquetschen Reihenentwicklung untersucht. Sie liegen auf der Diskriminantenkurve  $D = 0$ , die hier als Spitzenort der Integralkurven erscheint. Man kann sich nun fragen, welcher Art jene singulären Stellen werden, wenn sie im besonderen auf einem Zweig von  $D = 0$  auftreten, welcher eine singuläre Lösung der Differentialgleichung bildet.

Wir betrachten die einfachsten Fälle: Der Zweig der Diskriminantenkurve sei  $y = 0$  selbst, eine Vereinfachung, die innerhalb unseres Gebietes einer eindeutigen Transformation gleichkommt.

Für Typus I der singulären Lösung sei  $\alpha = 2$ ,  $z = 1$  also die Reihenentwicklung 17):

$$17a) \quad \frac{dy}{dx} = g_{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} + g_1 y + g_{\frac{3}{2}} y^{\frac{3}{2}} + \dots$$

zu Grunde gelegt; für Typus II sei  $\alpha = 2$ ,  $z = 2$ , gelte also die Reihenentwicklung 18)

$$18a) \quad \frac{dy}{dx} = g_1 y + g_{\frac{3}{2}} y^{\frac{3}{2}} + \dots$$

<sup>1)</sup> „Über die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variablen definierten Kurvensysteme“; Sitzungsberichte der Münchener Akademie der Wissenschaften von 1891 und 1892.

oder, indem wir

$$116) \quad y = u^2$$

setzen:

$$117) \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} g_3 + \frac{1}{2} g_1 u + \frac{1}{2} g_3 u^2 + \dots \quad \text{für Typus I,}$$

beziehungsweise

$$118) \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} g_1 u + \frac{1}{2} g_3 u^2 + \dots \quad \text{für Typus II.}$$

Bei der quadratischen Abbildung 116) gehen nun die wesentlich singulären Stellen des Integralsystems der  $xy$  Ebene in solche der  $xu$  Ebene über. Für diese hört dann die Giltigkeit der Entwicklungen 117) bzw. 118) auf. Sei  $x = 0$ ,  $u = 0$  eine solche singuläre Stelle, so nehmen wir an, daß an dieser Stelle eine Entwicklung von der Form

$$119) \quad \frac{du}{dx} = \frac{P(x, u)}{Q(x, u)}$$

gilt, in welcher  $P$  und  $Q$  konvergente Potenzreihen bezeichnen, die für  $x = 0$ ,  $u = 0$  den Wert Null annehmen. Setzen wir im einfachsten Fall

$$120) \quad \frac{du}{dx} = \frac{a_2 x + b_2 u}{a_1 x + b_1 u}.$$

Es handelt sich dann um die bekannten drei Formen singulärer Punkte, die nach dem Charakter der Wurzeln  $\lambda$  der Determinante

$$121) \quad \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 \\ b_1 & b_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

als Spiralpunkte, Sattelpunkte und Knotenpunkte zu unterscheiden sind. Führen wir in 120) die Transformation  $x = x$ ,  $u = y^{\frac{1}{2}}$  aus und entwickeln für die Umgebung einer allgemeinen Stelle  $x = x_0$  ( $x_0 \neq 0$ ),  $y = 0$  auf der singulären Geraden  $y'$  nach Potenzen von  $y$ , so folgt:

$$122) \quad y' = \frac{2a_2}{a_1} y^{\frac{1}{2}} + \frac{2(a_1 b_2 - a_2 b_1)}{a_1^2} \left[ \frac{1}{x} \right] y - \frac{2(a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot b_1}{a_1^3} \left[ \frac{1}{x^2} \right] y^{\frac{3}{2}} + \dots$$

wobei die Koeffizienten an jeder Stelle  $x_0 \neq 0$  als Potenzreihen von  $(x - x_0)$  darstellbar sind.

Im „allgemeinen“ ist hiedurch die Gerade  $y=0$  als singuläre Lösung vom Typus I charakterisiert (Gleichung 17a), während für  $a_2=0$  (Gleichung 18a) eine singuläre Lösung vom Typus II vorliegt.

Um im ersteren Falle das Verhalten der Integralkurven für die Umgebung des singulären Punktes  $x=0$  zu charakterisieren, kann man an die analoge quadratische Transformation der in der Ebene  $(x, u)$  liegenden singulären Punkte anknüpfen, die ich in der obengenannten Abhandlung<sup>1)</sup> ausgeführt habe. Dort handelte es sich darum, die Gleichung 120) durch  $x=x$ ,  $a_1x + b_1u = y^{\frac{1}{2}}$  zu transformieren, wo also längs  $a_1x + b_1u = 0$   $\frac{du}{dx} = \infty$  ist. Dadurch ergeben sich, entsprechend den Durchschnittsstellen der Integralkurven mit dieser Geraden  $a_1x + b_1u = 0$ , in der Abbildung Spitzen längs  $y=0$ .

Im vorliegenden Falle der Abbildung  $x=x$ ,  $u=y^{\frac{1}{2}}$  tritt dies ein für  $a_1=0$ , wo dann die an Stelle von 122) tretende Gleichung

$$123) \quad y' = \frac{2a_2}{b_1} x + \frac{2b_2}{b_1} y^{\frac{1}{2}}$$

die singuläre Gerade  $y=0$  als Spitzenort charakterisiert. Hier gelten also die in jener Abhandlung hergeleiteten Figuren (Tafel I—III) für den Verlauf der Integralkurven in der Umgebung der singulären Stelle. Für kleine Werte von  $a_1$  ändern sich diese Figuren dahin ab, daß an Stelle der Spitzen auf  $y=0$  Berührungen der Integralkurven mit der singulären Linie treten, ohne daß der Gesamtverlauf des Kurvensystems im übrigen eine wesentliche Veränderung erfährt. Wir verzichten daher hier auf eine graphische Darstellung.

Dagegen sei noch der Verlauf des Integralsystems für den Fall  $a_2=0$  dargestellt, in welchem die singuläre Linie  $y=0$  eine zugleich singuläre und partikuläre Lösung (vom Typus II) darstellt.

Der Fall ist dadurch gekennzeichnet, daß in der Ebene  $(x, u)$  die eine der beiden durch den singulären Punkt hindurchgehenden Geraden mit  $u=0$  selbst zusammenfällt. Dadurch scheidet der „Spiralpunkt“, in welchem jene beiden Geraden imaginär sind, aus. Die Differentialgleichung

$$124) \quad \frac{du}{dx} = \frac{b_2 u}{a_1 x + b_1 u}$$

<sup>1)</sup> Sitzungsberichte der Münchener Akademie vom Jahre 1891, S. 35. In jenen Tafeln I—III ist der Spitzenort durch eine Parabel gebildet, was hier durch die Annahme  $\eta(x)=0$  vermieden ist.

hat als Integral

$$125) \quad u^{a_1} \cdot ((b_2 - a_1)x - b_1 u)^{-b_2} = z.$$

Der singuläre Punkt ist ein Sattelpunkt, wenn  $a_1$  und  $b_2$  gleiches Vorzeichen haben; dagegen ein Knotenpunkt für ungleiche Vorzeichen. Vergleiche die nebenstehenden Figuren 27, 28 und 29.

Fig. 27

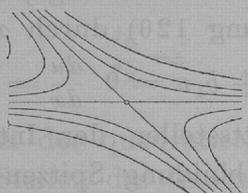


Fig. 28.

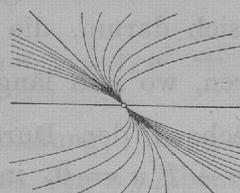
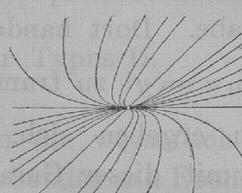


Fig. 29.



Für die Transformation  $u = y^{\frac{1}{2}}$  tritt dann in letzterem Falle noch der Unterschied  $|a_1| \geq |b_2|$  hervor, für welchen einerseits die Achse  $u = 0$ , andererseits die Gerade  $(b_2 - a_1)x - b_1 u = 0$  die gemeinsame Tangente der Kurven des Integralsystems bildet. So entstehen durch die quadratische Transformation aus den obigen drei Figuren die drei Formen solcher singulärer Punkte, welche die Figuren 30, 32 und 33 kennzeichnen.

Es sind speziell die Beispiele

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 2, \quad b_2 = -1 \quad (\text{Sattelpunkt}) \quad (\text{Fig. 30})$$

$$a_1 = 2, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 1 \quad (\text{Knotenpunkt erster Art}) \quad (\text{Fig. 32})$$

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 2 \quad (\text{Knotenpunkt zweiter Art}) \quad (\text{Fig. 33})$$

gewählt. In Übereinstimmung mit Gleichung 72) in der Form

$$\Phi = y \cdot \mathfrak{P} + z^2 \cdot \mathfrak{Q} = 0$$

geschrieben lauten die Gleichungen der zugehörigen Integralkurven:

$$126) \quad y \cdot (x^2 - y + 2z) - z^2 = 0$$

$$127) \quad y \cdot (y - 2xz) + z^2 \cdot (x^2 - y) = 0$$

$$128) \quad y \cdot (1 + 4xz) - z^2 \cdot (x^2 - y)^2 = 0.$$

Fig. 30.

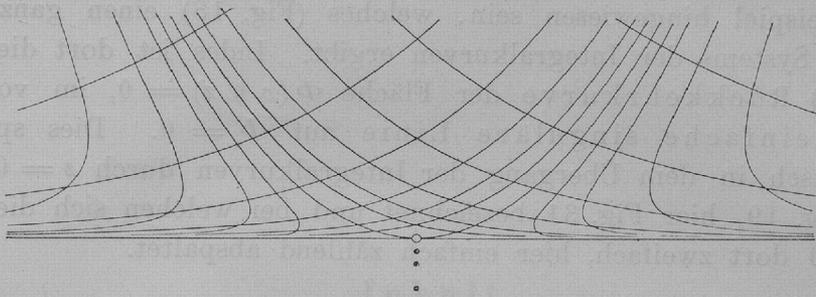


Fig. 31.

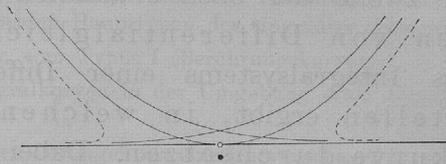


Fig. 32.

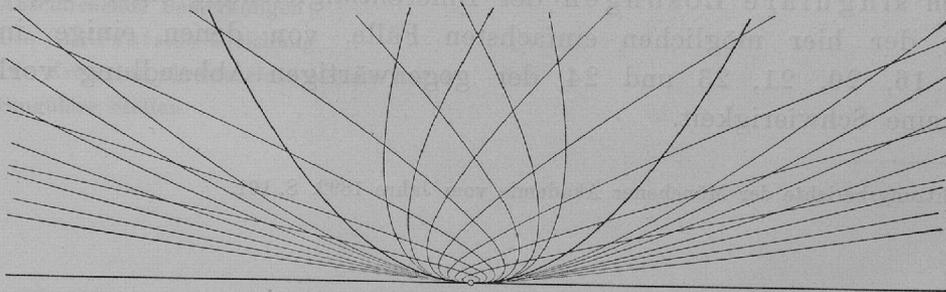
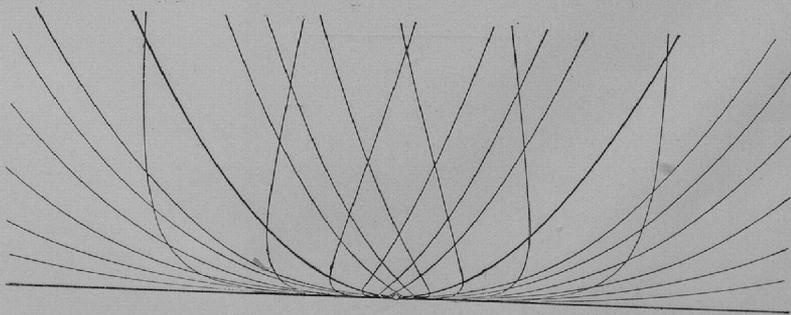


Fig. 33.



Zum ersten dieser Fälle mag noch auf das in den Gleichungen 88, 89 gegebene Beispiel hingewiesen sein, welches (Fig. 18) einen ganz analogen Verlauf des Systems der Integralkurven ergibt. Indes ist dort die singuläre Linie  $y = 0$  Rückkehrkurve der Fläche  $\Phi(x, y, z) = 0$ , im vorliegenden Falle aber einfache singuläre Linie auf  $\Phi = 0$ . Dies spricht sich charakteristisch in dem Übergang der Integralkurven durch  $z = 0$  aus, wie ihn dort Fig. 19, hier Fig. 31 bezeichnet und bei welchen sich die singuläre Linie  $y = 0$  dort zweifach, hier einfach zählend abspaltet.

Was nun noch weitere singuläre Stellen unserer Differentialgleichungen anbetrifft, so enthält die zweite der oben erwähnten Abhandlungen<sup>1)</sup> Untersuchungen über Scharen von Differentialgleichungen, aus welchen sich das Verhalten des Integralsystems einer Differentialgleichung erster Ordnung an solchen Stellen ergibt, in welchen sich zwei Zweige der Diskriminantenkurve durchsetzen. Dabei sind jene beiden Zweige im allgemeinen Spitzenorte. Man kann nun als nächst höhere Singularitäten diejenigen betrachten, bei welchen jene beiden Zweige, oder einer derselben singuläre Lösungen der Differentialgleichung sind. Die Untersuchung der hier möglichen einfachsten Fälle, von denen einige in den Figuren 16, 20, 21, 23 und 24 der gegenwärtigen Abhandlung vorliegen, bietet keine Schwierigkeit.

<sup>1)</sup> Sitzungsberichte der Münchener Akademie vom Jahre 1892, S. 101.

Abhandlung  
der Königlich Bayerischen  
Mathematischen  
613.

## Inhalt.

	Seite
Einleitung . . . . .	3
§ 1. Darstellung der singulären Lösungen aus den Teil Faktoren der Diskriminante $D$ der Differentialgleichung. Die beiden Haupttypen der singulären Integrale . . . . .	9
§ 2. Die singulären Lösungen vom Typus I (Berührungskurven) . . . . .	13
§ 3. Das Verhalten der Integralkurven in der Umgebung einer singulären Lösung vom Typus II (Grenzkurven) . . . . .	16
§ 4. Darstellung der singulären Lösungen für eine Kurvenschar $\Phi(x, y, z) = 0$ aus den Teil Faktoren der Diskriminante $\Delta$ dieser Gleichung . . . . .	25
§ 5. Geometrische Deutung auf der Fläche $\Phi(x, y, z) = 0$ . . . . .	29
§ 6. Beispiele . . . . .	32
§ 7. Anschließende Bemerkungen . . . . .	36
§ 8. Die Clairautsche Gleichung . . . . .	39
§ 9. Die Krümmungskreise einer ebenen Kurve . . . . .	42
§ 10. Singuläre Stellen . . . . .	45